Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

6-d-23

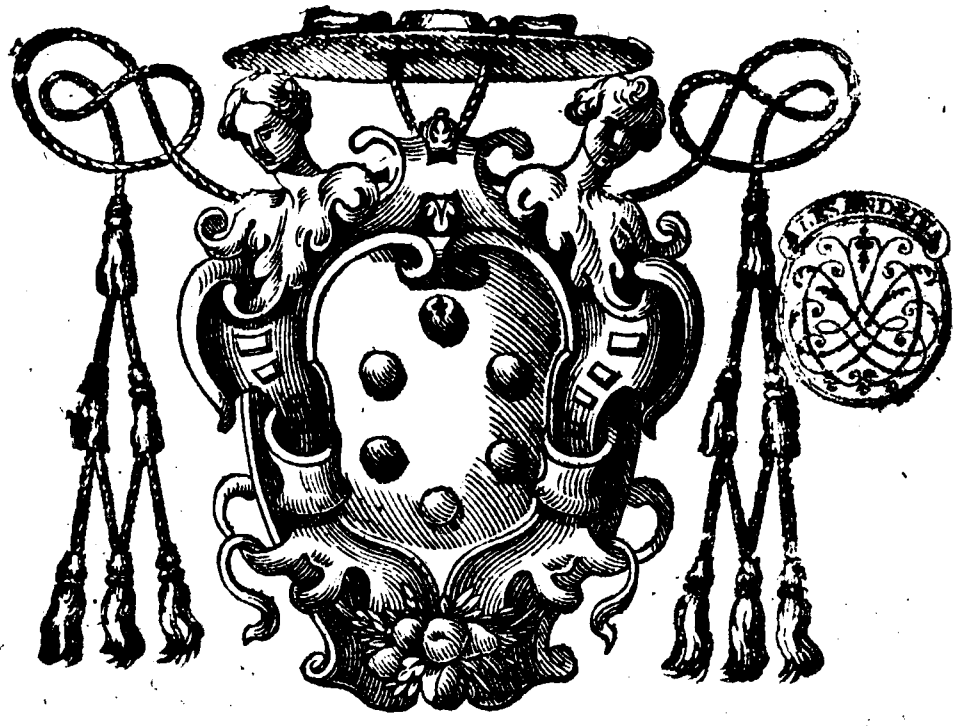
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS

A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi.

Ac nuper a multis mendis quibus antea scatebat vendicati,

ILLVSTRISSIMO, ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S. R. E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.



PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.

Expensis Guilielmi Ingenieri Forosempronienſis.



ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.D.

CAROLO MEDICEO

S. R. E. CARDINALI;

ET PRINCIPI AMPLISS.

SERENISSIMA Mediceorum familia ſummis Principum, & Regum proſapijs inſerta, plurimis imaginibus, at multò magis florentiſſimo, per tot annorum ſpatium, Etruriæ imperio, Europæ, quin orbi vniuerſo conſpicua, non vna ſub feliciſſimis Coſmi Primi, & Ferdinandi auſpicijs, expeditione maritima Othomanorum genti quàm maximè formidabilis totius Reip. Chriſtianæ animos adeò affecit: vt nemo hanc ipſam inter mortales immortalitatis affinem non deſideret, maiorem in dies religioni ſplendorem cum vtilitate coniũctum allaturam. Hinc tu, Carole Card. & Princeps Auguſtiſs. haud inauſpicatò emanaſti, omnium cum ciuilium, tum moralium virtutum genere inſignitus, quibus longè ſupra oſtrum purpuraſcens, Cardinalitiæ amplitudini tantùm ſplendoris attuliſti, vt ſpes illico affulſerit Clementis VII. Leonum X. ac XI. Pij IV. quos vna eademque ætas ſummos Pontifices habuit, dignitatem omnium maximam in tua, quæ maxima eſt, progenie reuocandi; & quod maius videri poſſit, ea cum fama, vt vnius Orbis onus, quod aliorum humeris grauiſſimum eſſe conſueuit, tuis non impar exiſtimes, cum ſex Orbes clariſſimos in ſtemmate gentilicio ſuſtineas. Quin Roma ipſa, vbi virorum dignitatibus fulgentium facta, dictaq; ad amuſſim trutinantur, ſimulatq, inter purpuratos Patres orbis terrarum iudices te ſedentem vidit, de rebus grauiſſimis publicè, ac priuatim coram Paulo V. Pont. Max. diſſerentem audiuit, prudentiam ætatis præiudicium vehentem admirata; non ſatis habuit Cardinalem natum potius, quàm creatum, maturè Pontificem creandum prædicare: quod ingenij acumen longius intendens, interius quiddam, & excellentius ex ſenario numero perſcrutata eſt; ex te inquam ſextum Pontificem proditurum: quòd ſex orbes, quaſi cæleſtes globi Mediceis antiquitus dati illud influant, fore vt ſex orbis dominos non longo admodum temporis interuallo e Sereniſſima eorundem ſtirpe oriantur. Nec ſanè omnibus partibus abſolutum Naturæ officium aliter decebat, quàm vt Sereniſſimus Ferdinandus toga, & ſago ſupra cui ſui Principes clarus claram pariter vtrinq; ſobolem perpetuæ Italorum gloriæ propagaret. Nonne ſago ſatis claram ſobolem Coſmum fratrem hodie in Etruria regnantem agnoſcimus? Martiales in eo ſpiritus adeò vigent, vt ſi aliquid præclari facinoris edendi occaſio præberetur, nec animum, nec vires ſibi defuturas declararet: rebus verò tranquillis immatura ætate matura conſilia enutriens ſingulorum prædeceſſorum virtutes, ac merita in ſe vno, perinde, ac in lucidiſſimo ſpeculo, non ſubditorum modò, ſed exterorum etiam oculis obijcit, cum ſumma delectatione contemplanda. Quid de Laurentio alterò fratre loquar, ſeu potius quid de illo non loquar ignoro. Is generoſiſſima indole à natura imbutus, veluti, Romanorum exemplo, nunc Princeps iuuentutis, ſic adulta ætate rerum Italicarum arbitrer, quaſi alter

Lau-

Laurentius Mediceus communi omnium conſenſu nominabitur Franciſcum tertium fratrem non recenſeo, ne quidquid vulneris ex illius immaturo funere accepiſti, commemorationis meæ culpa recrudeſcat. Vnde ſatis erit in medium attuliſſe, hunc ad immortalem armorum gloriam ocyſſimè properātem à fortuna, quòd inuidiam ſibi moueret, indignata actutum illius imperio ſubijcienda interceptum. Iſtas de tuis fratribus laudes ſummo ore libaui, non vt è fulgentiſſimis eorum gloriæ radijs aliquid ſplendoris tibi mutuem (cum minora ſidera à Phœbo lumen accipiant, non impertiant) ſed vt vos ſingulos natura, & moribus fratres germanos oſtendam. Illud verò communis encomij veſtri ſumma eſſe poterit, quòd vnicam in triplici corpore voluntatem, rarum hiſce temporibus etiam apud paruos penates exemplum, publicæ parentium vtilitati confouetis. Quamobrem ſi antiqua Græcorū religio Hecatæ, quā triformē in mente vnica credebat, ſupera, atq; infera ſacrauit, ecquis mortalium Vos, Sereniſſimi Principes, qui Geryonum veſtigia calcatis, eodem cultu iniurius non obſeruet? Equidem non nunc primum aliquod iſtiuſmodi honoris indicium Celſitudini veſtræ præbendi deſiderio afficior; ſed vultu in conditionem meam, quæ infima eſt, non ſemel defixus inhærens, tantorum Principum, quibus alios æquiparabiles Italia nunquam aſpexit, tricipiti maieſtate videbar deterreri. Hinc te vnum, Carole Princeps omnium humaniſſime, deligendum putaui, cui ſupera cum inferis, perpetuum obſeruantiæ meæ teſtimonium exhiberem; nec tamen Sereniſſimos fratres debito cultu fraudaſſe iudicabor; cum præter Cardinalitiam dignitatem, quæ conſortes non admittit, omnia cum eiſdem tibi communia eſſe fatearis. Supera Euclidis libros appellari non dubito, quoniam Author ſupera in ijs pertractat, ac omnes, quot quot Mathematicam adhuc profeſſi ſunt, quàm longiſſimè ſuperat. Eoſdem infera etiam nomino: quoniam Græco idiomate conſcripti inferis ignorantiæ tenebris apud pleroſq; obſeſſi iacuiſſent, niſi Commandinus optimis artibus egregiè inſtructus Latialis linguæ ſplendore, non nullis commentatiunculis additis, illuſtraſſet. Sed iſti non tam mox in lucem prodierunt, quàm mox Mathematices ſtudioſorum manibus oppreſſi, prioribus, non ſine magno Reip. litterariæ damno, reſtituti ſunt. Igitur vt communi omnium vtilitati conſulam, iterum in lucem edendos curaui: quàm profectò clariorem aſpicient, niſi tu, Clariſſ. Carole, duplici dignitate: altera naturæ: meritorum altera beneficio præfulgens obſtetricis officium indigneris. At, quæ tua eſt animi celſitudo, irrogatus etiam dignaberis. Nam cui nihil (vt Plinius in Traiani Panegirico) ad augendum faſtigium ſupereſt, hic vno modo creſcere poteſt, ſi ſe ipſe ſubmittat, ſecurus magnitudinis ſuæ: neque enim ab vllo periculo fortuna Principum longiùs abeſt, quàm ab humilitate. Si iſtud, repeto, quidquid eſt muneris læto vultu ſubieris, me non parum laudis, ac famæ aſſecutorum confido: cum omnes, qui ſapiant, ſentiant, affirmarint, Guilielmum Ingenierium non mediocres ingenij vires oſtendiſſe, qui ſummorum virorum Euclidis nempe, & Commandini partus ſummo Principi, inter purpuram, & aurum excipiendos, obtulerit. Sacroſanti Purpuratorum Collegij decus, & ornamentum diu felix viue, & me (quod enixè oro) tuere. Dat. Foriſempronij die 8. Iulij 1619.

Cliens addictiſſimus

Guilielmus Ingenierius.

FEDERICI COMMANDINI
in elementa Euclidis prolegommena.

QVOD plerique interpretum, atque eorum præsertim, qui maxime laudantur, facere solent, vt antequàm euoluendi clarorum virorum monumenta, ac scripta, quę sibi proreipublicæ literariæ commodo explicanda, exornandaq; sumpsere, iniutium faciant, quædam primo loco differant: idem, & mihi huius tam præclari operis initio faciendum putaui. neque enim dubium est, quin rudis adhuc lectoris animus de re vniuersa à principio admonitus, minori postea cum labore, ac breuiori tempore conformetur ad vnum quodque intelligendum. Primum igitur nonnulla summatim de hac tam nobili mathematicarum artium facultate dicemus, quę nam subiecta illis materia sit, tum generatim, tum particulatim, quis ordo, ac dignitatis gradus, quę sit earundem diffinitio, quis ortus. Deinde vero miram ipsarum ad humanos vsus opportunitatem paucis ad modum enarrabimus. Post de Auctore, videlicet de Euclide ipso, de operis inscriptione, de scopo, ac de ipsius demonstrationibus, deq; eorum, quę in his libris complexus est, dispositione, & methodo quædam minime inutilia attingemus. Denique summam vniuersæ συνεχειας eo consilio adiungemus, vt nō solum facilius quicquid de hoc genere precipit Euclides intelligatur, verum etiam vt fidelius memoriæ mandatum custodiatur. Itaque philosophiā omnem, quæ in contemplatione versatur, præclarissimi philosophorum in tres partes distributam nobis ea ducti ratione tradiderunt, quòd rerum aliæ prorsus materiei quasi labe, ac cœno carentes solæ per se subsistunt, atque intelliguntur: aliæ vero diuersam penitus materiam ab his sortitæ, sic materiæ innitūtur, vt nullo pacto absq; illa possint cōsistere: aliæ deniq; mediū inter has naturæ, ac dignitatis locum obtinent: tum quòd omni vacant materia, si accuratiori studio verā illarum conditionem inspexeris, tum quòd materia præditæ quodam modo videantur, quia sine aliqua eius adiunctione ob ingenij nostri imbecillitatem cognosci nequeunt. Hinc triplex illud philosophiæ genus, diuinum, quod quod quidem vt nomine, ita, & re duo reliqua supra quàm dici potest, antecellit: Naturale, quod tertium est ac postremas ordine, ac dignitate habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur: quoniam solum verę discī, ac sciri potest, ob summam rei subiectę constantiam, & certam demonstrandi rationem: Hoc quidem vt diuinis substantijs inferius est (quid.n.tam eximiū, vt cum illis comparetur?) ita naturalibus præstat, atq; superius est; quæ materiæ funditus immersa, variam, & mutabilem eius sequuntur naturam. Hoc primū ab ijs inuentū est hominib. qui ante orbis terrarū eluuiē cum feliciori fruerentur, & cœlo, & ingenio, sapientiam rerum cœlestium, admirabilemq; mundi ornatum animaduerterunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapidea, altera vero lateritia, quæ inuenerant, diligentissime inscripserunt, ne aut aquarum inundatione, aut incendio, quorum alterum euenturum predictione veterum nouerant, tantarum rerum notitia dilaberetur. Quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile matheseos studium incultum iacuit. Hoc post terrarum eluuionem apud chaldæos summo præsertim Abrahami diuini propè hominis studio ornatum, & auctū viguit. Idem Ægyptij homines cum ob perpetuam cœli serenitatem, tum ob magnam locorum planitiem ad hoc genus scientiæ nati à Chaldęis aceptum sūmopere excoluerunt. Ab Ægyptijs ad Grecos, quibus nec ingenij acumine, nec sciendi cupiditate quemq; merito anteposueris, translatū est, Thaletis Milesij, Pytagorę Samij aliorūq; excellentiū hominū industria, quos sciētię amor, & vasta maria trāsire, & lōginquas peragrare regiones coegit, & præcipue Ægiptū, vbi, si Grecis credimus, natę, & aletę sūt mathematicę disciplinę. Quas postea, & exercitatione, & scriptis illustrarūt Anaxagoras, Oenopides, Zenodotus, Brito, Antipho, Hippocrates, Theodorus, Plato Theætetus. architas, Euclides, Aristarcus, Archimedes, aliiq; innumerabiles, qui hac eximia, præstantiq; matheseos disciplina mortales propē cunctos in sui admirationem conuerterunt. Verum de his hactenus, neque enim historiam hic contexere propositū est. Sed hęc pauca attigimus, vt antiquam huius studij nobilitatem obiter quasi digito ostenderemus. Nunc de materia, & præcipuis Mathematicæ facultatis partibus, illarumq; ordine breuiter dicatur. Mathematicę

omnes circa quantitatem versantur, atque illius præsidio quicquid moliuntur efficiunt. Hinc facile est cognoscere, quot, & quæ sint huius disciplinæ partes. Quis enim ignorat quantitatem aliã esse continuam, aliam vero discretam? & harum vtramque bifariam diuidi, quòd continua sit mutabilis, & immutabilis. Discreta vero per se, & ad aliquid, ita vt quadruplex quoque sit matheseos genus. Scientia igitur, quæ magnitudines, & figuras continuas, non mobiles contemplatur, Geometriæ sibi nomen vindicat. Et est scientia quantitatis continuæ, atque immobilis positione. Quæ vero mobilem, & continuam contemplatur quantitatem. Astronomia dicitur, & est cognitio quantitatis continuæ semper mobilis, & eorum, quæ illius motu accidunt. Eodem modo quantitatem discretam Arithmetica obtinet, quæ numerum aut parem, aut imparem non ad alium comparando, sed per se considerat. Estq; scientia discretæ quantitatis, ac per se cognitæ. Musica circa mutuam sonorum versatur habitudinem, ex quibus harmonia efficitur, ob discretam quidem, sed tamen alia ratione coniunctam quantitatem: & est discretæ quantitatis inuicem comparatæ atque ad aliquid cognitio. Sed antequam ceteras matheseos species enumeremus, explicanda nobis est ratio, & modus aperiendus, quo mathematicis quantitatem, & continuam, & discretam pro subiecto, eruditorum auctoritate substerni dicimus: neque enim de quoto, quod in sensilibus ipsis est, nec de quanto, quod circa corpora excogitatur, est absolute intelligendum; physici enim potius, quàm mathematici finibus continetur hæc contemplatio. Eorum igitur quæ naturali corpori insunt, nec abeo separantur, alia quidem nec re, nec cogitatione remoueri queunt, vt calor frigus, siccitas, quòd illa qua naturale est corpus, obtineat, alia vero etiam si re ipsa disiungi minime queant, animi tamen cogitatione fingimus abesse, eò quòd per accidens, non autẽ per se, nec quatenus natura præditum est corpus, hæc habeat, qualia sunt rectum, curuum, inflexum, ceteraq; id genus. Mathematicus igitur hoc pacto ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως circa quantitatem, formasq; à materia separabiles versatur: & earum diffinitiones tradit, materiam non attingens. Quid est linea? μῆκος ἀπλατὲς, longitudo latitudinis expers. Quid est triangulum? figura, quæ tribus rectis lineis continetur. Et circulus figura, quæ ab vna comprehenditur linea. Nulla hic materiæ mentio est, nullum eius vestigium, ob allatam modo rationem. Nemo tamen suspicetur mathematicas aliquo errore labi, quòd ita infirmo, ac debilis nitantur subiecto, quòd sola cogitatione conceptum possidetur. Nam imaginatione quidem Geometra tamquam abaco vtitur, magnitudines diuidendo, interualla dimetiendo, & lineas describendo. Hæc tamen omnia, non vt figmenta quædam, sed vti res quasdam, quæ non nullam habent cum natura connexionem, nec mera somnia dici possunt; nec illarum imaginatione aliquo contaminantur mendacio mathematicæ disciplinæ. Quæ vt subiectæ materiei conditione à Diuinis distant, sic illas constanti, certaq; rationum demonstratione longe antecellunt. Sed recenseamus iam reliquas mathematicæ species. Altera igitur facta diuisione dicimus mathematicã facultatẽ, aut in intellectilibus dũtaxat aut in sensilibus versari; intellectilia vtrique appellantes, quascumque inspectiones anima ipsa per se ipsam excitat, à materialibus sese vindicans formis. Atque huius sanè generis duas principes, longeq; præstantes ponimus species, Arithmeticam, & Geometriam. Eius vero generis, quod in sensilibus officium, atque opus exercet suum, sex fieri solẽt partes. Mechanica, Astrologia, Optica, Geodesia, Canonica, vel Musica, & supputatrix. Geometria rursus diuiditur in planorum, & solidorum contemplationem, quæ stereometria appellatur. Si quidem circa puncta, & lineas peculiaris quædam non est tractatio, quoniam neq; figura in his vlla sine planis, vel solidis fieri posset. Geometria enim nihil aliud vbique agit, nisi vt plana, & solida vel constituat, vel iam constituta inter se comparet, aut diuidat. Arithmetica similiter diuiditur in numerorum linearum, & planorum, & solidorum contemplationem; etenim species numeri per se considerat ab vnitate procedẽtes, ortusq; planorum numerorum, tum similium, tum dissimilium; & ad tertiam vsq; auctionem progressus. Geodesia, & supputatrix congruenter his non de intellectilibus numeris, vel figuris, sed de sensilibus tractant. non enim ad Geodesiam attinet cylindrum, vel conum metiri, sed aceruos, vt conos metitur, & puteos vt cylindros, neque id rectis lineis intellectilibus, sed sensilibus efficit, interdum quidem tertioribus quodammodo, vt radijs solaribus, interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpẽdiculo. neque supputator ipsas per se se numerorum passiones considerat, sed vt sunt in sensilibus inuoluti. Rursus Optica, & Canonica à Geometria, & Arithmetica ortum habent. Nam optica quidẽ radijs visorijs tamquam lineis vtitur, & angulis, qui ex his cõstant. Diuiditur autem in tres partes

in

in Opticam, quæ generis nomen obtinuit, Catoptricam, & Scenographicã. Optica reddit cauſas eorum, quę aliter quàm ſint, ſeſe nobis offerunt, ob alios, atque alios rerum viſarum ſitus, ac diſtantias. Catoptrica circa varias, multipliceſq; verſatur reflexiones, & coniecturali cognitioni implicatur. Scenographica oſtendit, quo pacto ea, quæ apparent in imaginibus, non incongrua videantur, vel deformia, iuxta diſtantias, atque altitudines eorum, quæ deſignantur. non igitur veram æqualitatem, & congruitatem imitandam præcipit, ſed eam, quæ aſpectum noſtrum congruè, & appoſitè feriat, ita vt cum circuli repræſentandi ſint, interdum non circuli, ſed ellipſes deſcribantur, & quadrata altera parte longiora fiant. Canonica, vel Muſica apparentes harmoniarum cõſiderat proportiones, regularũ ſectiones adinuentes, & ſenſus vbiq; vtens adminiculo. Mechanica circa res ſenſiles, ac materiæ coniũctas verſatur, dum aut bellica parat inſtrumenta, qualia Archimedes excogitauit, cum Marcellus Syracuſas graui premeret obſidione: aut admirabilia quædam ſummo cum artificio conſtruit ſpiritu, ponderibus, & ſpartis, qualia Cteſibius, Hero, & Archimedes non ſine maximo ſtupore ſuorum temporum hominibus ſpectanda propoſuerunt. Quis enim non admiretur, vt alia omittam vitreum illum Archimedis orbem? atq; vel hac vna re mathematicas facultates, quæ talia præſtare poſſunt, non ſummopere veneretur? Percurrit propriũ mentitus ſignifer annum, Et ſimulata nouo cynthia menſe redit. ita vt eleganter exclamet Iuppiter apud Claudianum. Huccine mortalis progreſſa potentia curæ. Iam meus in fragili luditur arte labor. Quid quod aiunt Architam hac in re tantum potuiſſe, vt columbam ligneã in aere volantẽ, quaſi animã præditã, ac ſeſe ſuſtentantẽ fecerit. Aſtrologia de mundanis edifferit motibus, de cœleſtium corporum magnitudine figura, atque illuminandi vi, nec non de eorundem à nobis diſtantia. Huius partes ſunt Gnomonica, Meteoroſcopica, Dioptrica. Gnomonica circa horarum dimenſionem per gnomonum poſitiones uerſatur, de quibus Ptolemæus in libro, qui de Analemmate inſcribitur, diffuſe per tractat. Meteoroſcopica eleuationum differentias, & diſtantias ſyderum exquirit, atque alia multa, & varia, quæ ad Aſtrologiam attinent theoremata docet. Dioptritica diſtantias ſolis, & lunæ, aliorumq; aſtrorum, per eiuſmodi inſtrumenta inueſtigat. Cetera de his hactenus ſummatim dixiſſe ſatis ſit. Sed quoniam pleriq; his præſertim temporibus ſola vtilitate ad optimarum artium ſtudia excitantur, liberaleſq; colunt diſciplinas, videamus obſecro, an mathematicæ nullius ſint commodi ad iuuandos humanæ vitæ vſus, vti cæca quorundam turpiſſimi lucri cupiditas falſa iam prædicatione diuulgauit, ita vt qui hanc amplectuntur facultatem ab imperitis, vel alio ſtudio occupatis hominibus palàm derideantur, tamquam in re inutili, atque vana cleum & operem perdant. Agamus igitur pingui, quod aiunt, Minerua, quando nobis negocium eſt cum ijs, qui ſola quæſtus ratione perſuaderi poſſunt, & iniuramus hanc notam ingenuæ, ac nobili diſciplinæ, vt lucrum, & diuitias pollicendo huiuſmodi hominum ſibi ſtudia, & gratiam comparet. Negent iſti primum, ſi poſſunt, mathematicas artes popularem vtilitatem nullã habere, ſi mercatura cuius exercitatione tam multi diſtinentur ob magnam quæſtus occaſionem, ſine arithmeticæ tractari poteſt. Experiantur deinde ſiquid dimetiri queunt abſque Geodeſiæ adiumento. ſulcent maria, & longinquas petant regiones, nouum perquirant orbem nullo aſtrologiæ nauticæ fulti præſidio. Quid medicus? quantum vel vnius Hipocratis iudicio debet Aſtronomię, cuius ductu ſyderum curſus, & lunæ præſertim cognoſcit. Vnde vniuerſa dierum, quos criticos vocant, dependet ratio, quam diligenter cauendum eſt, ne grauiori aliqua curatione vexet ægrotantem, dum luna, idq; præcipue morbi initio, à combuſtione, vt nunc loquuntur, ad oppoſitionis gradum proficiſcitur? Quantum denique commodi, atque vtilitatis affert Geometria, Arithmetica, & reliquæ omnes in publicos, & priuatos vſus? cum nulla vel infimarum artium, vt finem conſequatur, matheſeos ope non egeat. quod ſingulas accuratius intuenti facile patet; & à nobis nullo negocio probaretur, niſi longam de re certa vitaremus diſputationem. colore, vmbra, ſitu, raritate, ac denſitate mediorũ, & refractione, quã varios ornatus, admirabileſq; rerum figuras quotidie cernimus? & magna cum voluptate ſpectando decipimur? ſed errauimus, ſola enim vtilitate cum illis agendum eſt, quare omiſſis opticis, & pictoribus mera afferantur commoda. Quònam pacto igitur diffiteri poſſunt, quin mathematicæ ad vniuerſam ciuitatum vtilitatum mirabiliter valeant, tum actionũ tempora dimetiẽdo, tum varias vniuerſi reuolutiones demõſtrando? Ars vero militaris, quæ politices dextra manus eſt, qua ratione volens, quæ numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra, acieſue ad figuram circuli; vbi vero copias oſtentare cupit, ad figuram quadranguli format, niſi vnius Geometriæ auxilio? Quomodo aut hoſtiũ vrbes oppugnat, & capit, aut proprias tuetur, niſi

ipsius Mechanices adiumento, quæ admirabiles ad oppugnandum, aut resistendum fabricatur machinas, vti Archimedes aduersus Marcellū, qui (nam (ieſibios, Architas, Prisćos, Eudoxos, Dionenetos missos facio) cum hanc adeo miram artem aliquādo apud Hieronem prædicaret, Rex Geometram admiratus rogauit, vt tantæ fidutiæ periculum faceret. Quare Archimedes emptam è regijs nauibus vnam, & in siccum eductam, grauiq; onerat am solus machinis suis ad se pertraxit, non secus ac si in mari remis, ac uelis agitaretur. comperta postea Alexandriam regis eiusdem nauim è littore in Mare deduxit, quod omnes Siculiæ vires non potuerunt. Hac igitur arte qui instructi sunt, vrbis mœnia tueri, & hostium oppugnationes eludere queunt. & habuisset tanto impetu res cœpta fortitudinem (ait Liuius, cum de Marcello Syracusas oppugnante loquitur) nisi vnus homo Syracusis ea tempestate fuisset. Archimedes is erat, vnicus spectator cæli, Syderumq; mirabilior tamen inuentor, ac machinator bellicorum tormentorum, operumq; è quibus ea quæ hostes ingenti mole agerent, ipse perleni momento ludificaret. libuit tam insigne illustris historici de Archimede testimonium asserre, vt huius exemplo, quantum vtilitatis, ac commodi sibi ac patriæ homines comparare possint, intelligant, si nobilem Matheseos facultatem diligenti cura, studioq; excoluerint. ceterum dissimulare nequeo, me multo grauius perturbari quorundam philosophorū, (vt sibi videntur) impudenti audacia (Cur enim grauius non ferā mathematicas ab ijs calūniari, quorū esset munus eas colere, ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarū cupiditas arctissimis deuinctos laqueis tenet) Sed aduersus hoc philosophorū genus nihil aliud dicā nūc, quòd sciā Aristippos istos, & Epicureos, vt vere, & eleganter eos nominat Petrus Ramus vir multæ eruditionis, potius dolore quodā, studioq; suā tegendi ignorantiam talia dicere, quàm quòd reuera putēt matheseos cognitionem nihil vtilitatis, nihil adiumenti afferre ad omnes liberalium artium disciplinas, præsertimq; ad Platonis Aristotelisq; monumenta, quos hoc doctrinæ genere plurimū delectatos fuisse planè constat. Qui enim hoc putent, cum multa quotidie necessaria imprimis, scituq; pulcherrima apud hos inueniāt, quæ quoniam mathematico more tradita sunt, quasi scopulos quosdam euitare cogantur. Hinc Timæum non attingunt tāquā fabulosum, & nullius pretij librū. Hinc Septimum physicæ auscultationis librum, multaq; alia Aristotelea suis discipulis, quòd, vt aiūt, inutilia sint, explanare grauantur. sed plura fortasse dicta sunt de hac re, quam oportuit. nam vera matheseos vtilitas, eximij fructus, incredibilesq; voluptates in sola veritatis cognitione, ad quam nati sumus, positæ sunt. hac vna nos vere homines, vereq; diuini luminis particeps ostendimus, cetera terrenam, & fragilem præseferunt conditionem. Age vero accedamus ad ea, quæ ad Geometram nostrum spectant. Et primum de ipso Euclide; deinde de inscriptione, & scopo dicamus. postremo de illius demonstrationibus, quemadmodum à principio promiseramus. Liberemus igitur, multos ab eo errore, quo persuasi credunt Euclidem nostrum eundem esse, & philosophum megarensem, & geometrā, totamq; hanc rem breuiter explanemus. Fuit senior Euclides ex Megaris oppido, quod isthmo adiacet, Parmenidis librorum in primis studiosus, ac megaricæ sectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes Socratici, triginta tyrannorum metu cōfugerūt. Hic dialogos sex conscripsit, quos enumerat Laertius. vsus est probationibus non ijs, quæ per assūptiones, sed quæ per conclusiones fiunt, ac magis dialecticę sunt. successorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui στοιχειώτης ac geometra, dictus est, tempore Primi Ptolomæi floruit, academiam diligenter coluit, & quotidiana ferè Platonis discipulorum consuetudine egregie eruditus, Matheſim, q in Academia præceptoris instituto tunc maxime vigebat, tā præclaro animi impetu est aggressus, vt progressus admirabiles, ac sempiterna æui memoria dignissimos in ea fecerit; constantiq; omnium doctorum testimonio principem locum sibi vendicarit. nemo autem mihi ignotum esse arbitretur, Valerium Maximum scribere Platonem sacræ aræ conductores ad Euclidem, tamquam ad primarium mathematicum reiecisse. sed nos Heronem, & Proclum matheseos studio insignes sequimur, vel potius Eudemum ac Theophrastum ex peripateticis post præceptorem nobilissimos. hi namq; hoc tradiderunt memoriæ in ijs libris, quos de historia geometrica conscriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo periisse non ignoramus. Euclides igitur noster post Hippocratem, Leontem, Teudium, & Hermotimum, qui geometrica elementa, alius post aliū conscripserant, opus hoc vere aureū, summo cum labore, præstantiq; mentis iudicio cōtexuit. Multa quidē inuenerāt superiores illi homines excellēti quodā, ac propè diuino ingenij acumine. non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus, qui cum Platone versati sunt. Itaque Euclides

dispersa collegit, collecta disposuit, & quę pinguius, negligentiusq; demonstrata fuerant, ipse ad absolutas, ἀνελεκτους q; demonstrationes redegit. Magna profecto laus superiorum, multo tamen maior Euclidis, qui indigesta eo composuit ordine, vt vel hac vna re perpetuam sibi apud sanæ mentis homines laudem comparat. Inchoata ita absoluit, incerta ita firmissimis rationibus certissima effecit, vt nihil amplius prope in eo desideretur. Iam duo fere annorum millia abierunt, ex quo Euclides inter viuos connumeratus est. Multos habuit aduersarios, qui inuidię potius morbo, quàm veritatis amore illius scripta omni studio labefactare sunt conati; nullam tamen adhuc in illis ψευδολογιαν, nullum errorem, nullum paralogismum seueri inquisitores deprehendere potuerunt. Cetera vero præstantissimi huius viri monumenta hæc habentur. Optica, Catoptrica, Musica, Data, phęnomena, scripsit etiam librum de diuisionibus, conicorum libros quattuor, prismatum tres, vt ex Proclo, Pappoq; constat, qui quidem ad manus nostras non peruenerunt. Atque hæc sunt, quę inuenire potuimus de Euclide nostro, cuius immortali beneficio Mathesis, quæ Græcum mare ex Ægypto transgressa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam incoluerat, suam dignitatem, suosque honores non sine dei voluntate est consecuta. Nunc quę studiosorum mentes haud leuiter perturbat opinio de elementorũ demonstrationibus, paucis referatur. Quãuis enim hæc disceptatio nullam futuro geometræ afferat vtilitatem, maxime tamen solicitos habet, nescio quo pacto huius disciplinæ amatores, quippe quòd scire percupiant, cui nam tantum beneficij, atque adeo singulare munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re disputarunt, Ioannes Buteo, & Petrus Ramus acerrimi iudicij homines in contrarias prorsus abiere sententias. Hic enim in suo Matheseos proœmio non solum demonstrationes Theoni. (quod etiam alij dixerunt) ascribendas putat, verum etiam ipsa elementa, tum quia στοιχειωτης vltimus fuerit, nullius q; propositionis inuentio inter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiã quia Theon ipse suas editiones in elementa nominatim laudarit in primo cõmentario super Ptolemæi magnam constructionem, ita vt elemẽta sibi eo iure vindicare possit Theon, quo antea Euclides. Idipsum ex quoq; probat ratione, quòd Euclidis demonstrationes, quę in Procli cõmentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas in elementis habemus. Ille autem (de Buteone loquor) in suis annotationibus in Euclidem hoc diserte negat; veteremq; præclarissimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos numquam sine demonstratione theoremata proferantur; vt quæ nullam sint nuda fuerint, habeant vtilitatem, ac dignitatem; quodq; vero simile sit, verba illa ἐκ τοῦ θεωνος συγγραμματων, ex quibus omnis efflu xit disputandi occasio, ita possint intelligi, vt dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in elementa, sed illos temporum calamitate periisse, quemadmodum, & quæ in eundem Pappus Alexandrinus scripserat, conseruato tamen titulo, qui postea Euclidi ipsi negligentur adiectus est. Nos autem medium secuti credimus libros de elementis suis ornatos demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse relictos. Qui enim de hoc dubitare possumus, cum Proclus in commentarijs in X. propositionem, post recitatam Apollonij pergæi demonstrationem hæc verba subiungat? πολλῷ οὖν κρειττων τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ ἀπόδειξις hoc est longe igitur melior est stichiotæ (ita enim Euclidem appellat) demonstratio, & simplicior, magisque ex principijs. Vt autem hoc verè asserimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonstrationes fusius, planiusq; explicatas in lucẽ protulisse: quod apud Proclum obseruari potest. Sic data non eo prorsus habentur modo, quo apud Pappum in septimo mathematicarum collectionũ libro. Nec optica, catoptrica, quæ nos vidimus Romæ in vaticana bibliotheca. Quamobrem si hæc omnium consensu Euclidi cõcedimus, etiam elemẽta concedenda sunt, præsertim cum verbis potius, quam re ipsa Theon ab eo discrepet in demonstrandi ratione. Sunt igitur illæ quidem demonstrationes Euclidis, sed eo modo cõscriptę quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicauit. Non inutile autem, nec iniucundum illud legentibus fore crediderim, si Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis nostri insignes huic disputationi sententias, tamquam coronidem addidero. Poterunt n. Geometriæ candidatis esse loco orationis copiosæ, atque elegantis. Plato igitur vt necessariam prorsus facultatis huius cognitionem futuro philosopho palam ostenderet, verba hæc pro foribus gymnasij posuit. οὐδεις ἀγεωμετρητος εἰσιτω, Nemo rudis Geometriæ huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui post præceptorem tertius in academia docuit, cuidam Mathematicum, ac Geometriæ ignaro gymnasium ingredienti, Abi, inquit, λαβὰς γὰρ οὐκ ἐχεις φιλοσοφιὰς. ansas enim philosophię non habes. Quid verò de nostro Geometra habemus dicere? Hic Ptolomeo Regi primo interroganti,

an alia facilior, atque commodior esset, discendæ Geometriæ methodus, ac ratio. Nulla inquit, ô Rex est via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quam constantem igitur animi diligentiam, alacremque discendi voluntatem iuuenes ad hæc studia afferre oporteat, non solum Geometriæ, quæ per se nobilissima est, sed, & totius philosophiæ causſa, nos tantorum virorum testimonijs declarasse sit satis. Dicamus iã de operis inscriptione, simulq; de Auctoris proposito. Nã quoties illa ab operis argumento desumpta est, explicatione vnius, & alterum ferme cognoscitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legisse Ευκλειδου στοιχειωσις qui vero ex Theonis sentẽtia hoc opus nobis exortum reliquit. Ευκλειδου στοιχειων βιβ. ιε. Idẽ tamen vtraq; significat, siue illa sit Elementaris institutio, siue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, sed illius familiarẽ quendam, virum planè eruditũ, quicũque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõcessisse, verborũ illorum εκ τῶν θέωνος συνουσιῶν permotus testimonio. Nam, & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Aristotelem cõmentarios ipse cõposuit, se ex Hamonij Hermeæ colloquijs, ac disputationibus collegisse, ingenue prorsus grati animi exemplo professus est. Haud tamen negauerim Theonis auditorem, cũ nomẽ suum suppresserit, voluisse nos totum hunc laboris, ac industriæ fructum Theoni dũtaxat acceptum referre. At enim quæret fortasse aliquis, nec iniuria profecto, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, sedum protulerit. Cum enim, & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, aliisq; dici soleat, adiungendum erat omnino, cuius nam rei illa essent elemẽta, elementorum ve institutio, vt à latinis postea factum est, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omissum diceremus ratione, quia statim idipsum ex primis verbis dẽ puncti notione cognoscitur, aut Hamonium secuti, qui Porphyrianam inscriptionem ab eadem culpa defendit, affirmare mus hanc inscriptionem κατ' ἐξοχήν, ac quandam Geometriæ excellentiam; & si ex nomine, quod multis commune est, factum sit, de Geometricis tantum elementis intelligi posse. Sic Poetam dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometriæ studium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theorematum enim (vt proclus scribit) alia quidem elementa appellare consueuerunt, alia elementaria, alia vero extra horum vim determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum quæ in ipsis dubitare contingit. Vt enim vocis literatę sunt principia prima, & simplicia, & indiuisibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & omnis dictio, oratioq; ex his constat, sic, & totius Geometriæ sunt quędam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quę sequuntur, perque omnia peruadentia, & multorum accidentium prębentia demonstrationes, quę elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quęcumque ad plura pertinent, & simplicem quandam suauitatem habent, non tamen eam, quæ est elementorum; propterea quòd eorum contemplatio non sit communis omni scientię. Quęcumque demum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque scitum aliquod, aut elegans demonstrant, hęc extra elementarium vim cadunt. Rursus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menęchmus. Illud enim, quod confirmat, eius quod confirmatur elementum est, vt primum secundi apud Euclidem, & quartũ quinti; sic, & alia multa inter sese elementa esse dicentur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. Nam ex eo, quòd extrinseci rectilineorum anguli quattuor rectis sunt ęquales, intrinsecorum recto ęqualium multitudo, & contra ex hoc illud ostenditur. Estq; huiusmodi elementum lẽmati assimile. Aliter prętereà dicitur elementum, in quod, cum sit magis simplex, compositum resoluitur. Ita vero non omne rursus elementum dicetur, sed quæ principalissima sunt eorũ, quę in rei effecta ratione sint cõstituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematũ sunt elementa. Iuxta hoc elementi significatũ, & ab Euclide elementa constructa sunt, alia quidem illius Geometrię, quę circa plana versatur; alia vero eius, quę circa solida. Sic, & in Arithmeticis, & in Astronomicis elemẽta res institutiones multi conscripserũt. Propositũ igitur fuit Euclidi in his libris tradere elemẽta ad vniuersã Geometriã necessaria, hoc est principalissima, simplicissimaq;, ac primis principijs maxime affinia theoremata, sine quibus reliquę huius scięntię partes cõprehẽdi nõ pũt. Euclides. n. ipse ẽ alijs libris Aristarchus, Archimedes, Apollonius, Theodosius, Autolycus, Menelaus, Ptolemęus, Pappus Serenus, & reliqui ad eorum demonstrationes his tamquam notissimis vbique vtuntur. Quod vero ad dispositionẽ, ac methodum Geometricorũ sermonũ attinet, sciendum est (vt inquit

Proclus

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & aliae ſcientias certa quædam, & definita principia habere, ex quibus ea, quæ ſequuntur, demonſtrat. quare neceſſe eſt ſeorſum quidē de principijs, ſeorſum vero de ijs, quę à principijs fluunt per tractare. & principiorum nullam reddere rationem, quæ autem principia conſequantur, rationibus confirmare. nulla enim ſcientia ſua demonſtrat principia, verum circa ea per ſe ſe ſibi fidem facit, cum magis euidentia ſint, quàm quæ ex ipſis derivantur: & illa quidem per ſeſe, hęc vero deinceps per illa cognoſcit. Ita, & naturalis philoſophus à determinato principio rationes producit, motū eſſe ponens; ita, & medicus, & aliarum ſcientiarum, atq; artium peritus. Quòd ſi quis principia cum ijs, quæ à principijs fluunt, in idem cōmiſceat, is totam perturbat cognitionem? eaq; conglutinat, quæ nullo pacto inter ſe conueniunt. Primum igitur principia, deinde ea, quæ cōſequuntur, ſunt diſtinguenda. quod ſane Euclides in vno quoquæ ſuorum librorum obſeruauit, quippe qui ante omnem tractationem communia huius ſcientiæ prīcipia exponit: & ipſa in ſuppoſitiones, ſeu diffinitiones, poſtulata, & axiomata diuidit. differūt nāq; hęc omnia inter ſe, nec idem eſt axioma, & poſtolatū, & ſuppoſitio, vt Ariſtoteles aſſerit. Cum enim is, qui audit propoſitionem aliquam, ſtatim ſine doctore vt veram admittit, vel certeſſimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, vt quæ eidem æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Cum vero audiens dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quæ per ſe ſe fidem faciat; verum tamen ſupponit, & eo vtenti aſſentitur, ea ſuppoſitio eſt, verbi gratia, circulum eiuſmodi eſſe figuram, communi quadam notione non percepimus, ſed audientes abſque vlla demonſtratione approbamus. Cum autē rurſus, & ingnotū ſit addiſcenti, quod dicitur, & tamen eo aſſentiente aſſumatur, tunc id poſtulatum appellamus, vt omnes rectos angulos æquales eſſe. Quæ autē à prīcipijs enaſcūtur, ea ſunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud eſt, in quo quippiam, cum primum non ſit proponitur muēniendum, ac conſtruendum. Theorema autē in quo quippiam in conſtituta iam figura ita eſſe vel non eſſe demoſtratur. In hac igitur elementari inſtitutione Euclidem quis non ſummopere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa diſtribuit, theorematū, atque problematū? non enim oīa aſſumpſit, quæ poterat dicere, ſed ea dumtaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. adhuc autem varios ſyllogiſmorū modos vſurpauit, alios quidem à cauſis fidem accipientes, alios vero à ſignis profectos, omnes neceſſarios, & certos, atque ad ſcientiam accōmodatos. omnes prēterea dialecticas vias, ac rationes; diuidentem in formarum inuentionibus; diſſinientem in eſſentialibus rationibus; demonſtrātem vero in progreſſibus, qui à principijs ad quæſita fiunt. denique reſoluentem in ijs, ąui à quæſitis ad principia fiunt regreſibus. Quin etiam varias conuerſionum ſpecies tum ſimplicium, tum compoſitarum in hac tractatione inueri licet. & quæ tota totis conuerti poſſunt, quæ ve tota partibus, & contra, & quę vt partes partibus. Poſtremo admirabilem omniū diſpoſitionem, antecedentiūq; & conſequentiū ordinē, ac cohærentiā, vt nihil prorſus addi, aut detrahi poſſe videatur.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietateſq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipſa inter ſe ſe comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma tranſit, eorumq; ortum declarat, & ſymptomata, quæ in ipſis ſunt, demonſtrat. poſtea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem oſtendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo, Denique de ijs, quæ in triāgulis rectangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis, quam habeat proportionem quòd à ſubtendente rectum angulum deſcribitur ad ea, quę comprehendentibus ipſum fiunt.

In ſecundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrāmorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum ſectionibus fiunt, proportiones declarantur. poſtea de quadratis, quę à lateribus obtuſiangulorum, & acutiangulorum triāgulorum deſcribuntur, quam habeant proportionem, quę à ſubtendētibus obtuſum, & acutum angulum fiunt ad ea, quæ à comprehendentibus deſcribuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum conſtituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quę circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo; vel ad circulū ductis, itemq; de angulis, qui ad circulorum contra, vel ad circumferentias conſiſtunt.

In quarto libro de figurarum planarum inſcriptionibus, & circumſcriptionibus.

In quinto de Analogijs.

INDEX

In ſexto de proportionibus figurarum inter ſeſe, de figuris ſimilibus, & reciprocis. de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis ſimilibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione ſecetur, de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemq; ſectorum in circulis æqualibus.

Septimus, Octauus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In ſeptimo agitur de numeris primis, & compoſitis; & quo pacto numerorum non primorum maxima cõmunis menſura inueniatur. de numerorum parte, & partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem ferè & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & ſolidis. de ſimilibus planis, & ſimilibus ſolidis.

In nono item de ſimilibus planis, de cubis, & ſolidis, & de numeris deinceps proportionalibus ſiue ab vnitate, ſiue ſimpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus, & pariter imparibus. de numeris perfectis.

In decimo de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

Vndecimus, duodecimus, & reliqui ad ſtereometriã ſpectant, hoc eſt ad ſolidorum corporum contemplationem.

Et in vndecimo quidem primum agitur de rectis lineis quatenus ad ſolida corpora referuntur, videlicet quando ſint in vno plano, quando rectæ, ſeu perpendiculares ad planum, quando parallelæ, quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis ſimul deſerit, tum de ſolidis angulis, poſtremo de ſolidis parallelepipedis, & nonnulla de priſmatibus.

In duodecimo de pyramidibus, & priſmatibus; poſtea de conis, & cylindris, demum de ſpheris.

In tertiodecimo de conſtitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant; videlicet tetraedri vel pyramidis; hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, & icoſaedri, ad quorum euidentiam præmittit nonnulla deinis, quę accidunt rectę lineę extrema, ac media ratione ſectę, de pentagono æquilatero, de hexagoni, & de cagoni laterib. & de triangulo æquilatero.

In quartodecimo de dodecaedri, & icoſaedri in eadem ſphęra deſcriptorum comparatione.

In quintodecimo, & vltimo de inſcriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundē lateribus, & angulis.

FINIS.

INDEX

INDEX EORVM, QVÆ IN HIS LIBRIS demonſtrantur præterea, quæ Euclidis ſunt.

IN PRIMO LIBRO.



CIRCVLI diameter bifariam circulum ſecat. 3. b
In data recta linea triangulum æquicrure, & ſcalenum conſtituere. 8
Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ angulos ad verticem æquales fecerint, ipſæ rectę linea in directum ſibi inuicem erunt. 14. b
Si alteram parallelarum ſecuerit recta quædam linea, reliquam quoque ſecabit. 19. b
Rectæ lineæ, quæ à minoribus, quàm ſint duo recti, in infinitum producuntur, inter ſe conuenient. 20
Omnis rectilinea figura, angulos, qui extra conſtituuntur, quattuor rectis æquales habet. 21
Omne quadrilaterum, quod latera ex oppoſito, & angulos æqualia habet, parallelogrāmū eſt. 22
Omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt. 24
Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; baſim, aut æquales habuerint, & fuerint ad eaſdem partes: in eiſdem etiam parallelis erunt. 25
Si trianguli parallelogrāmum duplum fuerit, in eiſdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; baſi, aut inęqalibus erunt. 25
Quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari poſſit in dato angulo rectilineo. 26. b
Quadrata ab æqualibus rectis lineis deſcripta, etiam inter ſe æqualia ſunt. 27
Quadrata æqualia ab æqualibus rectis lineis deſcripta ſunt.
Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales ſint, & in dato angulo rectilineo parallelogrāmum conſtituere. 27. b

IN SECVNDO LIBRO.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, quæ ſecentur in quotcumque partes, rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt æquale rectangulis, quæ vnaquæque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. 29. b
Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ vtcumque ſecentur, rectangulum totis contentum vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipſarum eſt æquale rectangulis, quę continentur totis, & dictis partibus vna cum eo, quod reliquis partibus continetur.
Arithmeticę analogię demonſtratio. Theorema autem eſt.
Quadratū, quod fit ab exceſſu vnà cū eo, quod extremis cōtinetur, quadrato medij æquale eſſe. 31. b
Si recta linea in partes inæquales ſecetur, earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vnà cum quadrato eius lineę, quæ maior pars ſuperat minorē. 32
Propoſitio IX aliter demonſtratur. 33
Propoſitio X aliter demonſtratur. 33. b
Cuiuſlibet trianguli obtuſum angulum habentis, aream dimetiri. 34
Propoſitionis XIII conuerſa. 35
Cuiuſlibet trianguli, ſiue acutianguli, ſiue rectanguli, ſiue obtuſianguli, quod nota latera habeat, aream inuenire. 35. b

IN TERTIO LIBRO.

CONuerſum diffinitionis circuli. ſi in ambitum figurę ab aliquo puncto eorum, quę ſunt intra, incidant æquales rectę lineę, ea circulus eſt. 37. b. 38
Propoſitionis VII. conuerſa. 39. b
Si in circumferentia circuli aliquod punctum ſumatur, ab eoq; in circulum ducantur rectę lineæ; quę per centrum tranſit, omnium erit maxima, aliarum verò quę tranſeunti per centrum propinquiores ſunt, remotioribus erunt maiores, duę autem tantum æquales ſunt ad vtraſque partes maximè. 40.
Propoſitionis XIX. conuerſa. 43. b

Spacium

Spacium quod est ad centrum dupli est anguli, qui ad circumferentiam, quando circumferentia eandem pro basi habuerint. 44.

Propositio XXI. aliter demonstratur.

In eadem recta linea ueutra ex parte similes, & inæquales circulorum portiones constitui possunt. 44.b

In eadem recta linea, uel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt. 45.

Si æquales rectæ lineæ æquales, & similes circumferentias auferant, circuli æquales erunt, quorũ illæ sunt circumferentiæ. 46.b.47.

In circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ dissimiles circumferentias auferunt. 47.

In circulis inæqualibus similes circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendunt.

Similes, & inæquales circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendunt.

Si a puncto extra circulum sumpto ducantur in circulum quotcunque rectæ lineæ ipsum secantes, rectangula, quæ totis, & earum portionibus extrinsecus continentur, inter se æqualia sunt. 50.

A puncto extra circulum sumpto ductæ duæ rectæ lineæ circulum contingentes, inter se æquales sunt.

IN QVARTO LIBRO.

IN dato circulo rectam lineam rectæ lineæ datæ, quæ diametro maior non sit, æqualem, & alteri datæ parallelam aptare.

IN QVINTO LIBRO.

SI prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, tertia autem, ad quartam minorem proportionem habeat quàm quinta ad sextam, & prima ad secundã minorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam. 64.b

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad sextam, & prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam. 64.b

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam sit; & prima maior quàm secũda; & tertia quàm quarta maior erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. 65.b

Si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt. 68.b

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, & conuertendo secunda ad primam minorem proportionem habebit, quàm quarta ad tertiam. 69.

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm secunda ad quartam. 69.

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, etiam componendo prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia, & quarta ad quartam. 69.b

Si prima, & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quã tertia, & quarta ad quartam, & dividendo prima ad secundam maiorẽ proportionem habebit, quàm tertia ad quartã.

Si prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia, & quarta ad quartam, per conuersionem rationis prima, & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam. 70.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima, & secunda ad tertiam, & quartam.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquã maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, habeatq; prima priorum ad secundã maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam, secunda vero priorũ ad tertiã maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiã; etiam ex æquali prima priorũ ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam. 70.b

In

TRiangula, & parallelogramma in æqualibus baſibus conſtituta, eandē inter ſe proportionem habent, quam eorum altitudines. 72.b
Propoſitio VI. aliter demonſtratur. 74.b
Datam rectam lineam in datam proportionem ſecare. 75.b
In dato triangulo quadratum deſcribere. 76
Tribus datis rectis lineis AB. BC. & D. Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipſam D. 76.b
Si rectilinea æqualia, & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqualia erunt. 81
Triangula, quę vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compoſitam. 81.b
Quomodo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur.
Proportio data ex data proportione maiori quo pacto auferatur.
Quomodo in numeris proportiones, & componantur, & auferantur.
Triangula, quorum vnus angulus vni angulo eſt æqualis inter ſe proportionem habent eandem, quam rectangula, quę lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.
Parallelogramma æquiangula inter ſe proportionem habere eandem, quam rectangula, quæ ipſorum lateribus continentur. 82
Triangula, & parallelogramma inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.
Propoſitio XXVII. aliter explicatur. 84
Duorum rectilineorum inæqualium exceſſum, quo maius ſuperat minus inuenire. 84.b
Theorema Pappi, quod multo vniuerſalius eſt, quàm XXXI Euclidis.

IN SEPTIMO LIBRO.

EXpoſitis duobus numeris inter ſe primis, ſi de maiori ſemper minor detrahatur, non ceſſabit huiuſmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit. 90
Expoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, ſi de maiori ſemper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vſque non perueniet.
Duobus numeris expoſitis, comperire an inter ſe primi ſint, an compoſiti.
Si numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri. 91
Si numerus numeri multiplex fuerit, & alter alterius æque multiplex; & vterque vtriuſque æque multiplex erit, atque vnus vnius. 91.b
Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine ſinguli ſingulorum æque multiplices; quotuplex eſt vnus vnius, totuplices erunt, & omnes omnium.
Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, ſintq; ſinguli ſingulorum, vel eandem pars, vel eadem partes; quæ pars, vel partes eſt vnus vnius, eadem pars, vel eadem partes erunt, & omnes omnium. 92
Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati; & reliquus reliqui æque multiplex erit, atque totus totius.
Quæ eidem eadem ſunt numerorum proportiones, & inter ſe eadem erunt. 93.b
Si quattuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt. 94.b
Si quattuor numeri proportionales ſint, & componendo proportionales erunt.
Si quattuor numeri proportionales ſint, & diuidendo proportionales erunt.
Si quattuor numeri proportionales ſint, & per conuerſionem rationes proportionales erunt.
Si primus ad ſecundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem, & quintus ad ſecundum proportionem eandem, quam ſextus ad quartum: & compoſitus primus, & quintus ad ſecundum eandem proportionem habebit; quam tertius, & ſextus ad quartum.
Si numerus aliquis plures numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti eandem, quam multiplicati proportionem habebunt. 95.b

Si plures numeri numerum aliquem multiplicantes faciant totidem alios, facti eandem, quam multiplicantes proportionem habebunt. 95.b

Numeris quotcunque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipsis proportionem habeant. 96.b

IN OCTAVO LIBRO.

PLani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter se similes sunt. 109

Solidi numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt. 109.b

IN NONO LIBRO

SI cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus nõ erit cubus. 111

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerũ non cubum, & multiplicatus non erit cubus.

Si duobus numeris propositis, eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis, æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt. 114

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtràque parte inter se compositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, , qui ex toto, & vna parte fit, æquales est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. 114

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis est quadratis, qui à partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Si par numerus bifariã diuidatur, diuidatur autem, & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus, vna cum quadrato numeri interiecti, æqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Si par numerus bifariam diuidãtur, adijcaturq; ipsi numerus aliquis; qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vna cum quadrato dimidij est æqualis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat. 115.b

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cũ reliquæ partis quadrato. 116

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vnà cũ quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. 116

Si par numerus bifariam diuidatur, diuidantur autem, & in numeros inæquales; quadrati, qui ab inæqualibus numeri fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vna cũ quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Si par numerus bifariam diuidatur, adiiciatur q; ipsi alter numerus, qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati, dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati qui ex dimidio, & adiecto tamquam ex vno efficitur. 116.b

Illud autem, quod vndecimæ secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

IN DECIMO LIBRO.

PRopositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quàm inter se proportionem habeant in numeris inuenire. 126.b

Duobus datis numeris, & rectæ lineæ, facere vt numerus ad numerum ita quadratum rectæ lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum. 130.b

Duos numeros plano dissimiles inuenire. 132

Magnitudines, quæ incõmensurabilibus sunt cõmẽsurabiles, & inter se incõmensurabiles erũt. 132

Datis

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quam minor. 132
Datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest, quo pacto inueniatur.
Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componẽtium sit incommensurabilis & reliquæ incommensurabilis erit. 133
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur. 133.b
Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minori sit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.
Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod partibus continetur sit æquale dato rectilineo. oportet autem datum rectilineũ minus esse quadrato, quod à dimidia describitur. 134.b
Datum numerum in duas partes ita diuidere, vt qui ex ipsis producitur dato numero sit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis esse debet, quadrato dimidij minorem esse.
Rationales magnitudines commensurabiles esse: 135.b
Inuenire duas rationales potentia commensurabiles.
Rationali commensurabile, & ipsum rationale esse. 136
Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datum erit. 136
Si ad datã rectã lineã rationalem applicetur spatiũ datũ, & latitudo quã facit, data erit. 136.b
Quæ ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit. 137.b
Duarum datarum rationalium, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles differentia data erit. 138
Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles. 138.b
Recta linea, quæ potest irrationale spacium, irrationalis est. 138.b
Media est irrationalis, quæ potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus. 139
Mediam, quæ vna est irrationalium in geometrica analogia cõsiderari.
Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur. 136.b
Spacium medio spacio commensurabile medium est. 140.b
Quod datis duabus medijs, vel media, & rationali continetur rectangulum datum erit. 141
Si ad datam mediam applicetur spacium datum, latitudo quam facit, data erit.
Quæ ex duabus datis medijs longitudine commensurabilib. cõponitur recta linea data erit. 141.b
Duarũ datarũ mediarũ, q̃ inæquales sint, & longitudine cõmensurabiles differẽtia data erit. 142
Rationale non superat rationale nisi rationali. 143.b
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipsis componitur, etiam quadratus sit 144.b
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt ipsorum excessus sit quadratus. 144.b
Inuenire duos numeros quadratos, ita vt ipsorum excessus non sit quadratus.
Si sint duæ rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulũ duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris. 146
Si fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum contẽtum prima, & media ad id, quod media, & tertia cõtinetur. 146.b
Ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis, totum fieri rationale. 148
Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit. 148.b
Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constant, & rectangulum ipsius contentum datum erit. 149
Datæ apotomes quadratum datum erit.
Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum quod ipsis continetur, datum erit.
Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectangulum, quod ipsis

ſis continetur datum erit. 148.b
Si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.
Spacium ex medijs compoſitum irrationale eſt. 155.b
Binomialis ſpacij latus quadratum, vel radicem inuenire. 160
Si recta linea in partes inæquales ſecetur, ipſarum partium quadrata maiora ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. 162.b
Sint quattuor magnitudines AB C EF G, & AB excedat ipſam C eodem exceſſu, quo EF excedit G. Dico, & permutando AB eodem exceſſu excedere ipſam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur. 171

IN VNDECIMO LIBRO.

Conuerſa X. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non exiſtentibus, & earum vna parallela ſit vni continentium æqualem angulum, & reliqua reliquæ parallela erit. 195
Conuerſa XIIII. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipſorum eſt perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit. 196
Conuerſa XVIII. Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos; & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit. 197.b
Conuerſa XIX. Quorum planorum ſeſe mutuo ſecantium communis ſectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & ſecantia plana eidem plana ad rectos angulos erunt.
Si fuerint quotlibet anguli plani, quorum vno reliqui ſint maiores, quomodocumque ſumpti; contineant autem ipſos rectæ lineæ æquales. Dico, & rectarum linearum angulos ſubtendẽtium, vna reliquas maiores eſſe quomodocumque ſumptas, hoc eſt fieri poſſe, vt ex ijs, quæ rectas lineas coniungunt, multorum laterum figura conſtituatur. 200.b
Si in aliquod planum à quodam ſublimi puncto æquales rectæ lineæ cadant, in circuli erunt circumferentia: & quæ à dicto puncto ad centrũ circuli ducitur, ad circulũ perpendicularis erit. 201
Omnis anguli ſolidi, qui æquicruribus planis continetur, baſim ipſam in circulo deſcribi. 201.b
Ex planis quotlibet datis angulis quorum vno reliqui ſint maiores, quomodocumque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere, oportet autem datos angulos quattuor rectis eſſe minores.
Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, & æqualia eſſe, & ſimilia. 202.b
Si ſolidum parallelepipedum ſecetur plano baſibus parallelo, erit ſolidum ad ſolidum, vt altitudo ad altitudinem. 203
Solida parallelepipeda in eadem baſi, vel in æqualibus baſibus conſtituta, eam inter ſe proportionem habere, quàm altitudines. 205.b
Priſmata triangulares baſes habentia, quæ vel in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituuntur, & eadem altitudine, inter ſe æqualia eſſe. Et inſuper quæ eãdem habent altitudinem inter ſe eſſe, vt baſes, Et quæ vel in eiſdẽ vel æqualibus baſibus conſtituuntur, inter ſe eſſe, vt altitudines.
Æqualium priſmatum, & triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Et quorum priſmatum triangulares baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent ea inter ſe ſunt æqualia. 207.b
Propoſitio XXXVIII aliter demoſtratur. 209.b

IN DVODECIMO LIBRO.

IN dato circulo, deſcripto in circulo polygono ſimile polygonum deſcribere. 212.b
Priſmata omnia, quæ eadem ſunt altitudine inter ſe eſſe, vt baſes. 215.b
Priſmata omnia, & pyramides, quæ in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtituuntur eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines.
Priſmata omnia, & pyramides inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. 216
Pyramides ſimiles, quæ multiangulas baſes habent, diuidi in pyramides triangulares baſes habentes ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. 216.b

Priſmata ſimilia, quę triangulares baſes habent in pyramides ſimiles, numeroq́; æquales diuidun-
tur: & priſma ad priſma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad
homologum latus. 217.

Priſmata ſimilia, quæ multiangulas habent baſes in ſimilia priſmata, triangulares baſes haben-
tia diuiduntur, numeroq́; æqualia, & homologa totis: & priſma ad priſma triplam proportio-
nem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus: 217.b

Æqualium pyramidum, & multiangulas baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudini-
bus reſpondent; & quarum pyramidum multiangulas baſes habentium, baſes ex contraria par-
te altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales. 218.b

Priſmatum omnium æqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpõdere, & quorum priſ-
matum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea eſſe æqualia. 219

Omnem conum ſiue rectum, ſiue ſcalenum tertiam partem eſſe cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, qui
eandem baſim habet, & eandem altitudinem. 220

Similes coni, & cylindri omnes inter ſe in tripla ſunt proportione diametrorum, quæ ſunt in ba-
ſibus. 222

Si cylindrus ſcalenus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita
axis ad axem. 223.b

Si quilibet cylindrus ſecetur plano baſibus parallelo, vt cylindrus ad cylindrum, ita eſſe altitudi-
nem cylindri ad cylindri altitudinem.

Conorum omnium, & cylindrorum æqualium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent,
& quorum conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi in
ter ſe ſunt æquales. 224

Cylindri omnes, & coni inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & pro
portione altitudinum. 224.b

IN TERTIO DECIMO LIBRO

PRopoſitio prima aliter demonſtratur. 229.b
Data recta linea extrema, ac media ratione ſecta, & vtraque ipſius portio data erit.

Si recta linea rationalis, expoſitæ rationali longitudine cõmenſurabilis, extrema ac media ratio-
ne ſecta fuerit, maiorẽ eius portionẽ apotomen eſſe quintam, & minorẽ eſſe apotomen primã.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire.

Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione ſecetur, & minorem portionẽ
& totam lineam datam eſſe. 230

Propoſitio ſecunda aliter demonſtratur. 230.b

Data minori portione totam rectã lineã, quę extrema, ac media ratione ſecta ſit, inuenire. 231.b

Data minori portione rectæ lineæ extrema, ac media ratione ſecetur, & maiorem portionem,
& totam lineam datam eſſe.

Si recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, abſcindaturq́; à maiori portione linea, quę mino-
ri ſit æqualis, erit etiam ea extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit quæ abſciſſa
eſt recta linea. 232.b

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione ſectæ ſit rationalis, expoſitæ rationali lon-
gitudine commenſurabilis; erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus
quinta. 233

Si minor portio rectæ lineæ extrema; ac media ratione ſectæ ſit rationalis, expoſitæq́; rationali lõ-
gitudine commenſurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nomi-
nibus prima. 233.b

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione ſecetur, erit maior eius portio decagoni latus. 234.b

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum deſcribatur, erit decagoni
latus apotome quinta. 235

Si latus decagoni æquilateri in circulo deſcripti ſit rationale, erit circuli diameter ex binis nomi-
nibus quinta. 235

Latus

Latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad baſim perpendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere quam 4. ad 3. 23.6.b

Si ſint tres rectæ lineæ, ſitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales. 24o

IN QVARTODECIMO LIBRO.

EAm, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam eſſe eius, quæ ex centro circuli: 244

IN QVINTODECIMO LIBRO.

SI à vertice pyramidis ad baſim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa baſis triangulum deſcribitur. 249.b

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, baſim bifariam ſecat.

Rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, ad baſim perpendicularem eſſe.

Propoſitio ſecunda planius demonſtratur. 250

Omne parallelogrammum eſt in vno plano. 251.b

In dato dodecaedro cubum deſcribere. 255

In dato dodecaedro pyramidem, & octaedrũ deſcribere.

In dato Icoſaedro cubum deſcribere.

In dato Icoſaedro pyramidem deſcribere.

In dato dodecaedro Icoſaedrũ deſcribere.

FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER PRIMVS.

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

DIFFINITIONES.

I.

PVNCTVM EST, cuius nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium ſignificauit nobis punctum, quod eſt principium totium propoſitę contemplationis. Cum enim principia aliam rationem habeant ab ijs, quorum ſunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam oſtendant; non immerito negantes ſermones principijs ipſis conuenire comperti ſunt: quod etiam aſſerit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & tranſlationem quandam, punctum diffinierunt eſſe vnitatem poſitionem habentem: punctum enim poſitionem habet, vnitas non habet. Ariſtoteles in quarto diuinę philoſophię libro. vbiq; inquit, ipſum vnum aut forma, aut quantitate indiuiſibile. eorum autem, quae quantitate, & vt quantitas eſt, diuidi non poſſunt, id quidem, quod penitus eſt tale, & ſine poſitione, dicitur vnitas; quod vero penitus eſt tale, poſitionemq; habet, dicitur punctum; & id quod vno modo diuidi poteſt, linea nuncupatur; & id quod duabus ex partibus, ſuperficies: quod vero omni ex parte, & trinam dimenſionem habet, dicitur corpus.

Punctum ſecundum Pythagoricos eſt vnitas poſitionem habēs.

II.

Línea vero eſt longitudo latitudinis expers.

F. C. COMMENTARIVS.

Poſt punctum linea ſecundum obtinet locum: namque vt punctum ad lineam, ita linea ad ſuperficiē, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipſum, vt magnitudinum omnium principium per ſolam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem ſignificauit cum dixit, longitudinem eſſe latitudinis expertem. fuerunt qui lineam aliter diffinirent: alij enim σημεῖον ῥύσιν hoc eſt puncti fluxum dixerunt: alij vt Ariſtoteles τὸ μέγεθος μοναχῇ διαιρετὸν ἢ ἐφεξῆς διαιρετὸν boc eſt magnitudinē, quę vno modo diuidi poteſt, nempe ſecundum longitudinem. lineę autem notionem habemus, vt Apollonius inquit, cum longitudines tantum vel viarum, vel parietum dimetiri volumus; non enim tunc latitudinem, & craſſitudinem adiungimus, ſed vnicam dumtaxat dimenſionem conſideramus; quemadmodum, & cum agros metimur, ſuperficiem reſpicimus; cum autem puteos, ſolidum: omnes enim dimenſiones ſimul colligentes dicimus tantum eſſe ſpacium putei ſecundum longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem. ſenſum vero ipſius lineę habebimus, ſi diſiunctiones locorum illuminatorum ab vmbroſis inſpexerimus, tum in luna, tum in terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimenſionem non habet, ſed iuxta longitudinem, quę vnà cum lumine, & vmbra producitur,

Punctū magnitudinū omniū principium.

Lineæ notio.

Superficiei notio.

Solidi.

Lineæ ſenſus vnde habeatur.

Lineæ simplices. Mixtæ.

dicitur. Linearum aliæ simplices, aliæ mixtæ. Simplices sunt recta, & circularis, quamquam recta simplicior sit, reliquæ vero omnes mixtæ, quales sunt coni sectiones, helices, conchoides, cissoides, & aliæ.

III.

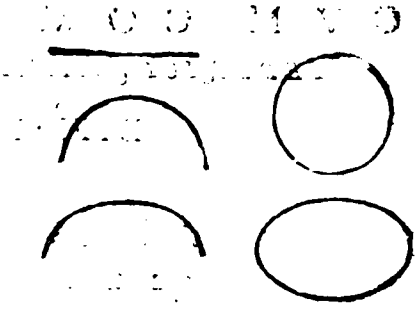
Lineæ fines sunt puncta.

F. C. COMMENTARIUS.

Linea trib. modis vtitur Euclides.

Circularis linea per se nullos hēt fines.

Ellipsis.



Cum linea tribus modis vtatur Euclides, vel enim terminata, & finita, ex vtraque parte, vel infinita, vel ex altera quidem parte finita, ex altera vero infinita; hoc loco de ea, quę vtrinque finita est, sermo habetur; cuius fines dicit esse duo pūcta. (Circularis autem linea per se nullos habet fines; sed si aliquod in ea punctum accipiatur, idē erit, & principium, & finis, diuersa tamen ratione. Quod diximus de circulari linea, idem, & de ellipsi dici potest, quæ ipsa in se ipsam vergit sicuti circulus: si autem sumatur portio circularis lineæ, seu ellipsis, eius non aliter, quam rectę lineę fines erunt duo puncta. Eodem modo, & de aliis curuis lineis intelligendum est.

IIII.

Recta linea est, quæ ex æquali suis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIVS.

Plato quę recta linea diffiniat.

Hoc est recta linea est, quæ æqualem continet distantiam, eam scilicet, quæ inter sua interijcitur puncta. Quantum enim alterum punctorum ab altero distat, tanta est magnitudo rectę lineę ab iis terminatæ. Atque hoc est ex æquali suis interijci punctis. Si autem in circumferentia circuli, aut alia quāuis linea duo puncta sumantur; eius portio, quę interijcitur, lōge maior erit, quàm sit dictorum punctorum distantia. Ad hunc quidem modum rectæ lineę diffinitionem exponere mihi videtur Proclus. Plato autem rectam lineam diffinit esse eam ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, hoc est cuius media extremis obstant. Illud enim ijs, quę in recta linea sunt, necessario contingit; ijs vero, quæ in circulari, aut alia quapiam linea, non item. Vnde, & Astrologi dicunt solem deficere, cum in eadem recta linea constituitur ipse, lunaq; & oculus noster: obstitit enim ei tunc luna media existens. At Archimedes, vt Proclus auctor est, dixit rectam lineam esse breuissimam omnium, quę eosdem habent fines. Quę quidem diffinitio recepta est in Campani editione. Linea, inquit, recta est ab vno puncto ad alium breuissima extensio in extremitates suas eos recipiens.



Archimedis diffinitio rectæ lineæ.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Superficiei variæ diffinitiones. Superficiei cognitio.

Superficiem dixit longitudinem, & latitudinem tantum habere, propterea quòd crassitudinis expers sit. Alij corporis terminum ipsam esse diffinierunt; alij magnitudinem binis distantē interuallis. Superficiei vero cognitionem nos habere dicunt, quando agros dimetimur, & eorum terminos iuxta longitudinem, ac latitudinem distinguimus. Sensum vero quendam capere, quando vmbras aspicimus, cum enim ipsæ crassitudinis sint expertes, quòd partes terræ interiores penetrare non possint; latitudinem, & longitudinem tantum habent. Superficierum aliæ simplices sunt,

alię

alię mixte. ſimplices ſunt plana, & ſphærica, reliquæ vero mixtæ, vt Cylindrica, conica, & quæ à coni ſectionibus ortum habent, videlicet conoidum, & ſphæroidum figurarum, & alię.

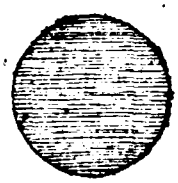
Superficiei ſimplices, & Mixtæ.

VI.

Superficiei fines ſunt lineæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum non omnis lineę fines ſunt puncta, ita non omnis ſuperficiei fines ſunt lineæ; ſuperficies enim ſphærę, vel ſphæroidis per ſe nullos habet huiuſmodi fines, niſi planis abſcindatur, nam tunc fines habebit lineas ipſas, quę ex ſectione oriuntur. Superficiei autem circuli, & eius, quæ ellipſi continetur, finis eſt linea vna, videlicet circumferentia, & ellipſis. Quòd ſi ſecentur tunc pro finibus lineas habebunt.





Superficies Sphærę, & Sphęroidis Superficies circuli, & ellipſi contem.

VII.

Plana ſuperficies eſt quæ ex æquali ſuis interijcitur lineis.

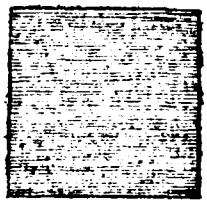




F. C. COMMENTARIVS.

Antiquiores philoſophi (vt teſtatur Proclus;) τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπίπεδον hoc eſt ſuperficiem, & planum pro vno, eodemq; accipiebant. At Euclides, & qui eum ſecuti ſunt, genus quidem ſuperficiem faciunt, eius vero ſpeciem planum, vel planam ſuperficiem, quemadmodum lineæ ſpeciem rectã lineam. Et idcirco planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportione. Vt enim recta linea eſt, qua ex æquali ſuis interijcitur punctis, vel cuius media extremis obſiſtunt, vel breuiſſima omnium, quæ eoſdem habent fines, ita planam ſuperficiem dixerunt eſſe eam, quæ ex æquali ſuis interijcitur lineis, vel cuius media extremis obſiſtunt, vel breuiſſimã omnium ſuperficierum eoſdem fines habentium, & omnino quæcunque ſunt rectæ lineæ diffinitiones, omnes ad planam ſuperficiẽ commodiſſime transferri poſſunt. Quòd cum multæ ſint ſuperficierum ſpecies, Euclides planam tantum diffiniuit, atque in hac figuras, & earum affectiones contemplatur.

Superficiẽ, & planum Antiqui p eodem accipiebant.



Planæ ſuperficiei vãrię diffinit.

VIII.

Planus angulus eſt duabus lineis in plano ſeſe contingẽtibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

Euclides ſuperficiẽ planam tãtũ diffiniuit.

IX.

Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in prædicamento eorum quæ ſunt ad aliquid ponentes, inclinationem eſſe dixerunt, vel linearum, vel planorum, quo ad ſe inuicem inclinata ſunt. Alij in qualitate ipſum comprehendentes, vt rectum, & inflexum, talem quandam affectionem dixerunt eſſe ſuperficiei, vel ſolidi. Alij autem ad quantitatem referentes vel ſuperficiem, vel ſolidum eſſe aſſeuerarunt. Diuiditur, inquiunt, is, qui in ſuperficie eſt angulus linea; qui in ſolidis ſuperficie. Quod

autem his diuiditur nihil aliud eſt, niſi magnitudo; & hęc non linearis, namque lineam punctum diuidit. Quare relinquitur, vt ſit ſuperficies, vel ſolidum. Quid igitur in tanta controuerſia dicendum? aut quid eorum dicemus eſſe angulum? Reſpondet Proclus angulum nihil eſſe eorum per ſe ſe, ſed ex concurſu omnium conſtitui. Contingere autem hoc non ſolum angulo, ſed, & ipſi triangulo, quod quidem particeps eſt quantitatis; & idcirco æquale dicitur, & inæquale, vt pote materię rationem habens. Particeps quoque eſt qualitatis eius, quę ad figuram pertinet, quoniam, & ſimilia dicuntur triangula, & inæqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem, & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & exiſtentię figuram. Indiget denique, & determinantium ipſum linearum, vel planorum comprehendentium habitudine. Atque ex his omnibus angulus conſtat. Non tamen eſt vnum aliquod eorũ. Et eſt quidem diuiſibilis, & æqualitatem, & inæqualitatem ſuſcipere poteſt, iuxta eam, quę in ipſo eſt, quantitatem.

Angulorũ diuiſio.



Angulorum alij quidem in ſuperficiebus, alij vero in ſolidis cõſiſtunt: & eorum qui in ſuperficiebus alij in ſimplicibus, alij ĩ mixtis. Eorum qui in planis fiunt alij ſimplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij vtriſque. Omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.

X.

Cum vero recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens eos, qui deinceps ſunt angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui maior eſt recto.

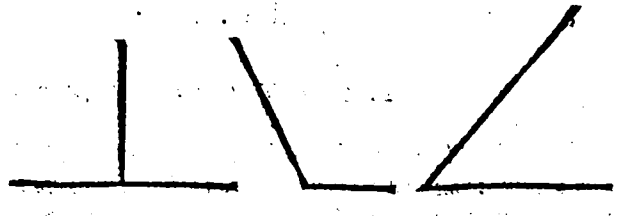
XII.

Acutus autem, qui recto eſt minor.

F. C. CÓMMENTARIVS.

In diffinitione anguli obtuſi, & acuti genus ſubintelligi oportet, eſt enim vterque ipſorum rectilineus; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non ſimpliciter quicunque minor eſt recto, is eſt acutus; neque quicunque maior recto eſt obtuſus. Nam qui græce κερατοειδὴς dicitur, hoc eſt cornicularis, qui continetur recta linea circulum contingente, & circumferentia ipſa, non tantum recto, ſed etiam omni acuto eſt minor, acutus autem non eſt. Et ſemicirculi angulus omni recto eſt minor, ſed tamen non eſt acutus. Quorum quidem cauſa eſt, quod ſint mixti, & non rectilinei; & eorum, qui lineis circularibus, aut alioqui curuis continentur multi recto maiores apparent, non tamen ſunt obtuſi. Cum igitur rectum angulum diffinire propoſuiſſet Euclides rectã aſſumpſit lineam ſuper aliam rectam inſiſtentem; & angulos, qui ex vtraque parte ſunt, quos angulos deinceps appellat, inter ſe æquales facientem. Obtuſum autem, & acutum diffiniens non item aſſumpſit rectam lineam ad alterutram partem

Angulus cornicularis. Semicirculi angulus.



Anguli deinceps qui ſint.

partem inclinatam, ſed per comparationem ad rectum explicauit. Ipſe enim etiam non rectorum menſura eſt, quemadmodum, & inæqualiũ æqualitas. Lineę vero ad alterutram partem inclinatę infinitæ ſunt, & non vna tantum, vt perpendicularis. Illud autem meminiſſe oportet Euclidem hoc loco de ijs ſermonem habere, quæ in eodem plano conſiſtunt. Quare neque perpendicularem omnem diffiniunt, neque omnem angulum. Solida enim perpendicularis non ad vnam tantum rectam lineam angulos rectos facit, ſed ad omnes, quæ ipſam tangunt, in ſubiecto exiſtẽtes plano, de qua in vndecimo libro agetur.

Angulus rectus eſt non rectarũ mẽſura, quemadmodum inęqualium æqualitas.

XIII.

Terminus eſt, qui alicuius eſt finis.

F. C. COMMENTARIUS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, vt ſcribit Proclus, lineæ nãque terminus eſt, & finis, ſed ad ſpacia, quę ſunt in ſuperficiebus, & ad ſolida. Nunc enim terminum vocat ambitum, qui ſpacium vnumquodque determinat, & huiuſmodi terminum, finem eſſe dicit, non vt punctum dicitur lineæ finis, ſed vt includit, & ſeiungit ab ijs, quæ circumpoſita ſunt. Eſt autem hoc nomen priſcę illi geometriæ proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos diſtinctos ſeruabant, ex qua huius ſcientiæ cognitionem aſſecuti ſunt. Huiuſmodi igitur ambitum exteriorem terminum vocans Euclides iure, & merito ipſum finem determinauit ſpaciorum. Per hunc enim vnumquodque contentorum præfinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus eſt, & finis; ipſum vero planum aliquod ſpacium eſt, & ſimiliter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini ſunt, & fines; ſpacium vero, quòd his lateribus continetur.

Terminus, & finis.

XIIII.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIUS.

Figurarum aliæ planæ, aliæ ſolidæ; planarum figurarum circulus quidem, & elipſis, ſolidarum ſphæra, & ſphæroides vnico termino, alię pluribus terminis continentur.

Figurarum aliæ planæ, aliæ ſolidæ.

XV.

Circulus eſt figura plana vna linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ pertinentes ſunt æquales.

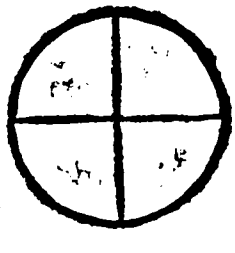
XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIUS.

Circulus planarum figurarum prima eſt, ſimplicitate quidem ſolidis præſtãs; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] *loco generis.* Plana] *ad differentiam figurarum ſolidarum.* Vna linea contenta] *vt differat ab ijs, quæ pluribus lateribus continentur.* Quæ circumferentia appellatur] *per hoc differt ab ellipſi, quæ, & ipſa vna linea continetur, ſed eam ellipſim vocant. Liceat enim mihi nunc ſpacium ellipſi contentum etiam ellipſim appellare.* Ad quam] *ab ellipſis autem centro non plures, quam quattuor rectæ lineæ æquales ad ambitum duci poſſunt.* Ab vno puncto] *ex infinitis punctis, quæ intra figuram ſunt, vnũ dumtaxat hoc præſtare poteſt.* In tra figuram exiſtente] *eſt etiam punctum extra figuræ planum, à quo omnes rectę lineæ ad circumferentiam ductæ ſunt æquales, quod non centrum, ſed circuli polus in ſphæricis appellatur.*



Ellipſis.

Circuli polus.

Diameter

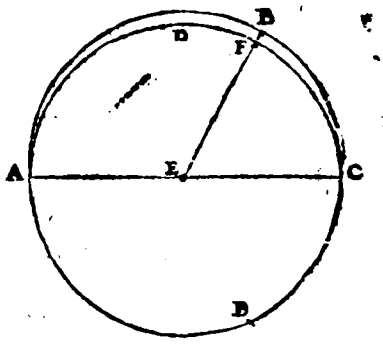
XVII.

Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata quæ quidem, & bifariam circulum ſecat.

F. C. COMMENTARIVS.

Diametri parallelogrammorũ.

Diameter circuli. *Sunt enim parallelogrammorum quoque diametri, ſed hę interdum* διάγωνιος *hoc eſt diagonij appellantur. Sunt, & diametri ellipſis, quarum duę axes dicuntur. Præterea etiam ſphæræ diametri ſunt, quę axes nuncupantur. Circuli igitur propria eſt diameter.* Recta quædã linea per centrum ducta. *poſſunt namque in circulo duci infinitæ rectæ lineæ, quæ per centrum non tranſeunt.* Et ex vtraque parte à circũferẽtia circuli terminata. *Rectę lineæ etiam per centrum ductæ, quę vel citra, vel vltra circumferentiam terminãtur, diametri non ſunt.* Quę, & bifariã circulũ ſecat. *Sit enim circulus A B C D, cuius diameter A C: & ſtante diametro intelligatur circũferentia A B C eleuari, ac ſuperponi circumferentiæ A D C. Dico circumferentiã A B C ipſi A D C congruere. Si enim non congruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, partim intra. Cadat primum extra ſi fieri poteſt: & ex centro circuli, quod ſit E, ducatur E B ſecans circumferentiam A D C in F. quoniam igitur rectæ lineæ à centro ad circumferentiam ductæ inter ſe ſunt æquales, erit recta linea E B æqualis ipſi E F, hoc eſt totum parti quod fieri non poteſt. Quare circumferentia A B C extra ipſam A D C non cadet.*



Similiter demõſtrabimus neque eam cadere intra, neque partim extra partim intra. In ipſam igitur cadat neceſſe eſt: & circumferentia A B C congruet ipſi A D C. Quòd ſi circumferentia circumferentiæ congruit, & ſuperficies contenta recta linea A C, & circumferentia A B C congruet ſuperficiei, quæ eadem A C, & circumferentia A D C continetur. Ex quibus ſequitur per octauam communem notionem, & circumferẽtiam circumferentię, & ſuperficiem ſuperficiei æqualem eſſe. diameter igitur A C circulum A B C D bifariam ſecat. Quod oportebat demonſtrare.

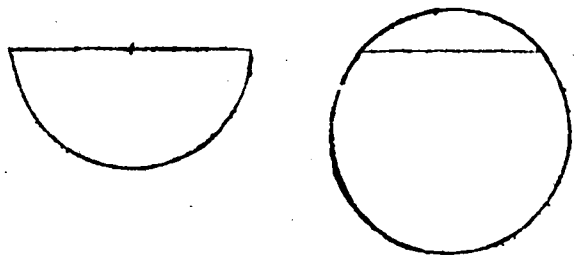
XVIII.

Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea quę ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Portio circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferẽtia continetur.

F. C. COMMENTARIVS.



Ex circuli quidem diffinitione centri naturam inuenit, ab omnibus alijs punctis quę in circulo ſunt differentem; à centro autem, diametrum diffiniuit, & ab omnibus alijs rectis lineis, quæ intra circulum deſcribuntur, ſeiunxit. Nunc autem à diametro quid nam ſit ſemicirculus tradit, cum dicat ipſum contineri duobus terminis, ijſq; ſemper differentibus, videlicet recta linea, & circumferentia: & rectam

& rectam lineam non esse quamlibet, sed circuli diametrum, si quidem, & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia, quę tamen semicirculi non sunt, quoniam circuli diuisio non est facta per centrum. Omnes autem huiusmodi figurę biformes sunt, & ex dissimilibus constant. Figurę enim contentę duobus terminis, vel duabus circumferentijs cõtinentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictę, vel duabus lineis mixtis, vt si duę ellipses se inuicem secẽt, figuram continebunt, quę inter ipsas in terijcitur, vel mixta, & recta, vt ellipsis dimidium. Itaque semicirculus duabus quidem lineis dissimilibus, sed tamen simplicibus, atque ad se se applicatis continetur. Antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito post circulum ad biformes accessit, quoniam duę rectę lineę spacium concludere nunquam possunt, recta autem linea, & circumferentia possunt. Et duę circumferentię similiter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel figuram angulis expertem, vt si duos intelligas circulos idem centrum habentes. Quod enim medium interijcitur spacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cum se inuicem non secent, vt in lunulari, & vtrinque conuexa figura. At verò centrum semicirculi idem esse, quod, & circuli centrum manifeste constat, diameter enim centrum in se habens complet semicirculum. Illud autem notatione dignum solam hanc figurã ex planis in ambitu centrum habere. Vnde colligitur centri tres esse locos, vel enim intra figuram, vt in circulo, & ellipsi, vel in ambitu vt in semicirculo, vel extra, vt in vna sectionum conicarum, videlicet in hyperbola.

Centrũ tres hãt locos.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quę rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

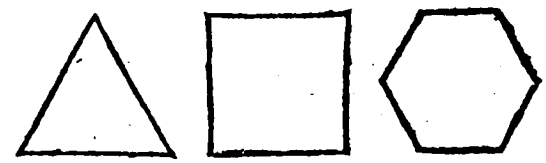
Quadrilateræ, quæ quattuor.

XXIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quattuor rectis lineis cõprehenduntur.

FC. COMMENTARIVS.

Post circulum, semicirculum, & circuli portiones, transit ad figuras rectilineas, quæ quidem ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duę rectæ lineæ spacium concludere non possunt, vti dictum est. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum dumtaxat figurarum, vtpote quę magis elementares sunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas cõmuni nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliæ simplicibus continentur lineis, aliæ mixtis, aliæ vtrisque. Et earum, quæ simplicibus, alię quidem similibus specie continetur, vt rectilinea, aliæ specie dissimilibus, vt semicirculi, & circulorum portiones. Earum insuper, quæ specie similibus alię circulari comprehenduntur linea, aliæ recta. At earum quæ circulari, aliæ duabus, aliæ pluribus continentur, & vna quidem circulus ipse, quæ vero duabus, aliæ angulorum expertes.

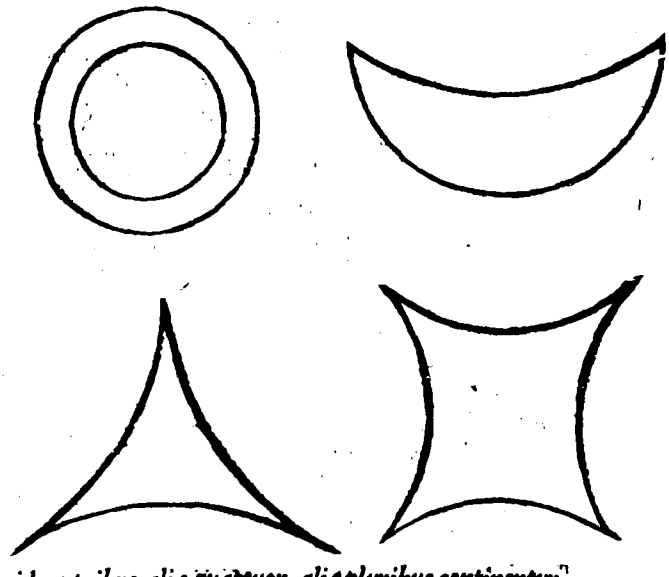


Figurarum planarũ diuisio.

sunt

Corona.

sunt, vt corona, quę cõcentricis circulis terminatur, alię angulares vt meniscus. Earũ quę pluribus, quam duabus continentur, processus est in infinitum: tribus namque, & quattuor, & quę deinceps sũt circumferẽtijs quędam figurę comprehendũtur. si enim tres circuli se se contingant, spaciũ concludũt trilaterũ, quod tribus circũferẽtijs terminatur, si vero quattuor, quattuor circũferentijs, & deinceps similiter. Postremo earum, quę rectis lineis, alię quidem tribus, aliæ quattuor, aliæ pluribus continentur.



XXIIII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, siue æquicrure, quod duo tãtũ æqualia latera habet.

XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulũ quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

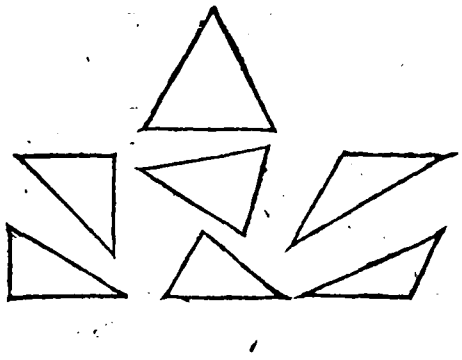
Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

P. C. COMMENTARIVS.

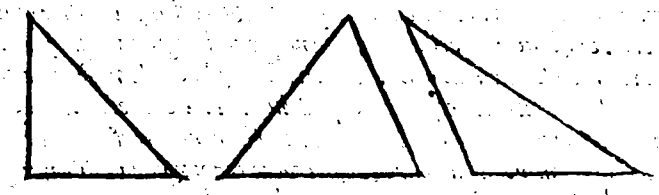
Triangulorum diuisio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & præcedit ea, quæ à lateribus tamquam nota, sequitur autem ea quę ab angulis tamquam propria, quoniam, & tres ipsi anguli, videlicet rectus, obtusus, & acutus solis rectilineis figuris conueniunt: æqualitas verò laterum, & inæqualitas inuenitur etiam in ijs, quæ rectilineę non sunt. Dicit igitur triangulorũ alia esse æquilatera, alia æquicruria, alia scalena, vel enim omnia latera æqualia sunt, vel omnia inæqualia, vel duo tantũ æqualia.



Rursus triangulorum alia rectangula, alia obtusiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod vnum angulum rectum habet, quemadmodum obtusiangulum, quod vnum

habet

habet obtusum, fieri enim non potest, vt triangulum plures vno, vel rectos, vel obtusos angulos habeat: acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim satis est vnicum acutum habere, omnia si quidem triangula hoc modo acutiangula essent, namque omne triangulum duos habeat acutos necesse est, tres autem acutos acutiangulum solum. Ex his diuisionibus colligitur septem tantum esse triangulorum rectilineorum species, & neque plures, neque pauciores. Æquilaterum enim acutiangulum tantum est; reliquorum vero vnumquodque est triplex; nam aquicrure vel rectangulum est, vel obtusiangulum, vel acutiangulum: & similiter scalenum vel rectangulum, vel obtusiangulum, vel acutiangulum.





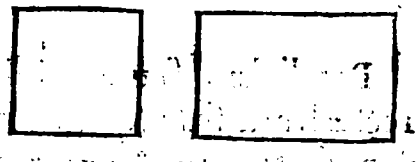
Septē trianguloꝝ rectilineorum species.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratū est quod, & æquilaterū est, & rectangulum.

XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.

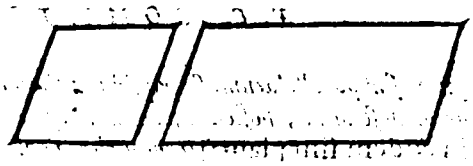


XXXII.

Rhōbus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quę, & oppositalatera, & oppositos angulos inter se equales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

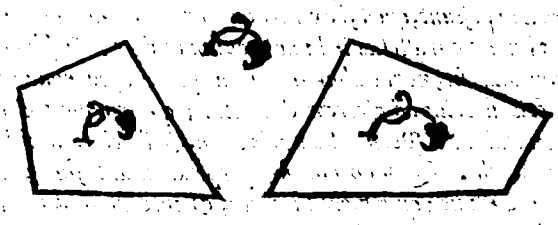


XXXIIII.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quadrilaterarum figurarū aliæ æquilateræ sunt, aliæ non æquilateræ. Rursus aliæ rectangulæ; aliæ non rectangulæ. Quæ igitur æquilateræ, & rectangulæ sunt quadrata appellantur. Quæ vero rectangulæ, & nō æquilateræ, altera parte longiores: & quę æquilateræ, & non rectangulæ, rhombi. Et postremo quę neque æquilateræ, neque rectangulæ latera habent, & angulos, qui è regione sunt inter se æquales, rhomboides vocantur. Alij in hunc modum diuidunt. Quadrilaterarum figurarum aliæ parallelogramma sunt, quæ latera



Quadrilaterarum figurarum diuisio.

Quadratū.

Altera parte longius, Rhombus.

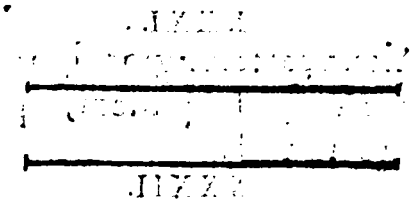
Rhomboides.

Quadrata.
Τετράγωνα.
Rhomboidea.
Rhombus.
Trapezia.
Trapezoidea.
Trapezie aequicruria & Scalena.

tera ex oppoſito parallela habent, non parallelogramma vero, quæ latera parallela non habent. Parallelogrammorum autem alia quidem, & rectangula, & æquilatera ſunt vt quadrata, quæ à græcis τετράγωνα appellantur, alia neque rectangula, neque æquilatera, vt rhomboidea, quę figuram rhombo ſimilem habent. Alia rectangula quidem, ſed non æquilatera, vt altera parte longiora; alia è contrario æquilatera quidem, non autem rectangula, vt rhombus. Non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulla prorſus parallela habent: & illa quidem vocãtur trapezia, hęc vero trapezoidea. Trapeziorum alia quidem latera, quę parallelas lineas coniungunt, æqualia habent, alia vero inæqualia. Et illa æquicruria trapezia, hęc ſcalena trapezia appellantur. Quadrilatera igitur figura ſeptem modis conſtituitur. Nam prima quidem quadratum eſt, ſecunda altera parte longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta æquicrure trapezium, ſexta ſcalenum trapezium, ſeptima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogrãma, & non parallelogramma dividere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogrammo prius tractarit: trapezia autem, & trapezoidea omnia communi nomine appellauit trapezia ad eorum quattuor differentiam, in quibus parallelogrammorum ineſt proprietas, nempe ex oppoſito latera, & angulos habere æquales; quod ipſe in rhomboide tantum poſuit, ne ſolis negationibus ipſum diffiniret, cum dixit, neque æquilaterum, neque rectangulum; in quibus enim proprijs caremus rationibus, communibus vti neceſſarió eſt. Videtur autem rhombus dimotum eſſe quadratum, & rhomboides dimotum altera parte lõgius, propterea quod iuxta latera quidem hæc ab illis non differunt, ſed iuxta angulorũ dumtaxat obtuſitates, & acumina, cum illa rectangula ſint.

In quibus proprijs rõnibus caremus, cõmunibus vtendum.

XXXV.



Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitũ producãtur, in neutram partem inter ſe conueniunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quę nam ſint parallelarum, ſeu æquidiſtantium rectarum linearum elementa, & quibus accidentibus dignoſcantur, poſtea diſcemus. Nunc quę ſint parallelę his verbis diffinit. Quæ cum in eodem ſint plano] *ſi enim altera quidem ſit in ſubiecto plano, altera autẽ in ſublimi iuxta quamuis poſitionem, inter ſe non conueniunt, non tamẽ propterea parallelę ſunt.* Et ex vtraque parte in infinitũ producantur, in neutrã partẽ inter ſe conueniunt] *nam rectę lineę non parallelę ſi vtrinque producantur, non conuenient, in infinitum autem produci, & non conuenire, parallelas deſignat, neque hoc ſimpliciter. ſed ex vtraque parte, in infinitum produci, & non conuenire. Fieri namque poteſt, vt non parallelę etiam ex vna quidem parte in infinitum producantur, ex altera vero minime. Annuentes enim in hac parte, in altera plurimum diſtant. Cauſſa autem hęc eſt, quoniam duę rectę lineę ſpacium aliquod comprehendere non poſſunt, quod ſi ex vtraque parte annuant hoc non continget. Et Euclides quidem rectas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Poſſidonius vero parallelę, inquit, ſunt, quę neque annuũt, neque abnuunt in vno plano, ſed æquales habent omnes perpendiculares, quę à punctis alterius ad alteram ducuntur; quæcunque vero minores faciunt perpendiculares inter ſe conueniunt. Perpendicularis enim, & ſpaciorum altitudines, & linearum interualla determinare poteſt. Quamobrem cum perpendiculares ſint æquales, & rectarum linearum interualla æqualia erunt; cum vero minores, & interuallum minuitur, & conueniunt inter ſe ad eas partes, in quibus perpendiculares ſunt minores. Pitho geometra parallelas rectas lineas explicans non contentus iis, quæ ſcripſit Euclides, eas aptiſſime exemplo declarauit. Dixit enim rectas lineas parallelas eſſe, quales in parietibus, vel pauimento columnarum vmbras à lampade è regione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum ſit vide apud Pe-*

Poſidonius parallelas aliter diffinit.

perpendicularis ſpatiorum altitudines & linearum interualla determinat.

renum

renum in fine libri de sectione Cylindri. Post diffinitiones sequuntur postulata, deinde axiomata, seu communes notiones. Postulata autem, & axiomata, vt refert Proclus ex Gemino illud habent commune, vt non indigeant demõstratione aliqua, aut geometrica fide, sed sumatur tamquã nota, & principia fiant eorum, quae sequuntur. At differunt axiomata à postulatis eodem prorsus modo, quo theoremata à problematibus. Vt enim in theorematibus quidem id, quod subiecta consequitur, perspicere, & cognoscere proponimus; in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur: ita, & in axiomatibus ea sumuntur, per quae sese manifesta sunt, nostrisq; insitis notionibus sunt in promptu; in postulatis vero ea sumere quærimus, quae facilia, parabiliaq; sunt, & in quibus sumendis cogitatio non defatigatur, queq; nulla neq; varietate, neq; constructione indigent.

Axiomata a postula differunt eodẽ modo, quo theoremata á problematib.

POSTVLATA.

I.

Postuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

II.

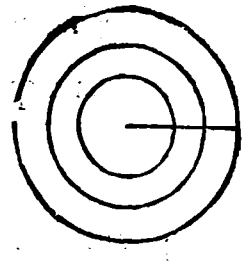
Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quouis centro, & interuallo circulum describere.

F. C. COMMENTARIVS.

Tria hęc & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in postulatis necessario collocanda sunt, ex Gemini sententia. Nam illud quidem, A quouis puncto ad quoduis punctum rectã lineam ducere, sequitur eam diffinitionem, quę tradit lineam esse puncti fluxum, & rectam lineam æquabilem, & non decliuem fluxum. Si igitur intelligamus punctum æquabili, & breuissimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primum postulatum factum erit, nihil vtique varium intelligentibus nobis. Si vero recta linea puncto terminata, similiter intelligamus eius terminum breuissimo, & aequabili motu ferri, secundum postulatum facili, simpliciq; aggressione comparatum erit. Quod si rursus terminatam



rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moueri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet postulatum; centrum namque erit punctum manens, interuallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit interuallum à centro ad omnes circumferentiae partes.

IIII.

Omnes angulos rectos inter se æquales esse.

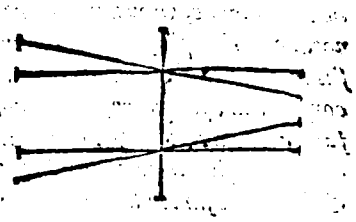
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quamquam vt manifestum, & nulla indigens demonstratione, à nobis concedatur, postulatum tamen non est ex sententia Gemini, sed axioma. Accidens enim quoddam per se rectis angulis dicit, nihil simplici notione facere iubens. Si cui vero non satis constet rectos angulos omnes inter se æquales esse, is petat demonstrationem à Proclo, quam affert in commentarijs. Pappus recte animaduerit huius conuersum non etiam verum esse, nempe angulum recto æqualem omnino esse rectum, nisi rectilineus sit; potest enim curuilineus quoque angulus recto æqualis ostendi.

Et

V.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter se conuenire ex ea parte, in qua sũt anguli duobus rectis minores.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc à postulatis penitus reijciendum censet Proclus, cum theorema sit, quod multas habet, & dubitationes, quas Ptolemæus in quodam libro soluere sibi proposuit. multis vero, & diffinitionibus, & theorematibus in demonstratione indiget, cuius conuersum Euclides etiam tanquam theorema ostendit. sed de hoc inferius suo loco agetur.

AXIOMATA; SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adijciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IIII.

Et si inæqualibus æqualia adijciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualib. æqualia auferãtur, reliqua sũt inæqualia.

VI.

A Et quæ eiusdem dupla, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ eiusdem dimidia inter se sunt æqualia.

VIII.

B Et quæ sibi ipsis congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte maius.

X.

C Duæ rectæ lineæ spacium non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata mathematicis scientijs communia.

Axiomata ferè omnia mathematicis scientijs communia sunt: neque solum in magnitudinibus, sed & in numeris, & motibus, & temporibus vera esse deprehenduntur. Æquale enim & inæquale, totum & pars, maius, & minus, quantitatibus continuis, & discretis communia sunt. Contemplatio igitur quę circa tempora, & quę circa motus, & quę circa numeros, & quę circa magnitudines versatur, his omnibus tamquam manifestis indiget. Communibus autem existentibus vnusquisq; vtitur secundum propriam materiam, quoad ipsa requirit: & alius quidem vt in magnitudinibus, alius, vt in numeris, alius vero, vt in temporibus ipsis vtitur, & hoc modo proprię in vnaquaq; scientia conclusiones fiunt, licet axiomata communia fuerint.

Et quæ eiuſdem dupla inter ſe ſunt æqualia. A

Hoc ex illo ſequitur, Si æqualibus æqualia adijciantur tota æqualia eſſe, nam quæ dimidio ſunt æqualia, cum ipſum dimidium aſſumpſerint eiuſdem dupla fiunt, & inter ſe æqualia ob æquale additamentum: & hac ratione non ſolum dupla, ſed, & tripla, & eiuſdem etiam multiplicia omnia æqualia apparebunt.

Et quæ ſibi ipſis congruunt inter ſe ſunt æqualia. *Hoc geometriæ proprium eſt.* B

Duæ rectæ lineæ ſpacium non comprehendunt. *Hoc non admodum manifeſtum videtur, quare in editione Campani inter peticiones locum obtinuit.* C

His axiomatibus nonnulla alia adijcienda cenſuit Pappus, vt videre licet apud Proclum. Cum autẽ omnis ſcientia duplex ſit. Alia quidẽ circa immediatas propoſitiones verſatur, alia vero circa ea quæ ex illis demonſtrantur, comparanturq́;, & omnino circa ea, quę principia conſequuntur, ſuam perficit tractationem, hæc rurſus in geometricis rationibus ſe ipſam in problematum per actionem, & in theorematum inuentionem diſpertiuit; problemata quidem appellans ea, in quibus, quæ non ſunt quodammodo comparare proponit, in apertumque proferre; & machinari: theoremata vero, in quibus id, quod ineſt, vel non ineſt perſpicere, cognoſcereq́;, ac dẽmonſtrare inſtituit. Et illa quidem ortus, & poſitiones, & applicationes, & diſcriptiones, & circumſcriptiones, & bipartitiones, atque alia huiuſmodi conſtituere iubent; hæc vero ſymptomata, & quæ ſubiectis geometriæ per ſe inſunt, perſuadere, demonſtrationibuſque firmare contendunt. Omne autem problema, & omne theorema perfectum, expletumq́; ſuis partibus, hæc omnia in ſe ipſo habere debet, Propoſitionem, Expoſitionem, Determinationem, Conſtructionem, Demonſtrationem, & Concluſionem. Harum autem Propoſitio dicit quo dato quid quæſitum ſit, perfecta enim propoſitio ex vtriſque conſtat. Expoſitio ipſum per ſe datum aſſumens præparat quæſtioni. Determinatio ſeorſum quæſitum quodnam ſit explicat. Conſtructio ea, quæ dato deſunt ad quæſiti venationem adijcit. Demonſtratio perite ex conceſſis quod propoſitum eſt colligit. Concluſio rurſus ad propoſitionem regreditur confirmans id, quod oſtenſum eſt. Et omnes quidem problematum, & theorematum partes tot ſunt. Maxime autem neceſſariæ, & quæ omnibus inſunt Propoſitio, Demonſtratio, & Concluſio: oportet enim ante cognoſcere quæſitum, perq́; media oſtendere. Et quod oſtenſum eſt concludere. Harum autem trium, vt aliqua deſit, fieri non poteſt. At reliquæ ſæpe aſſumuntur, ſæpe vero, cum nullam afferant vtilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expoſitio non ſunt in illo problemate. Æquicrure triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum duplum reliqui. Conſtructio autem in compluribus theorematibus non eſt, cum ſatis ſit expoſitio abſque alia additione, vt ex datis propoſitum oſtendatur. Quando igitur deficere expoſitionem dicimus? cum in propoſitione nullum fuerit datum. Quamquam enim propoſitio diuidatur in datũ, & quæſitũ, non tamen hoc ſemper fit, ſed aliquando ſolum dicit quæſitum, quod cognoſcere, vel comparare oportet, vt in iam dicto problemate. Non enim ante dicit, quo dato oporteat æquicrure triangulum conſtituere, habens vtrumque æqualium angulorum duplum reliqui, ſed tantum quod oportet illud comparare. Et fit quidem etiam hoc loco ex ante cognitis propoſiti ſumptio. Etenim quid æquicrure, & quid æquale, vel duplum ſit cognoſcimus. Hoc autem omni dianoiticę diſcipline proprium eſſe dicit Ariſtoteles. Nihil tamen nobis ſubijcitur, quemadmodum in alijs problematibus, vt quando dicit, Datam rectam lineam terminatam bifariã ſecare. Hic enim recta linea data eſt, iubemur autem ipſam bifariam diuidere. Seorſum igitur ponitur datum, & ſeorſum quæſitum. Cum autem propoſitio vtrumque habuerit, tum, & determinatio inuenitur, & expoſitio; ſed cum deficit datum, & hæ deficiant neceſſe eſt. Expoſitio etenim eſt dati, & determinatio, quę propoſitioni eadem erit. Nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, niſi quod æquicrure triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propoſitio. Si igitur propoſitio non habeat datum, & quæſitum, expoſitio quidem tacetur, quod non ſit datum; determinatio vero prætermittitur, ne eadem fiat, quę propoſitio. Multa autem alia inueniaſ huiuſmodi problemata, preſertim in arithmeticis, & in decimo libro, vt inuenira duas rectas lineas potentia commenſurabiles, quæ medium comprehendãt, & omnia, quæ eiuſmodi ſunt. Animaduertendum tamen Archimodem quidem ſępe, vt in libro de quadratura parabolæ, Pappum vero ferè ſemper propoſitionem ipſam omittere, contentos ex poſitione, ac determinatione, loco propoſitionis. Datum autem omne, vno horum modorum datur vel poſitione, vel proportione, vel magnitudine, vel ſpecie: punctum enim duntaxat poſitione datur, linea vero, &

omne problema, & ẽ ne theorema perfectũ ex habet partes.

Propoſitio, demonſtratio, & concluſio maxime neceſſariæ

Cõſtructio deeſt, cum expoſitio ſatis fit.

Archimedes & Pappus aliqãdo propoſitionem omittunt.

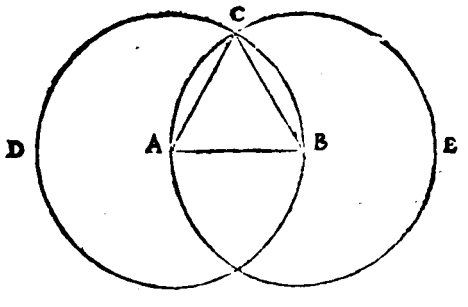
Specie. alia omnibus. Nam cum dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciem anguli, quæ data est, significamus, nempe rectilineam, vt ne quæramus eisdem methodis etiam curuilineum āgulum bifariam secare. Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inæqualibus à maiori æqualē minori abscindere, magnitudine datæ sunt. Maius enim, & minus, terminatum, & infinitum ad magnitudinem referuntur. At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales sint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus, & cum dicimus. Ad datum punctum oportet datæ lineæ æqualem rectam lineam ponere, punctum positione datur. Quare compositio varia esse possit, & constructio variabitur; datur enim punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipsius terminos. Itaque cum datum quadrupliciter sumatur, & expositio quadrupliciter fit, & quandoque duos etiam, & tres modos complectitur. Demonstratio vero interdum quidem quæ demonstrationis propria sunt habere inuenietur, ex definitionibus medijs quæsitum ostendens; hæc enim demōstrationis perfectio est. Interdū vero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet, vbique enim geometricæ rationes necessitatem habent ob subiectam materiam, non vbique vero demonstrantibus methodis perficiuntur. Denique conclusio duplex esse solet, particularis, & vniuersalis. Nam cum in dato conclusionē fecerimus, ne videamur particularia proposuisse, ad vniuersalem transimus conclusionem. Verum cum hæc ita determinata sint, de ijs quæ ipsis adnectuntur, breuiter disseremus, nempe quid sit lemma, quid casus, quid corollarium, quid instantia, quid deductio. Lemma vel sumptio proprie in geometricis est propositio fide indigens. cū enim vel in constructione, vel in demonstratione aliquod sumimus eorum, quæ ostensa non sunt sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, veluti per se ambiguum inquisitione dignum esse arbitrati, lemma ipsum appellamus, à postulato, & axiomate differens quatenus demonstrari potest, cum illa absque demonstratione ad aliorum fidem faciēdam per se sumantur. Casus autem differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat, nimirum transpositis punctis, vel lineis, vel planis, vel solidis, & omnino ipsius varietas circa descriptionem versatur; ac propterea dicitur casus, quod sit constructionis transpositio. Corollarium vero dicitur quidem, & de quibusdam problematibus, qualia sunt corollaria Euclidi ascripta, Sed proprie dicitur corollarium, quando ex demonstratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propositum non est; & corollarium ob id vocant, quod sit tanquam lucrum quoddam accedens præter demonstrationis propositum. Instantia vero totum orationis impedit cursum, vel constructioni, vel demonstrationi occurens, quam tamen non oportet vt veram admittere, sed remouere, & ostendere falsam esse. Deductio autem est transitus ab alio problemate, vel theoremate ad aliud, quo cognito, vel comparato etiam illud, quod propositum est, apparet, vt cum quæreretur cubi duplicatio transtulerunt quæsitum in aliud, quod hoc consequitur, videlicet in duarum mediarum inuentionem. Et deinceps quæsierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duæ mediæ proportionales inueniantur.

Magnitudine. Proportione. Cū positio varia sit, & constructio variabitur. Demonstratio perfecta. Geometricę rationes necessitatē habēt ob subiectam materiam. cōclusio duplex. Lemma. Casus. Corollariū. Instantia. Deductio. Cubi duplicatio

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū cōstituere.

Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipsa AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A interuallo autem A B circulus describatur BCD. Et rursus centro B, interualloq; BA describatur circulus A CE, & à puncto C, in quo circuli se inuicem secant ad AB ducantur rectæ lineæ CA CB. Quoniam igitur A cētrum est circuli CBD, erit AC ipsi AB æqualis. rursus quoniā B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA ostensa est autem, & CA æqualis AB. vtra quæ igitur ipsarū CA CB ipsi AB est æqualis. Quæ autē eidē sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo CA ipsi CB est æqualis. tres igitur CA AB BC inter



ter se sunt æquales; ac propterea triãgulum æquilaterum est ABC, & constitutum est in data recta linea terminata AB, quod fecisse oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ea omnia, quę ante dicta sunt, in hoc primo problemate contemplari licet. Nam problema esse manifesto appareat: imponit enim nobis triãguli æquilateri ortum machinari. Et propositio ex dato; & quæsito constat. Datur enim recta linea terminata, quæritur autẽ quo pacto in ipsa triangulum æquilaterum constituatur. Et præcedit quidem datum, sequitur autem quæsitum, vt coniunctum etiam texere possis, si est recta linea terminata, fieri potest vt in ipsa constituatur triangulum æquilaterum. Nequè enim non recta existente triangulum constituetur, quod ex rectis lineis constat, neque non terminata; angulus enim fieri non potest, nisi ad vnum punctum, infinitæ autem extremum punctum non est. Post propositionem sequitur expositio. Sit data recta linea terminata AB] *& vides expositionem datum solum explicare, non etiam quæsitum adiungere, post quam determinatio* [oportet in data recta linea triangulũ æquilaterũ constituere] *determinatio autem quodammodo attentionis est causa, attentiores enim ad demonstrationem nos reddit quæsitum pronunciando, quemadmodum expositio dociliores efficit, datum ante oculos ponendo. Post determinationem constructio sequitur* [centro quidẽ altero rectæ lineæ termino; interuallo autẽ reliquo circulus describatur, rursusq; cẽtro quidem reliquo, interuallo autem eo, quod prius cẽtrũ erat describatur circulus, & à communi sectionis circulorũ pũcto ad lineę terminos rectæ lineæ ducantur] *& vides me ad constructionem vti postulatis, videlicet à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere. Et quouis centro, & interuallo circulum describere. Vniuersè enim postulata cõstructionibus, axiomata vero demonstrationibus vtilitatẽ afferunt. Deinde sequitur demonstratio, quæ ex circuli diffinitione, & illo axiomate. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia, concludit tres rectas lineas CA AB BC inter se esse æquales. Vnde colligitur triangulum ABC æquilaterum esse, atque hæc est prima conclusio, quę expositionem consequitur; post hanc est ipsa vniuersalis.* [in data igitur recta linea triangulum æquilaterum cõstitutum est.] *siue enim duplam eius, quæ nunc exposita est, feceris datam, siue triplam, siue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; eadem constructiones, & demonstrationes congruent. His apposuit particulam* [quod fecisse oportebat. *Ostendens conclusionem problematicam esse; etenim in theorematibus apponit.* Quod ostendisse oportebat. *Namque illa factionem alicuius, hæc demonstrationem, & inuentionem denuntiant. In vno igitur hoc primo problemate omnia examinare voluimus, ac perspicua facere. Oportet autem illos, qui hæc legẽt, in reliquis eadem quærere, & quæ nam eorum assumantur, quænamue omittantur, & id, quod datum est, quotupliciter detur: & ex quibus principijs vel constructiones, vel demonstrationes pendeant: horum enim perspicax contemplatio non paruam exercitationem, geometricarumq; rationum meditationem affert. Sed fortasse non inutile erit reliqua etiam triangula constituere.*

Propositio quæ ex dato, & quæsito constat.

Expositio.

Determinatio.

Cõstructio

Postulata constructionibus vtilia

Demonstratio.

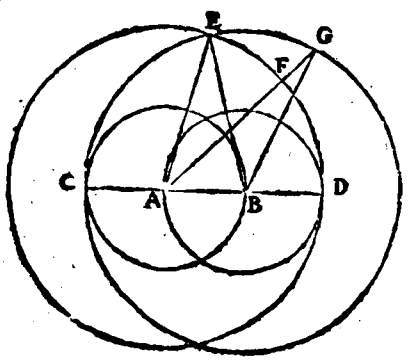
Conclusio prima, & particularis.

Conclusio vniuersalis.

Quod fecisse oportebat.

Quod ostẽdisse oportebat.

Et primum æquicrure. Sit igitur AB, in qua oportet æquicrure triangulum constituere. Et describantur circuli, vt in æquilatero, producaturq; AB ex vtraque parte ad CD puncta. Æqualis igitur est CB ipsi AD. Quare centro quidem B, interuallo autem CB circulus CE describatur. Et rursus centro A, & interuallo DA describatur circulus DE. Et à puncto E, in quo se se circuli secant ad AB puncta ducantur EA EB. quoniam igitur EA æqualis est ipsi AD, & EB ipsi BC; æqualis autem AD ipsi BC: erit, & EA ipsi EB æqualis. Sed, & maiores sunt quàm AB. Æquicrure igitur triangulum est ABE quod fecisse oportebat. At propositum sit scalenũ constituere triangulum in data recta linea AB,



Æquicruris trianguli constitutio.

& describãtur circuli centris interuallisque, vt in superioribus. Et sumatur in circumferentia circuli, A centrum habentis, punctum F, & ducta AF producatur ad G, & GB iungatur.

Scaleni triãguli constitutio.

quoniam igitur A centrum est circuli D E, erit A F ipsi A D æqualis. Maior igitur est A G quã A D, hoc est quàm G B. Centrum enim est ipsum E circuli C E. Ergo G B est æqualis B C, ac propterea G B quàm B A maior. At G A maior quàm G B. Tres igitur C B B A A G inæquales sunt. Quare scalenũ triangulũ est. Tria igitur triangula sunt constituta. Sed hæc diuulgata sunt. Illud vero in his pulchrum inuenitur. Triangulum scilicet æquilaterum vndequaque æquale existens vnico modo constitui, Æquicrure autem in duobus tantum lateribus æqualitatem habens, constitui dupliciter; data namque recta linea, vel ambabus æqualibus minor est, vt nos posuimus, vel maior: scalenum vero vndique inæquale existens tripliciter constitui. Vel enim data recta linea maxima est, vel minima trium, vel altera quidem maior, altera vero minor. Et licet in vna quaque harum positionum vel protendenti, vel contrahenti se exercere. Nobis autem quæ sunt exposita sufficiant. At si vniuerse contemplabimur dicemus, problematum alia quidem simpliciter, alia vero multipliciter, & alia infinite constitui, & ea, quæ simpliciter constituuntur (vt inquit amphinomus) ordinata appellantur, & quæ constituuntur multipliciter, media, quæ vero finite, inordinata vocantur. Vide reliqua apud Proclum, fortasse enim hæc satis superq;.

Æqlaterũ triangulum vnico modo costit.

Æquicrure dupliciter.

Scalenum tripliciter.

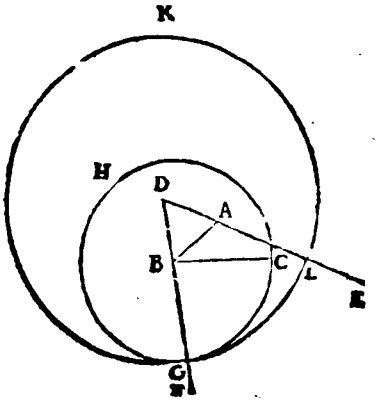
Problemata ordinata.

Media Inordinate.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datũ punctũ datæ rectæ lineæ æqualẽ rectã lineã ponere.

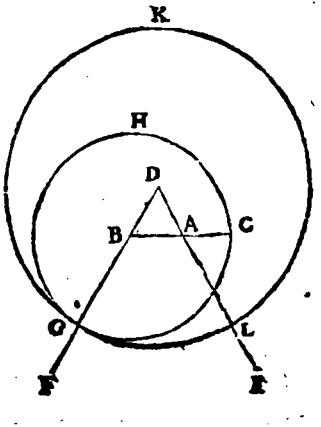
Sit datum quidem pũctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A pũctũ ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineã ponere. Ducatur à puncto A ad B recta linea A B: & in ipsa constituatur triangulum æquilaterum D A B, producãturq; in directum ipsis D A D B rectæ lineæ A E B F. & centro quidem B, interuallo aũt B C circulus C G H describatur. Rursusq; centro D, & interuallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B centrum est C G H circuli, erit B C ipsi B G æqualis. Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L aequalis D G: quarum D A est aequalis D B. reliqua igitur A L reliquae G B est aequalis. Ostensa autem est B C aequalis B G. Quare vtraque ipsarum A L B C est aequalis ipsi B G. Quae autem eidem aequalia sunt, & inter se sunt aequalia. Ergo, & A L est aequalis B C. Ad datum igitur punctum A datae rectae lineae B C aequalis posita est A L. Quod facere oportebat.



Postul. 1.
Prima huius.
Postul. 2.
3.
Diffin. 15.
Com. no. 3.
Com. no. 1.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematum, & theorematum alia quidem sine casu sunt, alia vero multos habent casus. Quæcunq; igitur eandem vim habent per plures descriptiones peruadentem, & positiones permutantia eandem demonstrationis rationem seruant, hæc casum habere dicuntur. Quæcunq; vero iuxta vnam dumtaxat positionem, vnamq; constructionem procedunt, ea sunt sine casu. Simpliciter enim casus circa constructionem tum theorematum, tum problematum consideratur. Secundum igitur problema multos habet casus. Datur autem in ipso punctum quidem positione, eo enim tantum modo dari potest; linea vero specie, & magnitudine datur. Quæritur autem rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere ad datum punctum, vbicunque situm fuerit. Et constat omnino punctum illud in eo-

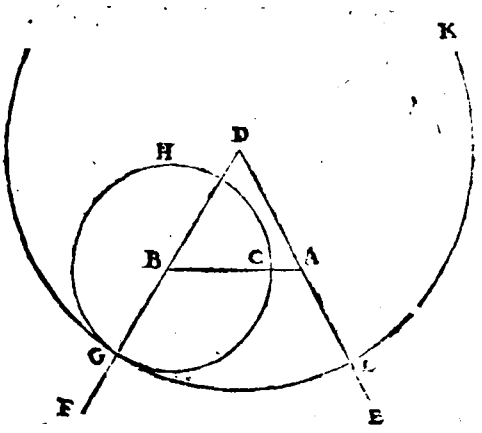


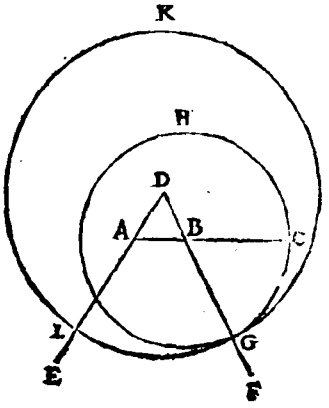
Problematum & theorematum alia sunt sine casu, alia multos habent casus.

Secũdũ problema multos habet casus.

dem

dem esse plano, in quo & recta linea, non autem in sublimi. Omnibus si quidem planorum problematibus, & theorematibus vnum subijci planum existimare oportet. At vero huius problematis casus fieri iuxta puncti dati differentem positionem manifestum est. aut enim punctum extra rectam lineam ponitur, aut in ipsa. Et siquidem in ipsa, vel in altero eius termino, vel intra terminos, si vero extra rectam lineam, vel à lateribus ponitur, ita vt ab eo ad terminum rectæ lineę ducta angulū faciat; vel in directum ipsi siue à fronte, siue à tergo, ita vt producta linea ad dictū punctū pertineat. Euclides autem pūctū datū extra rectam lineam sumpsit, atque à lateribus. Si enim in ipsa, frustra duceretur à puncto A ad B recta linea, quippe quę iam ducta esset. At si in recta linea B C punctum sumatur inter B C, vel in directum ipsi, producta nimirium B C ad A, similiter in ipsa B A constituetur triangulum æquilaterum D A B: latera autem eodem protendentur modo, & demonstratio eadem erit. Quòd si loco trianguli æquilateri, æquicruri vti libeat, nihilo minus eadem sequentur. Denique si punctum datum fuerit in altero rectae lineæ termino, non opus erit neque triangulo, neque altero circulo, sed sola descriptio vnius circuli satis erit. Centro .n. dicto termino, in quo est punctum datum, interuallo autem reliquo, si circulus describatur, quot quot ab eo ad circumferentiam rectae lineę ductae fuerint, problema efficient.



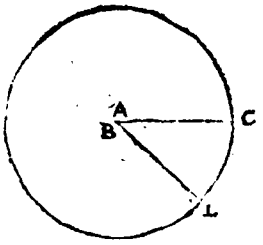


Aequicruri triangulo pro æquilatero vti licet.

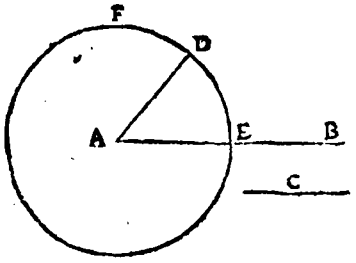
PROBLEMA III.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à maiori minori æqualem abscindere.



Sint datae duae rectae lineę inaequales ABC; quarū maior sit AB. oportet à maiori AB minori C aequalem rectam lineā abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C aequalis recta linea AD, & centro quidem A, interuallo autem AD circulus describatur DEF. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD aequalis. Sed & C aequalis AD. Vtraquo igitur ipsarum AE C ipsi AD aequalis erit. Quare & AE ipsi C est aequalis. Duab. igitur datis rectis lineis inaequalibus AB C à maiori AB minori C aequalis Abscissa est AE. Quod fecisse oportebat.



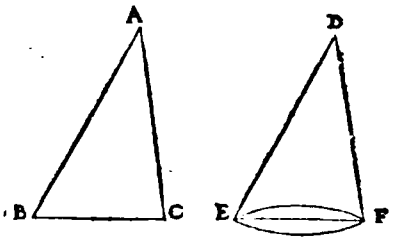
Ex antecedente.

post 3

Com. not. 1

THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeãt, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur; & basim basi æqualẽ habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula A B C D E F, quę duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterũ alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipsi D F; & angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico, & basim B C basi E F æqualem esse. & triangulum A B C æquale triangulo D E F, & reliquos angulos reliquis ãgulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angu-

B lum A B C angulo D E F: & angulum A C B angulo D F E triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, & puncto quidẽ A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: & punctũ B puncto E congruet; quod A B ipsi D E sit equalis. Congruente autem A B ipsi D E; congruet. & A C recta linea rectę lineę D F cũ angulus B A C sit æqualis angulo E D F. Quare, & C congruet ipsi F: est enim rursus recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & basis B C basi E F congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F; basis B C basi E F non congruit: duæ rectæ lineæ spaciũ cõprehendent: quod fieri nõ potest. Cungruet igitur B C basis, basi E F, & ipsi æqualis erit Quare, & totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent & ipsis æquales erunt. Videlicet angulus A B C angulo D E F, & angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant. alterum alteri, habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri a, quibus æqualatera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

Com.no.10

F. C. COMMENTARIVS.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterũ alteri. *In hac propositione duo sunt, quę dantur, videlicet duorum laterum equalitas, & æqualitas eorum angulorum, qui equalibus lateribus continentur. Quę quidem proportione dari manifestum est. Quæruntur autem tria, equalitas basium, æqualitas triangulorum, equalitas reliquorum angulorum. Sed quoniam fieri potest vt duo quidem latera duob. lateribus sint equalia, theorema autem verum non sit, quòd non alterum alteri est æquale, sed vtraque simul: propterea addidit, equalia esse latera non simpliciter, sed alterum alteri.*

B Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, & puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: & punctum B puncto E congruet, quod A B ipsi D E sit æqualis, & reliqua.

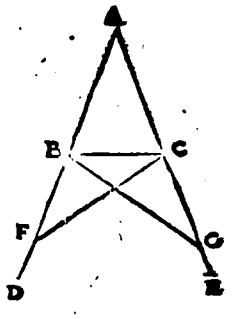
Demonstratio per superpositionẽ figurarũ matematicis visitata.

Hic demonstrationis modus, qui fit per superpositionem figurarum præterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui mathematicis. Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro gravitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus, & sphæroidibus.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Æquicrurium triangulorum qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, & producãtur indirectũ ipſis A B A C rectę lineę B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum vero C B D angulo B C E æqualem eſſe. Sumatur enim in linea B D, quod vis punctum F: atquè à maiori A E minori A F æqualis auferatur A G: iungãturq; F C, G B. Quoniam igitur A F quidem eſt æqualis A G; A B vero ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B æquales ſunt, altera alteri; & angulum F A G cõmunem continent Baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis; & triangulum A F C æquale triangulo A G B; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus vero A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G eſt æqualis; quarũ A B eſt æqualis A C; erit & reliqua B F reliquæ C G æqualis. Oſtenſa eſt autem F C aequalis G B. duae igitur B F, F C duabus C G G B aequles sũt, altera alteri; & ãgulus B F C aequalis ãgulo C G B: eſtq; baſis ipſorum B C communis. Ergo & triangulum B F C triangulo C G B aequale erit; & reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri; quibus aequalia latera ſubtenduntur. Angulus igitur F B C eſt aequalis angulo G C B; & angulus B C F angulo C B G. Itaq; quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F aequalis oſtenſus eſt, quorũ angulus C B G eſt aequalis ipſi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B aequalis: & ſunt ad baſim A B C trianguli: oſtenſus autem eſt & F B C angulus aequalis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. Aequicrurium igitur triangulorũ, qui ad baſim anguli inter ſe ſunt aequales, & productis aequalibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſubbaſi inter ſe aequales erũt. Quod oſtendiſſe oportebat.

3. Huius

Ex præcedente.

Axioma. 3.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

F. C. COMMENTARIUS.

Theorematum alia ſimplicia ſunt, alia compoſita. Dico autem ſimplicia quæcunque iuxta poſitiones, & concluſiones indiuidua ſunt, vnum habentia datum, & vnum quæſitum. Vt ſi Euclides ita dixiſſet. Omne triangulum æquicrure æquales habet, qui ad baſim ſunt, angulos. Compoſita verò ſunt, quæ ex pluribus conſtantia, vel poſitiones habent compoſitas, vel concluſiones, vel etiam vtraſque. Compoſitorum autem alia ſunt complexa, alia incomplexa. Incomplexa ſunt quæcunque in ſimplicia theoremata diuidi non poſſunt, cuiuſmodi eſt quartum theorema; in eo enim & datum componitur, & quæſitum, ſed datum in ſimplicia diuidi minime poteſt, vt plura fiant theoremata: non enim ſi triangula æquales habeant angulos, vel eum dumtaxat, qui eſt ad verticem, reliqua contingunt. Complexa vero ſunt quęcunqne in ſimplicia diuiduntur, vt illud theorema, Triangula, & parallelogramma quæ eãdem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes. Fieri n. poteſt, vt diuidentes ita dicamus. Triangula quę eãdem habent altitudinem inter ſe ſunt, vt baſes; & in parallelogrammis ſimiliter. Omnium autem compoſitorum alia quidem iuxta concluſionem componuntur, ab eadem poſitione ortum habẽtia; alia vero iuxta poſitiones, & eandem omnibus concluſionem inferunt; & alia iuxta concluſiones, & poſitiones componuntur. Itaque iuxta concluſionem compoſitio eſt in quarto theoremate. In eo enim tria ſunt quę concludũtur, videlicet baſes æquales eſſe, & triangula æqualia, & reliquos angulos reliquis angulis æquales; quibus æqualia latera ſubtenduntur. Iuxta poſitiones compoſitio inuenitur in theoremate, quod triangulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commune eſt. Iuxta vtraſque autem in illo.

Theoremata ſimplicia

Theoremata cõpoſita.

Compoſit. Theo. alia complexa, alia incomplexa.

Complexa theorema.

Theorema c mpoſitũ iuxta concluſionem.

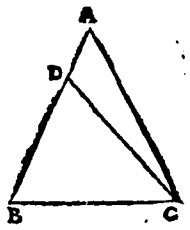
The. cõpo. iuxta poſitiones.

in illo. Diametri circulorum, & ellipſium tum ſpacia, tum lineas ſpacia continentes bifariam diuidũt. Rurſus complexorum theorematum alia vniuerſalia ſunt, alia ex particularibus vniuerſale concludunt. Omnino autem has compoſitiones geometræ ob breuitatem, ac reſolutiones excogitarunt. Multa enim cum incompoſita ſint, non reſoluuntur: compoſita verò ſolum commoditates præbent ad reſolutionem, quæ in principia tendit. His igitur conſideratis apparet quintũ theorema compoſitum eſſe, tum iuxta datum, tum iuxta queſitum, & vtrumque eorum, quæ cõponuntur perfectum eſt ac verum. Quamobrem reſolutio quoque vera eſt in vtroque. Siue enim qui ad baſim anguli, ſint productis æqualibus rectis lineis anguli ſub baſi æquales ſint, æquicrure triangulum erit. Huius theorematis inuentor fuit Thales, vt refert Proclus. Is enim primus dicitur animaduertiſſe omnis æquicruris angulos qui ad baſim eſſe æquales, ac more antiquorum æquales ſimiles appellaſſe.

Complexorum theorematum alia vniuerſalia, alia ex particularibus vniuerſale concludunt Thalesquinti theorematis inuẽtor.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.



Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe; ſi .n. inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt maior. Sit maior AB; atquè à maiori AB minori AC æqualis auferatur DB; & DC iungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AE; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB. Baſis igitur DC baſi AB eſt æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus maiori, quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod demonſtraſſe oportuit.

3. huius

4. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Preſens theorema duo hæc in primis oſtendit, theorematum ſcilicet conuerſionem, & deductionem ad id, quod fieri non poteſt. Conuertitur enim præcedenti theoremati, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, demonſtratur. Conuerſio autem apud Geometras proprie dicitur, quando concluſiones, & poſitiones viciſſim in theorematibus tranſmutantur, & quod prioris eſt concluſio, in poſteriori poſitio fit: & contra poſitio tanquam concluſio infertur. Vt in illo, Æquicrurium triangulorum, qui ad baſim anguli æquales ſunt. Poſitio quidem eſt æquicrure triãgulum: concluſio autem triangulorum, qui ad baſim ſunt æqualitas. Et quorum anguli qui ad baſim æquales; ea æquicruria ſunt, vt in hoc theoremate, in quo poſitio quidem eſt, angulorum, qui ab baſim, æqualitas; concluſio autem æqualitas laterum, quę æqualilibus angulis ſubtenduntur. Eſt etiam alia conuerſio iuxta quandam dumtaxat compoſitorum tranſmutationem. Si .n. ſit theorema compoſitum à pluribus poſitionibus incipiens, & in concluſionem deſinens, ſumentes concluſionem, & vnam expoſitionibus, vel etiam plures; concluſionem faciunt aliquam reliquarum poſitionum. Et hoc modo quarto theoremati octauum conuertitur. In illo enim ponuntur quidem duo latera æqualia, & angulus angulo æqualis, qui æqualibus lateribus continetur: concluditur autem baſim baſi æqualem eſſe. At in octauo ponuntur duo latera æqualia; baſiſq; baſi æqualis, & concluditur angulum, qui æqualibus lateribus continetur, æqualem eſſe. Cum igitur duę ſint conuerſiones, ea quæ proprie ſic dicitur, vniformis eſt, & determinata; altera vero varia, & non in vno, ſed in multis conuertens ob multitudinem poſitionum, quę in compoſitis theorematibus ſunt. Theorematum vero, quę conuertuntur, alia præcedentia vocare conſueuerunt; alia conuerſa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquod de ipſo ſymptoma demõſtrãt, hoc præcedens appellatur, & cum è contrario poſitionem quidem faciunt ſymptoma; concluſionẽ vero genus, cui illud accidit, conuerſum vocatur. Vt omne triangulum æquicrure angulos qui

Hoc theorema præcedẽti conuertitur.

Conuerſio apud Geometras quæ proprie dicatur.

Connerſio alia.

Quarto octauum cõuertitur.

Theorematũ qui conuertũtur, alia precedẽtia ſunt alia conuerſa.

ad

ad baſim ſunt, æquales habet. Hoc præcedens eſt. Omne triangulum duos angulos æquales habẽs, latera quoque æquales angulos ſubtendentia habet æqualia, & eſt æquicrure. Hoc conuerſum eſt. Et hæc de cõuerſionibus geometricis dicta ſufficiant. Deductiones vero id, quod fieri non pot, in euidens abſurdum deſinunt, & cuius oppoſitam omnes fatentur. Accidit autem ipſarum alias deſinere in ea, quæ communibus notionibus, vel poſtulatis vel, poſitionibus opponuntur; alias in ea, quæ prius demonſtratis contradicunt. Nam ſextum hoc theorema, quod accidit fieri non poſſe oſtendit, cum deſtruat communem notionem illam: Omne totum eſt maius ſua parte. Octauum vero deſinit quidem in id, quod fieri non poteſt; non tamen deſtruit communem notionem, ſed id quod per ſeptimum theorema oſtenſum eſt. Quod enim ſeptimum fieri poſſe negauit, hoc illud affirmãs conſequi oſtendit iis, qui quæſitum non concedunt. Omnis autem deductio ad id, quod fieri non poteſt, ſumens quod cum quæſito pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti abſurdo occurrat, perq; illud poſitionem deſtruens, confirmat id quod à principio quæ rebatur. omnino enim ſcire oportet mathematicas probationes omnes vel à principijs eſſe, vel ad principia: vt etiam inquit Porphyrius. Et quæ à principijs ſunt, itidem duplices eſſe. Aut enim ex communibus notionibus, & ſola euidentia per ſe fidem faciente emanant; aut ex iis, quæ ante oſtenſa fuere. Quæ vero ad principia aut principia ponunt, aut deſtruunt, quæ principia ponunt reſolutiones vocantur; atque his opponuntur compoſitiones. Fieri enim poteſt, vt à principijs illis ad quæſitum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud eſt, niſi compoſitio: quæ vero principia deſtruunt, deductiones ad id, quod fieri non poteſt nuncupantur. Aliquid. n. eorum, quæ conceſſa, manifeſtaque ſunt deſtruere huius ipſius viæ munus eſt: atque eſt hac ſyllogiſmus quidam, ſed non idem, qui in reſolutione. Nam in deductionibus ad id, quod fieri non poteſt iuxtà ſecundum hypotheticarum ratiocinationum modum complexio eſt. Vt ſi triangulorum æquales angulos habentium latera æquales illos angulos ſubtendentia æqualia non ſint: totum parti eſt æquale. Atqui hoc fieri non poteſt. triangulorum igitur duos angulos æquales habentium latera quoque æquales angulos ſubtendentia æqualia erunt. Vtitur autem Euclides conuerſione quidem in propoſitione ipſa; vtpote qui concluſionem quinti theoretis, vt datum accipiens, poſitionem illius adiunxit, vt quæſitum; deductione autem ad id, quod fieri non poteſt in conſtructione, & demonſtratione vtitur. hæc ex Proclo.

Deductiones ad id, quod fieri non poteſt in euidens abſurdum deſinunt.

Mathematicæ probationes vel a principij ſunt vel ad principia.

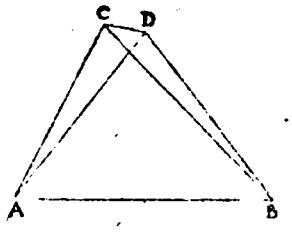
Reſolutiões compoſitiones.

Deductiones ad id, quod fieri non poteſt.

THEOREMA. IIII. PROPOSITIO. VII.

In eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non conſtituentur ad aliud, atq; aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

Si enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB duabus eiſdem rectis, lineis AC CB aliae duae rectae lineæ AD DB aequales, altera alteri conſtituantur ad aliud, atq; aliud punctum C D; ad eaſdem partes vt ad C D, eoſdem habentes terminos A B, quos prima rectæ lineæ, ita vt C A quidem ſit aequalis D A, eundem, quem ipſa terminum, habens A; C B vero ſit aequalis D B, eundem habens B terminum; & C D iungatur. Itaque quoniam A C eſt aequalis A D; erit, & angulus A C D angulo A D C aequalis. Maior igitur eſt A D C angulus angulo D C B. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior erit. Rurſus quoniã C B eſt aequalis D B, & angulus C D B aequalis erit angulo D C B: oſtenſus autem eſt ipſo multo maior; quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliae duae rectae lineae aequales, altera alteri conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primae rectae lineae, terminos habentes; quod oſtendiſſe oportebat.



5. huius.

FC. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propoſitionibus, quæ ſcientiam parium

parium euenire consueuit. Per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quaquam ipsarum proprium est, cum propositiones geometricorum, arithmeticorumq; theorematum magna ex parte affirmationes sint. Causa autē est (vt inquit Aristoteles) quoa vniuersale affirmans scientijs maxime cōuenit, tanquam magis idoneum, & non indigens negatione. At vniuersale negans etiam affirmatione indiget. Ex negantibus enim tantum neque demonstratio, neque ratiocinatio aliqua constat: ac propterea demonstrantes scientię plurima affirmantia ostendunt: raro autem negantibus conclusionibus vtuntur. hęc Proclus. Theorema vero multos habet casus. Nam punctum D vel cadit extra lineas A C C B, vel intra, vel in ipsis. Et siquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum A C C B secat alteram ipsarum A D D B, aut neutra neutram secat. Cadat primum extra, secetq; A D ipsam C B, vt apparet in prima figura, & iungatur C D. Cui quidem constructioni Euclidis demonstratio congruit. Sed cum ea breuis, & quodammodo obscura quibusdam visa sit, planius, & apertius sic explicabitur. Itaque quoniam A C est æqualis ipsi A D, erit angulus A C D angulo A D C æqualis. Angulus autem A C D maior est angulo D C B; quippe quòd totum maius sit sua parte. Angulus igitur A D C angulo D C B est maior. Sed C D B angulus eadem ratione maior est angulo A D C. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior sit necesse est. Rursus quoniam B C est æqualis B D; erit, & angulus C D B æqualis angulo D C B. atqui ostensus est multo maior; quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur idem sequi absurdum si recta linea B D secet ipsam A C. Cadat deinde punctum D extra lineas A C C B, ita vt neutra neutram secet; & producantur rectæ lineę A C A D in puncta E F. Quoniam igitur A C est æqualis A D, angulus A C D ad basim angulo A D C æqualis erit; & productis A C A D, erit angulus F D C sub basi æqualis angulo D C E. Rursus cum B C sit æqualis ipsi B D, angulus B C D angulo B D C est æqualis. Sed F D C angulus maior est angulo C D B. Quare, & D C E ipso D C B est maior, pars scilicet toto; quod fieri non potest. Non aliter demonstrabimus sequi absurdum, si punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipsis cadere non posse mænifesto constat. totum enim parti esset æquale. Videtur autem hoc, vt inquit Proclus, lemma esse octaui Theorematis: siquidem ad illius demonstrationem confert, & neque simpliciter elementum est, neque elementare: non enim ad plura suam extendit vtilitatem. Rarissimum igitur ipsius vsum apud geometram inueniemus.

Propositiones theorematum geometricorū, arithmeticorumquè, vt plurimum affirmationes sunt.

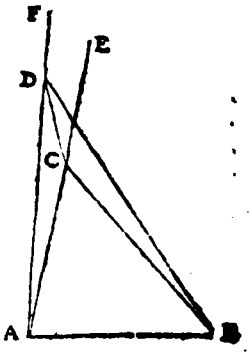
Theorematis varij casus.

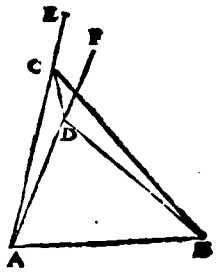
5. huius.

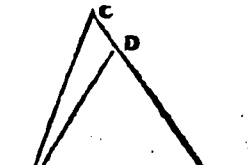
9. com. not.

7. huius.

Theorema hoc sequētis lemma esse videtur



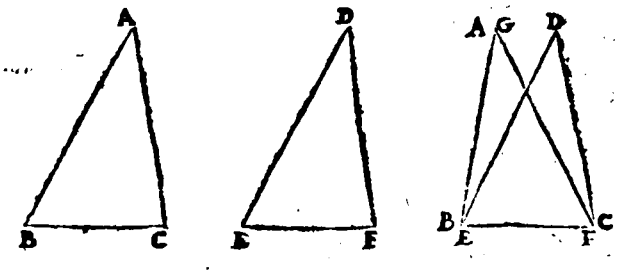




THEOREMA V. PROPOSITIO. VIII.

Si duo triāgula duo latera duobus lateribus æqualia habeāt, alterū alteri; habeant autē, & basim basi æqualē: angulū quoque, qui æqualibus lateribus continetur angulo æqualē habebunt.

Sint duo triāgula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeāt alterū alteri; vt sit A B quidē æqualē D E; A C vero ipsi D F: habeant autem, & basim B C basi E F æqua-



lem, Dico

lem. Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC congruente ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E; recta vero linea BC in EF: cõgruet, & C punctũ puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent & BA AC ipsis ED DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed permutantur; vt EG CF: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duę rectæ lineæ æquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; vt demõstratum est. non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent & BA AC lalera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulũ quoque aequalibus lateribus contentũ angulo aequalem habebunt: quod demõstrare oportebat

In antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.

Octauum Theorema quarti conuersum est, vt supra diximus, non tamen iuxta propriam conuersionem, non enim totam illius positionem, conclusionem, totamque conclusionem positionem facit. Sed aliquam quidem expositionibus, aliquam vero ex conclusionibus quarti theorematis contexens, vnum quid eorum, quę in illo data fuerunt, ostendit.

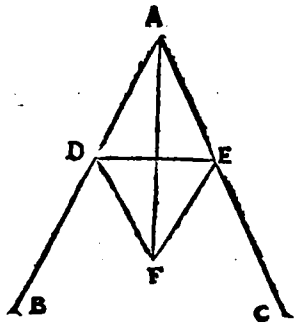
Octauum Theorema quarti conuersum est.

PROBLEMA. IIII. PROPOSITIO. IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

A

Sit datus angulus rectilineus BAC. itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quod vis punctũ D; & à linea AC ipsi AD aequalis auferatur AE; iunctaque DE constituatur in ea rriangulum aequilaterum DEF; & AF iungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est aequalis AE; communis autẽ AF: duae DA AF duabus EA AF aequales sunt, altera alteri; & basis DF: aequalis basi EF angulus igitur DAF angulo EAF est aequalis. quare datus augulus recti lineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est: quod facere oportebat.



1. huius

B

1. huius.

Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIUS

A

Datum angulum rectilineum bifariam secare. *Angulus hoc loco specie datur, quippe qui rectilineus sit, & non quilibet. Namque angulum omnem bifariam secare ex elementari institutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam est, num omnis angulus bifariam secari possit. Sectionis autem ratio non ab re distincta fuit: in quamlibet enim proportionem secare præsentem constructionem transgreditur. Verbigratia in tres, vel quattuor, vel quinque partes æquales, nam rectum quidem angulum trifariam secare possumus, paucis eorum, quæ posterius. Tradentur, vtentes: acutum vero minime, nisi ad alias lineas, quæ mixtę sunt, transcẽdamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam secare docuit Nicomedes ex conchoidibus. Alij vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt, nimirum ijs, quæ à Græcis τετραγωνίζουσαι dicuntur, nos quadrantes appellare possumus. Alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in quarto libro collectionum mathematicarum. Alij denique ex lineis spiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum secuerunt. Quorum contemplationes cum difficiles sint, præsertim ijs, qui instituuntur, in præsentia omittemus.*

Omnem angulum bifariam secare ex elemẽtari institutione nõ licet. Rectum angulum trifariam secare possumus, acutũ vero minime, nisi ad lineas mixtas transcendamus;

B

Iunctaq; DE constituetur in ea triangulum aequilaterum DEF.

Idem

Loco æquilateri trianguli æquicrure cõstituti potest.

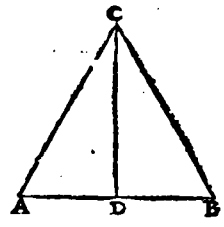
Idem etiam sequetur si loco æquilateri tum in hoc, tum in sequentibus æquicrure triangulum constituamus, & demostratio eadem erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

1. huius. Ex antecedente.

Si data recta linea terminata AB oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur in ea triangulum æquilaterum ABC; & secetur ACB angulus bifariam recta linea CD. dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri: & angulus ACD æqualis angulo BCD. basis igitur AD basi BD est æqualis.

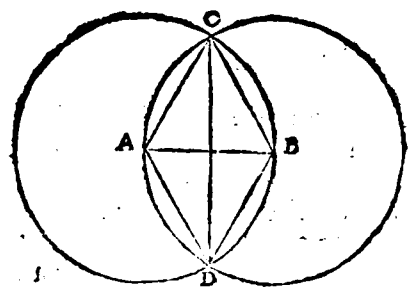


4. huius. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectã lineã terminatã quomodo Apollonius bifariam secat.

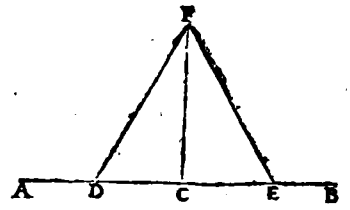
Hoc etiam Theorema est, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex vtraque parte infinitam terminare non possumus. Infinitæ vero ex altera parte tantum, vbicunque punctum accipiatur, in partes inæquales fit sectio. Etenim quæ in æisdem partibus est, in quibus recta linea infinita existit, reliqua finita existentę necesserio est maior. Relinquitur igitur vt ex vtraque parte infinita accipiatur, quæ bifariam secari debet. Appollonius vero Pergæus rectam lineam terminatam bifariam secat in hunc modum. Sit inquit, recta linea terminata AB, quã bifariam secare debemus, & centro quidem A, interuallo autem AB circulus describatur: & rursus centro B, & interuallo BA describatur alius circulus; ducatur CD communes circulorum sectiones, quæ rectam lineam AB bifariã secabit. Iungantur enim AC CB, quæ inter se æquales sunt, cum vtraque ipsi AB sit æqualis. communis autem CD; & DA est æqualis DB ob eandem caussam. angulus igitur ACD est æqualis angulo BCD. quare AB per quartum bifariam secta est.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XI.

Datæ rectæ lineę à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa pũctum C oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quoduis punctum D: ipsiq; CD aequalis ponatur CE, & in DE constituatur triangulum aequalilaterum FDE, & FC iungatur. Dico datae rectae lineae AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC.



a. huius. 1.

3. huius.

Quoniam enim DC est aequalis CE, & FC communis; erunt duae DC CF duabus EC CF aequales, altera alteri; & basis DF est aequalis basi FE. angulus igitur DCF angulo ECF est aequalis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectã lineã insistens, eos qui deinceps sunt, angulos aequales inter se fecerit: rectus est vterq; aequaliũ angulorũ. ergo vterq; ipsorũ DCF FCE

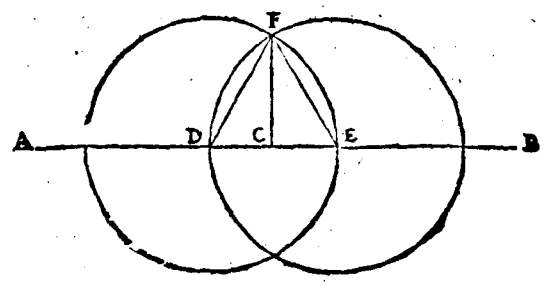
Diff. 10.

est

est rectus. Datae igitur rectae lineae AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

FC. COMMENTARIVS.

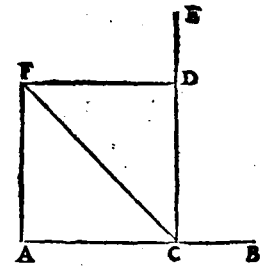
Datę rectæ lineæ à puncto in ipsa dato. *Linea specie datur; punctum vero positione: quod vel in medio erit rectæ lineę, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectæ lineę sumpsit. Quòd si in extremitate altera sumatur, vel ipsam producentes, reliqua eodem modo* 28. Problematis casus.



construemus; vel aliter propositum assequemur. Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit hoc pacto. Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ea punctum C; & in linea A C sumpto quouis puncto D, ab ipsa C B auferatur C E æqualis ipsi C D: & centro quidem D, interuallo autem D E circulus describatur. Rursusq; centro E, & interuallo E D alius circulus describatur: & à puncto F, in quo circuli se mutuò secant, ducatur FC. Dico eam ad rectos angulos esse. Si enim iungatur F D, F E ęquales inter se erunt. Sed, & D C C E ęquales; & communis F C. Quare ex ottauo anguli qui ad C etiam inter se ęquales sint necesse est. Si vero punctum in extremitate rectæ lineæ sumatur ita faciendum censet Proclus. Sit recta linea A B, datumq; punctum A, & sumatur in A B quod vis punctum C, à quò ipsi A B, quemadmodum nos docuimus, ad rectos angulos ducatur C E: & ab ea ipsi A C ęqualis abscindatur C D. Angulus vero qui est ad C per rectam lineam C F bifariam secetur: atque à puncto D ipsi E C ad rectos angulos ducta occurat rectę lineę C F in F puncto; & F A iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum esse. Quoniam enim D C est ęqualis C A, cōmunis autem C F, & angulos æquales continent, quod angulus ad C bifariā sectus est: erit, & D F ipsi F A æqualis, & omnia similiter per quartum theorema omnibus ęqualia. Quare, & angulus ad A æqualis est ăgulo ad D. Angulus igitur ad A rectus ert; quod facere oportebat.

Quō Apollonius rectā lineā ad rectos āgulos ducit.

3. huius Postul. 3.



Quādo pūctū in extremitate lineę sumiturquō faciendum sit.

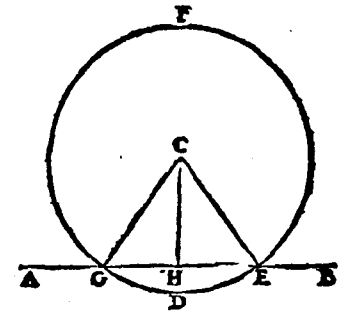
3. huius. 9. huius.

4. huius.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctū C, quod in ea non est Oportet super datam rectam lineam infinitā AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineā ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quod vis punctum D: & centro quidem C, interuallo autem CD circulus describatur EFG: & E G in H bifariam secetur: iungaturq; CG C H CE. Dico super datam rectā lineam infinitam AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim æqualis est GH ipsi HE, communis autem HC, duæ GH HC, duabus EH HC aequales sunt, alter alteri; & basis CG est aequalis basi CE.



Postul. 3. 10. huius.

8. huius. angulus igitur CHG angulo EHC est aequalis, & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, aequa-
Diffi. 10. les inter se fecerit; rectus est vterque aequalium angulorum & quae insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super datam rectam lineam infinitam AB à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Quod facere oportebat.

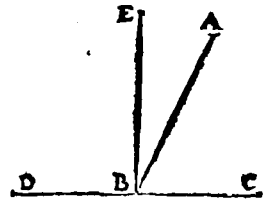
F. C. COMMENTARIVS.

Oenopides hoc problema inuenit. Perpendiculare antiqui gnomonen appellarunt. Perpendicularis plana, & solida.

Hoc problema, vt refert Proclus, Oenopides primus indaguit, vtile ipsum ad astrologiam existimans. Perperdicularem vero antiquorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos. Est quae autem ad angulos rectos, eadem est perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum subiecto eadem sit, quemadmodum, & gnomon. Rursus perpendicularis duplex est, alia plana, alia solida. Quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in subiecto plano sit, plana appellatur: quando autem punctum sit sublime, atq; extra subiectum planum, solida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, solida vero ad planum. Quare necessarium est illam non ad veram rectam lineam angulos rectos facere, sed ad omnes, quae in subiecto existentes plano ipsam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendicularem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in vno plano omnia consistant, sermo procedat. At in linea quae est ad angulos rectos quoniam punctum in ipsa sumptum est, nulla erit infinitatis necessitas: datam vero rectam lineam infinitā ponit, tum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipsam statuatur. Si. n. non esset infinita, poterat ita punctum sumi; vt extra quidem rectam lineam esset, indirectum autem ipsi, adeo vt protracta recta linea in ipsum incideret, & non fieret problema. Adde quod, nisi esset infinita, possemus etiam punctum ita sumere, vt si duceretur perpendicalaris, non in ipsam, sed extra ipsam necessario caderet. His igitur de causis recta linea, ad quam perpendicularis ducenda est, infinita ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

* Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.



Recta enim linea quaedam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD. Dico CBA ABD angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. si enim CBA est æqualis ipsi
Diffi. 10. ABD. duo recti sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos angulos BE. anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. et quoniam CBE, duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD. ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt æquales. Rursus quoniam DBA angulus est aequalis duobus DB*E* *E*BA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales
Axioma. 1. sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt aequalia, & inter se aequalia sunt. ergo & anguli CB*E* EBD ipsis DBA ABC sunt aequales. suntq; CB*E* *E*BD duo recti anguli igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt, ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

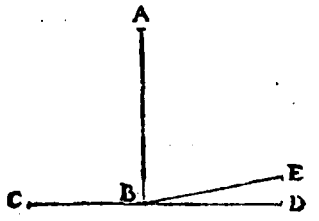
* Cur recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit.] *Animaduertendum est, vt inquit Proclus, Euclidem in hac propositione maximam diligentiam adhibuisse. non enim*

enim ſimpliciter dixit. Omnis recta linea ſuper rectã lineã conſiſtẽs, vel duos rectos facit, vel duobus rectis æquales, ſed ſi angulos fecerit. Quid enim ſi in rectę lineæ extremitate conſiſtens vnum efficit angulum? accidit ne quandoque hunc duobus rectis æqualem eſſe? hoc certe fieri non poteſt. Omnis ſi quidẽ rectilineus angulus duobus rectis eſt minor, quemadmodũ omnis ſolidus minor eſt quattuor rectis. Quod ſi angulum, qui maxime obtuſus eſſe videatur, accipias, hunc quoque augebis, tanquam eum qui duorum rectorũ menſuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam ſic conſiſtere, vt angulos efficiat.

Omnis angulus rectilineus duob. rectis eſt minor.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad pũctum in ea duæ rectæ lineæ nõ ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſũt, duobus rectis æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt.



Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duę rectæ lineę BC BD non ad eaſdem partes poſitæ ãgulos, qui deinceps ſunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipſi CB in directũ eſſe. Si enim BD nõ eſt ī directũ ipſi CB, ſit ipſi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB ſuper rectam CBE conſiſtit; anguli ABC ABE duobus rectis ſunt æquales. Sed & anguli ABC ABD ſunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipſis CBA ABD æquales erũt. Cõis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD eſt æqualis, minor maiori quod fieri non põt. Non igitur BE eſt in directum ipſi BC. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe, prẽter BD. Ergo CB ipſi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atq; ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad eaſdẽ partes poſitæ angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt. Quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

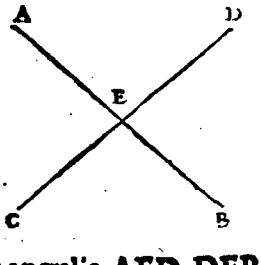
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema prẽcedentis conuerſum eſt, & per deductionem ad id, quod fieri non poteſt, oſtẽditur. Sic enim conuerſa theorematum oſtendi debent, vt inquit Proclus.

Conuerſa theorematã p deductionẽ ad id, qđ fieri nõ põt, oſtẽdũtur.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint, angulos qui ad verticẽ ſunt, inter ſe æquales efficient.



Duæ enim rectæ lineę AB CD ſe inuicem ſecent in puncto E. Dico angulũ quidem AEC angulo DEB; angulũ vero CEB angulo AED ęqualem eſſe. Quoniã enim recta linea AE ſuper rectã CD conſiſtens angulos facit CEA AED; erunt hi duobus rectis æquales. Rurſus quoniam recta linea DC ſuper rectam AB cõſiſtens facit ãgulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales duobus rectis. Oſtenſũ autẽ eſt angulos quoque CEA AED duobus rectis eſſe æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB ęquales ſunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus CEA reliquo BED eſt æqualis.

13. huius.

3. com. not.

æqualis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostendentur. Si igitur duæ rectæ lineæ se inuicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

* Ex hoc manifeste constat rectas lineas quot quot se inuicē secant, facere angulos ad sectionem quattuor rectis æquales.

F. C. COMMENTARIVS.

Anguli deinceps.

Anguli ad verticem.

Angulorū vertices.

Theorema á Thalete inuentum

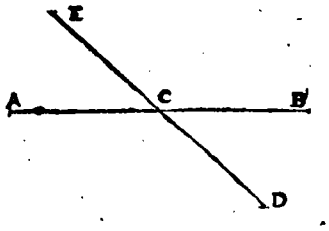
Anguli qui deinceps sunt ab angulis, qui ad verticem, diferunt; horum enim ortus ex duarum rectarum sectione fit; illorū vero ex altera tātū ab altera secta. Nā recta linea ipsa insecta manēs, alteram q; suo extremo secās, duos angulos fecerit; hos deinceps angulos vocamus. Si vero duæ rectę lineę, se inuicem secuerint, anguli ad verticē efficiuntur, sic dicti, quòd vertices in eodē puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipsorum sunt puncta, ad quæ plana dum contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema ostendit duabus rectis lineis se inuicē secantibus, angulos ad verticem æquales esse: inuentum quidem à Thalete primo, vt inquit Eudemus, ab Euclide vero demonstratum; in quo deest constructio, vtpote minus necessaria: demonstratio enim expositione contenta constructione aliqua non indiget.

* Corollaria quæna sint in elemētari institutione.

Ex hoc manifestum est. *Corollarium est quod ex præcedenti demōstratione apparet. Corollaria enim in elemētari institutione sunt, vt inquit Proclus, quę simul cum aliorū demōstrationibus apparent, ipsa vero non præcipue quæruntur: veluti id quod in presentia propositum est, nam quærebatur quidem si duabus rectis lineis se inuicem secantibus, anguli ad verticem æquales essent. Dum autem hoc ostenditur, simul etiam ostensum est, quattuor, qui fiunt, angulos, quattuor rectis æquales esse. Corollareum igitur est theorema, quod ex alterius problematis, vel theorematis demonstratione ex improuiso emergit. Nam veluti casu quodam in corollaria incidere videmur, neque enim proponentibus nobis, neque etiam quærentibus obuiam se se offerunt. Corollariorum vero alia geometrica sunt, alia arithmetica, & rursus alia problematibus consequentia sunt, alia theorematibus; & alia directis ostensionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non potest, ostenduntur. Huius autem theorematis conuersum à Proclo ita demonstratur.*

Corollaria geometrica & arithmet. Huius theorematis conuersū â Proclo demonstratur.

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineę non ad easdem partes sumptæ angulos ad uerticē æquales fecerint; ipsę rectæ lineæ indirectū sibi inuicē erūt.



Sit enim recta linea quędam A B, & in ipsa quod vis punctum C; & ad C duæ rectæ lineæ C D C E non ad easdem partes sumptæ, quæ angulos A C D B C E æquales faciant. Dico ipsas C D C E in directum sibi ipsis esse. Quoniam enim recta linea C D super rectam lineam A B insistit, duos angulos duobus rectis efficit æquales; videlicet D C A D C B. Sed ā gulus D C A āgulo B C E est æqualis. anguli igitur D C B B C E duobus rectis æquales sūt.

13. huius.

Itaq; quoniam ad aliquam rectam lineam B C duę rectæ lineæ consequenter C D C E non ad easdem partes sumptæ, angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt: indirectum sibi inuicem erūt.

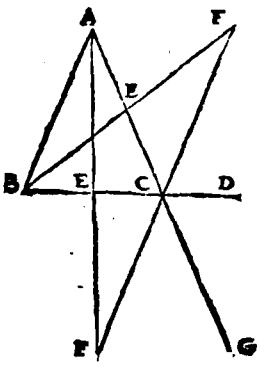
14. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroq; interiore, & opposito est maior.

Sit

Sit triangulum ABC, & vnum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD vtroque interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC maiorem esse. Secetur.n. AC bifariā in E. & iuncta BE producatur ad F; ponaturq. ipsi BE æqualis EF. iūgatur præterea FC, & ducta AC ad G producatur. Qm igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duab. CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis, ad verticem enim sunt. Basis igitur C, AB æqualis est basi FC; & ABE triāgulū triangulo FE & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est equalis angulo ECF. Sed ECD angulus maior est ipso ECF. Maior igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulo ABC maior. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & opposito maior est. Quod oportebat demonstrare.

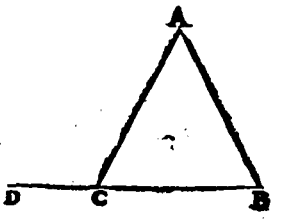


4. huius.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC triāguli duos āgulos quomodocūque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD maior est interiore, & opposito ABC: cōmunis apponatur ACB. Anguli igitur ACDA CB angulis ABC BCA maiores sunt. Sed ACD ACB sunt aequales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB, itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur triāguli duo anguli duobus rectis minores sūt; quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat.



13. huius.

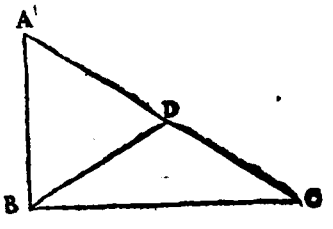
F. C. COMMENTARIVS.

Nunc quidem, vt inquit Proclus, inde terminate ostenditur, trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse, in sequentibus vero determinabitur etiam quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo: tres enim ipsius anguli duobus rectis æquales sunt. Quare duo tanto minores sunt duobus rectis, quātus est reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB maius. Dico, & ABC angulum angulo BCA maiorem esse. Quoniam enim AC maior est quā AB, ponatur ipsi AB aeqalis AD; & BD iungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is maior interiore, & oppositō



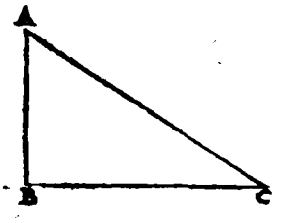
16. huius.

posito DCB. sed ADB aequalis est ipsi ABD, quòd & latus AB lateri AD
5.huius sit aequale, maior igitur est, & ABD angulus angulo ACB. quare ABC ipso ACB multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPO. XIX.

Omis trianguli maior angulus maius latus subtendituri

Sit triangulum ABC maiorem habens ABC angulum angulo BCA. dico & latus AC latere AB maius esse. Si enim non est maius, vel AC est aequale ipsi AB, vel ipso minus. aequale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB aequalis esset; non est autem. non igitur AC ipsi AB est aequale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor. atqui non est. non igitur AC minus est ipso AB. ostensum autem est neque aequale esse. ergo AC ipso AB est maius. omnis igitur trianguli maior angulus maius latus subtendit. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc præcedentis theorematis conuersum est, quare & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur.

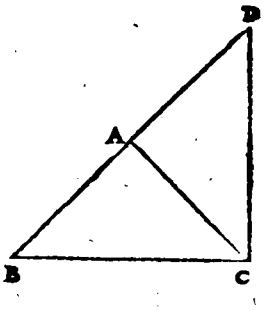
THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC. dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo maiora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC maiora latere BC; latera vero AB BC maiora latere AC; & latera BC CA maiora ipso AB producatur enim BA ad punctum D; ponatur q; ipsi CA æqualis AD; & DC iungatur Quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis. Sed BCD angulus maior est angulo ACD. angulus igitur BCD angulo ADC est maior; Et quoniam trianguli est DCB habens BCD angulum maiorem angulo BCD: maiori autem angulum maius latus subtendit: erit latus DB latere BC maius. Sed DB est æquale ipsis BA AC. quare latera BA AC ipso BC maiora sunt. Similiter ostendemus, & latera quidem AB BC maiora esse latere CA: latera vero BC CA ipso AB maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta. quod ostendere oportebat.

5.huius

Ex antecedente.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema Epicurei impugnarunt quam. Asino manifestum.

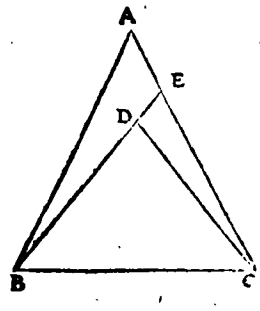
Præsens theorema, vt scribit Proclus, Epicurei impugnare consueuerunt, tum Asino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. Asinum autem manifestum esse, ostendunt, ex eo, quod [illegible] extra latera extendere possit, Asinus pabuli expetens vnũ latus peragrat & quidem [illegible] hæc dicendum. Theorema sensu quidem manifestũ esse nõ autẽ, & scientia egere ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit, hoc quoque sensui indubitatum

dubitatum est, sed quo nam pacto calefaciat, conuincere scientiæ officium est. Sic igitur duo trianguli latera reliquo esse maiora, sensui manifestum, quomodo autem hoc fiat dicere ad scientiam pertinet. Alij aliter hoc theorema demonstrarunt, recta linea minime producta; vt videre licet apud Proclum.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in vno latere BC à terminis BC duæ rectæ lineę intra constituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, maiorē vero continere angulum BDC angulo BAC. producatur enim BD ad E. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora erunt trianguli ABE duo latera BA AE maiora latere BE. communis apponatur EC. ergo BA AC ipsis BE EC maiora sunt. Rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt maiora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt maiora. Sed ostensum est BA AC maiora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC maiora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore; & opposito est maior: erit trianguli CDE exterior angulus BDC maior ipso CED. Eadem ratione & triāguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est maior. Sed angulus BDC ostensus est maior angulo CEB multo igitur BDC angulus angulo BAC maior erit. Quare si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectę lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonstrare oportebat.



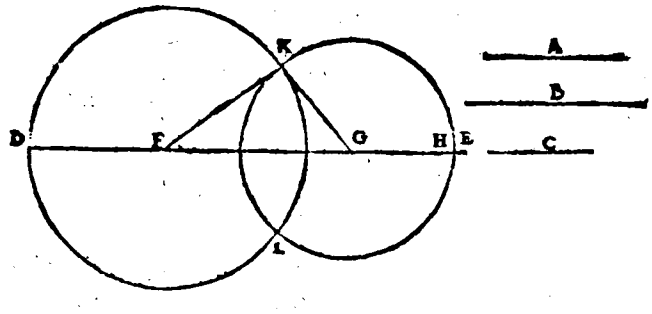
Ex antecedente.

16. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quæ trib. rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumquè sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumquè sumpta. *

Sint tres datę rectæ lineæ ABC, quarum duæ reliqua maiores sint, quomodocūq; sumptæ, vt. s. AB quidē sint maiores quā C, AC vero maiores quàm B, & prętera BC maiores quàm A. Itaq; oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis ABC triangulū constituere exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D. īfinita vero ad E. & ponatur ipsi quidem A æqualis DF, ipsi vero B æqualis FG, & ipsi C æqualis GH: &



centro

3. poſtul. centro F, interuallo autem FD circulus deſcribatur DKL. Rurſuſq. centro G, & interuallo GH alius circulus KLH deſcribatur, & iungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipſis ABC triangulum KFG conſtitutum eſſe. Quoniam enim punctum F centrum eſt DKL circuli; erit FD æqualis FK. Sed FD eſt æqualis A. ergo & FK ipſi A eſt æqualis. Rurſus quoniam punctum G centrũ eſt circuli LKH, erit GH æqualis GK. Sed GK eſt æqualis C. ergo & G H ipſi C æqualis erit. eſt aũt & FG æqualis B. tres igitur rectæ lineæ KF FG GK trib. ABC æquales ſunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quę ſunt æquales tribus datis rectis lineis ABC, triangulum conſtitutum eſt KFG. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematum alia indeterminata, alia terminata. Determinatio duplex.

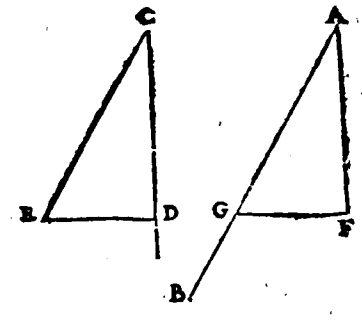
Præſens problema determinatum eſt. Problematum enim quemadmodum, & theorematum alia quidem indeterminata ſunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo ſimpliciter dixerimus, ex tribus rectis lineis, quę tribus datis rectis lineis æquales ſint, triangulum conſtituere. Problema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duæ reliquæ ſint maiores, quomodocunquè ſumptę, determinatum erit, & fieri poterit. Determinatio enim duplex eſt, altera quidem pars problematis, vel theorematis, quæ poſt expoſitionem ponitur, ſignificans quid ſit illud, quod quæritur; altera vero, quæ propoſitionem vniuerſalem eſſe prohibet, explicans quando, & qua ratione, & quot modis id quod propoſitum eſt fieri poſſit, vt hoc loco. Oportet autem duas reliqua maiores eſſe, quomodocumquè ſumptas. Quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora quomodocumquè ſumpta. *Et in ſexto libro.* Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, & eo, quod à dimidia, & eo, cui oportet ſimile deficere. *Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, & falſum diuiſio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri poteſt. Proclus in commentarijs citat Euclidis verba, quæ à verbis huiuſce demonſtrationis diſcrepant, vt luce clarius ſit Euclidis demonſtrationes aliquibus in locis à Theone immutatas eſſe, & eas, quas nunc habemus Theonis eſſe, non Euclidis.*

Theorematum diuiſio iuxta verũ, & falſum.

Problematum diuiſio iuxta id, quod fieri, & quod nõ fieri poteſt.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.



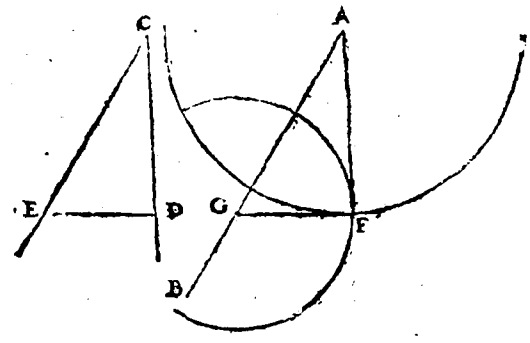
Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipſa punctũ A, & datus angulus rectilineus DCE. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctũ A dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum conſtituere. Sumãtur in vtraque ipſarum CD CE quæ uis puncta DE, iungaturq; DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales ſint tribus CD DE EC triangulum conſtituatur AFG, ita vt CD ſit æqualis AF, & CE ipſi AG, & DE ipſi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales ſunt, altera alteri; & baſis DE eſt æqualis baſi FG: erit, & angulus DCE angulo FAG æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus conſtitutus eſt FAG. quod facere oportebat.

8. huius,

F. C.

F. C. COMMENTARIVS

Et ex tribus rectis lineis, quę æquales sint tribus CD DE EC triangulum cōstituatur AFG.] *A recta linea AB abscindatur AG æqualis ipsi CE: & centrò quidem A, interuallo autē ipsi CD æquali describatur circulus: & rursus centro G, & interuallo æquali ipsi ED alius circulus describatur, vt circuli se inuicē in puncto F secent: & iungantur AF FG. Dico iam factum esse, quod proponebatur. Et demonstratio eadem erit. Hoc autem problema ab Oenopide inuentum esse tradit Eudemus.*



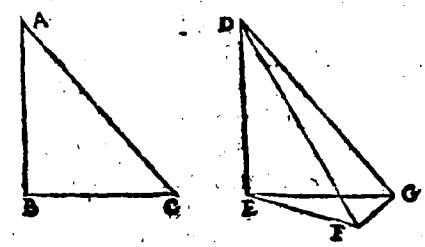
* 3. huius. 3. Postul.

Hoc theorema ab Oenopide inuentum est.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeāt, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus D E DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidē AB æquale lateri DE, latus vero AC æquale DF; & angulus BAC āgulo EDF sit maior. Dico & basim BC basi EF maiorem esse. Quoniam enim angulus BAC maior est angulo EDF, cōstituatur ad rectā lineā DE, & ad punctū in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG, ponaturq, alterutri ipsarum AC DF æqualis DG, & GE FG iungantur. Itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG; duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri, & angulus BAC est æqualis angulo EDG. Ergo basis BC basi EG est æqualis. Rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; & angulus D FG angulo DGF: erit DFG angulus angulo EGF maior. Multo igitur maior est EFG angulus ipso EGF. Et quoniam triangulum est EFG, angulum EFG maiorem habens angulo EGF; maiori autem angulo latus subtenditur; erit, & latus EG latere EF maius. Sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso E F maius erit. Si igitur duo triāgula duo latera duobus lateribus æqualia habeāt, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi maiorē habebunt. Quod oportebat demōstrare.

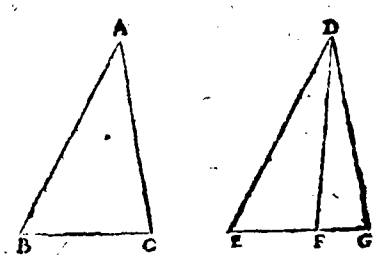


Ex antecedente. * 4. huius. 5. huius. 19. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema quarto oppositum est, illud enim angulos qui sunt ad vertices triāgulorum æquales ponit, hoc inæquales; illud bases æquales, hoc inæquales esse demonstrat.

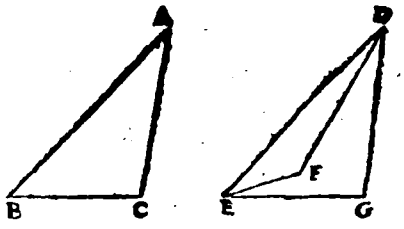
Et GE FG iungantur] *recta linea EG, vel cadit supra EF, vel in ipsam, vel infra ipsam. Euclides vt supra cadentē accepit. Quòd si in ipsā cadat, vt in secunda figura, idē ostendetur. Sunt enim duæ BA AC duabus ED DG æquales: & cum æquales contineant angulos, & basis BC basi EG æqualis erit. Sed EG*



Hoc theorema quarto oppositum * 4. Huius.

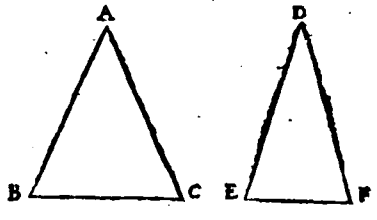
est

est maior, quàm EF, vt totum est maius, quàm ipsius pars. Ergo, & BC quā EF est maior. Cadat postremo infra ipsā. Vt in tertia figura. Similiter demōstrabimus basim BC basi EG æqualem esse. Cum aūt duę
21. huius. *EF FD intra triangulum EDG constituta minores sint, quàm duę EG GD; sitq; DG ipsi DF æqualis; erit reliqua EG maior, quàm reliqua EF. Sed BC est æqualis EG. Ergo & BC quā EF maior sit necesse est.*



THEOREMA XVI. PROPO. XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeāt, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & āgulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.



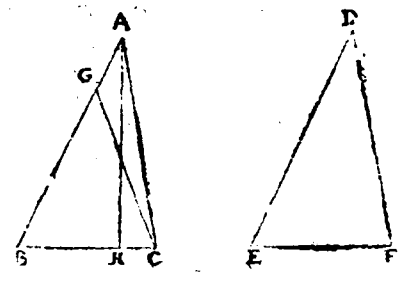
Sint duo triāgula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeāt, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF: basis autē BC basi EF sit maior. Dico, & angulum BAC angulo EDF maiorem esse. Si enim non est maior, vel æqualis est, vel minor. AEqualis
4. huius. autē non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis. Non est aūt. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neq; minor. Minor enim esset, & basis BC basi EF. Atqui non est. non igitur an-
Ex antecedenti. gulus BAC angulo EDF est minor. Ostensū autem, est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC āgulo EDF necessario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema octauo oppositū est & precedētis conuersum. *Hoc theorema octauo quidem oppositum est, precedentis vero conuersum, quod alij aliter demonstrarunt, vt tradit Proclus.*

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeāt, alterū alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualiū angulorū subtēditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeāt, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualē angulo DEF; angulū vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & vnū latus vni lateri æquale, & primū quod æqualibus adiacet angulis; nēpe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterū alteri, latus .s. AB lateri DE; & latus AC

ipsi

ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, vna ipsarum maior est. Sit maior AB, ponaturq; GB æqualis DE; & GC iungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. Basis igitur GC basi DF est æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. Sed angulus DFE angulo BCA aequalis ponitur. Quare, & BCG angulus ãgulo BCA est aequalis, minor maiori, quod fieri nõ põt. Non igitur inaequalis est AB ipsi DE. Ergo aequalis erit. Est autem, & BG aequalis EF. Itaq; duae AB BC duabus DE EF aequales sunt, altera alteri, & angulus ABC aequalis angulo DEF. Basis igitur AC basi DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est aequalis. Sed rursus sint latera, quae aequalibus angulis subtenduntur aequalia, vt AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus aequalia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: & ad huc reliquum angulũ BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, vna ipsarum maior est. Sit maior BC, si fieri potest; ponaturq; BH aequalis EF, & AH iungatur. Quoniam igitur BH quidem est aequalis EF, AB vero ipsi DE; duae AB BH duabus DE EF aequales sunt, altera alteri, & ãgulos aequales cõtinent. Ergo basi AH basi DF est aequalis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. Aequalis igitur est angulus BHA angulo EFD. Sed EFD est aequalis angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA est aequalis. Trianguli igitur AHC exterior angulus BHA aequalis est interior; & opposito BCA, quod fieri non potest. Quare non inaequalis est BC ipsi EF. Aequalis igitur. Est autem, & AB aequalis DE. Duae igitur AB BC duabus DE EF aequales sunt, altera alteri: angulosq; aequales continent. Quare basis AC aequalis est basi DF, & ABC triangulũ aequale triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est aequalis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod vni aequalium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo aequalem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

4. huius.

4. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema ad Thaletem refertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & æqualitate, vel inæqualitate quæcumque in elementari institutione dici poterant, ex superioribus dicimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; præcipue vero de parallelogrammis: simul cum horũ contẽplatione de trapezijs differens. Diuiditur enim quadrilaterum, vt superius dictum est in parallelogrammum, & trapezium: rursusquè parallelogrãmum in alias species: & trapezium similiter. Verum quoniam parallelogrammum quidem ob æqualitatis participationem ordinatum est: trapeziũ vero neque eundem, neque similem seruat ordinem: non immerito precipue quidem parallelogrammis sermonem habeo; simul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim sectione ortus trapeziorum apparebit, vt procedentibus nobis fiet manifestum. Sed quoniã rursus fieri non potest, vt de parallelogrammorum, vel constructione, vel aequalitate aliquid dicatur absque parallelarum consideratione; vt enim ex ipso quoque nomine apparet parallelogrammum est, quod à parallelis rectis lineis è regione positis describitur: necessario à parallelis doctrinæ initium facit. Paulum vero progressus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit, vno vsus theoremate medio inter harum, illarumq; institutionem elementarem, quod quidem videtur symptoma quoddam, quod parallelis ineſt, contemplari: primum autem ortum parallelogrammorum tradit. Tale enim est. [Rectae lineae, quae aequales, & parallelas ad easdẽ partes cõiungunt, & ipsae aequales, & parallelae sunt.] *nã in hoc cõsideratur quidẽ symptoma quoddã æqualibus, at parallelis; ex cõiũctione autẽ apparet parallelogrãmũ, quod latera æqualia, & parallela è regione posita habet. Parallelarũ igitur*

Hoc theorema ad Thalete refertur.

Parallelogrãmũ ordinatum est; trapezijũ vero minime.

Parallelogrãmũ est quæ a parallelis describitur.

Parallelogrãmorũ ortus.

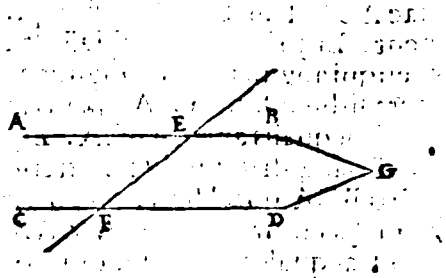
Parallelis tria per se insunt.

igitur sermonem necessario prægsumptum esse, ex his constat. Tria autem assumere oportet, quę parallelis per se insunt, ipsasq; explicant: & cum ipsis cõuertuntur. Neque solum tria simul, sed & vnum quodq; seorsum ab alijs sumptum. Quorum vnum hoc est. Recta linea parallelas secante, alternos angulos inter se æquales esse: aliud, recta linea parallelas secante angulos interiores duobus rectis esse æquales. Reliquum vero, recta linea parallelas secante, angulum exteriorem interiori; & opposito æqualem esse. Horum autem symptomatum vnumquodq; demonstratum parallelas esse rectas lineas affirmare potest. Hoc modo & alij mathematici de lineis differere consueuerunt, vnuscuiusque speciei symptoma tradentes. Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid symptoma sit ostendis, & Nicomedes in conchoidibus, & Hippias in quadrantibus & Perseus inspiricit. Nam post earum ortum, quod ipsis per se, & quatenus ipsum inest, assumptum, constitutam nobis formam ab omnibus alijs distinguit. Eodem igitur modo, & elementorũ institutor parallelarum symptomata primum inuestigat. Hęc ex Proclo.

Apollonius de conicis lineis aget. Nicomedes de cõchoid. Hippias de quadrantibus Perseus de spiricis.

THEOREMA XVIIII. PROPOSITIO XXVII.

* **Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.**



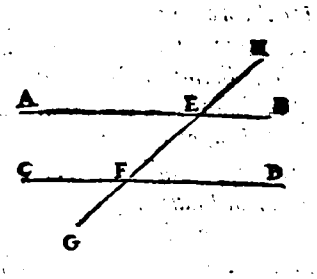
In duas enim rectas lineas AB CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEE EFD aequales inter se faciat. Dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productae AB CD, vel ad partes BD conuenient, vel ad partes AC. producantur, conueniantquè ad partes BD in puncto G. Itaque GEF trianguli exterior angulus AEF maior est interiore & opposito EFG Sed & aequalis, quod fieri non potest. non igitur AB CD productae ad partes BD conuenient. Similiter demonstrabitur neq; conuenire ad partes AC. quae vero in neutras partes conueniunt, parallelae inter se sunt. Parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se aequales fecerit, parallelae inter se erunt rectae lineae, quod ostendere oportebat.

16. huius.

Diffi. 35.

F. C. COMMENTARIVS.

* Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos. *Alternos angulos appellat eos, qui neque ad easdem partes, neq; deinceps sunt, sed ab incidente linea distinguuntur, cum vtrique intra parallelas existant. Differunt autem quòd alter sursum alter deorsum ponatur. Vt exempli gratia, rectis lineis AB, & CD existentibus, incidenteque in ipsas recta linea EF, angulos AEF DFE; itemque angulos CFE BEF alternos esse dicit. Vt pote alterno, commutatoue ordine iuxta positionem se habentes.*



Illud autem sciendum est, cum talis sit rectarum linearum situs, omnia symptomata ex diuisione sex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omisit. vel enim ad easdem partes angulos sumemus, vel non ad easdem: & si ad easdem, vel vtrosquè intra rectas lineas, quas parallelas ostendit, vel vtrosque extra, vel vnum quidem intra, alterum vero extra. Si vero non ad easdem partes, similiter vel vtrosque intra, vel extra, vel vnum intra, & alterum extra. Sint enim rursus rectæ lineę AB CD, in quas incidat recta linea EF: & ad HG puncta producatur. Si igitur ad easdẽ partes angulos accipias, vel vtrosq; intra pones, vt BEF, & EFD, vel ipsos, AEF, & EFC, vel vtrosq; extra, vt HEB DFG, vel HEA CFG, vel vnum quidem intra, alterum vero extra, vt HEB EFD, vel GFD FEB; vel HEA EFC, vel GFC AEF.

quadru-

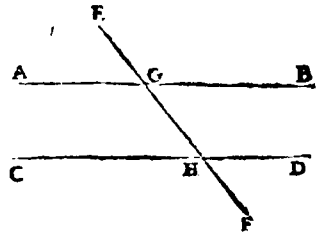
quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad eaſdem partes, vel vtroſque intra, vt AEF EFD, vel CFE FEB: vel vtroſq; extra, vt AEH DFG, vel HEB CFG, vel vnum quidē intra, alterum vero extra; atque hoc rurſus quadrupliciter, vel enim AEH EFD, vel HEB EFD, vel CFE FEB, vel GFD FEA. Cum igitur anguli ſex modis ſumatur, Euclides tres ſolas ſumptiones elegit, vnam quidem ex ijs angulis, qui non ad eaſdem ſunt partes, & qui intra tantū ſumuntur; quos alternos appellauit; duas vero ex ijs, qui ad eaſdem partes vel vtrique intra ſumuntur, quos duobus rectis æquales eſſe dicit, vel vnus quidem extra alter vera intra ſumitur, quos dicit inter ſe æquales eſſe. Tres vero reliquas omiſit, vt pote quos eadem omnino cō ſequantur. Sunt enim ad eaſdem partes vtrique extra anguli HEB DFG. Dico hos duobus rectis æquales eſſe, angulus enim DFE angulo HEB, & angulus BEF angulo DFG eſt æqualis. Si autem anguli BEF EFD duobus rectis ſunt æquales, anguli etiam DFG HEB duobus rectis æquales erunt. Sint rurſus non ad eaſdem partes anguli AEH EFD, quorum alter ſit extra, alter intra; ipſi quoque duobus rectis ſunt æquales. Quoniam enim angulus AEH æqualis eſt angulo BEF, anguli vero BEF EFD duobus rectis æquales ſunt; erunt, & anguli AEH EFD duobus rectis æquales. Sint poſtremo non ad eaſdem partes vtrique extra anguli AEH DFG. Dico eos etiam inter ſe æquales eſſe. Nam cum angulus AEH æqualis ſit angulo BEF & angulus DFG angulo EFC, ſintquè anguli BEF EFC alterni inter ſe æquales: anguli etiam AEH DFG inter ſe æquales ſint neceſſe eſt.

Cum anguli ſex modis ſumantur.

Euclides tres ſolas ſūptiones elegit, reliquas omiſit.

THEOREMA XIX. PROPO. XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exterioꝛē angulū interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ.



In duas enim rectas lineas AB CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & oppoſito GHD æqualem faciat; vel interiores, & ad eaſdem partes BGH GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineā AB rectæ CD parallelam eſſe. Quoniam .n. EGB angulus æqualis eſt angulo GHD, angulus autem EGB angulo AGH, erit, & āgulus AGH angulo GHD æqualis: & ſunt altern i. Parallela igitur eſt AB ipſi CD. Rurſus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis ſunt æquales, & ſunt AGH BGH æquales duobus rectis: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. Communis auferatur BGH. Reliquus igitur AGH eſt æqualis reliquo GHD: & ſunt alterni. Ergo AB ipſi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. Quod demonſtrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente.

13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

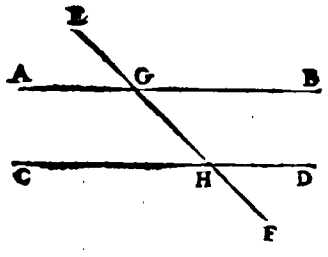
Hoc theorema à Ptolemæo aliter demonſtratur, vt tradit Proclus.

Theorema a Ptolemæo aliter demōſtratur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos āgulos inter ſe æquales, & exteriorem interiori, & oppoſito, & ad

eaſdem partes æqualem, & interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.



In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH GHD inter ſe æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad eaſdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt AGH ipſi GHD, vnus ipſorum maior eſt. Sit maior AGH. Et quoniam AGH angulus maior eſt angulo GHD; cõmunis apponatur BGH. Anguli igitur AGH BGH anguli BGH GHD maiores ſunt. Sed anguli AGH BGH ſunt æquales duobus rectis. Ergo BGH GHD anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quam ſint duo recti in infinitũ producuntur rectæ lineæ inter ſe conueniunt. Ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ conuenient inter ſe. Atqui non conueniunt cum parallelę ponantur. Non igitur inæqualis eſt AGH angulus angulo GHD. Quare neceſſario eſt ęqualis. Angulus autem AGH ęqualis eſt angulo EGB. Ergo, & EGB ipſi GHD æqualis erit. Communis apponatur BGH. Anguli igitur EGB BGH ſunt aequales angulis BGH GHD. Sed EGB BGH aequales ſunt duobus rectis. Ergo, & BGH GHD duobus rectis aequales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidẽs, & alternos angulos inter ſe aequales, & exteriorem interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes aequalem; & interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis aequales efficiet. Quod oportebat demonſtrare.

29. huius. * poſt. 5. 15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, vtriſque præcedentibus conuertitur. Quod enim in vtroq; illorum eſt queſitum, poſitionem facit; & quæ in illis data ſunt, demonſtrare proponit. Atque hęc conuerſorum differentia ſilentio prætereunda non eſt. Nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto ſextum, aut pluribus vnum, vt præcedentibus, quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo poſt manifeſtum erit.

* Quæ vero á minoribus, quam ſint duo recti in infinitum producuntur rectę lineæ inter ſe conueniunt] *Poſtulatum quintum eſt, quod tamen cum euidens non ſit, & demonſtratione indigere videatur, Proclus ita demonſtrandum cenſuit, duobus præmiſſis, nimirũ axiomate quopiam, quo etiam Ariſtoteles vſus eſt, & lemmate.*

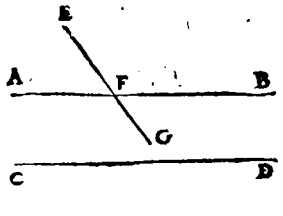
AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producãtur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedit.

LEMMA.

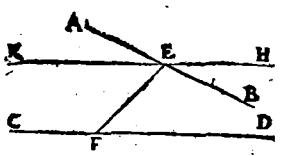
Si alteram parallelarum ſecuerit recta quædã linea; reliquam quoq, ſecabit.

Sint parallelæ AB CD; ſecetq; ipſam AB recta linea EFG. Dico EFG reliquam quoque CD ſecare. Quoniam enim duæ rectæ lineæ ſunt, quæ ab vno puncto F in infinitũ producuntur, BF FG; omni finita magnitudine maiorem habebunt diſtantiam. Quare, & maiorem ea magnitudine, quę tanta eſt, quantum eſt interuallum inter parallelas interiectum. Cum igitur harum linearum diſtantia maior fuerit, quàm diſtantia parallelarum, recta linea FG ſecabit ipſam CD. Quare ſi alteram parallelarum ſe-



cuerit

ederit quædam recta linea, reliquam quoque secabit.

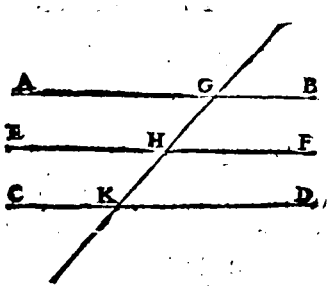


Hoc ante demonstrato consequẽter propositum demonstrabitur. Sint enim duæ rectæ lineæ AB CD, & in ipsas incidat recta linea EF, angulos BEF DFE duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter se conuenire ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores. Cum enim anguli BEF DFE duobus rectis minores sint, sit excessui duorum rectorum æqualis HEB angulus, & HE ad K producatur. Itaque quoniam in rectas lineas HK CD recta linea EF incidit, interioresque angulos HEF DFE duobus rectis efficit æquales: recta linea HK CD parallelæ erunt. Et AB secat ipsam HK. Ergo reliquam quoque CD secabit per antecedens lẽma. Conuenient igitur inter se rectæ lineæ ABCD ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quæ eidẽ rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erũt. *

Sit vtraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. Dico & AB ipsi CD parallelã esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. Et quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHE est æqualis. Rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHE angulus angulo GKD. ostensus autẽ est, & angulus AGK angulo GHE æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi CD. Ergo quæ eidẽ rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. quod oportebat demonstrare.



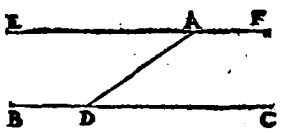
F. C. COMMENTARIVS.

Quæ eidem rectæ lineæ sũt parallelæ, & inter se parallelæ erũt) *Contingit autẽ hoc, vt inquit Proclus, non in omnibus respectibus verum esse. Non enim quæ eiusdem dupla, & inter se duplæ sunt, nec quæ eiusdem sesquialtera, inter se sunt sesquialtera, sed in illis solis locum habere videntur, quæcunque vniuoce conuertuntur, vt in æqualitate, in similitudine, in identiate, & in parallelorum positione. Quæ enim parallelæ parallela, & ipsa parallela est, quemadmodum, & quod æquali æquale, & ipsum est æquale; & quod simili simile, & ipsum simile. Parallelarum enim ad se se respectus similitudo positionis est.* *

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineę parallelam rectam lineã ducere. *

Sit datum quidem punctũ A, data vero recta linea BC. Oportet per A punctum ipsi BC rectae lineae parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quod vis pũctum D, & iungatur AD: constituaturq; ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC aequalis angulus DAE; & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. Quoniã igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se aequales efficit, EF ipsi BC parallela erit. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.



23. huius.

14. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

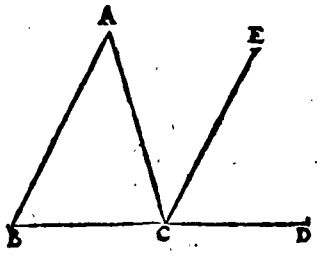
* Per datum punctum datę rectae lineae parallelam rectam lineam ducere. *Videtur hoc ploblema parallelarum ortum tradere. At datum punctum extra rectam lineam sumere oportet, ita vt à pũcto ad ipsam ducta recta linea angulũ faciat, alioqui nulla alia prętet iam dictam, duci poterit. Differunt autem per datum punctũ, & à dato puncto rectam lineam ducere. Quando enim punctum rectę lineę, quę dicitur, principium est; ab ipso fit deductio, vt in illo problemate.*

Per datum punctum, & a dato puncto lineam ducere.

] Super datam rectam lineam infinitam à puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere] *Quando autem punctum in recta linea est, per ipsum deductio fieri dicitur, vt nunc in parallelis.*] Per datum punctum datæ rectę lineæ parallelam rectam lineam ducere.] *Et quemadmodum non licet ab eodem puncto super datam rectã lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datę rectæ linę duas, vel plures parallelas ducere. Parallelę enim in dicto puncto inter se conuenirent. Quod est absurdum.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.



Sit triangulum ABC: & vnum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC ęqualem esse; & triãguli tres iteriores angulus ABC BCA CAB duobus rectis esse ęquales. Ducatur n. per punctum C ipsi AB rectae lineae parallela CE. Et quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter se ęquales sunt. Rursus quoniã AB parallela est CE, & in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori, & opposito ABC est æqualis. Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BCA CAB æquales sunt. Sed anguli ACD ACB sunt æquales duobus rectis. Ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

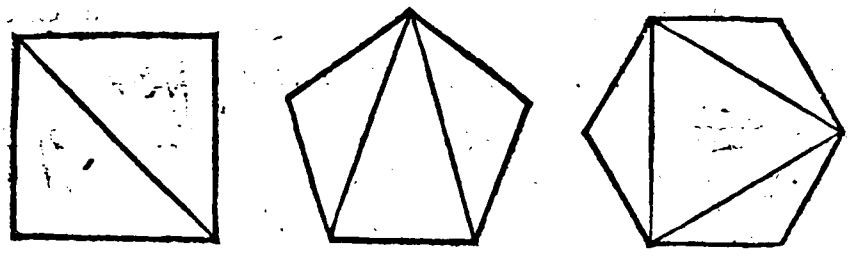
15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Quantum deficiebat in sextodecimo, & septimodecimo theoremate, tantum in hoc addit, vt notat Proclus. Non solum enim ex hoc discimus, trianguli exteriorem angulum vtroque interiore, & opposito maiorem esse, sed & quanto maiorem. Nam cum vtrisque sit æqualis, maior quàm alteruter reliquo est. Nec trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse solum ex hoc cognoscimus, sed quanto etiam minores: reliquo enim trium. Illa igitur quodam modo magis indefinita fuerunt theoremata, hoc vero scientię terminum vtrisque attulit. Eius theorematis, triangulum scilicet interiores angulos duobus rectis æquales habere, inuentionem ad Pythagoricos refert Eudemus, quod ipsi aliter demonstrarũt, vt Proclus tradit. Qui etiam huius theorematis duo ostendit conuersa, ex quibus apparere potest, quomodo vni duo conuertantur. Cum igitur ex hoc constet, triãguli tres interiores angulos duobus rectis esse ęquales, aperta est nobis via, per quã ceterarum quoque figurarum rectilinearum angulos inueniemus, quot rectis æquales sint. Vt puta

tv quadrilatere, quinquelateræ, & aliarum, quę ſequuntur. Itaque primo ſciendum eſt omnem rectilineam figuram in triangula reſolui; omnium ſiquidem conſtitutionis principium eſt triangulum. Vnaquæque autem in triangula binario pauciora, quàm ſint propria latera, reſoluitur, vt ſi

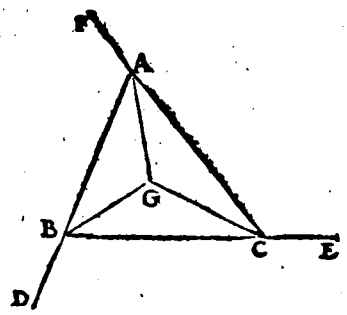
Omnis rectilinea figura in triangula binario pauciora quã ſit propria latera reſoluitur.



quattuor latera habeat, in duo reſoluitur triangula; ſi quinque in tria, ſi ſex in quattuor, & ſimiliter reliquę. Quòd cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis ſint æquales, numerus triangulorum, ex quibus vnaquæque figura conſtat, duplicatus multitudinem præbebit rectorum, quibus ea æquales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus triãgulis cõſtans angulos habet quattuor rectis æquales. Et omnis quinquelatera habet angulos æquales ſex rectis, & deinceps eodem modo, Sed, & illud ſciendum eſt. Onem rectilineam figuram vnoquoque ex eius lateribus ſemel producto, angulos qui extra coſtituuntur, quattuor rectis æquales habere. *Quod nos hoc modo demonſtrabimus.*

Omnis rectilinea figura angulos qui extra conſtituũtur quattuor rectis æquales habet.

Sit triangulum ABC, & producantur latera AB BC CA ad puncta DEF. Dico angulos CBD BAE ACE, qui extra conſtituuntur, quattuor rectis æquales eſſe,



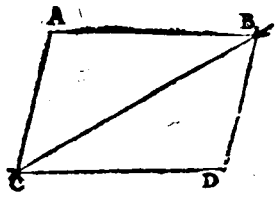
Sumatur enim intra triangulum, quod vis punctum G, & iungantur GA GB GC. Erunt triangulorum AG BBGC CGA omnes anguli ſex rectis æquales; Sed, & anguli CBA CBD BAC BAF ACB ACE ſunt æquales ſex rectis. Ergo dictorum triangulorum anguli angulis CBA CBD BAC BAF ACB ACE æquales ſunt. Communes auferantur CBA BAC ACB. Reliqui igitur, qui fiunt ad G ſunt æquales angulis extra figuram conſtitutis. Anguli autem ad G quattuor rectis ſunt æquales. Ergo, & anguli, qui extra figuram conſtituuntur, videlicet CBD BAF ACE quattuor rectis æquales erunt. Quod demonſtrare oportebat. Eodẽ modo demonſtrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipſas conſtituuntur, quattuor rectis eſſe æquales.

Corol. 15.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Quæ æquales, & parallelas ad eaſdem partes coniungunt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

Sint æquales, & parallelæ AB CD: & ipſas coniungant ad eaſdem partes rectæ lineæ AC BD. Dico AC BD æquales, & parallelas eſſe. Iungatur enim BC. Et quoniam AB parallela eſt CD: in ipſaſq; incidit BC, alterni anguli ABC BCD æquales ſunt. Rurſus quoniam AB eſt æqualis CD, communis autem BC, duæ AB BC duabus BC CD ſunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD. Baſis igitur AC baſi BD eſt æqualis: triangulumq; ABC trian-



29. huius.

4. Huius.

gulo BCD: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. Et quoniã in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternus angulos
29.huius. ACB CBD æquales inter se efficit, parallela est AC ipsi BD. Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

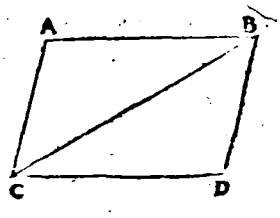
F. C. COMMENTARIVS

Parallelogrãmũ quo modo fiat.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum, parallelogrammorumq; considerationis esse dicebamus. Æqualium namque, & parallelarum rectarũ linearũ symptoma quoddam dicere videtur, parallelogrammorumq; ortum latenter tradit. Parallelogrãmum enim fit ex æqualibus, & parallelis, quę initio ductæ sunt, & ex ijs, quę ipsas coniungunt rectis lineis: quę etiã æquales, & parallelæ ostenduntur. Qua propter quod statim sequitur, veluti constituto iam parallelogrãmo, quę per se insunt eiusmodi spacijs, contemplatur: Quanta autem diligentia in hac propositione adhibita sit, accurate, & diligenter notauit Proclus.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO. XXXIIII.

Parallelogrammorum spaciorũ latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.



Sit parallelogrãmum ACDB, cuius diameter BC. Dico ACDB parallelogrammi latera, quę ex opposito, & ãgulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariã secare. Quoniam .n. parallela est AB ipsi CD, & in ipsas ĩcidit recta linea BC; ãguli alterni ABC BCD ĩter se æquales sunt. Rursus quoniã AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt inter se. Duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri: & vnum latus vni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, vtriq; cõmune BC. Ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: æquale igitur, est latus quidẽ AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD; & angulus BAC angulo BDC æqualis. Et quoniã angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD angulo ACB, erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. Ostensus autẽ est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. Parallelogrãmorũ igitur spaciorũ latera, quæ ex opposito, & ãguli inter se æqualia sũt. Dico etiã diametrũ ea bifariã secare. Quoniam .n. æqualis est AB ipsi CD cõmunis autẽ BC, duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri. & angulus ABC æqualis est angulo BCD. Basis igitur AC basi DB æqualis. Quare. & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. Ergo diameter BC parallelogramum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demõstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematũ alia vniuersalia, alia non vniuersalia.

Vniuersale duobus modis appelari consueuit.

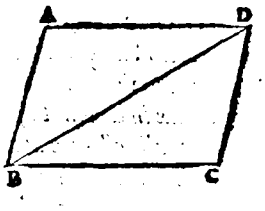
Theorematum, vt inquit Proclus, alia vniuersalia sunt, alia non vniuersalia. Quomodo autẽ vtrumque horum dicamus, commemorabimus, cum quęsitum partiemur, quod vnã partẽ habet vniuersalem, alteram vero non vniuersalem. quamuis enim omne theorema vniuersale quidẽ esse fortasse videretur, & omne, quod ab Euclide ostenditur huiusmodi esse (quemadmodum in præsentia quoque non solum latera, quæ ex opposito sunt, & angulos æquales habere vniuerse de omnibus parallelogrammis dici videtur, verum etiam diametrum vnumquodque bifariam secare) attamen alia quidem vniuerse ostendi dicimus, alia vero non vniuerse. Aliter enim vniuersale appellari consueuit, quod de omnibus verum dicit, de quibus prædicatur; aliter autem quod omnia comprehendit,

comprehendit, quibus idem symptoma ineſt. Vniuerſale ſiquidem eſt, & quod omne æquicrure tres angulos duobus rectis æquales habet, quoniam de omnibus æquicruribus verum eſt; vniuerſale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus rectis æquales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per ſe ineſt. Quocirca primum quoque hoc de triangulo oſtendi dicimus, tres angulos duobus rectis æquales habere. Itaque iuxta hanc ſignificationem alia quidem vniuerſalia theorematum dicentes, alia vero non vniuerſalia, præſens theorema dicimus vnum quidem quæſitorum vniuerſale habere: alterum vero non vniuerſale. Nam hoc quidem latera, quæ ex oppoſito ſunt, & angulos æquales habere vniuerſale eſt. Solis enim parallelogrammis ineſt. hoc vero, diametrum bifariam ſpacium ſecare, non vniuerſale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus ſymptoma hoc inſpicitur. Etenim circulis, & ellipſibus hoc etiã in eſt. Et videntur primę quidem rerum huiuſcemodi notiones eſſe magis particulares, progreſſę autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuiſſent, diametrum bifariam ſecare circulum, ellipſim, & parallelogrammum, cõmune in his poſtea contemplati fuere. Hallucinatur autem, inquit Ariſtoteles, quidã nõ vniuerſale tamquã vniuerſale oſtendens, eò quod commune eſt innominatũ cui primũ ſymptoma ineſt. Nam quid commune ſit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & ſonis, quibus omnibus ineſt permutata proportio, dicere nõ licet. Quid præterea cõmune ſit circulo, ellipſi, & parallelogrammo, difficile eſt exprimere, nã vna quidem figura rectilinea eſt, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuerſale eũ oſtẽdere opinamur, qui demõſtrat, omne parallelogrãmũ à diametro bifariã ſecari, eo quòd commune ſimul nõ cernimus, propter quod hoc verum eſt. Hoc igitur in parallelogrãmis etiam huiuſcemodi vniuerſale non eſt propter iam dictam cauſſam. Illud vero eſt, omne parallelogrammum latera, quę ex oppoſito ſunt, & angulos habere æqualia. Etenim ſi aliqua figura poſita fuerit, quę ex oppoſito ſunt latera, & angulos æqualia habere, parallelogrammum hæc eſſe oſtendetur. Hæc Proclus. Huius autem theorematis conuerſum, quatenus ad primam partem attinet, tale eſt.

Tres angulos duobus rectis æquales habere primũ de triãgulo oſtẽditur.

Diametrũ bifariam ſecare ſpaciũ, neſt non ſolum parallelogrammo ſed circulis, & ellipſib.

Omne quadrilaterum, quod latera ex oppoſito, & angulos æqualia habet, parallelogrammum eſt.

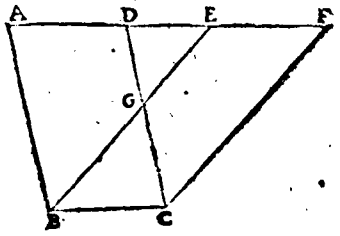


Sit quadrilaterum ABCD, habens latus quidem AB ęquale lateri DC; latus vero AD lateri BC; angulumq; ABC angulo ADC ęqualem; & angulum BAD angulo BCD. Dico quadrilaterum ABCD parallelogrammum eſſe. Ducatur diameter BD. Et quoniam AB eſt ęqualis DC, & AD ipſi BC, duę DA AB duabus BC CD æquales ſunt, angulosq; æquales cõtinẽt, & baſis BD vtrique cõis. Triangulũ igitur ABD triangulo CDB ęquale erit, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, videlicet angulus ABD angulo CDB, & angulus ADB angulo CBD, qui ſunt alterni. Ergo AB parallela eſt in ipſi DC, & AD ipſi BC, ideoq; ABCD parallelogrammum eſt. Quod demonſtrare oportebat. 27. huius.

Conuerſum vero vt ad ſecundam partem huiuſmodi erit [omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt. *Quod nos Paulo poſt demonſtrabimus.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma in eadem baſi, & in eiſdem parallelis cõſtituta, inter ſe æqualia ſunt.



Sint parallelogramma ABCD EBCF in eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AF BC conſtituta. Dico ABCD parallelogrãmũ parallelogrãmo EB CF æquale eſſe. Quoniã enim parallelogrammũ eſt ABCD, æqualis eſt AD ipſi BC. Eadem quoque ratione, & EF eſt ęqualis BC. quare &, AD ipſi EF æqualis erit: & cõmunis DE. tota igitur AE toti DF eſt æqualis. eſt autẽ, & AB ęqualis DC. Ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales ſunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori. baſis igitur EB baſi FC eſt æqualis, & 4. huius

EAB

EAB triangulum æquale triangulo FDC. cõe auferatur DGE. Reliquum igitur trapezium AB GD reliquo trapezio EG CF eſt æquale. commune apponatur GBC triangulum. Ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EB CF æquale erit. Parallelogrãma igitur in eadem baſi; & in eiſdem parallelis cõſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demõſtrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Theoremata localia.

Locus lineę vel ſuperficie ſitus qui idę ſympto ma efficit.

Linearum aliæ planæ aliæ ſolidæ

Localium theorematũ alia planum habent locũ alia ſolidũ.

Localia theoremata quę ſolida appellantur.

Hyperbolæ ſolida linea

Localia plana in rectis lineis.

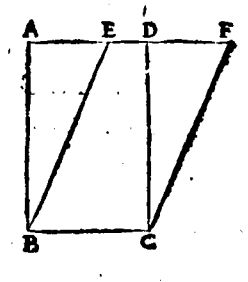
Localia plana in circũferentijs.

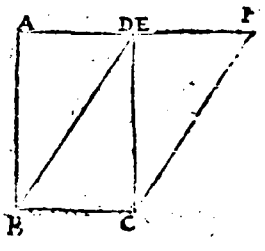
Theoremata quę in mathematicis admirabilia dicũtur.

Angulorum æqualitas, & inæqualitas maximam vim habent ad augenda minuẽdaq; ſpacia.

Theorematis caſus. 4. huius

Quemadmodum theorematum, vt inquit Proclus, alia quidem vniverſalia, alia vero particularia eſſe dicebamus, & quemadmodum hæc diuidentes ſubiungebamus, alia eſſe ſimplicia, alia cõpoſita, & quid vnumquodque horum eſſet oſtẽdebamus, ita ſanè iuxta aliã diſtinctionem, alia quidem localia eſſe dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuſcunque idẽ ſymptoma in toto quodam loco accidit. Locum vero lineæ, vel ſuperficiei ſitum, qui vnũ, idemq; ſymptoma efficiat. Localium enim alia in lineis conſtituuntur, alia in ſuperficiebus. Et quoniam linearũ aliæ ſunt planæ, aliæ ſolidæ. Et planæ quidem, quarum ſimplex eſt in plano intelligentia, vt ipſius rectæ: ſolidæ vero quarum ortus ex quadam ſolidæ figuræ ſectione apparet. Vt Cylindicæ helicis, canonicarumque linearum, dicerem vtique eorum etiam, quæ in lineis conſtituuntur, localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia vero ſolidum. Præſens igitur theorema, & locale eſt, & in lineis locale, & planum. Totum enim ſpacium, quod inter parallelas interijcitur, locus eſt parallelogrammorum, quæ in eadem baſi conſtituũtur. quæ ſanè æqualia quoque inter ſe Euclides oſtendit. eorum vero localium theorematum, quæ ſolida vocantur, tale ſit exemplum, [parallelogrãma, quæ in aſymptotis, & hyperbola deſcribuntur æqualia ſunt.] *nam hyperbolen ſolidam eſſe lineam, manifeſtum eſt, quod ſit vna ex coni ſectionibus. Cum autẽ in præſentia de rectilineis ſermo ſit, localia plana in rectis lineis tradit; in tertio autem libro, cum de circulis, eorumq; ſymptomatibus pertractet, ea etiam, quæ in circumferentijs conſtituuntur localium ſimul, & planorum theorematum docebit, tale ſiquidem in illis eſt, quod ait* [Qui in eadẽ portione ſũt anguli inter ſe ſũt æquales] *nec nõ illud.* [Anguli qui in ſemicirculo rectis ſunt] *nam ſi infiniti quidẽ anguli in circũferentia cõſtituti fuerint, eadẽ exiſtẽte baſi, omnes æquales eſſe oſtenduntur. Et illud quidem proportione reſpondent triangulis, & parallelogrãmis, quæ in eadem baſi, & in eiſdem ſunt parallelis. Species igitur theorematum, quæ mox ſequuntur talis eſt, quæ apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt præterea hæc theoremata ex eorum numero, quæ admirabilia in mathematicis diſciplinis appellantur. Stupet enim vulgus ſtatim ſi longitudo multiplicata ſpaciorum æqualitatem non deſtruit, eadem exiſtẽte baſi. Quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augẽtur. Sciendum autem eſt angulorum æqualitatem, & inæqualitatem maximam vim habere ad augenda minuendaq; ſpacia. quo enim magis angulos inæquales efficimus, eò ſpaciũ magis diminuimus ſi longitudo latitudoq; eadem ſit. Hoc theorema plures habet caſus, vel igitur latus BE ſecat CD, vel non ſecat. Et ſi non ſecat, vel E cadit inter AD vel in D. Euclides autem difficiliorem caſum elegit, cum ſcilicet latus BE ipſum CD ſecat. ſi vero E cadit inter AD ita argumentabimur. Quoniam enim AD eſt æqualis EF, quòd vtraque ipſi BC ſit æqualis, communi ablata ED, erit reliqua AE æqualis reliquę DF. Eſt autem D ſ æqualis AB. Itaque duæ FD DC duabus EA AB æquales ſunt, & angulos æquales continent. baſis igitur FC baſi EB eſt æqualis. Et FDC triangulum triangulo EAB. Addatur commune trapezium EBCD. Erit totum ABCD parallelogrammum toti EB CF parallelogrãmo æquale. Quòd ſi E cadat in D, ſimiliter demõſtrabimus triangulum FDC æquale triangulo DAB. Quare addito vtrique communi DBC triangulo, totum ABCD parallelogrammum toti parallelogrammo DBCF, hoc eſt EBCF æquale erit.*



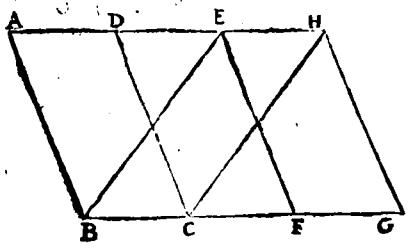


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogrãma in æqualibus baſibus,

&in

& in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.



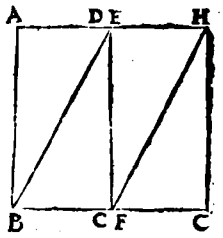
Sint parallelogramma ABCD EFG Hin æqualibus baſibus BC FG, & in eiſdem parallelis AH BG conſtituta. dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale eſſe. Coniungantur enim BE CH. et quoniam æqualis eſt BC ipſi FG ipſi EH; erit & BC ipſi EH æqualis. Suntq; parallelæ, & ipſas coniungunt BE CH. Quæ autem æquales, & parallelas ad eaſdem partes coniungunt, æquales, & parallelæ ſunt. ergo EB, CH & æquales ſunt, & parallelæ: quare EB CH parallelogrammum eſt, & æquale parallelogrammo ABCD; baſim enim eandem habet BC, & in eiſdem parallelis BC, AD conſtituitur. Smili ratione, & EF GH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH eſt æquale. Ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

33 huius.

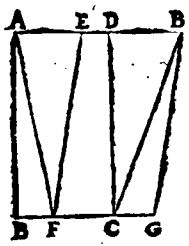
Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.

Præcedens theorema eaſdem baſes accipiebat, hoc vero æquales. Commune autem vtriſq; eſt in eiſdem eſſe parallelis. Oportet igitur ipſa neque intra ſubiectas cadere parallelas, neque extra. Parallelogramma enim in eiſdem dicuntur eſſe parallelis, cum baſes ipſorum, & quæ his exoppoſito ſunt, latera eiſdem parallelis aptantur. Caſus huius theorematis plures ſunt. Nam vel baſes omnino ſeiunctæ ſunt, vel ſeſe contingunt, vel aliquam partem habent communem, vtcunq; ſe habeant latera, quæ baſibus opponuntur, & quamquam Proclus dicat Euclidem cum baſim ſeiunctam accepiſſet, theorema demonſtraſſe, atamen demonſtratio, quam habemus omnibus caſibus congruere mihi videtur, vt etiam ex hoc loco colligi poſſit demonſtrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas eſſe.

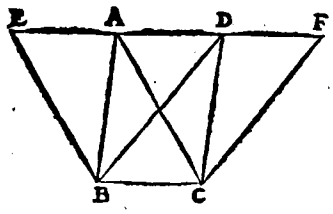


Parallelogramma in eiſdem parallelis, quę ſint. Theorematis caſus.



THEOREMA XXVII.
PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.



Sint triãgula ABC DBC in eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AD BC conſtituta. dico ABC triangulum triangulo DBC æquale eſſe. Producatur AD ex vtraque parte in EF pũcta: & pB quidẽ ipſi CA parallela ducatur BE, pC vero ipſi BD parallela DF parallelogrãmũ igitur eſt vtrũq; ipſorũ EBCA DBCF, & parallelogrammum EBCA eſt æquale parallelogrammo DBCF, etenim in eadem ſunt baſi BC, & eiſdem parallelis BC EF, eſtq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB; pſum bifariam ſecet: parallelogrãmi vero DBCF dimidiũ triangulũ DBC; diameter n.DC ipſũ bifariam ſecat. Quæ autem æqualium dimidia inter ſe æqualia ſunt Ergo triangulum ABC triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

31. huius.

35. huius.

34. huius.

7. com. no.

F. C.

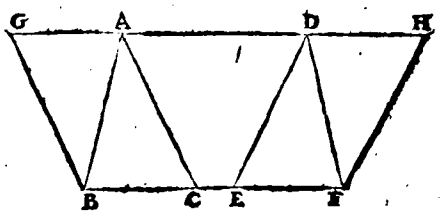
F. C. COMMENTARIVS.

theoremata de triangulis localia & i lineis localia,& plana.

Sunt etiam hæc theoremata de triangulis, quæ in eadem basi, vel in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituuntur localia, & in lineis localia, & plana. Dicuntur autem triangula in eisdem esse parallelis, quæ cum bases habeant in vna parallelarum, in reliqua vertices figũt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in basibus, æqualibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Sint triãgula ABC DEF in æqualibus basibus, BC EF, & in eisdẽ parallelis BF AD constituta. Dico ABC triangulũ triãgulo DEF æquale esse. producatur.n. AD ex vtraq; parte in GH puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG: per F vero ducatur FH parallela ipsi DE. Parallelogrãmum igitur est vtrumq; ipsorum GBCA DEFH. Atq; est parallelogrãmum GBCA æquale parallelogrãmo DEFH: in æqualibus.n. sunt basibus BC EF, & in eisdẽ BF GH parallelis. Parallelogrãmi vero GBCA dimidiũ est ABC triangulũ, nam diameter AB ipsum bifariam secat. Et parallelogrãmi DEFH dimidiũ est triangulũ DEF, diameter enim DF ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt. Ergo ABC triangulum triangulo DEF est æquale. Triangula igitur in æqualibus basibus, & in eisdẽ parallelis cõstituta, inter se sunt æqualia. Quod demõstrare oportebat.

31. huius

35. huius.

34. huius.

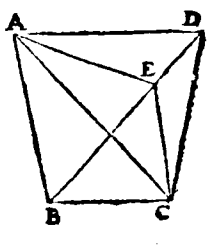
7. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Casus in hoc theoremate tot sunt, quot in xxvi. videtur autem Euclides quod in his quattuor theorematibus ostendit, vno illo theoremate comprehendisse, in principio sexti libri. [triangula. Et parallelogramma, quae eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases.] *eadẽ.n. altitudo nihil aliud est, nisi in eisdem esse parallelis. nã figurę oẽs quæ in eisdẽ sũt parallelis, eandẽ altitudinẽ habẽt, & cõtra, altitudo siquidẽ est perpẽdicularis, quę ab altera parallelarũ ad reliquã pertinet. Illic igitur per proportionẽ ostensum est, ita se se habere triangula, & parallelogramma, quę eandem altitudinem habent, hoc est quæ in eisdẽ sunt parallelis, vt bases: & æqualibus existentibus basibus æqualia esse spacia, & dupla duplis, & aliam proportionẽ, habentibus, eandẽ habere, & spatia inter se proportionem: in præsentia vero, quoniam non decebat proportione vti, qui nõdũ de ipsa docuerat, contentus fuit æqualitate sola, atque identitate.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXXIX.

A Triangula æqualia in eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.



Sint æqualia triangula ABC DBC in easdem basi BC cõstituta & ad easdem partes Dico, & in eisdem parallelis esse. Iungatur.n. AD. Dico AD parallelã esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur per A punctũ ipsi BC parallela recta linea AE, & EC iungatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC, in eadem enim est basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis. Sed ABC triangulũ triangulo DBC est æquale. Ergo & triangulũ

DBC

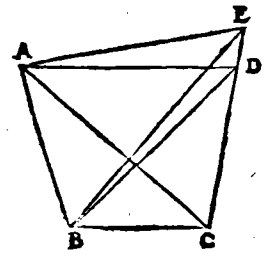
DBC æquale eſt ipſi EBC triangulo, maius minori, quod fieri non poteſt. Non igitur AE ipſi BC parallela eſt. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter ipſam AD, ergo AD ipſi BC eſt parallela. Triangula igitur æqualia in eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis. Quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema vigeſimi ſeptimi conuerſum eſt, & quod ſequitur eſt conuerſum vigeſimi octaui, nam, vt inquit Proclus, cum triplex ſit theorematum conuerſio, aut enim totum toti conuertitur, vt duodecimum theorema vndecimo; aut pars toti, vt tertium ſecundo; aut pars parti, vt quintum primo. Non enim totum in altero datum, quæſitum in altero eſt, nec quæſitum, datū, ſed pars: talia videntur eſſe hæc quoque theoremata in triangulis. Erat ſiquidem quæſitum in præcedentibus, triangula æqualia eſſe. Hoc autem non ſolum in his datum eſt, quippe cum partem inſuper ſumpſerit eius, quę in illis erat, poſitionis: hoc enim, in eadem baſi eſſe, & in æqualibus baſibus tum in his, tum in illis datum eſt, præterquam, quòd in hiſce poſitionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quæſitum, nec datum in illis erat. Particula enim illa, ad eaſdem partes, extrinſecus inſuper fuit aſſumpta. Conuerſa vero vigeſimi quinti, & vigeſimi ſexti in parallelogrammis conſulto omiſit, quod eadem ſit in vtriſque demonſtratio. Theorematum conuerſio triplex.

Et ad eaſdem partes.] *Quę his reſpondent, videlicet* καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη *in aliquibus græcis exemplaribus, tum in hoc theoremate, tum in ſequenti non leguntur, ſed neceßario addita ſunt. Fieri enim poteſt vt in eadem baſi æqualia triangula ſumantur, vnum quidem ad partes ſuperiores, aliud vero ad inferiores, quæ tamen non ſunt in eiſdem parallelis, & quādoque non eadem altitudine.* A

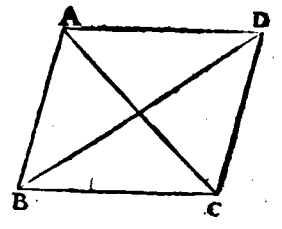
Maius minori quod fieri non poteſt. *Idem abſurdum ſequetur, ſi recta linea AE ſumatur extra ipſam AD, vt notat Proclus, ex his, quę hoc loco demonſtrata ſunt, patebit conuerſum ſecūdę partis vigeſimi quarti theorematis, quod erat huiuſmodi.*



B

Omne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bifariam ſecatur, parallelogrammum eſt.

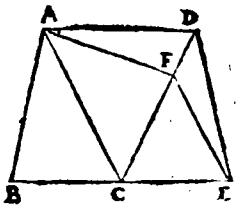
Sit quadrilaterum ABCD, cuius diametri ACBD ipſum bifariam ſecent. Dico ABCD parallelogrammum eſſe. Quoniam enim triangula ABC DBC eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt: & eandem habent baſim BC. quare in eiſdem ſunt parallelis, parallela igitur eſt AD ipſi BC. ſimiliter cum triangulum ABC æquale ſit triangulo ABD, & ſint in eandem baſi AB, demonſtrabitur rectam lineam DC ipſi AB parallelam eße. Ergo ABCD parallelogrammum erit Quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA. XXX. PROPOSITIO. XL.

Triangula æqualia in baſibus æqualibus, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE in æqualibus baſibus BC CE conſtituta. Dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. coniungatur enim AD. dico AD ipſi BE parallelam eſſe. Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi BE parallela AF, & FE iungatur. triangulum igitur ABC triangulo FCE eſt æquale, cum in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis BE AF conſtituantur. ſed triangulum ABC æquale eſt triangulo DCE ergo & triangulum DCE trian-



38. huius.

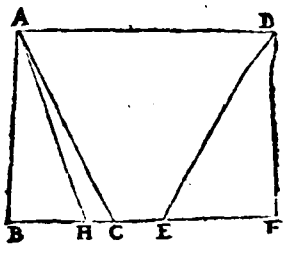
gulo

gulo FCE æquale erit, maius minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelã esse, præter AD. ergo AD ipsi BE parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, & ad eadem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in æqualibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & æqualia esse triangula, & parallelogramma; nos duo semper contexentes, vnum vero relinquentes varie conuertemus. Aut enim bases easdem, vel æquales ponemus, in eisdemq; parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut æqualia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel æquales, & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quę sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quæ in triangulis sunt: aut etiam cum æqualia sumpserimus, & in eisdem parallelis, reliquum ostendemus, vel in eisdem basibus esse, vel in æqualibus, & faciemus alia quattuor, quæ etiam Euclides omisit. In his namque eadem est demonstratio, nisi quòd duo ex his quattuor per se vera non sunt. Non enim æqualia parallelogramma, vel triangula, & quæ in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus, vel in æqualibus; alterum autẽ, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cum decem sint omnia theoremata, sex quidem geometra conscripsit, quattuor vero omisit, ne rursus eadẽ ratione frustra laboret, cum eadem sit demõstratio. Ostẽdetur enim in triãgulis hoc modo.

Triangula æqualia, & in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.

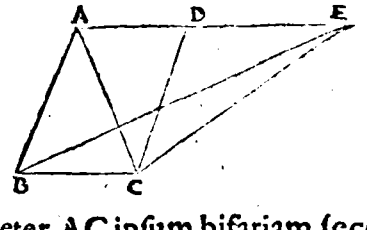


Sint æqualia triangula ABC DEF in eisdem parallelis AD BF constituta. Dico in æqualibus quoq; basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases BC EF inæquales, & sit BC maior, abscindatuŕque BH æqualis ipsi EF; & AH iungatur. Itaq; quoniã triangula ABH DEF

38. huius. *in æqualibus sunt basibus BH EF, & in eisdem parallelis, inter se æqualia sunt. Sed & ipsa ABC DEF triangula posita sunt æqualia. Ergo triangulũ ABC triangulo ABH est æquale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inæquales sunt triangulorum ABC DEF bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suæ parti æquale esse: non in merito ab Euclide prætermissum fuit. Hæc ex Proclo.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeãt in eisdemquè sint parallelis; parallelogrammum ipsius triãguli duplum erit.



Parallelogrammũ enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eandem BC, & in eisdem sint parallelis BC AE. Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Iungatur. n. AC. triangulum igitur ABC triangulo EBC est æquale; namque in eadem basi BC, & in eisdem BC AE

37. huius. 34. huius parallelis constituitur. Sed ABCD parallelogrammum duplũ est trianguli ABC, cũ diameter AC ipsum bifariam secet. Quare & ipsius EBC trianguli duplũ erit. Si igitur parallelogrammũ, & triangulum

gulum eandem Baſim habeant, & in eiſdem ſint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius theorematis duo ſunt caſus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtriſq; demonſtratio eadem eſt. Quòd ſi baſes æqualcs ſint, eodem modo oſtendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. Nam cum triangula in baſibus æqualib. cõſtituta inter ſe æqualia ſint, parallelogrammum, quod alterius eſt duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuerſa ſimiliter demonſtrabuntur, quorum vnum eſt.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandēq; baſim, aut æquales habuerint, & fuerint ad eaſdem partes: in eiſdem etiam parallelis erunt.

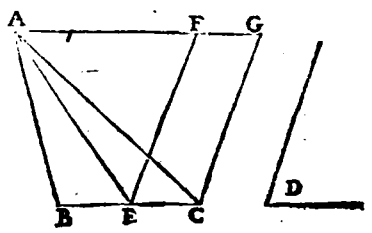
Si enim non ità ſit, totũ parti erit æquale, eademq; ratio vigebit. Neceſſe.n.eſt, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vero autem modo ſe ſe habuerit, idem ſequetur abſurdum, parallela ipſi baſi per trianguli verticem ducta. Alterum vero eſt.

Si trianguli parallelogrammũ duplum fuerit, in eiſdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; baſi, aut in æqualibus erunt.

Si enim in baſibus inæqualibus ſint, cum æquales ſumpſerimus, totum parti æquale erit. In hoc igitur commune abſurdum omnia hæc theoremata deſinunt. Quare elementorum inſtitutor nobis reliquit eam, quæ in his eſt, veritatem inueſtigare, cum in ſimplicioribus ipſe, & principalioribus contemplationem contraxerit. Ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrãmũ conſtituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrãmum cõſtituere in angulo rectilineo ipſi D æquali. Secetur BC bifariã in E, & iuncta AE ad rectam lineam EC, atque ad pũctum in ea E, conſtituatur angulus CEF æqualis ipſi D: & per A quidē ipſi EC parallela ducatur AG; per C vero ipſi FE ducatur parallela CG. parallelogrãmũ igitur eſt FECG. Et quoniam BE eſt æqualis EC, erit, & ABE triangulum triangulo AEC æquale; in æqualibus.n. ſunt baſibus BE EC, & in eiſdem BC AG parallelis. Ergo triangulum ABC trianguli AEC eſt duplum. Eſt autē, & parallelogrammum FECG duplum triāguli AEC; baſim.n. eandem habet, & in eiſdem eſt parallelis. æquale igitur eſt FECG parallelogrammum triangulo ABC habetq; CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt, in angulo CEF, qui angulo D eſt æqualis. Quod quidem facere oportebat.

23. huius.
31. huius.
38. huius.
34. huius.

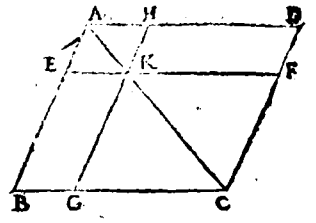
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi ſpacij eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum ſupplementa inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC. & circa ipſam AC parallelogramma quidem ſint EH FG. quæ vero ſupplementa dicũtur BK KD. Dico BK ſuplementũ ſuplemento KD æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrãmum eſt ABCD, & eius diameter AC æquale eſt ABC triangulum triangulo ADC.

34. huius.

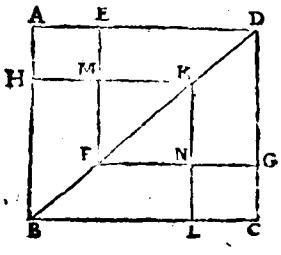
ADC. Rursus quoniam EKHA parallelogrãmum est cuius diameter AK, triãgulum AEK triãgulo AHK æquale erit. Eadem ratione, & triangulum KGC triangulo KFC est æquale. Cum igitur triãgulum quidem AEK æquale sit triãgulo AHK: triangulum vero KGC ipsi KFC; erit triangulum AEK vna cum triãgulo KGC æquale triangulo AHK vna cum KFC triãgulo. Est autẽ, & totũ triãgulũ ABC æquale toti ADC. reliquum igitur BK supplementum reliquo supplemẽto KD est aequale. Ergo omnis parallelogrãmi spacij eorum, quae circa diametrum sunt parallelogrãmorũ suplemẽta iter se æqualia sunt. quod oportebat demõstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

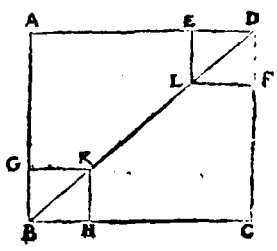
Huius theorematis tres sunt casus. Vel enim parallelogramma, quę circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingent, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disiungũtur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogrãma, quę proprie circa diametrum consistere dicũtur, videlicet quę se se in puncto contingant, in quo casu supplementa BK KD quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum ABCD, cuius diameter BD, & circa BD parallelogramma sint EFGD HBLK, quæ se se in punctum MN secent. Dico quadrilatera AHME NLCG inter se æqualia esse. Quoniã enim triangulum quidem ABD est æquale triangulo DBC; triangulum vero EFD triangulo DFG; erit reliquum quadrilaterũ ABFE æquale reliquo quadrilatero CBFG. Rursus quoniã triangulũ HBK est æquale triangulo KBL, triangulũq; MFK triangulo KFN; erit reliquum quadrilaterum HBFM æquale reliquo LBFN. Erat autem, & totũ ABFE æquale toti CBFG. Reliquum igitur AHME quadrilaterum reliquo quadrilatero NLCG æquale sit necesse est; & hæc quidem quadrilatera sunt, quę suplementa dicuntur.

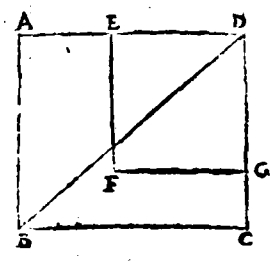
§ 1. huius



Sit denique parallelogrammum ABCD, & eius diameter BD, circa quam parallelogramma ELFD GBHK, quę à se inuicem disiunguntur parte ipsius diametri KL. Et quoniam triãgulum ABD est æquale triangulo DBC, & triangula ELD GBK æqualia sunt triangulis DLF KBH; erit reliquum quinquelaterum AGKLE æquale reliquo HKLFC. atq; hęc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At nomen supplemẽtorũ à re ipsa sumptum est, quatenus hęc quoque prẽter duo parallelogramma, quę sunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eandem diametrum sunt, quecumque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interni parallelogrammi secat, tunc parallelogrammũ hoc toti parallelogrãmo circa eãdem diametrum non est, vt in parallelogrãmo ABCD diameter BD secat EF latus ipsius EFGD parallelogrammi. Quare EFGD parallelogrammum non est circa eandem diametrum.

Supplementorũ nomẽ à re ipsa sũptum.



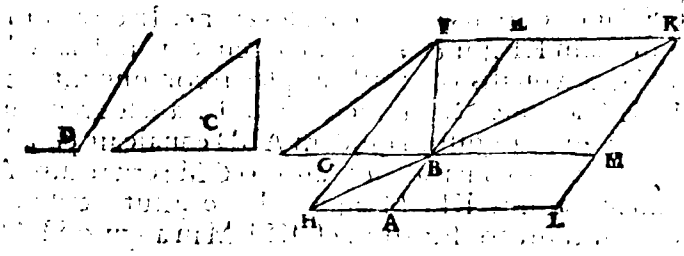


PROBLEMA XII. PROPOSITIO XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrãmum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammũ applicare in angulo ipsi D æquali. cõstituatur triangulo C æquale parallelogrammũ BEFG, in angulo EBG, qui est æqualis D. & ponatur BE in directum ipsi AB, producaturq; FG ad H: & per A alterutri ipsarũ BG EF parallela ducatur AH, & HB iungatur. Quoniam igitur in parallelas AH EF recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales sunt. Quare BHG GFE duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, cõueniũt inter se. Ergo HB FE productæ conuenient. prõducantur, & cõueniant in K: perq; K alterutri ipsarum EA FH parallela ducatur KL, & AH GB ad LM pũcta producantur. parallelogrammũ igitur est HLKF, cuius diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem sũt AG ME; ea vero, quæ supplementa dicũtur LB BF: ergo LB ipsi BF est æquale. Sed, & BF æquale est triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. Et quoniam GBE angulus æqualis est angulo ABM, sed & æqualis angulo D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutũ est LB, in angulo ABM, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat

42. huius.
31. huius.
29. huius.
5. post.
31. huius
Ex antecedente.
15. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hæc sunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciorum, excessus, & defectus. Cum enim proposita recta linea, datum spacium toti rectæ lineæ coaptaueris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spacij longitudinẽ ipsa recta, linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt spacio descripto aliqua rectæ lineæ pars extra sit, tunc deficere. Et hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum deffectus mentionem facit. In præsentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrãmum applicare volens, vt non solum parallelogrammi dato triangulo æqualis constitutionem habeamus, sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. Ex Proclo.

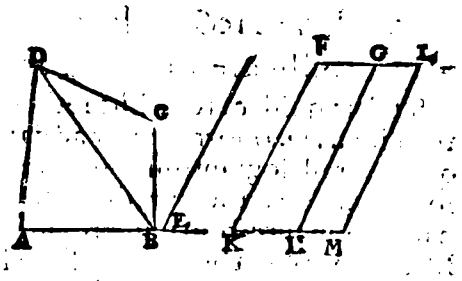
PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

Rectilineo dato æquale parallelogrãmũ constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD datus vero angulus rectilineus E. Itaq; oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammũ cõstituere in angulo ipsi E æquali, cõiungãtur enim DB, & cõstituatur triangulo ADB æquale parallelogrammũ FH in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectã lineã GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrãmũ GM, in angulo GHM qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est vtriq; ipsorũ HKF GHM, erit & HKF ãgulo GHM æqualis. cõmunis apponatur KHG. ãguli igitur FKM

42. huius.
Ex ãtecedẽte.

29.huius. KHG angulis KHG GHM æquales sunt. Sed FKH KHG sunt æquales duobus rectis. Ergo, & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdē partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. In directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. Communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. At anguli MHG HGL æquales sunt duobus rectis Quare, & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG, & æqualis est, & parallela; sed, & HG ipsi ML; erit KF ipsi ML, & æqualis, & parallela ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL. Ergo & KMFL æquales & parallelæ sunt. Parallelogrammum igitur est KFLM. Quòd cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



34.huius. 30.huius. 33.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus, & constitutionem inuenit, & applicationem æqualium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuersalius est. siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datū fuerit, per hoc problema æquale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, vt prius diximus, per se in triangula resoluitur, & methodum inueniendæ triangulorum multitudinis tradidimus. Resoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipsorum æquale parallelogrammum constituentes, reliquis vero ad datam rectam lineam æqualia applicantes parallelogramma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est, habebimus ex his parallelogrammum æquale rectilineo, quod ex illis triangulis constat; & factum iam erit, quod proponebatur. Hæc Proclus.

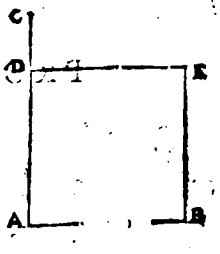
COROLLARIVM.

Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineā, dato rectilineo æquale parallelogrammum, applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII, PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratū describere. Ducatur rectæ lineæ AB à pūcto I ea dato A ad rectos angulos AC, & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctū D ducatur DE ipsi AB parallela, & per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est A D E B. & A B quidem est æqualis D E, A D vero ipsi B E. Sed & B A ipsi A D est æqualis. quattuor igitur B A, A D D E E B inter se æquales sunt, ideoq; æquilaterum est A D E B parallelogrā mum. Dico etiā rectāgulū esse. Quoniā enim in parallelas A B D E recta linea incidit A D, anguli B A D A D E duobus rectis sunt æquales. Rectus autē est B A D. Ergo, & A D E rectus erit. parallelogrāmorum vero spaciorum, quæ ex opposito sunt latera, & anguli inter se æqualia sunt. Rectus igitur est vterq; oppositorū A B E B E D angulorum: & ob id rectāgulum est A D E B. Ostensum aūt est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atq; est à recta linea A B descriptū, qđ ipsum facere oportebat.



29.huius. 34.huius.

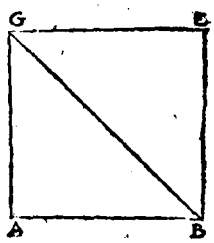
F C.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc problemate indigemus potiſſimum in ſequentis theorematis conſtructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluiſſe. Nimirum trianguli æquilateri, & quadrati, quoniam ad conſtitutionem quoque mundanarum figurarum, & precipue earum quattuor, quarum, & ortus eſt, & reſolutio, hiſce rectangulis opus eſt. Nam icoſaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex æquilateris triangulis conſtant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonſtrat, quibus mathematici tanquam demonſtratis paſſim vtuntur, nempe hæc.

Quadrata ab æqualibus rectis lineis deſcripta, etiam inter ſe æqualia ſunt.

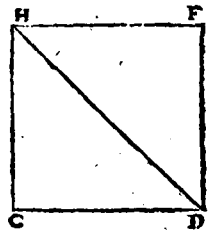
Sint enim æquales rectæ lineæ AB CD, & ab ipſa quidem AB deſcribatur ABEG quadratum; ab ipſa vero CD quadratũ (DFH. Dico hæc quadrata inter ſe æqualia eſſe. Quoniam enim rectæ lineæ AB CD æquales ſunt, erunt, & ipſæ AG CH æquales, angulosq; æquales continent. Ergo, & baſis GB eſt æqualis baſi HD, & triangulum ABG æquale triangulo CDH, & ipſorum dupla ſunt æqualia. Quadratum igitur ABEG quadrato CDFH æquale erit. Sed, & huius ipſius conuerſum.



4. huius

Quadrata æqualia ab æqualib. rectis lineis deſcripta ſũt.

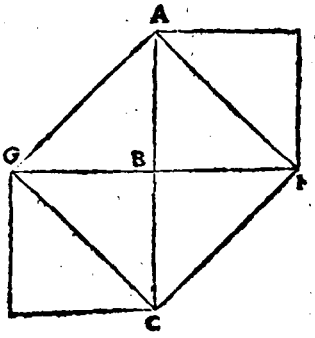
Sine enim quadrata æqualia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB ſit in directum ipſi BC. Cum igitur anguli recti ſint, recta quoque linea FB rectæ BG in directum erit. Iungantur FC CG GA AF rectæ lineæ. Et quoniam AF quadratum eſt æquale quadrato CG, & AFB triangulum æquale erit triangulo CBG. Commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti (FG eſt æquale; ideoq; parallela eſt AG ipſi FC. Rurſus quoniam angulus AFG eſt æqualis angulo CGB cum vterque ſit dimidia pars recti; erit AF ipſi CG parallela. Æqualis igitur eſt recta linea AF rectæ lineæ CG, parallelogrammi ſiquidem latera ex oppoſito iacentia ſunt.

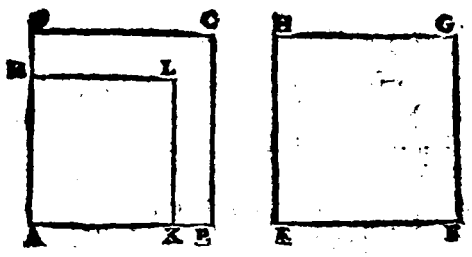


39. huius.

28. Huius.
34. huius.

Itaq; quoniã duo ſunt triangula ABF BCG, quæ alternos angulos æquales habẽt, quippe quòd AF CG parallelæ ſint, & latus vnũ AF eſt æquale lateri CG; erit, & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG æquale. Oſtenſum igitur eſt latera etiã à quibus deſcripta ſunt AF CG quadrata inter ſe æqualia eſſe, cũ illa æqualia ſint. Poſſumus etiam aliter propoſitum demõſtrare per deductionem ad id, quod fieri non poteſt in hunc modum. Sint æqualia quadrata ABCD EFGH. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea deſcribuntur inter ſe æquales eſſe. Si enim AB EF æquales non ſint, altera earum eſt maior, ſit maior AB, & abſcindatur AK, quæ ipſi EF ſit æqualis, & ex AK quadratum AKLM deſcribatur. Quoniam igitur AK eſt æqualis EF, erit, & quadratum AKLM, ex ante demonſtratis, æquale quadrato EFGH; ſed, & quadratum ABCD æquale erit eidem EFGH quadrato. Ergo quadratum ABCD quadrato AKLM eſt æquale, totum parti, quod fieri non poteſt. Non igitur æqualibus exiſtentibus quadratis ABCD EFGH rectæ lineæ AB EF à quibus ea deſcribũtur, inæquales ſunt. Ergo inter ſe æquales ſint neceſſe eſt.



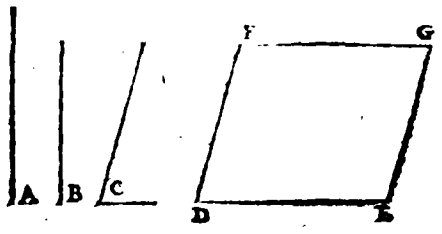


Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam constitutionem problema, quod sequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, & in dato angulo rectilineo parallelogrammum constituere.

Sint datæ quidem rectæ lineæ AB, datus autem angulus rectilineus C, oportet ex duabus rectis lineis, quæ ipsis AB æquales sint, & in angulo ipsi C æquali, parallelogrammum constituere. Exponatur recta linea DE, quæ ipsi A sit æqualis. Itaque ad datam rectam lineam DE, & ad datum in ea punctũ D, dato angulo rectilineo C æqualis angulus cõstituatur FDE: *ita vt* FD *sit æqualis ipsi B rectæ lineæ datæ. Postea per* F *ducatur* FG *parallela ipsi* DE, *& per* E *ducatur parallela ipsi* DF, *quæ cum* FG *in puncto* G *conueniat. Parallelogrammum igitur est* FDEG, *ex rectis lineis* DE DF *constitutum, quæ datis rectis lineis* AB *sunt æquales, & angulum cõtinent* FDE *dato angulo* C *æqualem. Quod facere oportuit.*

23.huius.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLVII.

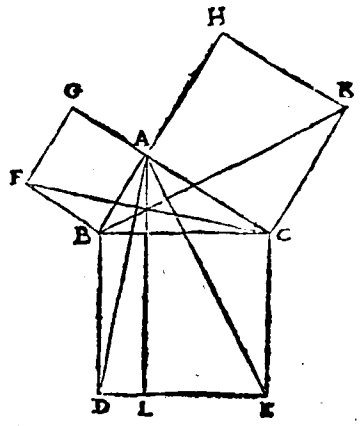
In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulũ ABC, rectũ habens BAC angulum. Dico quadratum descriptũ à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. Describatur. n. à BC quidẽ quadratũ BDEC, ab ipsis vero BA AC quadrata GB HC, perq; A alterutri ipsarũ BD CE parallela ducatur AL; & AD FC iũgatur. Quoniã igitur vterq; angulorum BAC BAG rectus est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis equales efficiunt. In directum igitur est CA ipsi AG. Eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. Et quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA, rectus. n. vterque est, cõmunis opponatur A BC. totus igitur DBA angulus toti FBC est æqualis. Quod cum duæ AB BD duabus FB BC æquales sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis, & ABD triangulum triangulo FBC æquale, estq; trianguli quidẽ ABD duplũ BL parallelogrammũ, basim. n. eandem habent BD, & in eisdẽ BD AL sũt parallelis: trianguli vero FBC duplũ est GB quadratũ. Rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdẽ sunt parallelis FB GC. Quæ autẽ æqualiũ dupla inter se æqualia sũt. Ergo æquale est parallelogrãmũ BL ipsi GB quadrato. Similiter iũctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. Totum igitur DBEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. Et describitur quidem DBEC quadratũ à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triãgulis, quadratũ, quod describitur à latere rectũ angulum

24.huius.

4.huius.

41.huius.



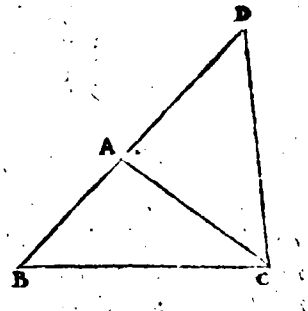
gulum subtendente aequale est quadratis, quae à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pytagoram referunt, dicuntq; eum cum illud inuenisset, bouem immolasse. Quod autem ab Euclide in sexto libro conscribitur multo vniuersalius est. Ostendit enim in rectãgulis triangulis figuram, quę fit à latere rectum angulum subtendente æqualem esse figuris, quę à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi similes, & similiter positæ, describuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab vno laterũ triãguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus cõtẽtus rectus erit.



Trianguli enim ABC, quod ab vno latere BC, describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli laterib. BA AC describuntur. Dico angulum BAC rectum esse. Ducatur. n. a puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturq; AD ipsi BA æqualis, & DC iungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA, æquale quadrato, quod ex AB. cõmune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis, quæ ex BA AC describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex DA AC, æquale est, quod ex DC quadratum; rectus. n. angulus est DAC: quadratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratũ, quod ex BC. quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. Ergo & latus DC lateri CB est æquale. Et quoniam DA est æqualis AB. cõmunis autem AC, duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC est æqualis basi CB. angulus igitur DAC angulo BAC est æqualis. Rectus autẽ est DAC. ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

11. huius.

8. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema præcedenti, & totum toti conuertitur. Si enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum subtendẽte describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur. Et si quod ab hoc eis, quæ à reliquis æquale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quod eum. Qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

Finis Libri Primi.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTORVM Liber Secundus.

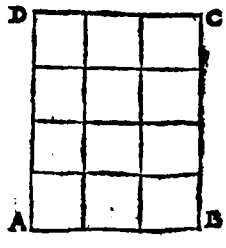
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

DIFFINITIO I.

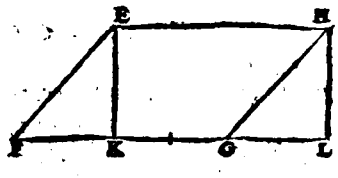
OMNE parallelogrammũ rectangulum cõtineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

FC. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est superius. Dicitur autẽ contineri duabus rectis lineis, quæ sunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non cõtingit in alijs parallelogrammis, quæ rectangula non sunt. Sit enim parallelogrammũ rectangulum ABCD: & sit, exempligratia, latus quidem AB pedum trium, latus vero BC quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorũ, quæ eadem sunt altitudine, & bases, vel easdem, vel æquales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum EF GH, cuius basis FG sit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad FG perpẽdicularis EK sit duorũpedũ. Producatur KG ad L, ita vt KL sit ipsi FG æqualis, & iungatur HL. Erit EK LH parallelogrammũ rectangulũ. Quare parallelogramma EFGH EKLH çũ æquales habeant bases FG KL, sintq; eadem altitudine, hoc est in eisdẽ parallelis, inter se æqualia sunt: sed parallelogrammi EKLH area est pedũ octo. Ergo, & area parallelogrammi EFGH totidem pedũ sit necesse est.



Verũ parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterũ, quæ circa rectũ angulũ sunt, in præsentia ponatur, quo ad ita esse manifesto apparebit. Demõstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in comẽtarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.



DIFFINITIO II.

Omnis parallelogrammi spacij vnum quodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrãmorum, cum duobus supplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

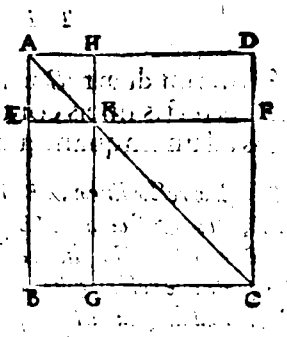
SCHOLIVM.

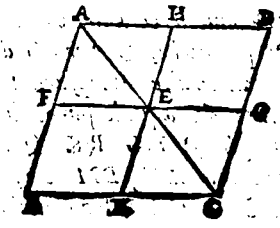
Sciendum est gnomonem breuitatis causſa à geometris inuentum fuisſe. Nomen vero ex accidente impoſitum eſt; ab ipſo enim formatum cognoſcitur, vel totius ſpacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel auferetur. Et in horoſcopijs eius officium duntaxat eſt præſentes horas notas efficere. Supplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non ſint, ſed vt non ſimilia toti, complentia vero totius ad ipſum ſimilitudinem.

Gnomon à Geometris breuitatis causſa inuẽtus. Gnomonis officium in horoſcopijs. Supplementa.

F. C. COMMENTARIVS.

Quę parallelogramma dicantur proprie circa diametrum conſiſtere, ſuperius dictum eſt, vt quę ſe inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum ſint AEKH, KGCF: & ſupplementa BK, ED. Itaque duo ſupplementa vnà cum alterutro parallelogrammorum, quę ſunt circa diametrum, gnomon appellatur. et ſi parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrammum AC ſimile ipſi GF. Si verò à parallegrammo AC auferatur gnomon BFH reliquum eſt parallelogrammum EH ſimile toti. Quamobrem ab Ariſtotele dictum eſt, quadratum circumpoſito gnomone creuit quidem, alteratum verò nihil factum eſt. Illud autem, quod in ſcholio additur ſupplementa non eſſe ſimilia toti, non omnino verum eſt. fieri enim poteſt vt quandoque etiam ſint ſimilia. Sit parallelogrammum ABCD circa diametrum AC, & ſecetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipſarum AD BC parallela, & per idē punctū E ducatur HK parallela alterutri ipſarum AB DC. erunt ſupplementa BE ED ſimilia quidem toti, ipſis verò FHKG parallelogrammis, & ſimilia & æqualia, quod ex ijs, quę in ſequentibus tradentur, facile demonſtrare poſſumus.

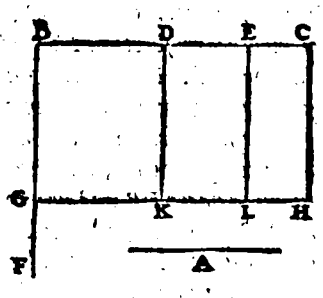




THEOREMA 2. PROPO. 1.

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale eſt eis rectangulis, quæ recta linea inſecta, & ſingulis partibus continentur.

Sint duæ rectę lineæ A BC; & ſecta ſit BC vtcũque in punctis DE. dico rectangulum rectis lineis A BC contẽtum æquale eſſe rectãgulóq; quod continetur A BD, & rectangulo, quod ADE, & ei, quod A EC continetur. Ducatur .n. à puncto B ipſi BC ad rectos angulos BF: atque ipſi A ponatur æqualis BG: & per G quidem ipſi BC parallela ducatur GH: per DE C verò ducatur DK EL CH parallelae ipſi BC rectangulum igitur BH eſt æquale rectangulis BK DL EH: atq; eſt BH quidem. quod A BC continetur; etenim continetur GB BC; & BG ipſi A eſt æqualis; rectangulũ autem



15. primi.

3. primi.

31. primi.

autē BK est quod continetur ipsis A BD; continetur .n. GB BD, quarum GB est æqualis A: & rectangulum DL est quod continetur A DE. quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod A EC continetur. ergo rectangulum contentum A BC est æquale rectangulo; contento A BD, & contento A DE, & adhuc contento A EC. Si igitur sint duæ rectę lineæ altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale eis, quæ recta linea intecta, & singulis partibus continentur. Quod oportebat demonstrare.

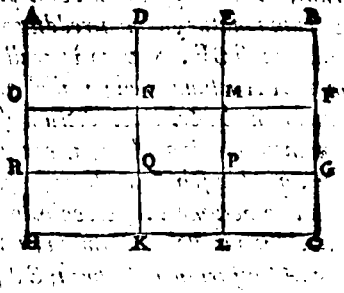
F. C. COMMENTARIVS.

Sed & non nulla his similia demonstrare libuit, quę tum ad alia, tum ad ea, quæ in decimo libro traduntur, vtilia erunt.

THEOREMA PRIMVM.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quæ secentur in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale rectangulis, quę vnaquaque partę vnius ad unamquamque partem alterius applicata continentur.

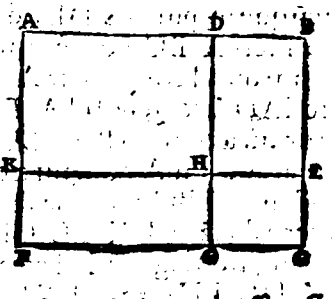
Sint duæ rectæ lineæ AB BC rectum angulum ABC continentes, & secetur AB quidem in punctis DE, BC vero in punctis FG. dico rectangulum contentum AB BC æquale esse rectangulis, quæ singulis ipsarum AD DE EB ad singulas BF FG GC applicatis cōtinentur. Completo enim parallelogrammo ABCH, ducatur per 31. primi. *DE puncta rectæ lineæ DK EL, alterutri ipsarum AH BC parallelæ; & per FG ducantur FMNO GPQR parallelæ alterutri ipsarum AB HC. erit parallelogrammum AC æquale parallelogrammis AN DM EF OQ NP MG RK QL PC: & sunt parallelogramma AN DM EF, quæ continentur ipsa BF, & singulis partibus rectę lineæ AB, videlicet AD DE EB: parallelogramma vero OQ NP MG sunt, quæ continentur FG, & singulis partibus AD DE EB: & denique parallelogramma RK QL PC, quæ continentur GC, & singulis partibus eiusdem rectæ lineæ AB. Si igitur fuerint duæ rectæ lineę, quæ secentur in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale rectangulis, quæ vnaquaque partę vnius ad vnamquāque partē alterius applicata continentur. quod oportebat demonstrare.*



THEOREMA II.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quæ utcumque secentur; rectangulum totis contentū unà cū eo, quod cōtinetur duabus partib' ipsarū ē æquale rectāgulis, quæ cōtinētur totis, & dictis partib' unà cum eo, quod reliquis partibus continetur.

Sint duæ rectę lineæ AB BC, rectum angulum AB C continente: & secetur AB quidem in puncto D; BC vero in puncto E. Dico rectangulum ABC vnà cum rectangulo contento duabus partibus ipsārum, videlicet DB EC æquale esse, & rectangulo contento tota AB, & dicta parte rectę lineæ BC, videlicet EC, & contento tota B C. & dicta parte DB vnà cum eo, quod reliquis partibus 31. primi. *AD BE continetur. compleatur enim parallelogrammum ABCF, & à puncto D alterutri ipsarum BC AF paralle la ducatur DG: à puncto autem E ducatur EH K parallela alterutri ipsarum AB FC. itaque constat rectangulum ABC æquale esse rectangulis AE KC. addatur vtrinque commune rectangulum HC, quod continetur duabus partibus*



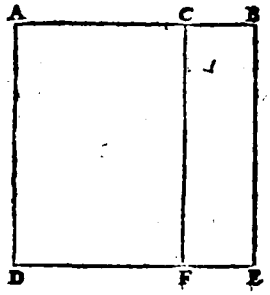
DE

DB EC. Rectangulum igitur ABC vnà cum rectangulo HC est æquale tribus rectangulis AE KC, & HC. quorum rectangulum quidem KC est quod continetur tota AB, hoc est KE, & parte EC: rectangulum vero DE vna cum rectangulo HC est quod continetur tota BC, & parte DB: & reliquum AH est quod continetur reliquis partibus AD BE, hoc est AD DH. ergo rectangulum ABC vnà cum rectangulo HC est æquale, & rectangulo contento tota AB, & EC, & contento tota BC, & DB vnà cum eo, quod reliquis partibus AD BE continetur. Si igitur duæ rectæ lineæ vtcunque secentur & reliquæ, quod oportebat demonstrare. eodem modo demonstrabitur, & in alijs partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit vtcumque; rectãgula quæ tota, & singulis partib⁹ cõtinẽtur æqualia sũt ei, quod à tota fit quadrato.

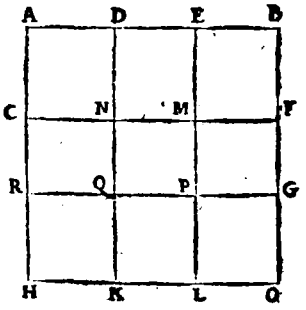
Recta enim linea AB secta sit vtcumque in puncto C. dico rectangulum; quod AB BC cõtinetur, vnà cum contento BA AC æquale esse quadrato, quod fit ex AD. describatur .n. ex AB quadratum ADEB, & per C ducatur alterutri ipsarum AD BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectãgulum contentum BA AC; etenim DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis, & rectangulum CE continetur AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit, rectangula, quæ tota, & singulis partibus continentur, aequalia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



46. primi, 31. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

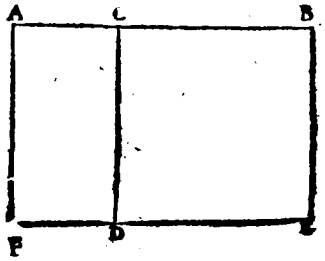
Similiter vt superius demonstrabitur, si recta linea secetur in quotcumque partes, quadratum totius lineæ æquale esse rectangulis, quę singulis partibus ad singulas applicatis continentur.



THEOREMA. III. PROPOSITIO. III.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; rectangulum tota, & vna eius parte cõtentum æquale est, & rectangulo, quod partius continetur, & ei quod à predicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit vtcumque in puncto C. Dico ABC rectangulum æquale esse rectangulo ACB unà cum quadrato, quod fit ex BC. describatur .n. ex BC quadratũ CDEB; producaturq; ED in F; & per A alterutri ipsarum CD BE parallela ducatur AF. æquale utique erit rectangulum AE ipsis AD CE: & est AE quidem rectãgulũ contentum AB BC; etenim AB BE continetur, quarũ BE est æqualis BC: rectangulũ vero AD est quod continetur AC CB, cũ DC ipsi

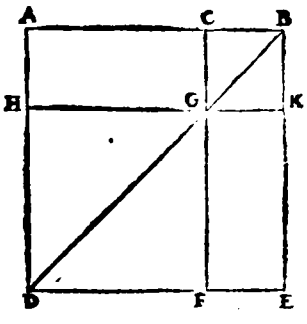


46. primi, 31. primi,

ipſi CB ſit æqualis: & DB eſt quadratũ, quod fit ex BC. ergo rectangulũ ABC eſt æquale rectãgulo ACB vnà cum quadrato quod ex BC. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, & vna eius parte contentum æquale eſt rectãgulo, quod partib⁹ cõtinetur, & ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IV. PROPOSITIO. IV.

Si recta linea ſecta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei, quod bis partibus continetur rectangulo.



Recta .n. linea AB ſecta ſit vtcumque in C. dico quadratum, quod fit ex AB æquale eſſe, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis
46. primi. AC CB continetur. deſcribatur .n. ex AB quadratum ADEB, iungaturq; BD, & per C quidẽ
31. primi. alterutri ipſarum AD BE parallela ducatur CG F; per G vero alterutri ipſarum AB DE ducatur
29. primi. parallela HK. Et quoniam CF eſt parallela ipſi AD, & in ipſas incidit BD: erit exterior angu-
5. primi. lus BGC interiori, & oppoſito ADB æqualis: angulus autem ADB eſt æqualis angulo ABD, quod. & latus BA æquale eſt lateri AD. quare
6. primi. CGB angulus angulo GBC eſt æqualis: ac pro-
34 primi. pterea latus BC lateri CG æquale. Sed & latus CB æquale eſt lateri GK. & CG ipſi BK. ergo & GK eſt æquale KB, & CGKB æquilaterum eſt. dico inſuper
29. primi. etiam rectangulum eſſe. quoniam .n. CG eſt parallela ipſi BK & in ipſas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis ſunt æquales. rectus autẽ eſt KBC angu-
34. primi. lus. ergo & rectus GCB, & anguli oppoſiti CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur eſt CGKB. Sed oſtenſum fuit & æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt CGKB, quod quidem fit ex BC. eadẽ ratione & HF eſt quadratum, quod
43. primi. fit ex HG. hoc eſt ex AC. ergo HF CK ex ipſis AC CB quadrata ſunt. & quoniam rectangulum AG eſt æquale rectangulo GE atque eſt AG quod AC CB continetur, eſt .n. GC ipſi CB æqualis: erit & GE æqualeei, quod continetur AC CB, quare rectangula AG GE æqualia ſunt ei quod bis AC CB continetur. Sunt autem, & HF CK quadrata ex AC CB. quattuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis AC CB continetur rectangulo ſunt aequalia ſed HFCK AG GE ſunt totum ADEB quadratum, quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB aequale eſt. & quadratis ex AC CB, & ei quod bis AC CB cõtinetur rectangulo. quare ſi recta linea vtcumq; ſecta fuerit; quadratũ quod fit à tota aequale erit & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo, quod bis partibus cõtinetur, atq; illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex AB æquale eſſe, & quadratis ex AC CB. &
[5. primi. ei rectangulo, quod bis AC CB cõtinetur: quoniã .n. in eadem figura æqualis
32. primi. eſt BA ipſi AD; & angulus ABD angulo ADB æqualis erit: & cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint aequales; erunt trianguli ABD tres anguli ABD ADB BAD aequales duobus rectis. rectus autem eſt angulus BAD, ergo
29. primi. reliqui ABD ADB ſunt vni recto aequales, & ſunt aequales inter ſe ſe. vterq; igitur ipſorum ABD ADB eſt recti dimidius. Sed rectus eſt BCG, aequalis nãque eſt angulo oppoſito, qui ad A. reliquus igitur CGB dimidius eſt recti: ac
6. primi. propterea CGB angulus angulo CBG eſt æqualis, & latus BC æquale lateri CG. Sed CB eſt aequalis GK, & CG ipſi BK. aequilaterũ igitur ẽ CK; & cũ habeat rectũ angulũ CBK, etiã eſt quadratũ; ꝙ quidem fit ex CB. eadẽ ratione & HF

quadratum

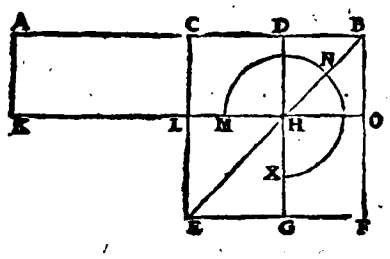
quadratum est, & æquale quadrato quod ex AC. quadrata igitur sunt CK HF, & quadratis ex AC CB æqualia. Rursus quoniam rectangulum AG est æquale ipsi GE, atq; est AG id quod AC CB continetur, est enim CG ipsi CB æqualis: erit & GE æquale contento AC CB. quare AG GE çqualia sunt ei, quod bis AC CB continetur. Sunt autem & CK HF æqualia quadratis ex AC CB. ergo CK HF AG GE æqualia sunt, & quadratis ex AC CB & ei quod bis AC CB continetur. Sed CK HF & AG, GE sunt totum AE, quod fit ex AB quadratum. quadratum igitur ex AB æquale est, quadratisq; ex AC CB, & ei quod bis AC CB continetur rectangulo: Quod ostendere oportebat. 34. primi. 43. primi.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat in qnadratis spacijs parallelogrãma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineę, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.



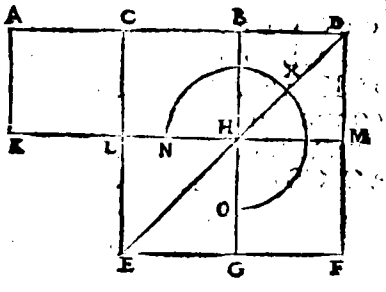
Recta. n. linea quaedam AB secta sit in partes aequales ad punctum C, & in partes inaequales ad D. Dico rectangulum contentum AD DB vnà cum quadrato quod fit ex CD aequale esse ei quod ex CB quadrato. Describatur. n. ex BC quadratum CEFB: iungaturq; BE; & per D quidem alterutri ipsarũ CE BF parallela ducatur DHG; per H vero ducatur KLO parallela alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela AK. et quoniam CH supplementũ aequale est supplemento HF, communeapponatur DO totum igitur CO toti DF est aequale. sed CO est aequale AL, quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL aequale est DF. cõmune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL aequale erit. Sed AH quidem est quod AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est aequalis; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX aequalis est ei, quod AD DB continetur, cõmune apponatur LG, aequale scilicet quadrato quod ex CD. ergo MNX gnomon, & LG aequalia sunt rectangulo, quod cõtinetur AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. Sed MNX gnomon, & LG sunt totũ quadratum CEFB, quod quidẽ fit ex CB. ergo rectangulum ADB vnàcũ quadrato, quod ex CD æquale est ei, quod ex CB quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulũ inæqualibus totius partibus contentũ vnà cũ quadrato lineæ, quę inter sectiones interijcitur, æquale ẽ ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat. 46. primi. 31. primi. 43. primi. 36. primi.

THEOREMA VI PROPOSITIO. VI.

Si recta linea bifariã secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cũ adiecta, & adiecta cõtentũ, vna cũ quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea

quæ ex dimidia,& adiecta cõstat tãquã ab vna linea describitur.

Recta enim linea quædã AB secetur bifariam in puncto C,adijciaturq; ipsi in rectum BD. Dico rectangulum ADB vnà cũ quadrato ex BC æquale esse ei,quod fit ex CD quadrato. Describatur .n. ex CD quadratũ CEFD,& iungatur DE; pq; B alterutri ipsarũ CE DF parallela ducatur BHG:& per H ducatur KLM parallela alterutri ipsarum AD EF; & ad huc per A alterutri CL DM parallela AK.



46. primi.
31. primi.
36. primi.
43. primi.

Itaq: quoniã AC est æqualis CB, erit, & rectangulũ AL rectangulo CH æquale. Sed CH æquale est HF. Ergo & AL ipsi HF æquale erit. Cõmune apponatur CM. totũ igitur AM gnomoni NXO est æquale: atq; est AM, quod AD DB cõtinetur, etenĩ DM est æqualis DB. Ergo & gnomon NXO æqualis est rectãgulo ADB. Rursus cõmune apponatur LG, æquale scilicet quadrato, quod ex CB. rectãgulũ igitur ADB vnà cũ quadrato quod ex BC æquale est gnomoni NXO & ipsi LG. Sed gnomon NXO, & LG totũ sũt CEFD quadratũ; quod quidẽ fit ex CD. Ergo rectangulũ ADB vnà cũ quadrato ex BC æquale est ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adijciaturq; ipsi in rectũ quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, & adiecta contentum vnà cũ quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia & adiecta constat, tamquam ab vna linea describitur, quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

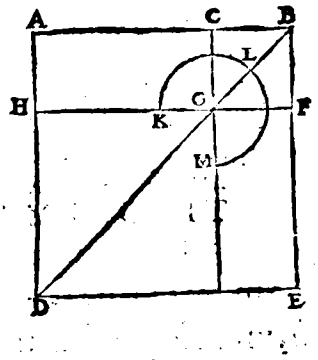
In hoc ostenditur arithmetica analogia. Quo enim AD superat DC, videlicet ipsa CB, eo, & CD superat DB. Quod per numeros manifestius cognoscitur, cum medius semper æqualiter, & excedatur, & excedat. Theorema autem est. Quadratum quod fit ab excessu vnà cum eo, quod extremis continetur, quadrato medii æquale esse.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtcumq; secta fuerit, quæ à tota, & vna parte fiunt vtraq; quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædã AB secta sit vtcumque in pũcto C. Dico quadrata ex AB BC æqualia esse, & rectãgulo, quod bis AB BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. Describatur enim ex AB quadratum ADEB, & figura constructa; itaq; quoniam AG rectãgulum æquale est rectãgulo GE. commune apponatur CF. quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. Sed AF CE sunt KLM gnomon, & quadratũ CF, ergo KLM gnomõ, & quadratum CF dupla erũt rectanguli AF. est autem id quod bis AB BC continetur duplum ipsius AF; etenim BF est

46 primi.
43. primi.



æqualis

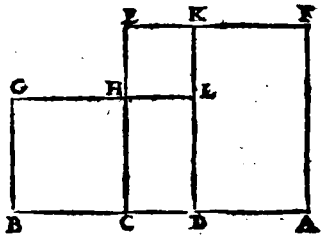
æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratũ CF æqualia ſunt, ei quod bis AB BC continetur. commune apponatur DG, quod eſt ex AC quadratũ. Ergo gnomon KLM, & quadrata BG GD æqualia ſunt ei, quod bis AB BC cõtinetur, & quadrato ex AC. gnomon KLM, & quadrata BG GD totum ſunt AD EB, & CF; quę sũt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC ęqualia sũt rectangulo, quod bis AB BC continetur vnà cũ eo, quod fit ex AC quadrato. Ergo ſi recta linea vtcumq; ſecta fuerit; quę à tota, & vnà parte fiunt vtraq; quadrata æqualia ſunt rectanguloq; quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Non alienum eſſe videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonij pergæi conica demonſtrauimus: eo enim ad ſequentia vtemur.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur; earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vna cum quadrato eius, lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.

Secetur recta linea AB in partes inæquales in C ita vt AC maior ſit quã CB; & ipſi CB æqualis ponatur AD. Dico quadrata ex AC CB æqualia eſſe rectangulo, quod bis ACB continetur vnà cum quadrato rectæ lineæ DC, qua ſcilicet AC ipſam CB ſuperat. Conſtituantur .n. ex AC CB quadrata ACEF CBGH: & per D ducta linea DK, ipſi CE parallela, producatur GH, vt ſecet DK in L. Itaque quoniam AD eſt ęqualis CB, addita vtrique communi DC; erit DB ipſi AC æqualis. Sed GL eſt ęqualis BD, & CE æqualis AC. Ergo, & GL ipſi CE æqualis erit. eſt autem, & CH æqualis HG. reliqua igitur EH reliquæ HL eſt æqualis: ideoq; KH eſt quadratum, quod à linea KE, hoc eſt DC deſcribitur. rectangula vero AK DG ſunt quę continentur lineis AC CB; etenim AD eſt æqualis BC, & DB ipſi AC. quadrata igitur ex AC CB ęqualia ſunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum ipſius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inęquales ſecetur; earũ partium quadrata ęqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem. quod demonſtrare oportebat.

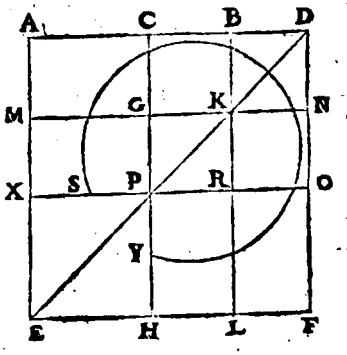


46. primi.
31. primi.
34. primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit; & quod quater tota, & vna parte continętur rectangulum vnà cũ quadrato reliquæ partis æquale eſt quadrato, quod ex tota, & dicta parte tamquam ex vna linea deſcribitur.

Recta enim linea AB ſecta ſit vtcumq; in C. Dico rectangulum quater AB BC cõtẽtũ vna cum quadrato quod ex AC æquale eſſe quadrato, qđ ex AB BC. tãquã ex vna linea deſcribitur. Producatur .n. recta linea AB in D; & ipſi CB ponatur æqualis BD; deſcribaturq; ex AD quadratum AEFD; & dupla figura conſtruatur. Quoniã igitur CB eſt ęqualis BD, atq; eſt CB ipſi GK æqualis; BD vero ipſi KN: erit & GK æqualis KN eadẽ ratione, & PR ipſi RO eſt æqualis. & quoniã CB eſt æqualis BD, & GK ipſi KN; erit rectangulum

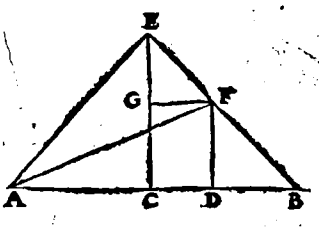


34. primi.
36. primi.

43.primi. quidem CK rectangulo KD; rectangulum vero GR ipſi RN æquale. Sed CK eſt æquale RN, ſupplementa.n. ſunt parallelogrammi CO. Ergo & KD æquale eſt GR, & quatuor rectangula DK KC GR RN inter ſe æqualia; ideoq; quadrupla ſunt rectanguli CK. Rurſus quoniam CB eſt æqualis BD. & BD quidē ipſi BK, hoc eſt ipſi CG æqualis; CB vero ipſi GK, hoc eſt GP: erit & CG æqualis GP. eſt autem & PR ipſi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo M
43.primi. P, & rectangulum PL ipſi RF æquale erit. Sed MP eſt æquale PL; ſupplementa enim ſunt ML parallelogrammi. Quare & AG ipſi RF eſt æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter ſe æqualia ſunt, ac propterea ipſius AG quadrupla. Oſtenſum autem eſt, & quattuor CK KD GR RN quadrupla eſſe CK. Quare octo continentia gnomonem STY ipſius AK quadrupla ſunt. Et quoniam AK eſt quod AB BC continetur; etenim BK eſt æqualis BC; erit contentum quater AB BC ipſius AK quadruplum: At demonſtratus eſt gnomon STY quadruplus AK. Quod igitur quater AB BC continetur æquale eſt gnomoni STY. Commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC eſt æquale. Ergo quod quater AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC æquale eſt ipſi STY gnomoni, & quadrato XH. Sed STY gnomon, & XH totum ſunt AEFD quadratum, quod deſcribitur ex AD. Rectangulum igitur quater AB BC contentum vnà cum quadrato ex AC æquale eſt ei, quod ex AD, hoc eſt ex AB BC tâquam ex vna linea deſcribitur, quadrato. Ergo ſi recta linea vtcũque ſecta fuerit; quod quater tota, & vna parte continetur rectangulum, vnà cum quadrato reliquæ partis æquale eſt quadrato, quod ex tota, & dicta parte tamquam ex vna linea deſcribitur. Quod oſtendendum fuerat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales ſecta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineę eius, quæ inter ſectiones interijcitur.



Recta.n. linea quædam AB ſecta ſit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorũ ex A
11.primi. C CD dupla eſſe. Ducatur.n. à puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE, & vtrique ipſarum AC CB æqualis ponatur, iũgãturq; EA EB.
31.primi. ac per D quidē ipſi CE parallela ducatur DF; per F vero ipſi AB parallela FG, & AF iungatur. itaq; quoniam AC eſt æqualis CE; erit, &
5.primi. 32.primi. angulus EAC ãgulo AEC æqualis. Et cũ rectus ſit angulus ad C, reliqui AEC, EAC vni recto æquales erunt. & ſunt æquales inter ſeſe. vterque igitur ipſorũ AEC EAC recti eſt dimidius. eadem ratione, & recti dimidius eſt vterq; ipſorũ CEB EBC. ergo totus ãgulus AEB rectus eſt. & quoniã ãgulus GEF dimidius eſt recti, rectus autem EGF; æqualis.n. eſt interiori & oppoſito ECB; erit & re-
29.primi. 6.primi. liquus EFG recti dimidius: æqualis igitur eſt GEF ãgulus ipſi EFG. quare & latus EG lateri GE eſt æquale. Rurſus qm̃ angulus ad B dimidius eſt recti, rectus autē FDB, quòd ſit æqualis interiori & oppoſito ECB: reliquus BFD recti erit dimidius. ãgulus igitur ad B æqualis eſt ãgulo DFB; ideoq; latus DF lateri DB æquale. & quoniã AC eſt æqualis CE, erit, & ex AC quadratũ æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla ſũt quadrati ex AC. quadratis autē ex
47.primi. AC CE æquale eſt quadratũ ex EA, ſiquidè rectus eſt angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniã EG æqualis eſt CF; & quadratũ ex EG quadrato ex GF eſt æquale. quadrata igitur ex EG dupla ſunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale eſt quod ex EF quadratũ. Ergo

quadratum

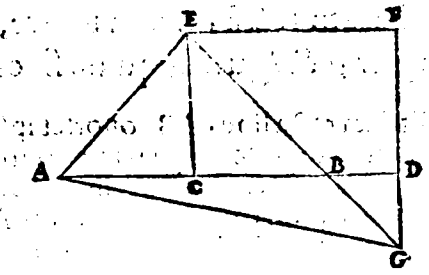
quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit æqualis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. Sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorũ ex AC CD; est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interijcitur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Possumus etiam illud aliter demonstrare hoc modo. Iisdem enim positis quoniam recta linea AB secatur in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D; erit DB recta linea, qua AC ipsam CD superat. Ergo ex ijs, quæ demonstrauimus ad septimam huius, quadrata ex AC CD æqualia sunt, & rectangulo, quod bis AC CD continetur; & ipsius DB quadrato: ideoq; quadrata ex AC CD vnà cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & quadrato ipsius DB. dupla sunt quadratorum ex AC CD; Sed quadratum ex AD est æquale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. quod oportebat demonstrare. 4. huius.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in rectum quædam recta linea adijciatur; quę à tota cum adiecta, & adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, & adiecta constat, tamquam ab vna linea describitur.



Recta enim linea AB secetur bifariam in C, & ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea BD, dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC CD dupla esse. ducatur enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & vtrique ipsarum AC CB æqualis ponatur; iungantur q; AE EB, & per E quidem ipsi AD parallela ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela ipsi CE. & quoniam in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEE EFD æquales sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quã sint duo recti in infinitũ producuntur, conueniunt inter se se. Ergo EB FD productæ ad partes BD cõuenient; producantur, & cõueniant in puncto G, & AG iungatur; itaq; quoniam AC est æqualis CE, & angulus AEC angulo EAC æqualis erit: atq; est rectus qui ad C. vterq; igitur ipsorum ECA AEC est recti dimidius. eadem ratione, & recti dimidius est vterq; CEB EBC. ergo AEB est rectus. & quoniam EBC est dimidius recti; erit & recti dimidius DBG; cum sit aduerticẽ. Sed & BDG rectus est; etenim est æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidius est recti, & ob id ipsi DBG æqualis. ergo & latus BD æquale lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidius recti, rectus autem, qui ad F, est

11. primi.

31. primi.

29. primi.

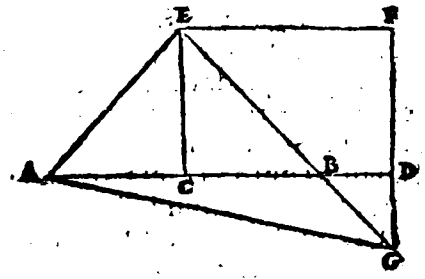
Ex demonstratis ad. 29. primi.

5. primi.

15. primi.

29. primi.

.11. angulo opposito q ad C æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidi°, & æqualis ipsi EGF. quare & latus GF lateri EF est æquale. & cũ EC sit æqualis CA; & quadratũ ex EC æquale est ei, q ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla sunt quadrati ex CA. quadratis aũt ex EC CA æquale est quadratũ ex EA. quadratũ igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus qm GF est æqualis FE, æquale est, & ex GE quadratũ quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sũt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est, quod ex EG quadratũ. ergo quadratũ ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis aũt est EF ipsi CD. quadratũ igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed ostensum est quadratũ ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata quadratorũ ex AC CD sũt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est quod ex AG quadratũ. quadratũ igitur ex AG duplũ est quadratorũ ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in rectum quędam recta linea adijciatur; quæ à tota cum adiecta, & adiecta fiunt vtraq; quadrata dupla sunt, & quadrati dimidię, & quadrati, quod ab ea, quę ex dimidia, & adiecta cõstat tamquam ab vna linea describitur. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

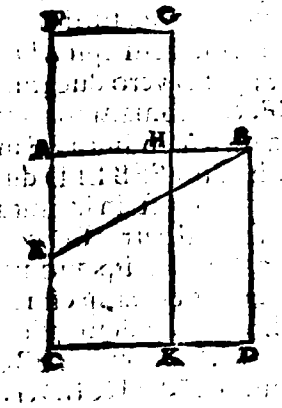
Hoc quoque aliter demonstrabimus.

Quoniam enim recta linea AB secatur bifariam in C, & ipsi adijcitur BD, erit BD linea, quæ DC ipsam CA superat quare ex demõstratis ad septimam huius quadrata ex AC CD æqualia sũt rectangulo, quod bis continetur AC CD, & quadrato ipsius BD. ergo quadrata ex AC CD vnà cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & ipsius BD quadrato dupla sunt quadratorum ex AC CD. at quadratum ex AD est æquale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. quod demonstrare oportuit.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectã lineam secare, ita vt quod tota, & altera parte cõtinetur rectãgulũ æquale sit ei quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ita secare, vt quod tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur. n. ex AB quadratum ABCD: secetur q; AC bifariam in E, & BE iungatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturq; ex AF quadratum FGHA: & GH ad K p ducatur. Dico AB sectã esse in H ita vt ABH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam. n. recta linea AC bifariam secatur in E; adijciturq; ipsi in rectum AF, rectãgulum CFA vna cũ quadrato ex AE æquale erit quadrato ex EF. Sed EF est æqualis EB. rectangulum igitur CFA vna cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato aũtẽ ex EB æqua lia sunt quadrata ex BA AE etenĩ angulus ad A rectus est. ergo rectangulum CFA vna cũ quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA AE. cõe auferatur, quod ex AE quadratum. reliquum igitur rectangulum



1. huius. 47. primi.

lum CFA æquale est quadrato ex AB est autẽ CFA quidem rectangulũ FK. si quidem AF est æqualis FG; quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectãgulum igitur FK æquale est quadrato AD. cõmune auferatur AK. ergo reliquũ FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum ABH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulũ igitur ABH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita vt ABH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

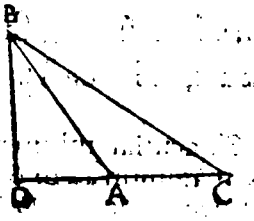
SCHOLIVM

Ex hoc constat geometricam esse analogiam. quoniam enim AB secta est in H, & quod AB BH continetur quadrato AH est æquale. Hoc autẽ soli geometricæ accidit medietati. Hanc in sequentibus extremæ, ac mediæ ratione secari dicit. nunc autem, quoniam de proportione nihil traditum est, non dicit extremæ, ac mediæ ratione secari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

In obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectãgulo cõtento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractũ perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusiangulum triangulum ABC. obtusum angulum habens BAC: & ducatur à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. Dico quadratũ ex BC maius esse, quã quadrata ex BA AC, rectangulo, quod bis CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est vtcumq; in puncto A, erit quadratum ex CD æquale, & quadratis ex CA AD, & ei quod bis CA AD cõtinetur rectangulo. Commune apponatur ex DB quadratum. Quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo, quod bis CA AD continetur. Sed quadratis ex CD DB æquale est quadratum ex CB. Rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. Quadratis vero ex AD DB æquale est quadratũ ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis CA AD contento. Ergo quadratum ex CB maius est, quàm quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis CA AD continetur. In obtusiangulis igitur triangulis, quadratum, quod a latere obtusum angulum subtendente fit, maius est quam quadrata quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectãgulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius a perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.



12. primi.

4. huius.

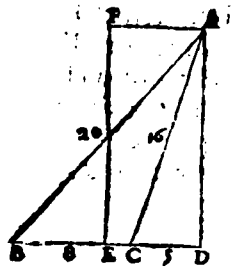
47 primi.

FIC. COMMENTARIVS.

Ex iis, quæ in hoc theoremate demonstrata sunt possumus cuiuslibet trianguli, obtusum angulum habentis aream dimetiri.

Sit

Sit triangulum obtusiangulum ABC, habens angulum ACB obtusũ; sitquè latus AB exempli gratia pedum viginti, BC octo, & CA sexdecim: & à puncto A ad BC protractam ducatur perpendicularis AD. Primum igitur quanta sit linea CD, quæ adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata vtrorumq; laterum AC CB, quæ sunt circa obtusum ãgulum simul sumpta à quadrato lateris AB, quod obtuso angulo subtenditur, detrahemus, & quod reliquum fuerit, diuidemus per duplum lateris BC. ex hac.n. diuisione prouenit linea, quam quærimus. est autem quadratum lateris AC 256, & quadratum ipsius BC 64, quæ simul sumpta faciũt 320. demptis igitur 320 à 400, quod est quadratum lateris AB, relinquuntur 80, atq; his diuisis per 16, videlicet per duplum ipsius BC prodibunt 5, & tot pedum erit linea CD. Itaq; quoniam triangulum ACD rectangulum est, quadratum lateris AC



47.primi. *æquale erit quadratis, quæ fiunt ex CD DA. quare dempto quadrato lineæ CD, quod est 25 à quadrato ipsius AC 256, reliquum erit quadratum perpendicularis AD, quod est 231, cuius latus AD est 15 $\frac{1}{5}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inueniatur, docuimus in nostris commentarijs in librum Archimedis de circuli dimensione. Vt igitur trianguli ABC aream habeamus, secetur BD bifariam in puncto E, & ab eo ducatur EF ipsi DA parallela; rursusq; à puncto A ducatur parallela ipsi DB, & conueniens cum EF in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum ADEF æquale triangulo ABD: vtrumque enim dimidium est parallelogrammi, cuius basis est BD, & altitudo eadem AD. Ergo ducta ED, quæ est 6 $\frac{1}{2}$ in AD 15 $\frac{1}{5}$ proueniet area rectanguli ADEF, & ob id etiam ABD trianguli 98 $\frac{4}{5}$ pedum quadratorum; Eadem ratione inuenietur area trianguli ACD esse eius vicli pedum 38. Quare demptis 38 à 98 $\frac{4}{5}$ relinquentur 60 $\frac{4}{5}$ proximè, pro area trianguli ABC, quam nobis inquirendam proposuimus.*

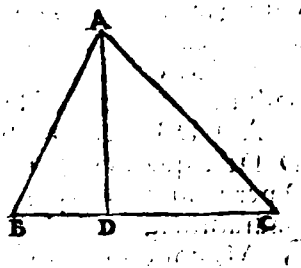
THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum ãgulum subtendente fit quadratum minus est, quam quadrata, quæ fiunt lateribus acutum angulum cõtinentibus, rectangulo cõtento bis vno laterũ, quæ sunt circa acutũ angulũ, in quod perpẽdicularis cadit, & linea à perpẽdiculari intus assumpta ad angulũ acutũ.

Sit acutiangulum triangulum ABC acutũ habens ãgulum ad B: & ducatur à pũcto A ad BC

12.primi. perpendicularis AD. Dico quadratũ, quod fit ex AC minus esse, quã quadrata, quæ ex CB BA rectangulo, quod bis CB BD continetur. Quoniã

7.huiuss. enim recta linea CB secta est vtcumq; in D, erũt quadrata ex CB BD æqualia, & rectãgulo quod bis CB BD continetur, & quadrato ex DC. commune apponatur quod ex AD quadratum. Qua-



drata igitur ex CB BD DA æqualia sunt, & rectangulo bis CB BD contento.

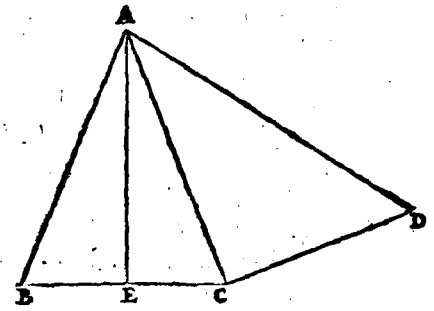
47.primi & quadratis ex AD DC. Sed quadratis ex BD DA æquale est quod ex AB quadratum; rectus.n. angulus est qui ad D. quadratis vero ex AD DC æquale est quadratum ex AC. quadrata igitur ex CB BA sũt æqualia quadrato ex AC & ei quod bis CB BD cõtinetur, rectangulo. quare solũ quadratũ ex AC minus est quã quadrata ex CB BA rectangulo, quod bis CB BD continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtẽdente fit, minus est quã quadrata, quæ fiunt à lateribus acutũ angulum cõtinẽti bus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulũ acutum. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM

SCHOLIVM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum esse, quod tres acutos angulos habet, sciendum est hoc loco non ita dicere, sed triangula omnia appellare acutiangula propterea quod omnia angulum habent acutũ, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. Propositio igitur huiusmodi est. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest, quam latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quæ sequuntur. Itaque si rectangulum sit triãgulum ex lateribus acutum angulum continentibus accipiemus illud, quod recto angulo subtenditur, vt in ipsum perpendicularis cadat. & similiter faciemus, si obtusiangulum sit. Conuersum vero theorematis est hoc.

Sit quadratu ex AB minus quã quadrata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cõtinetur, & reliqua deīceps; atq; à pũcto C ipsi CA ad rectos angulos ducatur CD, quæ ipsi CB sit ęqualis. Ergo quadrata ex BC CA æqualia sunt quadratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC CA minus est quadratum ex AB. ergo & quadratis ex DC CA minus erit. quadratis autẽ ex DC CA æquale est quadratum ex DA. Quadratum igitur ex DA quadrato ex AB maius, & ipsa DA maior quàm AB. Itaque quoniã duæ DC CA duabus BC CA ęquales sunt, & basis DA maior basi AB, erit & angulus DCA angulo ACB maior. rectus autem est DCA. ergo ACB acutus erit. quod oportebat demonstrare.



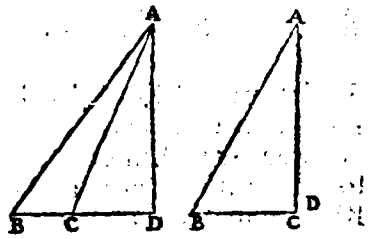
47. primi

25. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc non solum in triangulis acutiangulis verum est, sed etiam in obtusiangulis, & rectangulis, quæ duos angulos necessario habent acutos. Quare dicemus præsens theorema tres habere casus, vel enim ducta perpendiculari AD, punctum D cadit inter BC, vel extra, vel in ipsum C, ita vt AD sit eadem, quę AC. Euclidis demonstratio congruit primo casui in triangulis, quę acutiãgula dicuntur; in alijs autem si modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuso subtenditur? At si cadat in alterum latus eorum, quę acutis angulis subtenduntur, nihilo minus idem sequetur, vt demonstrabimus.

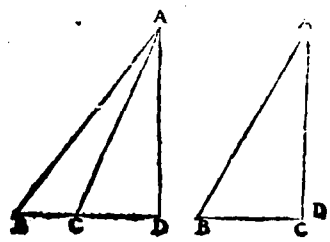
Sit obtusiangulum triangulum ABC, obtusum habens ACB ãgulum, & ducatur à pũcto A ad BC protractam perpendicularis AD. Dico quadratum, quod fit ex AD, acutũ angulũ ABC subtendente minus esse. Quã quadrata quæ ex AB BC fiunt, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



Quoniam enim ABD triangulum rectangulum est, quadratum, quod fit ex AB ęquale est quadratis, quę ex BD DA. commune addatur quadratũ ex BC. ergo quadrata ex AB BC ęqualia sunt quadratis ex BD DA BC. Sed quadrato ex BD ęqualia

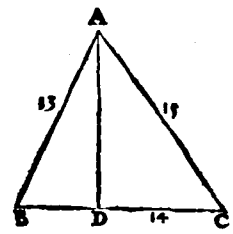
æqualia ſunt quadrata ex BC CD vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. quadratis autem ex CD DA quadratum ex AC eſt æquale. Quadrata igitur ex AB BC æqualia ſunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vna cum rectangulo, quod bis BC CD cõtine-
3. huius. *tur. Sed quadrato ex BC, & rectangulo, quod BC CD continetur æquale eſt rectãgulũ CBD, ac propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD æquale eſt rectangulum, quod bis CB BD continetur. Ergo quadrata ex AB BC æqualia ſunt, quadrato ex AC vnà cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratũ igitur ex AC minus eſt, quã quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.*

Sit triangulum rectangulum ABC rectum ãgulum habẽs ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC ſubtendit minus eſſe, quam quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



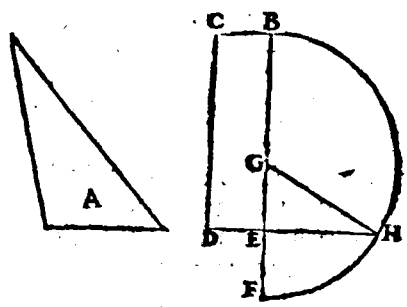
Quoniam enim triangulum rectangulũ eſt, erit perpẽdicularis AD eadem, quæ latus trianguli AC, & punctũ D idem, quod C. Quadratũ vero, quod fit ex AB æquale quadratis ex BC CA. cõmune addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC æqualia ſunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius qđ fit ex BC. hoc eſt rectãgulo, qđ bis cõtinetur CB BD. Quadratũ igitur ex AC minus eſt quã quadrata ex AB BC rectãgulo qđ bis CB BD cõtinetur. qđ demonſtrare oportebat.

Ex proxime demonſtratis licebit cuiuſq; trianguli ſiue acutiãguli, ſiue rectãguli, ſiue obtuſiãguli quod nota latera habeat, aream inuenire.



Sit triangulũ ABC habẽs ãgulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpẽdicularis ducatur AD, quę inter BC neceſſario cadet. Sit autẽ latus AB pedũ 13, BC 14, & CA 15. Itaq; primum quadratũ lateris AC, quod angulo acuto B ſubtẽditur, à quadratis reliquorũ laterũ AB BC ſimul iunctis auferemus, & quod reliquitur, diuidemus per duplum lateris BC, in quod perpendicularis cadit; & proueniet recta linea BD, quę à perpendiculari intus aſſumitur ad angulũ acutũ. Deindè à quadrato lateris AB, qđ ſubtẽditur ãgulo ADB recto, auferemus quadratum ipſius BD, & eius, quod prouenerit quadrati latus erit perpẽdicularis AD magnitudo, ex qua deniq; totius ABC triãguli area nota efficietur. Quadratũ igitur lateris AC eſt 225. quadratũ vero ipſius AB 169, & quadratũ BC 196, quæ duo ſimul iũcta faciũt 365. ergo ſublatis 225 à 365 relinquẽtur 140: atq; his per 28 diuiſis proueniẽt 5; ac propterea BD erit pedũ quinq;. Rurſus ſi à quadrato lateris AB, hoc eſt à 169 auferatur quadratũ BD, quod eſt 25, relinquẽtur 144, cuius quadrati latus eſt 12. ergo perpẽdicularis AD duodecĩ pedũ erit. Itaq; ductis 12 in baſis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, & totidem pedum quadratorum erit area trianguli ABC, quam à principio quærebamus.

PROBLEMA II.
PROPOSITIO XIIII.
Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.



Sit datum rectilineũ A. Oportet ipſi A
45. primi. rectilineo aequale quadratũ cõſtituere. cõſtituatur rectilineo A æquale parallelogrãmum rectãgulũ BCDE. Si igitur BE eſt æqualis ED factum iã erit, quod pponebatur, etenĩ rectilineo A æquale quadratũ cõſtitutũ eſt BD: ſin minus, vna ipſarũ BE ED maior eſt. ſit BE maior, & pducatur ad F, ponaturq; ipſi ED æqualis EF. deĩde ſecta FB biſariã in G centro

centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturq; DE in H, & GH iungatur. Quoniã igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, & inequales ad E; erit rectangulum BEF vnà cũ quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. Rectangulum igitur BEF vna cũ quadrato ex GE æquale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH æqualia sunt ex HE EG quadrata. Ergo rectangulũ BEF vna cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. Commune auferatur ex EG quadratum. Reliquum igitur rectangulum BEF est æquale quadrato ex EH. Sed rectangulum BEF est ipsum BD parallelogrãmum. quoniam EF est æqualis ED. Ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. Parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. Rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod uidelicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat. 5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc problemate multo vniuersalius est, quod in sexto libro demonstratur nempe. Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Finis Libri Secundi.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Tertius.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

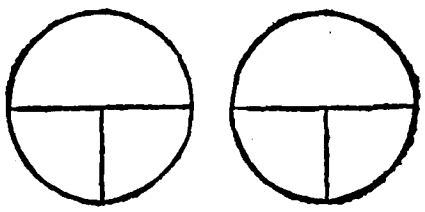
SCHOLIVM:

Propositum Euclidi est hoc loco tractare de iis, quæ circulis accidunt cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.

DIFFINITIONES

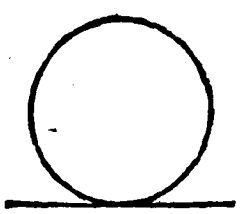
I.

AEQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.



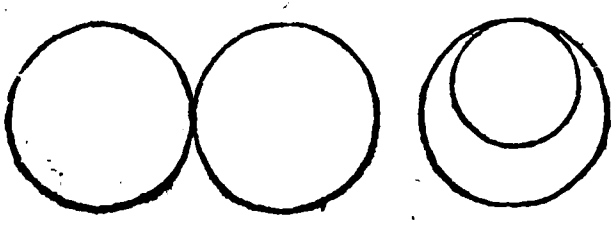
II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipsum non secat.



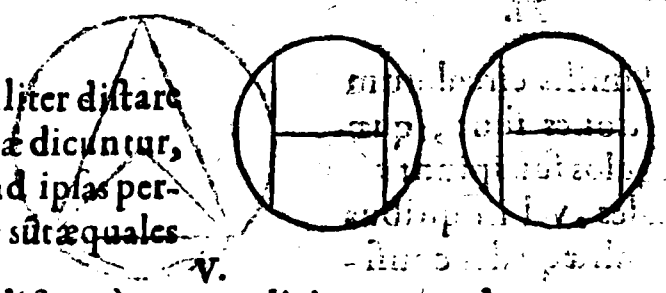
III.

Circuli contingere se se dicuntur, qui contingentes se ipsos non secant.



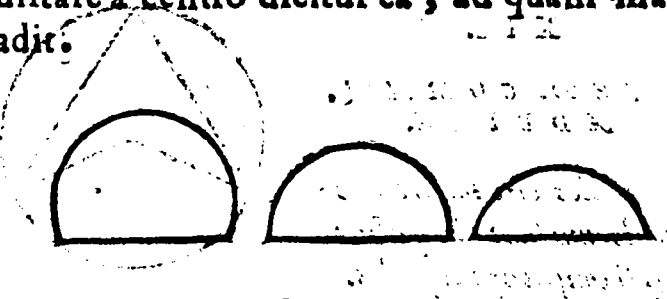
In circulo

IIII.



In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpẽdiculares ductæ sũt æquales.

V.

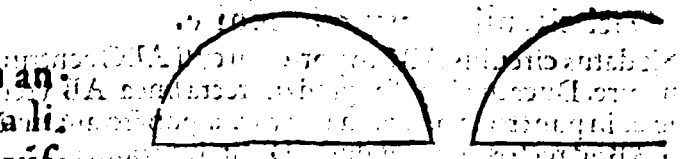


Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

VI.

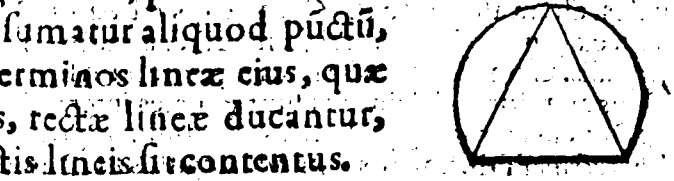
Portio circuli est figura, quę recta linea, & circuli circumferentia continetur.

VII.



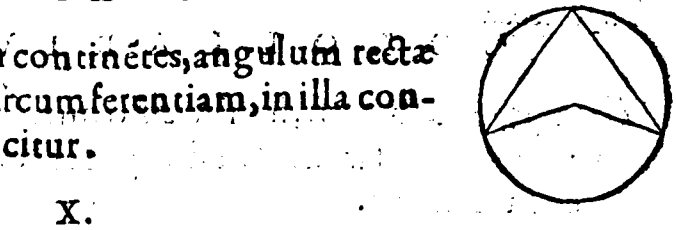
Portionis autem angulus est, qui recta linea, & circuli circũferentia cõprehenditur.

VIII.



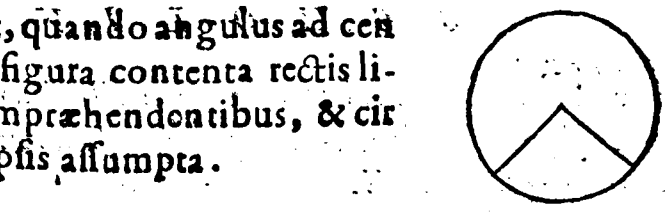
In portione angulus est, quando in circũferentia portionis sumatur aliquod pũctũ, atque ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectæ lineæ ducantur, angulus vero ductis lineis sit contentus.

IX.



Quando autem continẽtes, angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

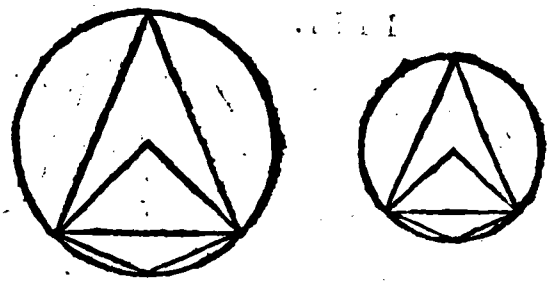
X.



Sector circuli est, quando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum cõprehendentibus, & circumferentia ab ipsis assumpta.

XI.

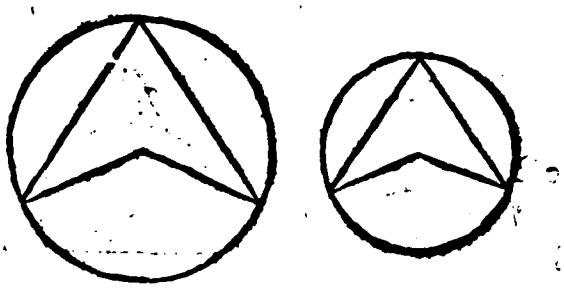
Similes circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſtituunt.



XII.

APED. COMAN. ADDITA.

Similes circumferentiæ circulorum ſunt, in quibus anguli conſiſtunt æquales.

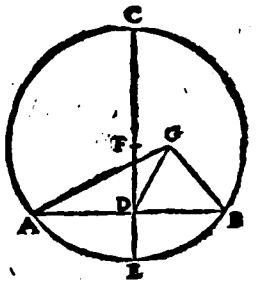


PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.

Sit datus circulus ABC. oportet circuli ABC centrum inuenire. Ducatur in ipſo quędam recta linea AB vtcunque, & in puncto D bifariam ſecetur. à puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducta DC in E producatur; & ſecetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli ABC centrum eſſe, Non .n. ſed ſi fieri poteſt, ſit G, & GA GD GB iungantur. itaque quoniam AD eſt æqualis DB, cõmunis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB æquales, altera alteri: & baſis GA æqualis eſt baſi GB. ſunt .n. ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB eſt æqualis. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, ęquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque ęqualium angulorum. Ergo angulus GDB eſt rectus. Sed, & rectus FDB. æqualis igitur eſt angulus FDB angulo GDB, maior minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrum. Similiter oſtendemus neq; aliud eſſe, præter ipſum F. ergo F centrum eſt circuli ABC. quod facere oportebat.

10. primi. 11. primi. Diff. 15 pri 8. primi. Diff. 10. pr.,



COROLLARIVM.

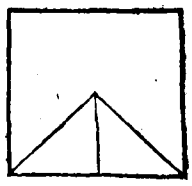
Ex hoc perſpicuum eſt, ſi in circulo quædam recta linea rectam lineam quandam bifariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante circuli centrum ineſſe.

SCHOLIVM.

Conuerſum diffinitionis circuli. *Ex theoremate oſtenditur conuerſum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus eſt.*

Non

Non.n.ſed ſi fieri poteſt, ſit rectilineum, & ſit aliquod ipſius latus, in quod incidant duae rectae lineę ipſum de terminantes. erit igitur aequicrure triangulum: atq; eius baſi bifariā ſecta, ſi ducatur recta linea rectos āgulos faciet, & vtroq; latere triāguli minor erit. Quod eſt abſurdū, ponuntur.n. omnes rectae lineæ, quae incidunt, aequales eſſe.



ALIVD.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulorum dico, eam, quæ maxime elementaris eſt, triangulum videlicet æquilaterum inſactionem initio propoſuit, ob conſtructiones earum, quæ deinceps ſunt demonſtrationum, ita, & hoc loco centrum inuenire proponit. Hoc enim circuli ipſius ortus cauſſa eſt.

Triangulū æquilaterū figura maxime elementari eſt.

ALIVD.

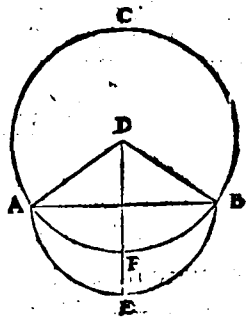
Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determinatum; quatenus vero ad nos pertinet, non omnis, ſed is tantum, cuius ortum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tamquam factis iam circulis, etiam contra manifeſta ſunt at in his cum quæratur ſubſtantia, centrum etiam quæritur; quod quidem ſubſtantiam circuli complet. hoc autem primum, vt inquiunt, inter problemata, & theoremata medium eſt. Quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus vero non in factionem, ſed in inuentionē, ob id proponit contemplari. Itaq; mihi videtur formatam habens propoſitionem theorema eſſe, vt ſi de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum quorum duo latera æqualia ſunt, & anguli inuenire ſi baſes ſint æquales. quemadmodum enim illic ſymptoma quoddam inquirit, quod duorum triangulorum naturæ ineſt ita, & loco quod in eſt naturæ circuli. At ſi problematis proprium, & contrariū propoſitioni ſuſcipit, multo magis quod propoſitū eſt problematis denominationē effugiet.

Centrum ſubſtantiam circuli complet.

Inter problemata, ac theoremata medium.

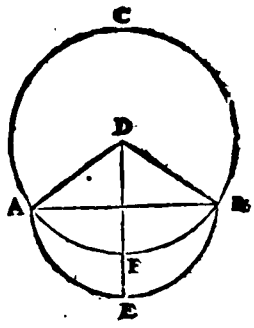
THEOREMA I. PROPOSITIO II.

Si in circumferentia circuli, duo quæuis puncta ſumantur, quæ ipſa coniungit recta linea intra circulum cadet.



Sit circulus ABC, & in circumferētia ipſius ſumātur duo quaeuis puncta AB. dico rectā lineā, quae à puncto A ad B ducitur, intra circulū cadere. Non .n. ſed ſi fieri poteſt; cadat extra, vt AEB, & ſumpto circuli ABC centro, quod ſit D, iungantur DA DB, & producatur DF in E. Quoniā igitur DA eſt aequalis DB; erit & angulus DAE āgulo DBE aequalis. & quoniā triāguli DAE vnū

16.primi. latus AEB protenditur, angulus DEB angulo DAE maior erit. angulus autem DAE æqualis est angulo DBE.
18.primi. ergo DEB angulus angulo DBE est maior. Sed maiori angulo maius latus subtenditur. maior igitur est DB ipsa DE. est aũt DB æqualis DF. Ergo DF est maior DE, minor maiore, quod fieri nõ potest. non igitur à pũcto
* A ad B ducta recta linea extra circulum cadet. Similiter ostẽdemus neq; in ipsam cadere circumferẽtiam. Ergo extra cadat necesse est. Si igitur in circumferentiam circuli duo quæuis puncta sumãtur, quæ ipsa cõiũgit recta linea intra circulũ cadet. quod oportebat demõstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

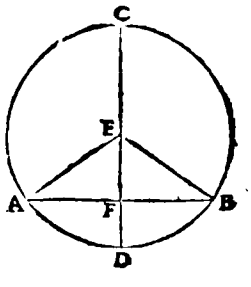
* Similiter ostendemus neq; in ipsam cadere circumferentiam.

16.primi. 18.primi. *Si enim in ipsam circumferentiam caderet, eadem ratione sequeretur angulum DFB maiorem esse angulo DAE, hoc est angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius esset. sed, & æquale, quod fieri non potest. non igitur in ipsam circumferentiam cadet.*

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineã quãdam non ductã p cẽtrũ bifariã secet, & ad angulos rectos ipsã secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrũ ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per cẽtrum bifariam secet in puncto F. Dico & ad angulos rectos ipsã secare. Sumatur .n. circuli ABC cẽtrum, quod
1.huius. sit E, & EA EB iungantur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FE, duæ duabus æquales sunt,
Diffi, 10.primi. & basis EA basi EB est æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE æqualis erit. Cum autẽ recta linea super rectã insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum. vterq; igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrũ bifariã
5.primi. secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Sed CD secet AB ad rectos ãgulos. Dico & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. Iisdem .n. cõstructis, quoniam EA, quæ ex centro est æqualis EB, & angulus EAF angulo E
16.primi. BF æqualis erit. est autem, & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duob⁹ angulis æquales habent, vnumq; latus vni lateri æquale EF. cõe scilicet vtriq; quod vni angulorũ æqualium subtẽditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. Atq; erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineã quãdam nõ ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsã secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. quod oportebat demonstrare.

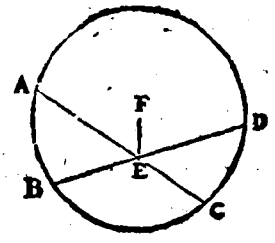


THEOREMA III. PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se inuicem secent non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se inuicẽ secẽt in pũcto E, nõ ductæ per centrum. Dico eas se se bifariã nõ secare. Si .n. fieri potest, secent

secent se se bifariam, ita vt AE sit æqualis EC, & BE ipsi ED: sumaturq; cẽtrum ABCD circuli, quod sit F, & EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus, & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor maiori quod fieri non potest. Non igitur AC BD se se bifariam secant. quare si in circulo duae rectae lineae se invicem secent, non ductae per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostẽdere oportebat.



1. huius.

Per antece-

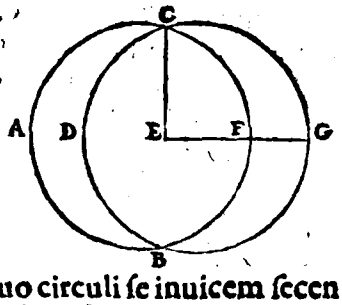
SCHOLIVM.

Si rectæ lineæ per centrum transirent, quarendum vtique non esset an bifariam se invicem secent. ipsorum enim centrum bipartita sectio est. similiter, & si altera per centrum transeunte, altera non sit per centrum. nam quæ per centrum transit bifariam non secatur.

THEOREMA IV. PROPOSITIO V.

Si duo circuli se invicem secẽt, non erit ipsorũ idem centrũ.

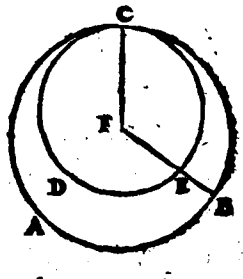
Duo enim circuli se invicẽ secent ABC CDG ĩ punctis BC. Dico ipsorum idẽ cẽtrum non esse. Si. n. fieri potest, sit cẽtrum E; iungaturq; EC, & EFG vtcumque ducatur. Et quoniã E cẽtrum est circuli ABC erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E cẽtrum est CDG circuli, aequalis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE aequalis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.



THEOREMA V. PROPOSITIO. VI.

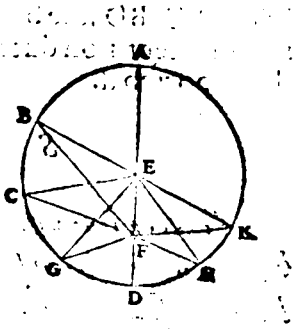
Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo. n. circuli ABC CDE cõtigãt se se intra ĩ pũcto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest. sit F iungaturq; FC, & FEB vtcumq; ducatur. quoniam igitur F cẽtrum est circuli ABC, aequalis est CF ipsi FB. rursus quoniam F cẽtrum est circuli CDE, erit CF aequalis FE. ostensa autem est CF aequalis FB. ergo & FE ipsi FB est aequalis, minor maiori, quod fieri nõ potest. nõ igitur F punctum cẽtrum est circulorũ ABC CDE. quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA. VI. PROPOSITIO. VII.

Si in circuli diametro aliquod punctũ ſumatur, quod non ſit centrũ circuli: & ab eo in circulũ cadant quædam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrũ, minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrũ tranſit, ſemper remotiore maior eſt. at duæ tantum æquales ab eodem pũcto in circulum cadent ad vtraſque partes minimæ.

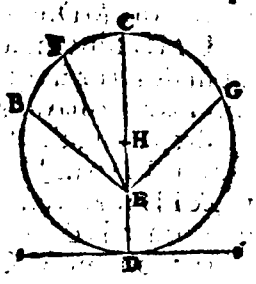


Sit circulus ABCD, cuius diameter AD: & in ipſa AD ſumatur aliquod punctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à pũcto F in circulum ABCD cadant quædã rectę lineæ FB, FC, FG. Dico FA maximam eſſe, & FD minimam: aliarum vero FB quidem maiorem quam FC, & FC maiorẽ quã FG. Iungantur. n. BE CE GE. Et quoniã omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora; erũt BE EF maiores quàm BF. eſt aũt AE æqualis EB. Ergo BE EF ipſi AF ſunt æquales. maior igitur eſt AF quàm FB. rurſus
20. primi
24. primi. quoniam BE eſt æqualis EC, cõmunis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales ſunt. Sed BEF angulus maior eſt angulo CEF. baſis igitur BF baſi FC eſt maior. eadem ratione, & CF maior eſt quam FG. rurſus quoniam GF FE maiores ſunt quàm EG, æqualis autem GE ipſi ED; erunt GF FE maiores quam ED. communis auferatur EF. Ergo reliqua GF maior eſt quàm reliqua FD. maxima igitur eſt FA, & FD minima: maior vero
23. primi. BF quàm FC, & CF quam FG maior. dico, & à puncto F duas tantũ rectas lineas cadere in circulum ABCD ad vtraſque partes minimæ FD. conſtituatur. n. ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH iungatur. quoniam igitur GE eſt æqualis EH, communis autem
4. primi. EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales ſunt: & angulus GEF eſt æqualis angulo HEF. baſis igitur FG baſi FH æqualis erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipſi FG æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat FK. & quoniam FK eſt æqualis FG, eſtq; ipſi FG æqualis FH; erit & FK ipſi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqualis remotiori, quod fieri nõ poteſt. Vel hoc modo. iungatur EK. & quoniam GE ipſi EK eſt æqualis, cõmunis autem FE, & baſis GF æqualis baſi FK; erit & angulus GEF æqualis angulo KEF: Sed angulus GEF angulo HEF eſt æqualis. angulus igitur HEF ipſi KEF æqualis erit, minor maiori, quod fieri non poteſt. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipſi GF. Ergo vna tantum cadet. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & reliqua quæ ſequuntur. quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si intra circulum punctum ſumatur, atq; à pũcto in circulum cadant quotcunq; rectæ lineæ, quarum vna quidem maxima ſit, vna vero minima & reliquarum alia ſint æquales alię inæquales maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem ſunt centro propinquiores, æquales autẽ ab eo æqualiter diſtant.

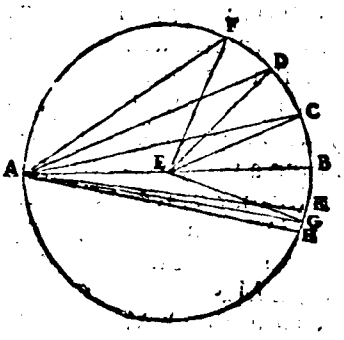
Per



Per punctum enim E, quod est intra circulū maxima quidem sit EC, minima vero ED; & FE quam EB maior. Dico CE per centrum transire, & DE ipsi esse in directum; EF vero cētro propinquiorem esse, quā EB. Si.n. CE non transit per cētrum, sed alia quaedā à puncto E in circulum cadens, illa maxima erit per septimum theorema. est autem & EC maxima, quod fieri non potest. diameter igitur est CE, & ipsi in directum ED Dico EF centro H propinquiorē esse, quā EB. Si.n. non est propinquior, vel remotior est, vel aequaliter distat: & siquidē remotior, maior erit BE, quam EF, qđ fieri non potest. nō .n. ponitur ita esse. Quòd si aequaliter distant, aequales sunt. sed neq; hoc ponitur. propinquior igitur est FE ipsi H, quam EB, & GE ipsi EB est aequalis. Ergo à centro H aequaliter distant, inaequaliter .n. distātes inaequales sunt, per septimū theorema. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud quoque verum est, quod nos demonstrauimus in commentario in propositionem octauam libri Archimedis de lineis spiralibus.



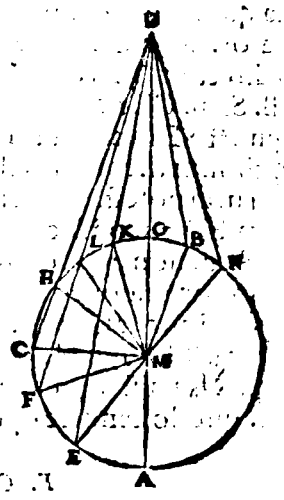
Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectae lineae; quae per centrum transit, omnium erit maxima, aliarum vero quae transeunti per centrum propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores; duae autem tantum aequales sunt ad vtrasque partes maximae.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quaedam rectae lineae, quarum vna per cētrū transeat, aliae vero vtcunque earum quidem, quae in concauam circumferētiam cadunt, maxima est, quae per centrū transit; aliarum autem propinquior ei, quae per centrum, semper remotiore maior est. at earum, quae in curuam circumferentiam cadunt minima est, quae inter punctum, & diametrum interijcitur; aliarum vero quae propinquior minimae semper remotiore est minor. duae autem tantum aequales à puncto in circulum cadunt ad vtrasq; partes minimae.

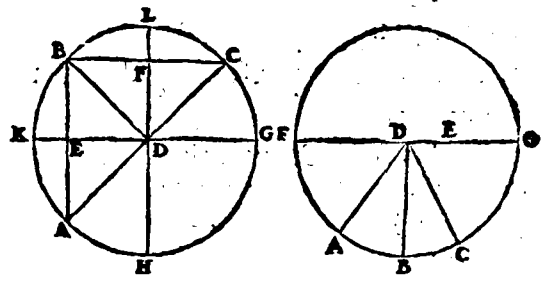
Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctū D: ab eo autē in circulū ducantur rectae lineae quaedā DA DE DF DC: sitq; DA per cētrū. Dico earum quidem quae in concauam AEFC circūferentiā cadunt, maximā esse DA, quae per centrum transit; & minimam, quae inter punctum D, & diametrum AG interijcitur, videlicet DG: maiorem autē DE quā DF, & DF maiorē quam DC: earum vero, quae in curuam circūferentiā HLKG cadunt, quae propinquior minimę DG sēper remotiore esse minorē, hoc est DK minorē, quā DL, & DL minorem quā DH. Sumatur .n. centrū circuli ABC, quod sit M, & iūgantur ME MF MC MK ML MH. & quoniā AM est aequalis ME, cōmunis

nis apponatur MD. ergo AD est æqualis ipsi EM MD
20. primi. Sed EM MD sunt maiores quàm ED. ergo & AD quã ED est maior. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF communis apponatur MD. erũt EM MD ipsi MF M D æquales; & angulus EMD maior est angulo FMD.
24. primi. Basis igitur ED basi FD maior erit. Similiter demõstrabimus, & FD maiorem esse quã CD. ergo maxima est DA; maior aũt DE quàm DF, & DF quàm DC maior. Prætérea quoniam MK KD sunt maiores quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua GD maior. quare GD minor quam KD, & idcirco GD
21. primi. minima est. & quoniam trianguli MLD in vno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD intra cõstituuntur, erũt MK KD minores ipsi ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quàm reliqua DL. Similiter ostendemus; & DL quam DH minorẽ esse. Ergo DG minima est. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. dico etiam duas tantum æquales à
24. primi. puncto D in circulum cadere ad vtrasq; minimæ partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctũ M angulo K MD æqualis angulus DMB, & DB iungatur. itaque quoniam MK est æqualis M
4. primi. B, communis autem MD, duę KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri. & angulus KMD æqualis angulo BMD, basis igitur DK basi DB est æqualis. Dico à puncto D nullam aliam ipsi DB æqualem in circulũ cadere. si .n. fieri potest, cadat DN. & quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit, & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimę æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est, vel & aliter. Iungatur MN. & quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autem MD; & basis DK basi DN aequalis erit, & propterea angulus KMD aequalis angulo DMN. Sed KMD angulus est æqualis angulo BMD. Angulus igitur BMD angulo NMD aequalis erit, minor maiori quod fieri non potest. Quare, non plures quàm duae rectae lineae à puncto D in circulum ABC ad vtrasque partes minimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctũ sumatur, & reliqua deinceps quod ostendere oportebat.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctũ quod sumitur, circuli centrum erit.



Sit circulus ABC, & intra ipsum sumatur pũctum D, à quo in circulum cadant plures, quã duae rectae lineae aequales, videlicet DA DB DC. Dico pũctum D circuli ABC cẽtrũ esse. Iungãtur .n. AB BC, secenturq; bifariã in punctis EF: & iunctae ED DF ad puncta GKHL, producãtur. quoniam igitur AE est aequalis EB, cõis autẽ ED, erunt duae AE ED duabus BE ED aequales; & basis DA est aequalis basi DB. ãgulus igitur AED ãgulo BED aequalis erit, & id-
8. primi. circo vterq; angulorum AED BED est rectus. Ergo Gk bifariam secans AB, &
13. primi. ad angulos rectos secat. & qm̃ si in circulo quedã recta linea, rectã lineã quan-

dam

dam bifariam,& ad angulos rectos ſecet,in ſecante eſt circuli centrum; erit in GK centrum citculi ABC. Eadem ratione,& in HL centrum eſt ABC circuli, & nullum aliud commune habent rectæ lineæ GH. HL,niſi punctum D.Ergo D circuli ABC eſt centrum.Si igitur intra circulum ſumatur aliquod punctum atq; ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales;punctum quod ſumitur circuli centrum erit. Corol.1.huius.

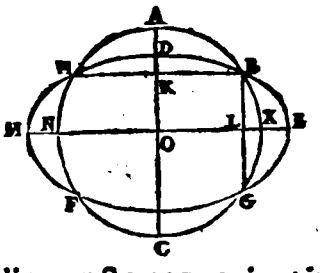
ALITER.

Sumatur.n. intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quã duæ rectæ lineę æquales DA DB DC.Dico punctum D,quod ſumitur,circuli ABC eſſe centrum.non.n. ſed ſi fieri poteſt, ſit E, & iuncta DE in FG producatur. ergo FG diameter eſt ABC circuli. itaq; quoniã in FG diametro circuli ABC ſumptum eſt aliquod punctum D, quod non eſt centrum circuli; maxima quidem erit DG,maior autem DC quã DB, & DB quam DA maior. Sed& æquales,quod fieri non poteſt.non igitur E cẽtrum eſt circuli ABC. Similiter oſtendemus neq; aliud punctum centrum eſſe pręter ipſum D.ergo D circuli BC cẽtrum erit.quod oportebat demõſtrare. 7.huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

Circulus circulum in pluribus,quam duob⁹ punctis nõ ſecat.

Si.n. fieri poteſt,circulus ABC circulum DEF ſecet in pluribus punctis,quã duobus, videlicet in BGHE; & iunctę BG BH bifariam ſecentur in KL.atq; à punctis KL ipſis BG BH ad rectos ãgulos ductæ KC LM in puncta AE ꝓducãtur. quoniã igitur in circulo ABC quaedã recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariam, & ad angulos rectos ſecat,in ipſa AC circuli ABC erit centrum. rurſus quoniam in eodem circulo ABC quaedam recta linea NX rectã lineã quãdam BG bifariam ſecat,& ad rectos angulos;in ipſa NX centrum erit circuli. oſtenſum autem eſt,& in ipſa AC centrum eſſe,& in nullo alio puncto conueniunt inter ſe rectae lineae AC NX, praeter quàm in O. ergo O circuli ABC eſt cẽtrum. Similiter oſtendemus punctum O centrum eſſe circuli DEF. ergo duorum circulorum ſe ſe ſecantium ABC DEF. idem erit centrum O. quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum ſecat in pluribus punctis,quàm duobus.

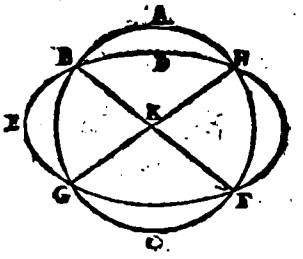


Corol.1.huius.

5.huius.

ALITER.

Circulus.n. ABC rurſus circulum DEF ſecet in pluribus punctis,quàm duobus; nempe ī BG FH,& circuli ABC cẽtrum ſumatur,quod ſit K, & KB KG KF iungãtur. qm̃ igitur intra circulũ DEF ſumptum eſt aliquod punctum K,à quo in circulum DEF incidant plures,quã duae rectae lineae KB KG KF,erit punctum K circuli DEF centrum. eſt autem, & circuli ABC centrum K.duorum igitur circulorum,qui ſe ſe ſecãt,idẽ erit K centrum,quod fieri non poteſt. quare circulus circulũ in pluribus, quã duobus punctis non ſecat,quod oportebat demonſtrare.



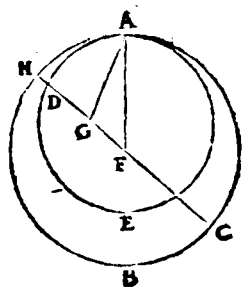
THEOREMA X. PROPOSITIO XI.

Si duo circuli ſe ſe intus contingant,& ſumantur centra ipſo

rum

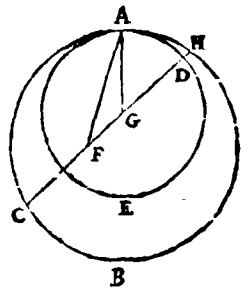
rum; recta linea ipsorum centra coniungens, & producta in circulorum contactum cadet.

Duo .n. circuli ABC ADE se se intus cõtingant in puncto A, & sumatur circuli quidẽ ABC cẽtrũ, quod sit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineã
10. primi. à puncto G ad F ductam, si producatur in punctum A cadere. Non .n. sed si fieri potest, cadat vt FGDH. Et AF AG iungãtur. Itaq; qm̃ AG GF maiores sũt, quã FA, hoc est quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG maior est, quàm reliqua GH. Sed AG est æqualis GD. Ergo GD ipsa GH est maior, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra cõtactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli se se intus contingant; recta linea ipsorum centra coniungens, si producatur in contactum circulorum cadet. quod oportebat demonstrare.



ALITER.

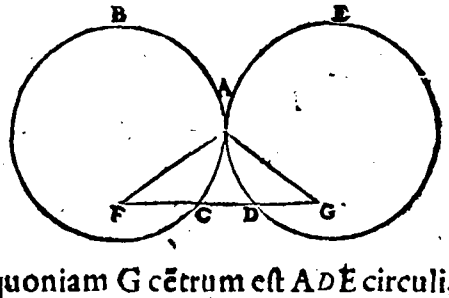
Sed cadat vt GFC, & producatur ĩ directũ CFG
10. primi. ad punctum H: iunganturq; AG AF. Quoniã igitur AG GF maiores sunt quam AF, & AF est æqualis FC, hoc est ipsi FH, cõmunis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH est maior: hoc est DG maior ipsa GH, minor maiore, quod fieri non potest. Similiter & si extra circulum parvũ sit centrum maiores circuli, idem sequi absurdum ostendemus.



THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit.

Duo .n. circuli ABC ADE se se extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem ABC centrũ quod sit F: circuli vero ADE cẽtrũ G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactũ A transire. Non .n. sed si fieri potest, cadat, vt FCDG: & FA AG iungantur. Quóniam igitur F cẽtrũ est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G cẽtrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis ostensa est autẽ, & AF æqualis FC. sunt igitur FA AG ipsis
20. primi. FC DG æquales. Ergo tota FG maior est, quam FA AG. Sed & minor, quod fieri nõ potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per cõtactũ A nõ transibit. quare per ipsũ trãseat necesse est. Si igitur duo circuli se se extra cõtingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactũ trãsibit. quod oportebat demonstrare.

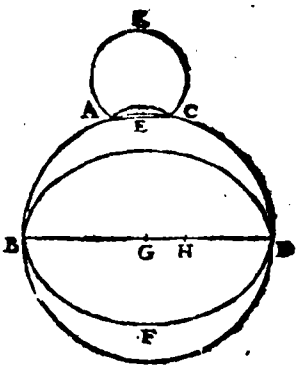


THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulũ non contingit in pluribus pũctis, quam vno, siue intus extra contingat.

Si

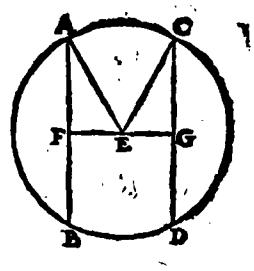
Si.n. fieri poteſt, circulus ABDC circulum EBF D cõtingat primum intus in pluribus pũctis, quam vno, videlicet in BD: & ſumatur circuli quidẽ ABD C centrum G; circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea, quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet. cadat vt BGHD. & quoniam G centrum eſt circuli ABDE, erit BG ipſi GD æqualis. maior igitur eſt BG, quã HD: & BH q̃ HD multo maior. Rurſus quoniã H cẽtrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo maior, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neq; extra cõtingere. Si.n. fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra cõtingat in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in AC, & AC iũgatur. Itaq; quoniam in circumferentia vtrorumq; circulorum ABDC ACK ſumpta ſunt duo quæuis pũcta A C; recta linea, quæ ipſa cõiungit intra vtrũq; ipſorum cadet. Sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. non igitur circulus circulum extra cõtingit in pluribus punctis, quàm vno. oſtenſum autem eſt neq; intus contingere. circulus igitur circulũ non contingit in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus, ſiue extra contingat. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIV

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à cẽtro diſtant, & quæ æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC, & in ipſo æquales rectæ lineae AB CD. dico eas à cẽtro aequaliter diſtare. Sumatur.n. circuli ABDC centrum, & ſit E, & ab ipſo ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quaedã per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductã per centrũ ad rectos angulos ſecat, & bifariã ipſam ſecabit. Quare AF eſt æqualis FB, ideoq; AB ipſius AF dupla. eadẽ ratione, & CD dupla eſt CG. atq; eſt AB ipſi CD æqualis. æqualis igitur, & AF ipſi CG. *Et* quoniã AE eſt æqualis EC, erit, & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE æqualia ſunt ex AF FE quadrata, rectus.n. ãgulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. Quadrata igitur ex AF FE aequalia ſunt quadratis ex CG GE, quorũ quadratũ ex AF quadrato ex CG eſt aequale, etenĩ aequalis eſt AF ipſi CG. reliquũ igitur, quod fit ex FE quadratũ aequale eſt reliquo, quod ex EG; ac ꝓpterea FE ipſi EG eſt aequalis. in circulo autẽ aequaliter diſtare à cẽtro rectae lineae dicũtur, quãdo à centro ad ipſas perpẽdiculares ductae aequales ſunt. ergo AB CD à centro aequaliter diſtãt. ſed AB CD aequaliter diſtent à centro, hoc eſt aequalis ſit FE ipſi EG. dico AB ipſi CD aequalem eſſe. Iiſdẽ.n. cõſtructis, ſimiliter oſtendemus AB duplam eſſe ipſius AF, & CD duplã ipſius CG. Et qm̃ aequalis eſt AE ipſi EC, erit, & ex AE quadratũ quadrato ex EC æpuale. Sed quadrato quidẽ ex AE æqualia sũt quadrata ex EF FA: quadrato aũt ex EC aequalia quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC aequalia sũt. quorũ quadratum ex EG aequale eſt quadrato ex EF; eſt.n. EG ipſi EF aequalis reliquũ igitur ex AF quadratũ aequale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt aequalis, atque eſt AB ipſius AF dupla, & CD dupla ipſius CG. *In* circulo igitur



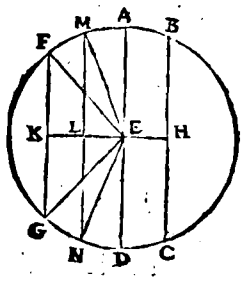
3. huius

47. primi

igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrũ transit, remotiore maior est.



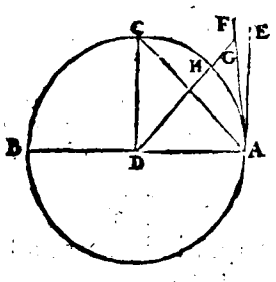
Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrũ E&, propinquior quidẽ diametro AD sit BC; remortiorve ro FG. dico AD maximam esse, & BC maiorẽ quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendicula res EH EK et quoniã BC propinquior est ei, quæ per centrũ transit, remotior autem FG; erit EK, quã EH maior. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & iungantur EM EN EF EG. Quoniã igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis. rursus quoniã æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. Sed ME EN maiores sunt, quàm MN. ergo & AD maior ẽ quã MN & MN ẽ æqualis BC. ẽ igitur AD quã BC maior. Quod cũ duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusq; MEN maior angulo FEG & basis MN basi FG maior erit. ostensa autẽ est MN æqualis BC. ergo & BC quã FG est maior. Maxima igitur est AD diameter, & BC maior, quã FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarũ vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est maior. Quod demostrare oportebat.

Ex antecedente.

24. primi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVI.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.



Sit circulus ABC circa centrũ D, & diametrum AB. dico rectã lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulũ cadere. nõ .n. sed si fieri potest, cadat intus, vt AC, & DC iũgatur. Itaq; quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit & angulus DAC angulo ACD æqualis. rectus autẽ est DAC. ergo & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis æquales sunt. quod fieri nõ potest. nõ igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulũ. Similiter ostendemus neq; in circumferẽtiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat vt AE. dico in locũ, qui inter rectam lineam AE & circũferentiam CHA interijcitur alteram rectam lineã nõ cadere. Si .n. fieri potest, cadat vt FA, & à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. et quoniam rectus est angulus AGD, minor autẽ recto DAG, erit DA quàm DG maior. æqualis autẽ est DA ipsi DH. maior igitur est DH ipsa DG, minor maiore qp fieri nõ potest. Nõ igitur in locũ qui inter rectã lineã, & circũferẽtiã interijcitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulũ semicirculi, qui recta linea

5. primi.

17. primi.

19. primi.

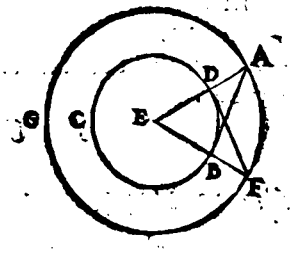
linea BA,& circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem esse;reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si.n. est aliquis angulus recti lineus maior quidem contento recta linea BA,& CHA circumferentia,minor autem contento CHA circumferentia,& recta linea AE,in locum,qui inter circumferentiam CHA,& rectam lineam AE interiicitur,cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA,& CHA circũferentia,qui scilicet rectis lineis continetur,minorem vero contento circumferentia CHA,& AE recta linea. non cadit autem.non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur,maior angulo contento recta linea BA,& CHA circumferentia,neq; minor contento circũferentia CHA,& AE recta linea.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est rectam lineã,quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur,circulum contingere,& rectam lineam contingere circulum in vno tantũ puncto,quoniã quæ occurrit in duobus pũctis intra ipsũ cadit,vt ostẽsũ est,

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



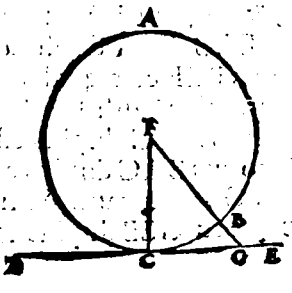
Sit datum quidem pũctum A,datus autem circulus BCD.oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur.n. centrum circuli E; & iuncta AE,cẽtro quidem E,interuallo autem EA circulus AFG describatur: & à pũcto D ipsi EA ad rectos angulos ducatur DF:iũgãturq; EBF. AB. Dico à puncto A ductam esse AB, quæ circulum BCD contingit. Quoniam.n. E centrum est circulorũ BCD AFG.erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulũ cõmunem continent,qui est ad E. ergo basis DF basi AB est æqualis; triangulũq; DEF æquale triangulo EBA,& reliqui anguli reliquis angulis.æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est.quare & rectus EBA: atq; est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur,circulum contingit. ergo AB contingit circulum.A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB,quæ circulũ BCD contingit. quod facere oportebat.

4.primi.

Ex antecedente,

THEOREMA XVI, PROPO. XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea,à centro autem in contactum recta linea ducatur,ea ad contingentem perpendicularis erit.



Circulum.n. ABC cõtingat quædam recta linea DE in puncto C:& circuli ABC centrum sumatur F,a quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse.Si.n.non ita fit, ducatur à puncto F ad DE perpẽdicularis FG. Quoniã igitur angulus FGC rectus est,erit GCF acutus,ac propterea FGC angulus maior angulo FCG.maiorem autẽ

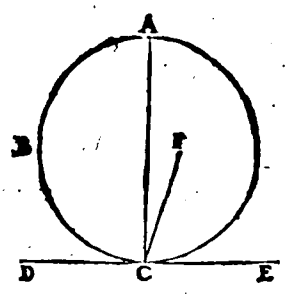
5.primi.

19.primi.

angulum maius latus ſubtendit. maior igitur eſt FC, quàm FG. æqualis autem FC ipſi FB. ergo FB ipſa FG eſt maior, minor maiore, quod fieri non poteſt. nõ igitur FG eſt perpendicularis ad DE. Similiter oſtendemus neq; aliam quampiam eſſe preter ipſam FC. ergo FC ad DE eſt perpendicularis. Si igitur circulũ contingat quędam recta linea, a centro autem in cõtactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XVII. PROPO. XIX.

Si circulum contingat quedam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.



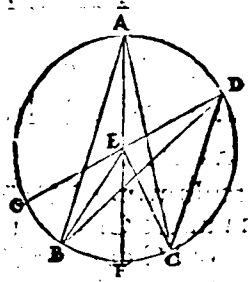
Circulum. n. ABC contingat quædam recta linea DE in C, & à puncto C ipſi DE ad rectus ãgulos ducatur CA. Dico in ipſa AC circuli centrum eſſe. Non. n. ſed ſi fieri poteſt, ſit F cẽtrum & iungatur CF. Quoniam igitur circulũ ABC contingit quædam recta linea DE, & à cẽtro ad contactum ducta eſt FC; erit FC ad ipſam DE perpendicularis. rectus igitur angulus eſt FCE. eſt autem, & ACE rectus. ergo FCE angulus eſt æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non poteſt. Non igitur F centrum eſt ABC circuli. Similiter oſtẽdemus neq; aliud aliquod eſſe, præterquàm in ipſa AC. Quare ſi circulũm contingat quędam recta linea, à cõtactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit cẽtrum. quod demõſtrare oportebat.

SCHOLIVM

CONVERSVM. Si circulum contingat quædam recta linea, à cõtactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circulum ducatur: producta ad eas partes, in quibus eſt circulus in circuli centrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPO. XX.

In circuo angulus, qui ad centrum duplus eſt eius, qui ad circũferentiam, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant.



Sit circulus ABC, ad cuius centrum quidem angulus ſit BEC, ad circumferentiã vero BAC, & eãdẽ circumferentiam BC pro baſi habeant. dico BEC ãgulũ anguli BAC duplũ eſſe. Iungatur. n. AE, & ad F producatur. Itaque quoniam EA eſt æqualis EB erit, & angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA dupli ſunt ipſius anguli EAB. ſed angulus BEF eſt æqualis angulis EAB EBA. ergo BEF angulus ãguli EAB eſt duplus. Eadem ratione & angulus FEC duplus eſt ipſius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rurſus inflectatur, & ſit alter ãgulus BDC, iũ etaq; DE ad G producatur. Similiter oſtẽdemus angulum GEC anguli EDC duplũ eſſe; quorũ GEB duplus eſt ipſius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC eſt duplus

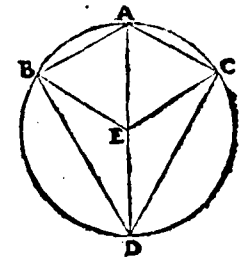
5. primi.

32. primi.

plus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circūferentiam, quando circumferentiā eandē p basi habeant, q oportebat demōstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

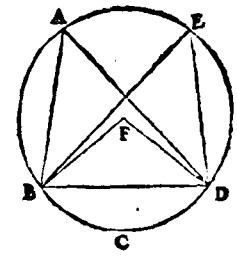
Illud quoque verum est spacium quod est ad centrum duplum esse anguli, qui ad circumferentiā, quādo circūferentiam eandem pro basi habuerint.



Sit enim circulus ABC, cuius centrum E. Dico spacium BEC quod est ad centrum duplum esse anguli BAC. iuncta enim AE, & ad D producta, iunctisq; BD DC, similiter demonstrabitur angulus BED anguli BAE duplus, & angulus CED duplus anguli CAE, totū igitur spaciū BEC quod est ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiā duplum erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

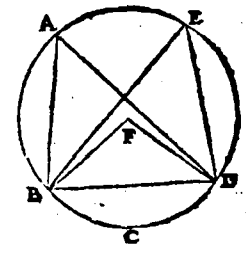
In circulo qui in eadem portione sunt anguli inter se æquales sunt.



Sit circulus ABCDE, & in eadē portione BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur .n. circuli ABCDE centrum quod sit F: iunganturq; BF FD. & quoniā angulus qdē BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiā eandē pro basi habēt BCD; erit BFD angulus anguli BAD duplus. Eadē ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. Ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. In circulo igitur qui in eadē portione sunt anguli, inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

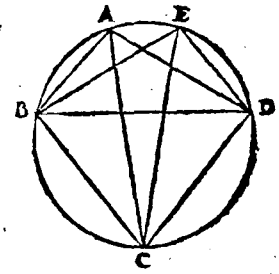
F. C. COMMENTARIVS.

Euclidis demonstratio congruit in maiore tantum circuli portione, nisi fortasse spacium quodcumque ad centrum pro angulo accipiatur, ex ijs quæ nos proxime demonstrauimus. possumus autem, & hoc modo demonstrare.



Ex antecedente.

Sint in portione BAED circuli ABCDE, anguli BAD, & BED. Dico eos inter se æquales esse. Sit .n. primum BAED maior portio, vt in antecedenti figura sumaturq; circuli centrum quod sit F: & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD est ad centrum angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem basim habent, nempe circumferentiam BCD; erit angulus BFD anguli BAD duplus: & eadem ratione duplus quoque anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED æqualis erit. Sit deinde BAED portio minor: & iungantur BA AC EC DC. Itaq; quoniā ex ijs, quæ proxime demonstrauimus, angulus BAC est æqualis angulo BEC, itemq; angulus CAD angulo CED; erit, & totus angulus BAD toti BED æqualis.

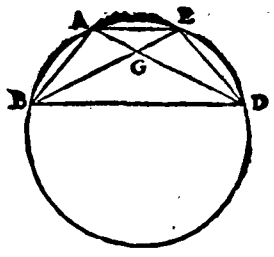


ALITER.

Iungatur AE. erit angulus ABE æqualis angulo ADE. angulus autem AGB ad verticem angulo EGD est æqualis. ergo, & reliquus angulus BAD reliquo BED æqualis erit. In circulo

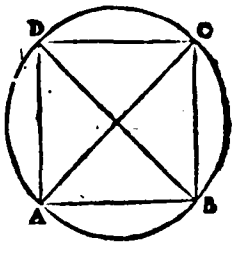
Ex demonstratis 15. primi.

igitur, qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XX. PROPO. XXII.

Quadrilaterorum, quę in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

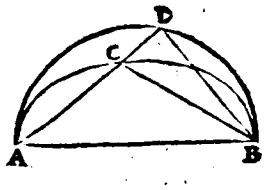


Sit circulus ABCD, & in ipso quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipsius oppositos duob. rectis ęquales esse. Iungantur ACBD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sũt ęquales, erũt triãguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. Sed angulus CAB est æqualis angulo BDC, in eadem .n. sunt portione BADC. & angulus ACB æqualis ipsi ADB, quod sint in eadem ADCB portione totus igitur angulus ADC ãgulis BAC ACB est æqualis. cõmunis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui sunt ad A, & C, & seorsum vni angulo, qui est ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC ęquales. Sed ABC BAC ACB sunt æquales duobus rectis. ergo & ãguli ABC ADC duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

32. primi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inęquales ex eadem parte non constituentur.

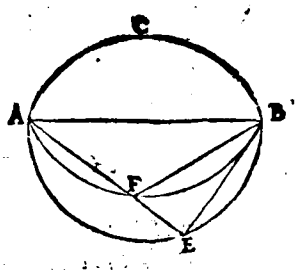


Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duæ circulorum portiones similes, & inæquales constituantur ex eadem parte ACB ADB; ducaturq́; ACD, & CB BD iungantur. Itaq; quoniam portio ACB similis est portioni ADB. similes autem circulorum portiones sunt, quę angulos suscipiunt æquales; erit ACB angulus ęqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest Non igitur in eadem recta linea, duæ circulorum portiones similes, & inæquales ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

Diffi. 11.

F. C. COMMENTARIVS.

* Ex eadem parte. ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ μέρη.



In vetusto codice hæc non leguntur, quamquam ad demonstrationem necessaria sint, tamen neutra ex parte similes, & inæquales circulorum portiones constitui possunt in eadem recta linea. Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB *constituatur ex altera parte portio* AEB *similis, & inæqualis portioni* ACB. *Intelligatur autem ex eadem parte portio* AFB *similis, & æqualis ipsi* ACB; *& ducta* AFE, *iunctisq;* FB BE, *similiter demonstrabitur angulus* AFB *æqualis an-*

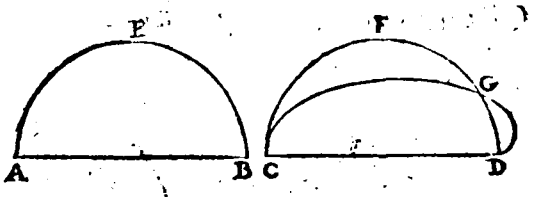
gulo

gulo AEB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea similes, & inæquales circulorum portiones constituentur. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIV.

In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.

Sint.n. in æqualibus rectis lineis AB CD similes circulorũ portiones AEB CFD. Dico portionẽ AEB portioni CFD æqualem esse. congruente.n. AEB portione portioni CFD, & posito puncto quidẽ A in C, recta vero linea AB in CD; cõgruet, & B punctum puncto D, propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. cõgruente autem recta linea AB rectæ CD; cõgruet, & AEB portio portioni CFD. Si.n. AB congruet ipsi CD, portio autem AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in punctis CGD, quod rursus fieri non potest. Non igitur congruente recta linea AB rectæ CD, non cõgruet, & ACB portio portioni CFD. quare congruet, & ipsi æqualis erit. In æqualib. igitur rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

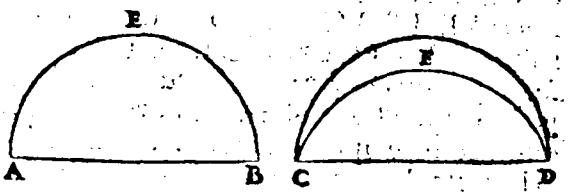


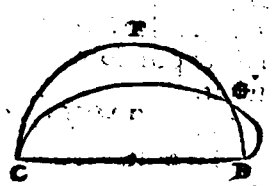
F. C. COMMENTARIVS.

Si.n. AB congruet ipsi CD portio autem AEB portioni CFD nõ cõgruet, sed permutabitur, vt CGD, & reliqua.

Si enim AB recta linea ipsi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circũferentia eius vel extra ipsam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra. cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales ex eadem parte constituentur, quod fieri non posse in antecedẽte demonstratum est. cadat deinde partim extra, partim intra, vt CGD. circulus igitur circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. quod itidem fieri nõ potest, ex decima huius. Euclidis autem primum casum velut nimis perspicuum omisisse videtur.

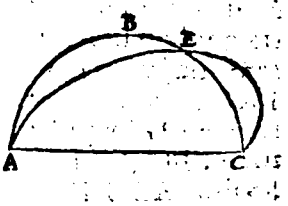
Sed, & cuiusque prædictorum conuersum etiam verũ est, quod ita demonstrari potest.





In eadẽ recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt.

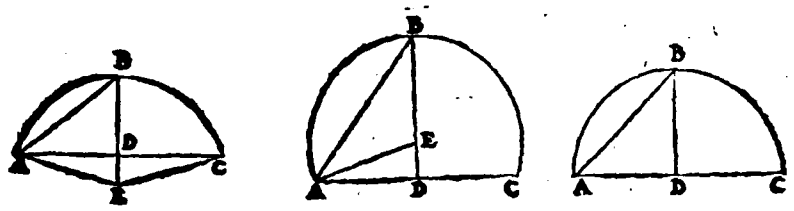
Si enim fieri potest, sint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC æquales, sed tamen dissimiles, necesse erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiæ ABC, alioqui, & æquales essent, & similes, neque extra, vel intra ipsam cadere. AEquales enim non essent. Quare relinquitur vt partim intra, partim extra cadat. Quod



si ita sit, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis secabit. quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neq; ex altera parte, neq; in æqualibus rectis lineis constitui posse æquales, & dissimiles circulorum portiones; nempe altera portione alteri aptata; vt superius dictum est. In eadē igitur recta linea vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data describere circulū, cuius ea portio est.



Sit data circuli portio ABC. itaq; oportet portionis ABC describere circulū cuius est portio. Secetur AC bifariā in D: & à puncto D ipsi AC ad rectos āgulos ducatur DB, & AB iungatur. vel igitur angulus ABD maior est āgulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum maior, & ad rectam lineā BA atq; ad datum in ea punctū A cōstituatur angulus BAE æqualis angulo ABD; & DB ad E producatur, iungaturq; EC. Quoniā igitur angulus ABE est æqualis āgulo BAE, erit, & BE recta linea ipsi EA æqualis. & quoniam AD est æqualis DC cōis autē DE, duæ AD DE duab' CD DE æquales sunt, altera alteri; & āgulus ADE æqualis āgulo CDE, rectus. n. vterq; est. ergo & basis AE basi EC est æqualis. sed ostēsa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. cētro igitur E, interuallo autē vna ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit pūcta, & circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus; cuius ea portio est. Sed, & illud cōstat, portionē ABC semicirculo minorē esse; propterea quod cētrum ipsius extra cadit. Similiter, & si āgulus ABD sit æqualis āgulo BAD, facta AD æquali vtriq; ipsarum BD DC, erunt tres rectae lineae AD DB DC inter se æquales, atq; erit D circuli descripti cētrū, & portio ABC semicirculus. Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD constituetur ad rectam lineā BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionē ABC. erit cētrum in ipsa DB, atq; erit ABC portio semicirculo maior. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cuius porrio est. quod facere oportebat.

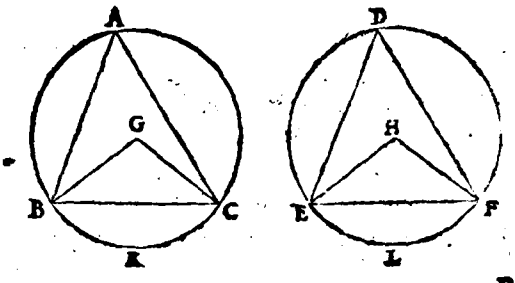
i 23. primi.

6. primi

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualib. insistunt circūferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circūferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circūferentiæ ELF æqualem esse. iungātur. n. BC EF. Et quoniā æquales sunt ABC DEF circuli, erūt & q̄ ex cētris æquales. duę igitur



BG GC duab' EH, HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis ãgulo ad H. ergo & basis BC basi EF est æqualis. Rursus quoniã æqualis est angulus ad A ãgulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF. & sunt in æqualib, rectis lineis BC EF. Quæ autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones inter se æquales sunt. portio igitur BAC portioni EDF est æqualis. Sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliq; ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistũt circumferentijs, siue ad cẽtra siue ad circumferentias insistãt. quod oportebat demonstrare.

4. primi

Diffi. 11 24. huius

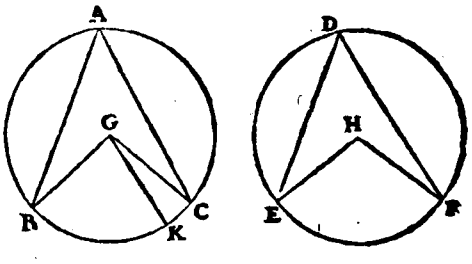
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabitur in eisdem circulis, & propositio magis vniuersalis erit hoc modo.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circũferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentijs inter se æquales sunt siue ad centra, siue ad circumferẽtias insistant.



In æqualibus. n. circulis ABC DEF, æqualibus circumferentijs BCEF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferẽtias vero BAC EDF. Dico angulum BGC ãgulo EHF & angulum BAC angulo EDF æqualem esse, Si quidẽ igitur angulus BGC æqualis sit ãgulo EHF. manifestum est ãgulũ quoq; BAC angulo EDF esse æqualẽ. Sin minus, vnus ipsorum est maior. sit maior BGC, & constituatur ad rectã lineã BG, & ad punctum in ipsa G angulo EHF aequalis angulus BGK. aequales autem anguli aequalibus insistunt circumferentijs, quando ad centra fuerint. Ergo circumferentia BK aequalis est circumferentiae EF. Sed circumferentia EF aequalis est ipsi BC. ergo, & BK ipsi BC est aequalis, minor maiori, quod fieri nõ põt. Non igitur inaequalis est angulus BGC angulo EHF. ergo est aequalis. Atq; est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidius qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est aequalis. In aequalibus igitur circulis anguli, qui aequalibus insistunt circumferentijs inter se aequales sunt siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. quod oportebat demonstrare.

23. primi. Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Eadem demonstratio erit, si anguli æqualibus circumferentijs eiusdem circuli insistant, vt propositio magis vniuersalis fiat, hoc pacto.

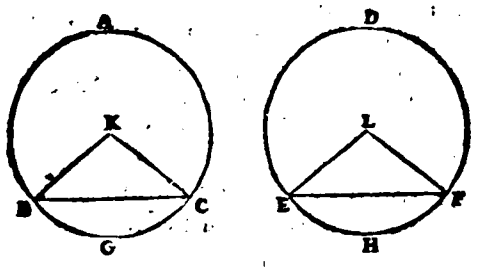
In eisdem vel aequalibus circulis anguli, qui aequalibus insistunt circumferentijs inter se aequales sunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circũferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

Sint

Sint æquales circuli ABC DEF; & in ipſis æquales rectæ lineę BC EF, quæ circumferẽtias qdẽ BAC EDF maiores auferant, circũferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferẽtiam BAC maiorem maiori circumferentiæ EDF, & minorem circũferentiam BGC minori EHF æqualẽ eſſe. Sumantur .n. centra circulorum KL, iungãturq; BK KC EL LF. Et quoniam circuli æquales ſunt, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BK KC ſunt æquales duabus EL LF: & baſis BC æqualis eſt baſi EF. Ergo angulus BKC angulo ELF eſt æqualis: æquales autem anguli æqualibus inſiſtunt circumferentijs, quando ad cẽtra fũerint. quare circũferentia BGC æqualis eſt circũferentiæ EHF. Sed & totus ABC circulus toti DEF eſt æqualis. reliqua igitur circũferentia BAC reliq; EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circũferentias æquales auferunt, maiorẽ quidẽ maiori, minorẽ vero minori quod demõſtrare oportebat.

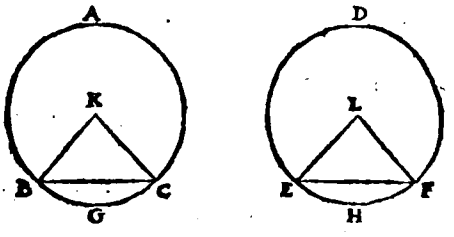


1.huius. D.ffi.1. 8.primi. 26.huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

Sint æquales circuli ABC DEF: & in ipſis æquales aſſumantur circumferentiæ BGC EHF, & BC EF iungãtur. Dico rectã lineã BC rectæ EF æqualem eſſe. Sumãtur .n. centra circulorum KL, & iungantur BK KC EL LF. qm igitur circumferentia BGC eſt æqualis circumferentiæ EHF, erit, & angulus BKC angulo ELF æqualis. Et quoniam circuli ABC DEF ſunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt. duæ igitur BK KC ſunt æquales duabus EL LF; & æquales angulos cõtinent. quare baſis BC baſi EF eſt æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectę lineae ſubtendunt. quod oportebat demonſtrare.



1.huius. 26.huius. Diffi.1. 4.primi

F. C. COMMENTARIVS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cũ demonſtrationes eędem ſint, propoſitiones magis vniuerſales fieri poterunt, in in hunc modum.

In eiſdem vel æqualibus circulis aequales rectae lineae circumferentias aequales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

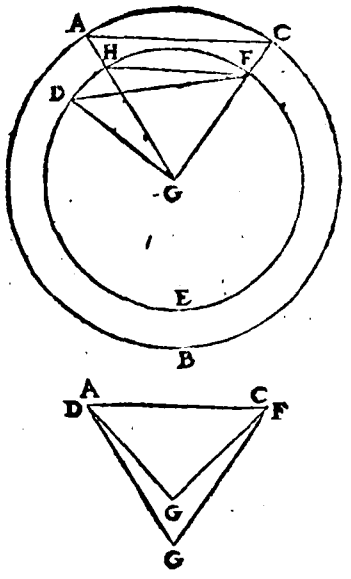
In eiſdem vel æqualibus circulis aequales circumferentias aequales rectae lineae ſubtendunt.

Sed, & harum quoddammodo conuerſas, atq; alias his non diſſimiles demonſtrare hoc loco non inutile arbitrati ſumus.

PROPOSITIO. I.

Si aequales rectae lineae aequales, & ſimiles circumferentias auferant, circuli aequales erunt, quorum illae ſunt circumferentiae.

Si enim fieri potest, sint circuli inæquales, & in maiori circulo ABC, circa idem centrum G æqualis minori describatur DEF & iungãtur AG GC DG GF, ita vt pũctum F cadat in rectã lineã GC; & AG secet circulum DEF in H. Quoniam igitur rectæ lineæ AC DF æquales sunt, erit angulus AGC minor angulo DGF; quod deinceps demonstrabitur. quare circumferẽtia HF minor erit circumferentia DF. Sed circumferentia HF similis est circumferentiæ AC, ex 12 diffinitione huius. in ipsis enim idem angulus AGC consistit. ergo circumferentia DF circumferẽtiæ AC non est similis. atqui similis ponebatur. quod est absurdum. non igitur circuli inæquales sunt. ergo æquales esse necessariũ est. At vero angulum AGC minorem esse angulo DGF, ita demonstrabimus.



Intelligatur triangulum AGC seorsum, & trianguli DGF punctum D in A statuatur; & punctum F in C. sunt enim AC DF inter se æquales, cadet triangulum DGF intra triangulum AGC. quare ex 21 primi libri angulus AGC minor est angulo DGF. quod demõstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

In circulis inæqualibus æquales rectæ lineę dissimiles circũferẽtias auferũt.

Hoc autem ex iis, quæ nos proxime demonstrauimus perspicue apparet. æquales enim rectæ lineæ AC DF dissimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO. III.

In circulis inæqualib⁹ similes circũferẽtias inæquales rectę lineæ subtẽdũt.

Et hoc similiter apparet ex ante demonstratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF. Itaq; quoniam triãgulum DGF duo latera DG GF æqualia habet duobus lateribus HG GF triãguli HGF, & angulum DGF maiorem angulo HGF, erit basis DF basi HF maior. Sed recta linea AC est æqualis ipsi DF. ergo AC HF inæquales sunt, & similes circumferentias subtendũt. quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO IIII.

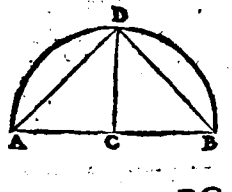
Similes, & inæquales circumferentias inęquales rectæ lineæ subtendunt.

Si enim rectæ lineæ æquales sint, & circuli item æquales, erunt circumferentię, quas subtẽdũt, & æquales, & similes. Si vero circuli sint inæquales, circumferentiæ dissimiles erunt. quod non ponitur. Similes igitur, & inæquales circumferẽtias, inæquales rectę lineæ subtendunt. quod demõstrare oportebat.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIO. XXX.

Datam circumferentiam bifariam secare.

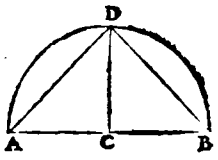
Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circũferẽtiam bifariam secare. Iungatur AB, & in C bifariam secetur: a puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD. & iungantur AD DB. Quoniam igitur AC est æqualis CB, communis actẽ CD, duæ AC CD duabus



10. primi.

BC,

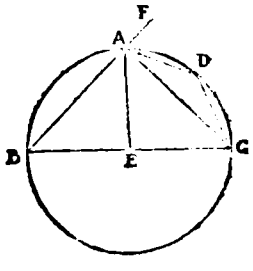
BC CD æquales ſunt: & ãgulus ACD æqualis angulo
4. primi. BCD, rectus .n. vterq; eſt: ergo baſis AD baſi DB eſt æ-
28. huius qualis. æquales autem rectæ lineę circũferentias æqua
les auferunt, maiorem quidẽ maiori, minorẽ vero mi-
nori. & eſt vtraq; ipſarum AD DB circumferentiarum
ſemicirculo minor. quare circumferẽtia AD circũferẽ-
tiæ DB æqualis erit. data igitur circumferentia bifariã ſe
cta eſt. Quod facere oportebat.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo ãgulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in maiori portione minor eſt recto, & qui in minori maior recto; & inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt, minoris vero portionis angulus recto minor.

Sit circulus ABCD cuius diameter BC, centrum autem E; & iungãtur BA AC AD DC. Dico ãgulum quidem, qui eſt in ſemicirculo BAC rectũ eſſe qui vero in portione ABC maiore ſemicirculo, videlicet angulũ ABC minorẽ eſſe recto, & q in portione ADC minore ſemicirculo, hoc eſt angulum ADC recto maiorem. iungatur AE, & BA ad F producatur. Itaq; quoniam BE eſt æqualis EA, erit, &
5. primi. angulus EAB, angulo EBA æqualis. Rurſus quoniã AE eſt æqualis EC, & angulus ACE angulo CAE æqualis erit. totus igitur angulus BAC eſt æqualis duobus ABC ACB
32. primi angulis. eſt autẽ, & angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB
13 primi. æqualis. angulus igitur BAC eſt æqualis angulo FAC. ac propterea vterque
17. primi. ipſorum rectus. Quare in ſemicirculo BAC angulus BAC rectus eſt. & quoniã trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis ſunt minores, rectus autẽ BAC, erit ABC angulus recto minor, atque eſt in portione ABC maiore ſemicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum ſit ABCD, quadrilaterorum vero, qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint æquales: erũt
22. huius ABC ADC anguli æquales duobus rectis. & angulus ABC minor eſt recto. reliquus igitur ADC recto maior erit, atque eſt in portione ADC minore ſemicirculo. Dico præterea maioris portionis angulum, qui continetur ABC circũferentia, & recta linea AC recto maiorem eſſe; angulum vero minoris portionis contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. Quoniam .n. angulus, qui rectis lineis BA AC cõtinetur rectus eſt, erit, & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto maior. Rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus eſt, erit qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicireulo rectus eſt, q' vero in maiori portione minor eſt recto, & qui in minori maior recto. & inſuper maioris quidem portionis angulus recto maior eſt: minoris vero recto minor. Quod demonſtrare oportebat.



ALITER demonſtrabitur angulum BAC rectum eſſe. Quoniã .n. ãgulus AEC duplus eſt ãguli BAE, etenim duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis: eſt autem, & AEB duplus ipſius EAC: anguli AEB AEC anguli BAC dupli erunt. Sed & AEB AEC anguli duobus rectis ſunt æquales. ergo angulus BAC rectus eſt. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi triãguli vnus ãgulus ſit æqualis duo

bus

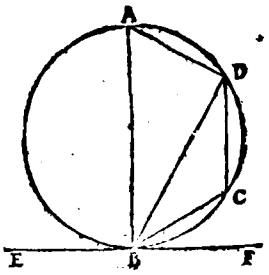
bus,eũm rectum esse; propterea quòd,& qui deinceps est, ijsdẽ est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales,necessario recti sunt.

SCHOLIVM.

Si semicirculi omnes ob similitudinem æquales angulos suscipiunt,nempe rectos, maiores autem portiones suscipiunt rectis minores, perspicuum est cũ similes sint æquales suscipere angulos. quo enim maiores sunt semicirculis, eo rectum angulum diminuunt, similiter, & minores semicirculis rectum proportione augent. Ergo similes portiones æquales suscipiant angulos necesse est. portionum autem anguli, quod heterogenei sint, respectu rectilineorũ, sunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, nisi maioritate tantum, vt sic dicam, & minoritate. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circulum, angulum ipsius maiorem simpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata est. Videbitur autem hoc admirabile esse, nam quæ in contraria transmutantur, per media transire consueuerunt. Sed, & in aliis inuenire licet hoc modo oppositæ absque medio. etenim quæ circulum comprehendit linea, cum conuexa sit, & caua, recta non est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans, anguli quos ad cõtingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



Circulum.n. ABCD contingat quædam recta linea EF in B,& à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum vtcumque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, æquales esse ijs, qui in alternis circuli portionibus cõsistunt, hoc est angulum FBD esse æqualem angulo, qui constituitur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum vero EBD æqualẽ angulo DCB, qui in portione DCB constituitur. Ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA: & in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C; iungantur que AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA centrum ABCD circuli, quare BA eiusdẽ circuli diameter est, & ãgulus ADB ĩ semicirculo est rectus. reliqui igitur ãguli BAD ABD vni recto æquales sunt. Sed & ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis est ãgulis BAD ABD. cõis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD est æqualis. Et quia in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli eius oppositi æquales

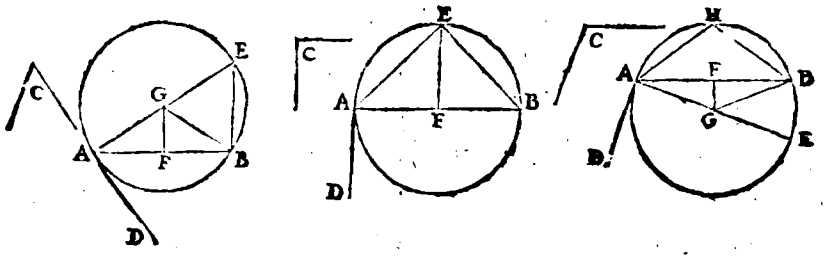
11.primi.

19.huius. Ex antecedente. 32.primi

32.huius ti æquales sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF. ergo reliquus DBE ei, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentē, æquales erūt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt. quod oportebat demōstrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Sit data recta linea AB datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaq; oportet in data recta linea AB describere portionem circuli, quę suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. vel igitur angulus ad C acutus est, vel obtusus. Sit primum acutus, vt in prima figura, & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis. acutus igitur angulus est BAD, & à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ducatur AE; secetur autem AB bifariam in F, atq; à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; & GB iungatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, cōis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt: & angulus AFG æqualis angulo GFB. ergo basis AG basi GB est æqualis. Itaq; centro G, interuallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B describatur, & sit ABE, iungaturq; EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, & à puncto A ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum continget. & quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, & à contactu, qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB: erit angulus DAB æqualis angulo, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB dato angulo, qui ad C æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C rectus. & oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quæ suscipiat angulū æqualem recto angulo, qui est ad C. constituatur. n. rursus angulo recto, qui ad C æqualis angulus BAD, vt in secunda figura. secetur q; AB bifariam in F, & cētro F, interuallo autem alterutra ipsarum AF FB circulus describatur AEB. ergo AD recta linea circulum ABE contingit, propterea q; rectus est qui ad A angulus, & angulus BAD æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus. n. & ipse est, in semicirculo consistens. sed BAD æqualis est ei qui ad C. Ergo & q in portione AEB ei, qui ad C est æqualis. descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C æqualē. Deniq; sit angulus ad C obtusus, & ad rectam lineā AB, & ad punctū A cōstituatur ipsi æqualis angulus BAD, vt hēt in tertia figura, & ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos ducatur AE: secetur q; rursus AB bifariam in F. ipsi vero AB ducatur ad rectos angulos FG, & GB iungatur. Et q̄m AF est æqualis FB, cōis autē FG. duæ AF FG duab⁹ BF FG æquales sunt, & ānulus AFG ānulo BFG æqua-

lis

23.primi. 11.primi. 10.primi. 4.primi. Corol.16.huius. Ex antecedēte, 23.primi. Corol.16.huius.

lis. basis igitur AG est æqualis basi GB. Quare centro G, interuallo autẽ AG circulus descriptus etiam per B transibit. transeat vt AEB. Et quoniam diametro AE ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum AEB continget & à contactu, qui ad A ducta est AB. quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB cõstituitur est æqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C. angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C æqualis erit. Ergo in data recta linea AB descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æqualem ei, qui est ad C. quod facere oportebat.

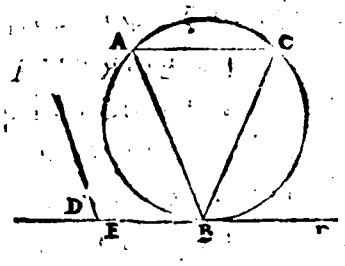
4 primi.

Corol. 16 huius.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIIII.

A dato circulo portionem abscindere quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus, qui ad D. oportet à circulo ABC portionem abscindere, quę suscipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B cõtingens: & ad rectam lineam BF, & ad punctũ in ea B constituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, & à contactu B ducta est BC, erit angulus FBC æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur. Sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.



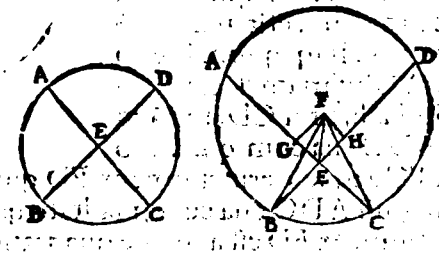
17. huius.

23. primi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineę se se mutuo secent rectangulum portionibus vnius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.

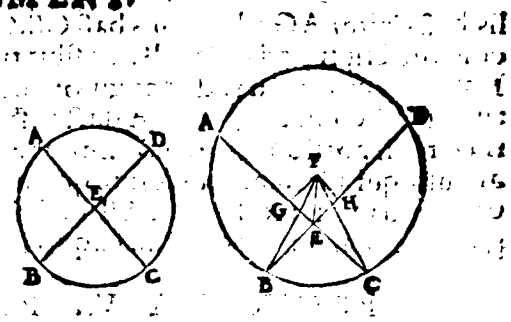
In circulo enim ABCD duae rectae lineae AC, BD se se mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum cõtentum AE EC æquale esse ei, quod DE EB continetur. Si igitur ACBD per cẽtrum transeant, ita vt E sit cẽtrum ABCD circuli; manifestũ est æqualibus existentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum AE EC æquale esse ei, quod DE EB continetur. Itaque AC DB non transeant per centrum: & sumatur centrũ circuli ABCD quod sit F: & à F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: iungantur q; FB FC FE. Quoniã igitur recta quaedam linea GF per cẽtrũ ducta rectam lineã quandã AC non ductã per centrum ad rectos angulos secat & bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AG secta est in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulũ AE EC cõtentũ vna cũ ipsius EG quadrato, æquale quadrato ex GC. cõmune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum AEC vna cũ iis quae ex EG GF quadratis æquale est quadratis ex CG GF. Sed quadratis quidem ex EG



3. huius.

5. secundi.

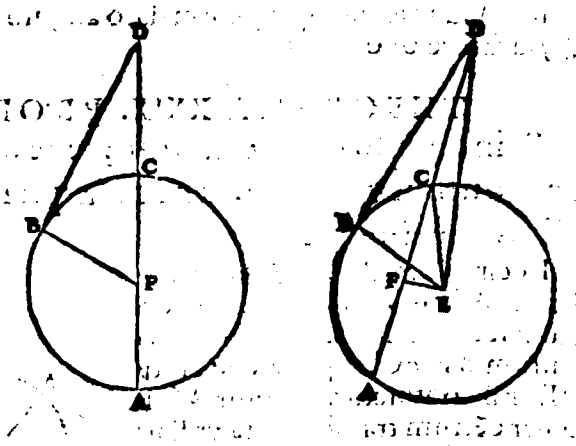
47.primi. GF æquale est quadratũ ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale ꝙ ex FC quadratũ. rectangulum igitur AEC vnà cũ quadrato ex FE æquale est quadrato ex FC. est autẽ CF æqualis FB. ergo rectangulũ AEC vnà cũ quadrato ex EF æquale est ei, ꝙ ex FB quadrato. Eadẽ ratione & rectangulũ DEB vnà cum quadrato ex FE æquale est quadrato ex FB. ostensum autẽ est, & rectangulũ AEC vnà cum quadrato ex FE æquale ei quod ex FB quadrato. ergo rectangulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale est rectangulo DEB vnà cum quadrato ex FE. cõe auferatur ꝙ ex FE quadratũ. reliquũ igitur rectãgulũ AEC reliquo DEB rectãgulo aequale erit. Quare si in circulo duae rectae lineae ſe ſe mutuo ſecẽt, rectãgulũ portionibus vnius cõtẽtũ æquale ẽ ei ꝙ alterius portionib. cõtinetur, id ꝙ demõſtrare oportebat.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota ſecante, & exterius aſſumpta inter punctum, & curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum .n. ABC ſumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulũ cadãt duae rectae lineae DCA DB: & DCA quidẽ circulũ ABC ſecet, DB vero cõtingat. Dico rectãgulum ADC quadrato, ꝙ fit ex DB aequale eſſe. Vel igitur DCA p centrũ tranſit, vel nõ tranſeat primũ per centrum circuli ABC, quod ſit F, & FB iungatur. erit angulus FBD rectus. Itaq. quoniã recta linea AC bifariam ſecta eſt in F, & ipſi adijcitur CD, rectãgulum ADC vna cum quadrato ꝙ ex FC aequale erit ei, ꝙ fit ex FD quadrato, aequalis aũt eſt CF ipſi FB. ergo rectangulũ ADC vnà cum quadrato ꝙ ex FB aequale eſt quadrato ex FD. Sed quadratum ex FD eſt aequale quadratis ipſarum FB BD, rectus n. angulus eſt FBD. rectangulũ igitur ADC vnà cũ quadrato ex FB aequale eſt ipſarũ FB BD quadratis. Cõe auferatur quadratum ꝙ ex FB. ergo reliquum ADC rectangulum quadrato ꝙ fit à contingente DB aequale erit. Sed DCA nõ tranſeat per centrum ABC circuli. ſumaturq. centrũ E, & ab ipſo E ad AC perpendicularis agatur EF, & iungantur EB EC ED. rectus igitur ẽ ∠EFD angulus, Et ꝙm recta linea quaedã ∠EF p centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductã per centrum ad rectos angulos ſecat, & bifariã ipſam ſecabit. quare AF ipſi FC eſt aequalis. Rurſus quoniã recta linea AC bifariã ſecta eſt in F, atq; ipſi adijcitur CD, erit rectangulum ADC vnà cum quadrato ex FC aequale quadrato, ꝙ ex FD, commune apponatur ꝙ ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnà



18.huius.

6.ſecundi.

3.huius.

6.ſecundi.

cum

cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidē ex DF FE æquale est, quod ex DE quadratū; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est quadratum ex CE. ergo rectangulum ADC vna cum quadrato, quod ex CE est æquale quadrato ex ED æqualis autem est CE ipsi EB. rectangulum igitur ADC vna cum quadrato ex EB æquale est ei, quod ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD: siquidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum ADC vna cū quadrato ex EB æquale est eis, quę ex EB BD quadratis. cōe auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur ADC rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctū sumatur, & quæ deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

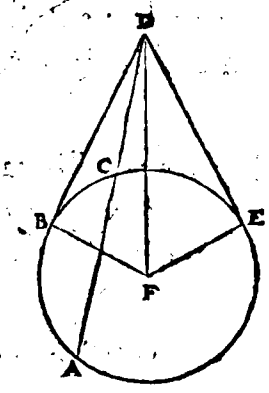
Ex proxime demonstratis duo corollaria sequuntur, vt ēt adnotauit Campanus. nempe hæc.

Si à puncto extra circulum sumpto ducātur in circulū quotcūq; rectæ lineæ ipsum secantes, rectangula quę totis, & earum portionib' extrinsecis continētur, inter se æqualia sunt: & singula quadrato lineę cōtingentis sint æqualia.

A puncto extra circulum sumpto ductæ duæ rectæ lineæ circulum cōtingētes inter se æquales sunt. etenim vtriusque ipsarum quadrata sunt æqualia rectāgulo, & resta linea ab eodē puncto ducta, quæ circulum secet, & eius portionē ex trinseca cōtinetur. ergo & ipsæ lineæ æquales sint necesse est. neq; vero plures q̄ duæ esse possunt, quod ex demōstratis in octauo huius perspicue apparet.

THEOREMA XXXI. PROPO. XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliqnod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulū secet, altera vero incidat, sit autem quod tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curuam circumferentiam contineatur, æquale æquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



Extra circulum. n. ABC sumatur aliquod punctū D, atq; ab ipso in circulum cadāt duæ rectę lineę DCA DB; DCA quidē circulum secet, DB vero incidat, sitq; rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur. n. recta linea DE contingens circulū ABC, & sumatur circuli ABC centrum & sit F, iunganturq; FE FB FD. ergo angulus FED rectus est. Et q̄m DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulū ADC æquale erit quadrato quod ex DE. sed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato quod ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem, & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt; & basis ipsarum cōis FD. angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF. rectus autem DEF. ergo & DBF est rectus; atq; est FB producta diameter. quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulū contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur, & si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

18. huius.

8. primi.

FINIS LIBRI TERTII.

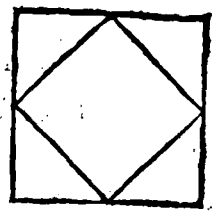
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Liber Quartus.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando vnus quisque figuræ descriptæ angulus vnūquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

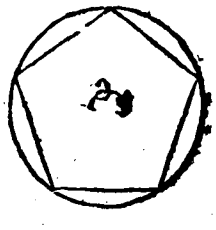


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur quando vnūquodque latus descriptæ vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

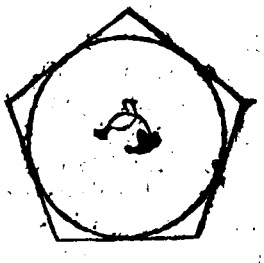
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiā contingit.



IIII

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptæ circuli circumferētiā cōtingit.



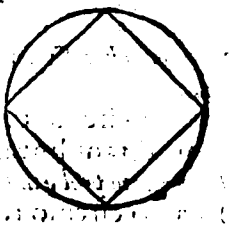
V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

Circulus

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.



VII

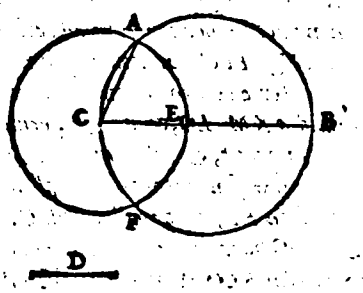
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.



PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quę diametro eius maior nõ sit, ęqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non maior circuli diametro D. oportet in circulo ABC rectæ lineę D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D, factum iam erit, quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata est AC rectæ lineę D æqualis. Sin minus, maior est BC quam D, ponaturq; ipsi D aequalis CE: & centro quidem C interuallo autem CE circulus describatur AEF: & CA iungatur. Itaq; quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE aequalis. Sed D est aequalis CE ergo, & D ipsi AC aequalis erit. In dato igitur circulo ABC datae rectae lineae D, non maiori circuli diametro, aequalis aptata est AC. quod facere oportebat.



SCHOLIVM.

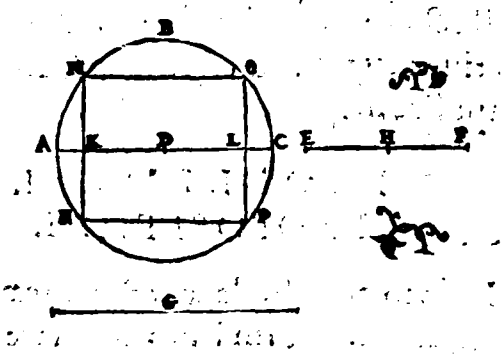
Cum varia sit circumscriptionum, & inscriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progressus est nam perueniens ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens, qui ad astrorum scientiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam est pentagoni constitutioni inseruiens. & quaecumque in hoc ordinantur, in illa praeordinari oportebat. Sed quoniam simpliciorem habet constructionem quae trianguli constitutio, iure merito ante alia theoremata positum est. Sciendũ autem si quidem data recta linea diametro sit aequalis, uno tantum modo; uel etiam absque ulla experientia fieri problema; Si uero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto ut C ad AF ductae rectae lineae inter se aequales sunt.

Problema hoc eſt eorum numero, quæ determinata appellantur, poſſet enim, & hoc modo explicari.

In dato circulo date rectæ lineæ æqualem rectam lineam aptare. oportet autẽ datam rectam lineam diametro circuli non eſſe maiorem.

Licet etiam problema aliud abſoluere huiuſmodi.

In dato circulo rectam lineam rectæ lineæ datæ, quæ diametro maior nõ ſit æqualem, & alteri date parallelam aptare.

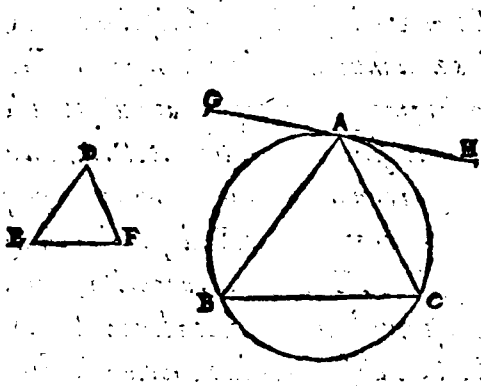


Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea ſit in qua G. Itaq; oportet in circulo ABC aptare
31.primi. *rectam lineam æqualem ipſi EF, & ipſi G parallelam. Ducatur per D recta linea ADC parallela ipſi G, quæ circuli diameter erit. & ſi quidem AC ſit æqualis EF, factum iam erit quod proponebatur: ſi vero AC ſit maior, quàm EF ſecetur EF bifariam in H: & ipſi HE æqualis abſcindatur a ſemidiametro circuli DA, quæ ſit DK.*
11.primi.
3.tertij. *ipſi vero HF æquali fiat DL: perq; puncta KL ipſi AC ad rectos angulos ducantur MN, OP: & MO iungatur. Quoniam igitur recta linea quædam AC per centrum ducta rectam lineam*
14.tertii. *MN non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat; & bifariam ipſam ſecabit. quare MK eſt*
28.primi *æqualis KN. Et ob eandem cauſſam OL eſt æqualis LP. ſunt autem MN, OP inter ſe æquales,*
33.primi. *cum æqualiter à centro diſtent, & ſint parallelæ, anguli enim MKL, OLK recti ſint. quare & earum dimidiæ KM, LO, & æquales erunt, & parallelæ. At quæ æquales, & parallelas ad eaſdem*
30.primi *partes coniungunt, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. ergo MO eſt æqualis KL, hoc eſt ipſi EF, & parallela ipſi G; ſunt enim vtrq; ipſi KL parallelæ. Eadem ratione iuncta NP demõſtrabitur æqualis eidem EF, & parallela ipſi G. In circulo igitur ABC aptata eſt MO vel NP æqualis EF, & ipſi G parallela, quod facere oportebat.*

Ex quibus conſtat ſi quidẽ AC ſit æqualis rectæ lineæ datæ, vno dũtaxat modo problema abſolui; ſi vero ſit maior, duobus modis, vt in antecedẽti dictũ eſt

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.



Sit datus circulus ABC, datum autem triãgulum DEF. oportet in ABC circulo deſcribere triangulũ
27.tertii. triangulo DEF æquiangulũ. Ducatur recta linea GAH contingẽs circulum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad pũctum
23.primi. in ea A angulo DEF æqualis angulus cõſtituatur HAC. rurſus ad rectam lineã AG, & ad punctũ in ipſa A angulo DEE æqualis cõſtituatur angulus GAB; & BC iungatur.
Qm̃ igitur circulũ ABC contingit ẽdã recta HAG; à contactu aũt in circulũ ducta eſt AC: erit HAC angul' æqualis ei, q in alterna circuli portione cõſiſtit, vi
32.primi. delicet ipſi ABC. Sed HAC angul' æqualis eſt angulo DEF ergo & angulus ABC

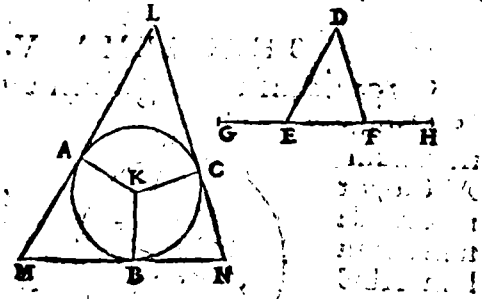
angulo

angulo DEF est æqualis. Eadē ratione, & ăgulus ACB est æqualis ăgulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis erit. ergo triăgulum ABC triăgulo DEF est æquiăgulum. & descriptum est ī circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC: datum autē triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiăgulum. protrahatur ex vtraq; parte EF ad puncta H G: & sumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB vtcumq; ducatur: constituaturq; ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K angulo quidē DEG æqualis ăgulus BKA, ăgulo aūt DFH æqualis ăgulus BKC, & per A B C pūcta ducātur rectae lineae LAM MBN NCL circulum ABC, contingentes.



23.primi.

17.tertij.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM MN NL, in punctis A B C, à centro autē K ad A B C puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta A B C recti. et quia quadrilateri AM BK ăguli quattuor quattuor rectis æquales sunt etenī in duo triăgula diuiditur; quorū ăguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autē, & DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliqus AMB reliquo DEF æqualis erit. Similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo, & reliquus ML N est æqualis reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triăgulo DEF, & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiăgulum triăgulum descriptum est. quod facere oportebat.

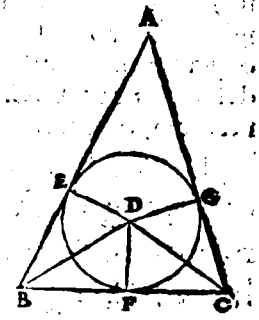
18.tertij.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC, oportet in triăgulo ABC circulum describere. Secentur anguli ABC BCA bifariā rectis lineis BD CD, quæ cōueniant inter se in D pūcto & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpēdiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus ABD ē æqualis ăgulo CBD, est autē & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habētia, & vnum latus vni lateri æquale, & vtrique commune BD, quod scilicet vni æqualium ăgulorum subtēditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atq. erit DE æqualis DF. & eadem rōne DG æqualis DF. ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectę lineę DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D interuallo autem vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiā per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA cōtinget; propterea quòd recti sunt ad EFG anguli. Si. n. ipsas secet, quæ ab extremitate diametri

9.primi.



12.primi.

26.primi.

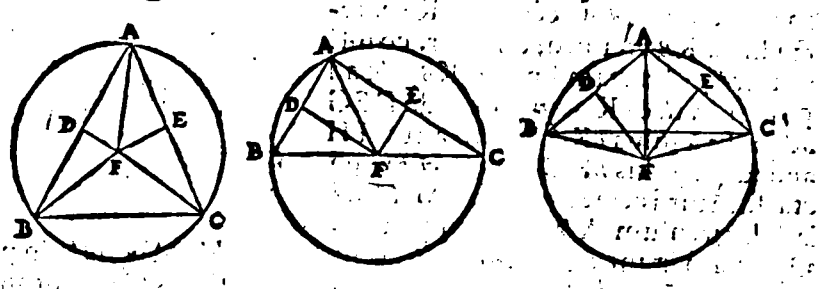
16. tertij. metri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet. quod est absurdum. nō igitur cētro D, interuallo aūt vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA, quare ipsas cōtinget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quæsitum est à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum describi possit, quamquam fortasse improprie in eo dicatur describi. Fuerunt qui in triangulo æquilatero tātum problema absoluerūt. Nos autem vniuersè in omnibus absoluere aggrediemur, postea quàm nonnulla in quinto, ac sexto libro demonstrata fuerint.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.



Sit datum triāgulum ABC. oportet circa datum triāgulum ABC

10 primi. circulū describere. secentur AB

11. primi. AC bifariā in D E punctis: & à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos ducātur DF EF; q̄ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsā: Cōueniant primum intra triangulum in puncto F: & BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, cōmunis autē, & ad rectos angulos DF; erit basis AF basi FB æqualis. Similiter ostēdetur, & CF æqualis FA. ergo, & BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare

4. primi. centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atq; erit circulus descriptus circa triangulum ABC. & describatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in secunda figura, & AF iungatur, Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postrēmo DF EF conueniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, vt in tertia figura: & iungantur AF FB FC. Et quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem, & ad rectos angulos DF, basis AF basi FB æqualis erit. Similiter demonstrabimus, & CF ipsi FA æqualem esse. quare, & BF est æqualis FC. Rursus igitur centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. & describatur vt ABC. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Q̄ facere oportebat.

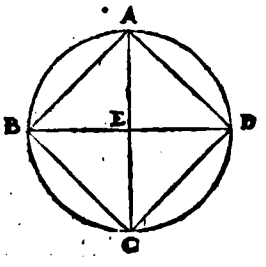
Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC existētem in portione semicirculo maiore minorem esse recto. quando autem cētrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quod sit in semicirculo, rectum esse. & quādo extra BC, quòd sit in portione minore semicirculo, recto esse maiorem. Quare, & quando datus angulus minor sit recto, DF EF intra triangulum cōueniēt: quādo autē rectus in ipsa BC,

& quando maior recto, extra BC. quod ostendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPO. VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: & AB BC CD DA iungãtur. Quoniam igitur BE est æqualis ED, etenim centrum est E, cõis autem, & ad rectos angulos EA; erit basis BA æqualis basi AD. Et eadem ratione vtraq; ipsarum BC CD vtriq; BA AD æqualis. æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico & rectangulum esse. Quoniam. n. recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus est. 31 tertij.



Et eadẽ ratione vnusquisq; ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est. ꝙ facere oportebat.

PROBLEMA VII. PROPO. VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

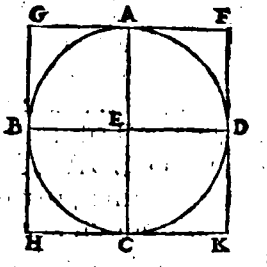
Sit datus circulus ABCD. oportet circa ABCD circulum quadratum describere. ducantur circuli ABCD duæ diametri AC BD ad rectos inter se angulos, & per pũcta ABCD ducantur circulum ABCD contingentes FG GH HK KF. quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à cẽtro autem E ad contactum qui est ad A ducitur EA; erunt anguli ad A recti. Eadẽ ratione, & anguli ad puncta BCD recti sunt. Et qm̃ angulus AEB rectus est, est autem, & rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela. Eadẽ ratione, & AC parallela est FK. Similiter demonstrabimus, & vtramq; ipsarum GF HK ipsi BED parallelã esse. quare, & GF est parallela HK. parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB BK ac propterea GF quidem est æqualis HK, GH vero ipsi FK. Et quoniã AC æqualis est BD. Sed AC quidem vtriq; ipsarum GH FK est æqualis; BD vero æqualis vtriq; GF HK. & vtraq; GH FK vtrique GF HK æqualis erit. Aequilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico & rectangulum esse. quoniam. n. parallelogrãmũ est GBEA, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit. Similiter demonstrabimus angulos etiam ꝙ ad puncta HKF rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterũ FGHK. demonstratum aũt est, & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est. & descriptũ est circa circulũ ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. ꝙ facere oportebat.

17.tertij.

18.tertij.

28.primi.

34.primi.



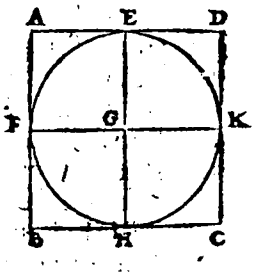
PROBLEMA VIII. PROPO. VIII.

In dato quadrato circulum describere.

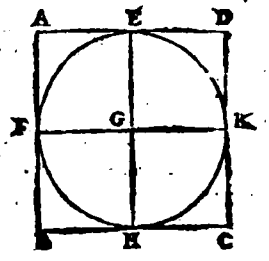
Sit datum quadratum ABCD. oportet in quadrato ABCD circulũ describere. Secentur vtraq; ipsarũ AB AD bifariam in punctis FE. & per E quidẽ alterutri ipsarum ABCD parallela ducatur EH: per F vero ducatur FK parallela alterutri AD BC. parallelogrãmũ igitur

10.primi

31.primi.



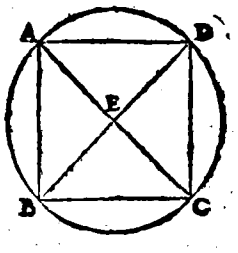
igitur est vnumquodq; ipsorum AK KB AH HD A
14.primi. G GC BG GD: & latera ipsorum quæ ex opposito sunt æqualia. Et quoniã DA est æqualis AB; & ipsius quidem AD dimidia est AE; ipsius vero AB dimidia AF; erit AE ipsi AF æqualis. quare, & oppositalate ra æqualia sunt. ergo FG est æqualis GE. Similiter demõstrabimus, & vtramq; ipsarum GH HK vtriq; FG GE æqualẽ esse. quattuor igitur GE GF GH GK inter se sunt æquales. Itaq; cẽtro quidẽ G, interuallo autem vna ipsarũ GE GF GH GK circulus descriptus etiam ꝑ reliqua transibit puncta. & rectas lineas AB BC CD DA cõtinget propterea quod anguli ad EF HK recti sunt. Si.n. circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet. ꝙ est absurdum. non igitur centro quidẽ G, interuallo
16.tertij. autem vna ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario cõtinget: atq; erit descriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. ꝙ facere oportebat.



PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.

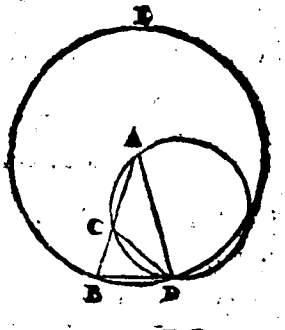
Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABC D quadratum circulum describere. Iungantur. n. AC BD, quæ se inuicem in puncto E secent. Et qm̃ DA est æqualis AB, cõmunis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC æqualis basi C B; erit angulus DAC angulo BAC æqualis. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. Simi liter demonstrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariã sectũ esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis. atque est anguli quidem DAB dimidius angulus EAB. anguli vero ABC dimidius EBA; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare. & latus EA lateri EB est æquale Similiter demonstrabimus, & vtramq; rectarũ linearũ EC ED vtriq; EA EB æqualem esse. ergo quattuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta trãsibit. atq; erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur vt ABCD. circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. quod facere oportebat.



PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrure triangulum constituere, habens vtrumque angulorum, qui sunt ad basim duplum reliqui.

11.secundi. Exponatur recta quędã linea AB, & secetur in C puncto, ita vt rectangulum cõtentum AB BC æquale sit ei, ꝙ ex CA describitur quadrato: &
1.huius. centro q de m A, interuallo autẽ AB circulus describatur BDE; apteturq; in BDE circulo recta linea BD æqualis ipsi AC, q̃ nõ sit maior diametro circuli BDE: & iunctis DA DC, circa AD C triangulum circulus ACD describatur. Itaq; qm̃ rectãgulum ABC aequale est quadrato, ꝙ fit ex AC; aequalis autẽ est AC; ipsi BD, erit ABC rectangulum



quadrato

quadrato quod ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit, atque est rectangulum ABC æquale quadrato, quod ex BD; recta linea BD circulũ ACD continget. Quoniam igitur BD contingit, & à contactu, qui ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet angulo DAC. Quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, cõmunis apponatur CDA. totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipsis CDA DAC exterior angulus BCD est æqualis. ergo & BDA æqualis est ipsi BCD. Sed BDA angulus est æqualis angulo CBD, quoniam, & latus AD lateri AB est æquale. ergo & DBA ipsi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. Et quoniam angulus DBC æqualis est ãgulo BCD, & latus BD lateri DC est æquale. Sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo & AC est æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ipsius anguli DAC dupli sunt. est autem, & BCD ãgulus angulis CDA DAC æqualis ergo & BCD duplus est ipsius DAC. Sed BCD est æqualis vtrique ipsorum BDA DBA, quarę & vterque BDA DBA ipsius DAB est duplus. æquicrure igitur triangulum constitutũ est ADB. habens vtrumq; eorum angulorũ, q sunt ad basim, duplũ reliqui. q̃ facere oportebat.

Vlt. tertij.

32. tertij.

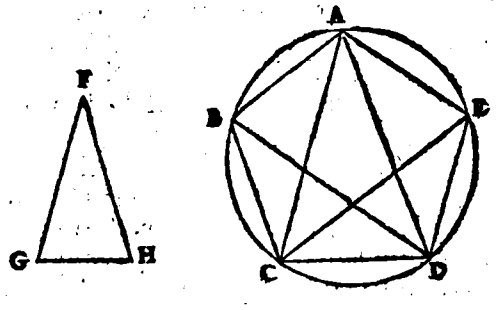
32. primi.

6. primi.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens vtrumq; eorum qui sunt ad GH ãgulorum duplum ãguli qui est ad F. & describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum triangulum ACD, ita vt angulo qdẽ, qui est ad F æqualis sit angulus CAD: utrique uero ipsorũ, qui ad GH sit æqualis uterq; ACD CDA. & uterq; igitur ACD CDA anguli CAD est duplus. secetur uterq; ipsorũ ACD CDA bifariã rectis lineis CE DB. & AB BC CD DE EA iũgãtur. Quoniã igitur uterq; ipsorũ ACD CDA duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariã rectis lineis CE DB, quinq; ãguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autẽ anguli in æqualibus circumferentijs insistunt. quinque igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias æquales rectæ lineae subtẽdunt. ergo & quinque rectae lineae AB BC CD DE EA inter se aequales sũt. aequilaterum igitur est ABCDE pentagonum. Dico & aequiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB aequalis est circumferentiae DE, cõmunis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia totι circumferetiæ EDCB est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD insistit angulus AED, in circumferentia vero EDCB insistit BAE. Ergo & BAE angulus est æqualis ãgulo AED. Eadem ratione, & vnusquisq; angulorum ABC BCD CDE vnicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. ostensum autem est, & aequilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum aequilaterum, & aequiangulum descriptum est. quod facere oportebat.



ex antecedente.

4. huius.

9. primi.

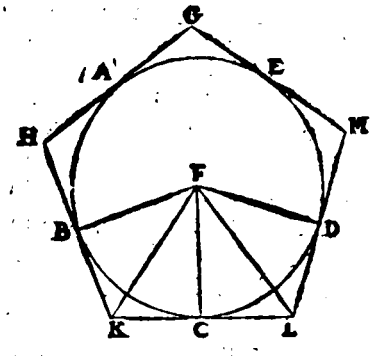
26. tertij.

29. tertij.

PRO-

PROBLEMA XII. PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum aequilaterũ, & aequiangulum describere. intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorum puncta ABCDE, ita vt circumferentiae AB BC CD DE EA sint aequales; & per puncta ABCDE ducantur circulum contingentes GH HK KL LM MG, & sumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD. Quoniam igitur recta linea KL cõtingit circulum ABCDE in puncto C, & à centro F ad contactum, qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis. Rectus igitur est vterq; angulorum qui sunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta BD recti sunt. & quoniã rectus angulus est FCK, quadratum quod fit ex FK aequale est quadratis quae ex FC CK. & ob eandem causſam quadratis ex FB, BK aequale est quod ex FK quadratum. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK aequalia sunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB est æquale. Ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK aequale erit. aequalis igitur est BK ipsi CK. Et quoniã FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt: & basis BK est aequalis basi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC aequalis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipsius FKC. Eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circunferentiae CD est aequalis, & angulus BFC angulo CFD aequalis erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC. aequalis igitur est angulus KFC angulo CFL. Itaq; duo triangula sunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod ipsis cõmune est FC. Ergo & reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebũt, & reliquum angulũ reliquo angulo aequalem. recta igitur linea KC est aequalis rectae CL, & angulus FKC angulo FLC. Et quoniam KC est aequalis CL, erit KL ipsius KC dupla. Eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est aequalis ipsi KC: atq; est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL aequalis. Similiter, & vnaquaeque ipsarum GH GM ML ostendetur aequalis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur est GHKLM pentagonũ. Dico etiã aequiangulum esse. Quoniam angulus FKC est aequalis angulo FLC: & ostẽsus est ipsius quidem FKC duplus angulus HKL, ipsius vero FLC duplus KLM: erit, & HKL angulus angulo KLM aequalis. Simili ratione, ostendetur, & vnusquisque ipsorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM aequalis. Quique igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se aequales sunt. ergo aequiangulum est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam aequilaterum esse: & descriptum est circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

ex antecedente.

27. tertij.

28. tertij.

8. primi.

27. tertij.

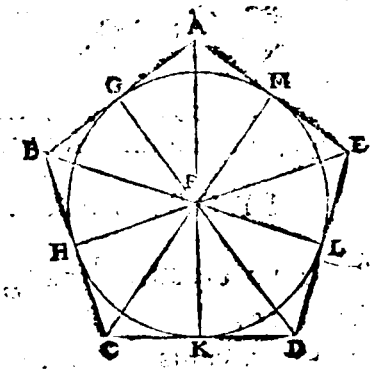
d6. primi.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, & æquiangulum sit circulum describere.

Sit

Sit datum pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pẽtagono circulũ deſcribere. ſecetur vterq; angulorum BCD CDE bifariã rectis lineis CF DF; & à puncto F, in quo conueniunt inter ſe CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC eſt æqualis CD, cõis autẽ CF, duæ BC CF duabus DC CF æquales ſunt, & angulus BCF eſt æqualis angulo DCF. baſis igitur BF baſi FD eſt æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et qm̃ angulus CDE anguli CDF eſt duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit, & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC æqualis. angulus igitur ABC bifariã ſectus eſt recta linea BF. Similiter demonſtrabitur, & vnumquemq; angulorũ BAE AED rectis lineis AF FE bifariam ſectũ eſſe. Itaq; à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF eſt æqualis angulo KCF; eſt autem, & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & vnum latus vni lateri æquale, cõe ſcilicet vtriſq; FC, quod vni æqualium angulorum ſubtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atq; erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. Similiter oſtendetur, & vnaquæq; ipſarũ FL FM FG æqualis vtriq; FH FK. quinq; igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter ſe æquales ſunt. quare centro F, interuallo autem vna ipſarum FG FH FK FL FM circulus deſcriptus, etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget, propterea quod anguli ad GHKLM recti ſunt. Si enim non continget, ſed ipſas ſecabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod abſurdum eſſe oſtenſum eſt. non igitur centro F, & interuallo vno ipſorum punctorum GHKLM circulus deſcriptus rectas lineas AB BC CD DE EA ſecabit. quare ipſas contingat neceſſe eſt. deſcribatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod eſt æquilaterum. & æquiangulũ, circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



9. primi.

4. primi.

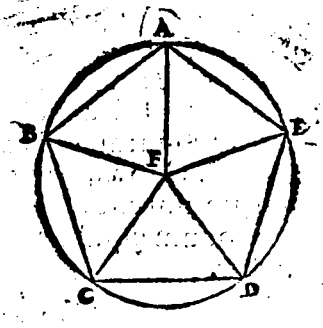
26. primi.

16. tertij.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonũ ABCDE circulum deſcribere, ſecetur vterq; ipſorum BCD CDE angulorum bifariã rectis lineis CF FD: & à puncto F, in quo cõueniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducãtur FB FA FE. Similiter vt in antecedẽti demonſtrabitur vnumquemq; angulorũ CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam ſectum eſſe. Et quoniã angulus BCD angulo CDE eſt æqualis; atq; eſt anguli quidẽ BCD dimidius ãgulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit, & FCD angulus æqualis angulo FDC quare & latus CF lateri FD ẽ æquale. Similiter demõſtrabitur, & vna quæ ipſarum FB FA FE æqualis vnicuiq; FC FD. quinq; igitur rectæ lineæ FA FB FC FD



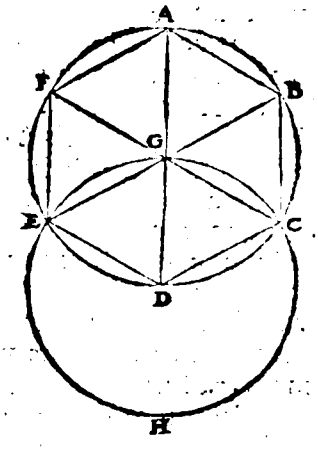
FC FD FE inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, & interuallo vna ipſarum FA FB FC FD FE circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atq; erit deſcriptus circa pentagonum ABCDE, quod æquilaterum eſt, & æquiangulũ. deſcribatur, & ſit A B C D E. circa datum igitur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. ducatur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturq; centrum circuli G; & centro quidem D, interuallo autem DG circulus deſcribatur EGCH, iunctæ EG CG ad puncta BF producantur, & iungantur AB BC CD DE EF FA. dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, & æquiangulum eſſe. Quoniam .n. G punctum centrum eſt ABCDEF circuli, erit GE ipſi GD æqualis. Rurſus quoniã D centrũ eſt circuli EGCH, erit DE æqualis DG ſed GE ipſi GD æqualis oſtenſa eſt. ergo GE ipſi ED eſt æqualis. æquilaterũ igitur eſt EGD triãgulum, ideoq; tres ipſius anguli EGD GDE DEG inter ſe æquales ſunt, quoniam æquicrurium triangulorũ anguli ad baſim inter ſe ſunt æquales: & ſunt trianguli tres anguli æquales duobus rectis. ãgulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars eſt. Similiter oſtendetur, & DGE duorum rectorum tertia. & quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens angulos qui deinceps ſunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit & reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter ſe ſunt æquales. ergo & qui ipſis ad verticẽ ſunt anguli BGA AGF FGE æquales ſunt angulis EGD DGC CGB. quare ſex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter ſe æquales ſunt. ſed æquales anguli æqualibus circũferentijs inſiſtũt. Sex igitur circũferentiæ AB BC CD DE EF FA inter ſe ſunt æquales. æquales autẽ circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. ergo & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſint neceſſe eſt, ac propterea æquilaterũ eſt ABCDEF hexagonum. dico & æquiangulum eſſe. Quoniam .n. circumferentia AF circũferentiæ ED eſt æqualis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia æqualis eſt toti circũferentiæ EDCBA. & circũferentiæ quidẽ FABCD angulus FED inſiſtit, circũferentiæ vero EDCBA inſiſtit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF eſt æqualis. Similiter oſtẽdentur, & reliqui anguli exagoni ABCDEF ſigillatim æquales vtriq; ipſorum AFE FED. ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonũ oſtenſum autem eſt, & æquilaterum eſſe: & deſcriptũ eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

5.primi.
32.primi.
13.primi.
26.tertii.
29.tertii.

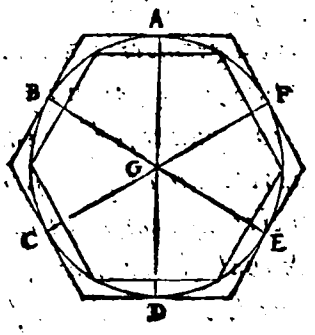


COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtũ eſt exagoni latus ei, quæ eſt ex centro circuli æquale eſſe. Et ſi per puncta ABCDEF contingentes circulũ

ducamus

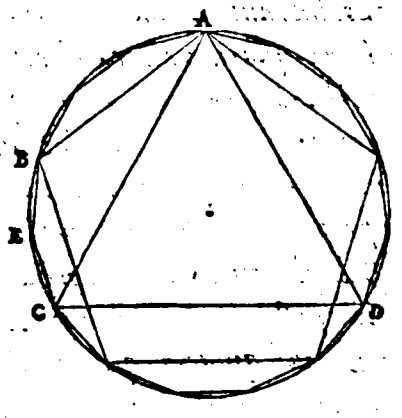
ducamus, circa circulum describetur hexagonum æquilaterum, & æquiangulum consequenter ijs, quę in pentagono dicta sunt, & præterea similiter in dato hexagono circulum describemus, & circum scribemus. quod facere oportebat.



PROBLEMA XVI. PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonũ æquilaterum, & æquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD trianguli quidem æquilateri in ipso descripti latus AC, pẽtagoni vero æquilateri latus AB. Quarum igitur partium est ABCD circulus quindecim, earũ circumferentia quidem ABCD tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli; erit triũ. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariam in puncto E. quare vtraque ipsarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptũ erit. quod facere oportebat.



Similiter autem ijs, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli diuisiones cõtingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Et insuper dato quindecagono æquilatero, & æquiangulo circulum describemus, & circumscribemus.

Finis Libri Quarti.

SCHOLIVM.

In quinto libro propositum est de analogiis tractare; hic enim liber communis est geometriæ, aritmeticæ, musicæ, & omni simpliciter mathematicæ disciplinæ; nam quæ in ipso demonstrantur non solum geometricis theorematibus congruunt sed, & omnibus, quæ ad mathematicas, vt dictum est, disciplinas referuntur. propositum igitur huiusmodi est. librum autem dicũt esse Eudoxi cuiusdam, qui Platonis magister fuit. Itaque quoniam propositum est de analogiis tractare, analogia vero est proportionum quarundam habitudo; necesse est prius cognoscere, quænam sint hæ proportiones. simplicium. n. cognitio cognitionem compositorum præcedere debet. si igitur quædam inter se comparẽtur, verbi gratia duæ magnitudines, ipsæ quidem termini vocãtur, & alterius ad alteram transitus, distantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellarunt. at huius proportionis cum alia proportione iuxta similitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim vt magnitudo comparatur, sed vt proportio cum proportione. hæc autem comparatio proportio proportionis dicitur; vt si sint duæ rectæ lineæ quarum alcera ad reliquam duplam proportionem habeat, quadratum illius quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine sunt dupla potentia quadrupla sunt quadratorũ igitur proportio cum sit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearũ quæ est dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio, quæ quidem sub quantitate est; etenim proportio est duplex, alia in æstimatione, alia in quãtitate. & eius quidem, quæ in æstimatione nulla species est, quæ ad præsentem contemplationem vtillis sit; eius vero, quæ in quantitate species sunt quinque, alia enim est multiplex vt sex trium, alia superparticularis vt quatuor trium, & alia superpartiens, vt quinque trium, & hæ quidem simplices sunt, quarum ad huc simplicior est multiplex, aliæ vero duæ ex harum compositione nenascuntur, videlicet multiplex superparticularis, vt est septem trium, & multiplex superpartiens, vt octo trium. sub porportionales vero sunt minores maiorum, vt sub multiplex, sub particularis, & similiter reliqua. sciendum autem est hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars simpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. secunda vero vniuerse de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omni re, vt dictum est, simplicium cognitionem præcedere. quemadmodum aũt liber ipse, ita & diffinitiones diuiduntur; primæ enim sunt de partibus, & multiplicibus, deinde sequuntur vniuersaliores de omnibus proportionibus

Analogia,

Simplicium cognitio cognitionem compositorum præcedere debet termini.

Comparatio est habitudo, quam antiqui proportionem appellarũt Analogia.

Proportio proportionis,

Proportionis in quantitate species sunt quinque.

Quintus liber in duas partes diuiditur.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Quintus.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

DIFFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maiotis, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIVM.

Pars, vt multi arbitrantur, est minor eo, quod est eiusdem speciei, vt 3. est pars 5. apud geometram vero est, quæ metitur mains, quando reliquum æquale sit ei, quod metitur; quando autem non sit æquale, non est pars, vt 3. 5; reliquuntur enim 2. quæ non sunt æqualia 3. quare 3. non sunt pars 5. sed partes, videlicet tres quintæ $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram sumitur pro ea, quæ simpliciter minor est maiore eiusdem speciei: vt cum dicitur, omne totum est maius sua parte. ergo pars quatenus multiplice opponitur, erit ea, quæ metitur mains, videlicet ipsum multiplex, quæ alio nomine sub multiplex, & à nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla est necessitas, vt totum metiatur.

II.

Multiplex est maior minoris, quando maiorē minor metitur.

III.

Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

SCHOLIVM.

Proportionem] *dicit, vt significet habitudinem* duarum magnitudinum

dinum] *vt separet ab aliis speciebus quantitatis.* eiusdem generis] *vt neque lineam cum superficie comparet. hæc enim inter se proportionem nullam habent.* quatenus ad quantitatem pertinet] *vt separet ab infinitis magnitudinibus: quantitas enim continua est termini continui non infiniti, & quantitas discreta est discreti non infiniti. sed discretum non est magnitudo, multitudo enim est:* quædam habitudo] *quòd quinque sint habitudinum species, vt dictum iam fuit.*

F. C. COMMENTARIVS.

Quatenus ad quantitatem pertinet.] *vide ne hoc potius dictum sit, vt intelligatur proportio, quæ in quantitate, non item ea, quæ in æstimatione consistit.*

III.

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt.

SCHOLIVM.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem, in magnitudinibus autem est quædam proportio, quæ numero, exprimi non potest; sunt enim quædam quorum duntaxat cognoscitur excessus, quo alterum superat alterum, quantitas autem excessus cognosci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe excessus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc est rationalē. ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum apposuit, quatenus ad quantitatem pertinet, *videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem discretam, & rationalem. vniuersalius igitur diffiniens quæ nam sint proportionem habentia dixit,* quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt: *hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, vt in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, vt in excessu vero proportionem habet quam maius ad minus, & potest latus multiplicatum aliquando diametrum superare:*

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitæ magnitudines à proportionibus excludantur: finita enim magnitudo quamtumlibet multiplicata tantum abest, vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne æquare quidem possit vnquam.

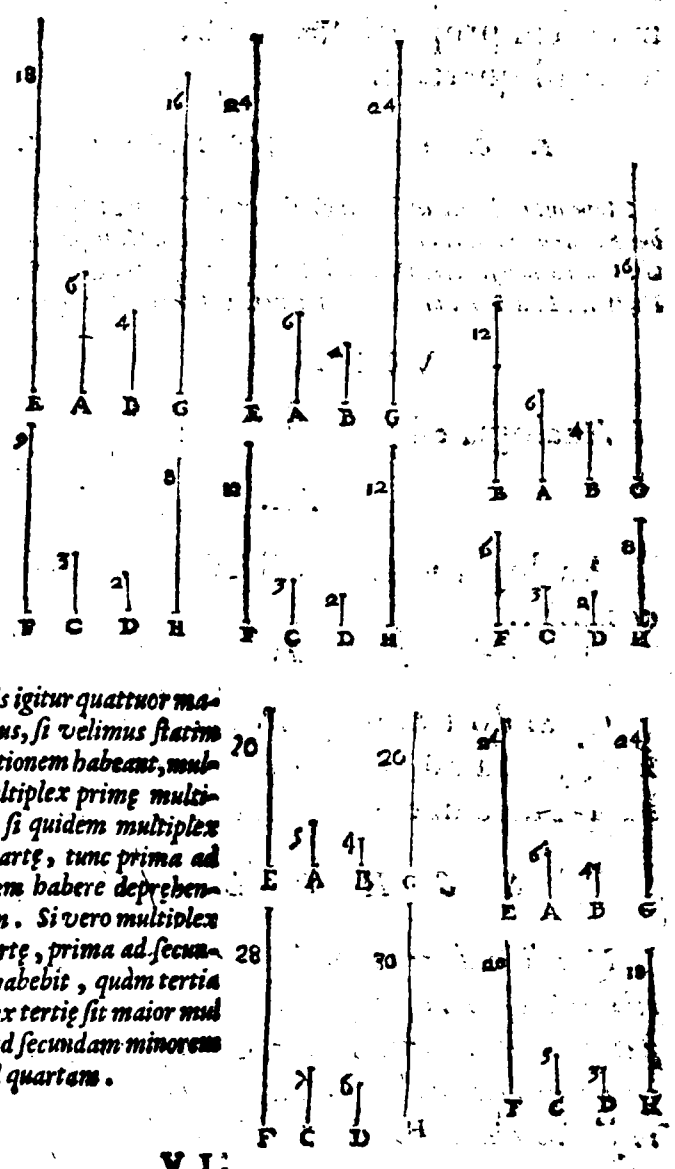
V.

In eadē proportione magnitudines esse dicuntur prima ad secundā, & tertia ad quartā, quando primæ, & tertiæ æque multiplices,

tiplices, secundæ, & quartæ æque multiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque, vel vnà superant, vel vnà æquales sunt, vel vnà deficiunt inter se comparatæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit primo magnitudo A, secunda B, tertia C, & quarta D; sumaturq; prima, ac tertię, videlicet ipsarum A C æque multiplices EF, vt sit E æque multiplex A, atque F ipsius C. rursus sumantur ipsarum BD, secundæ scilicet, & quartæ æque multiplex GH, & siquidem maiori existente E quàm G, etiam F sit maior quàm H, vel si E æquali existente ipsi G, sit F æqualis H. vel si minori existente, sit minor iuxta quãuis multiplicationẽ, tunc dicetur A ad B eandẽ habere proportionem, quam C ad D excessum autem, ac defectum simpliciter intelligere oportet, non secundum proportionem, vt voluit Campanus; alioqui idẽ per idẽ explicaretur quod est absurdũ. Proposítis igitur quattuor magnitudinibus commensurabilibus, si velimus statim dignoscere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, vt multiplex primę multiplici secundæ fiat æqualis; & si quidem multiplex tertię sit æqualis multiplici quartę, tunc prima ad secundam eandem proportionem habere deprehendetur, quàm tertia ad quartam. Si vero multiplex tertię sit minor multiplici quartę, prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam. Quòd si multiplex tertię sit maior multiplici quartę, habebit prima ad secundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam.



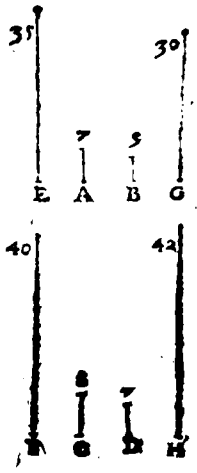
VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Quando

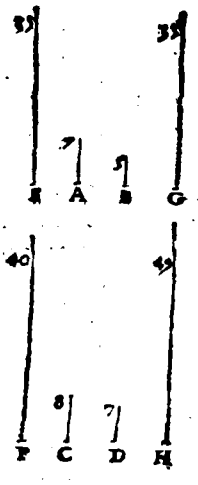
VII.

Quãdo autem æque multiplicium multiplex quidem primæ ſuperauerit multiplicem ſecundæ, multiplex verò tertię non ſuperauerit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.



F. C. COMMENTARIVS.

Maneant eadem, quæ ſupra: & ſumptis ipſarum AC æque multiplicibus EF; itemq; ipſarum BD æque multiplicibus GH, ſi quidem E ſuperet G, F uero non ſuperet H, uel ſi E ſit æqualis ipſi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionem habere dicitur, quàm C ad D.



VIII.

Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

IX.

Analogia uero in tribus minimis terminis conſiſtit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quàm habet ad ſecundã.

SCHOLIVM.

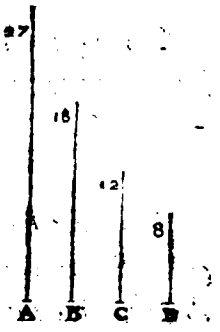


Non dicit duas proportiones unius duplas eſſe, quod etiam eſt uerum; ſed proportionem, que ex duabus conſtat, eſſe duplam, ut 8. 4. 2, & rurſus 9. 3. 1. proportio igitur, que ex duabus conſtat dupla eſt. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla eſt, in triplis uero nonupla, & in quadruplis ſexdecupla. demonſtrabitur enim deinceps que longitudine ſunt dupla, potentia quadrupla eſſe, & que longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum quadrupla ſit, dupla eſt proportionis laterum, que eſt dupla, etenim dupli duplus quadruplus eſt.

Quando

XI.

Quando autem quattuor magnitudinis sint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad secundam, & semper deinceps vna plus, quo ad analogia processerit.



F. C. COMMENTARIVS.

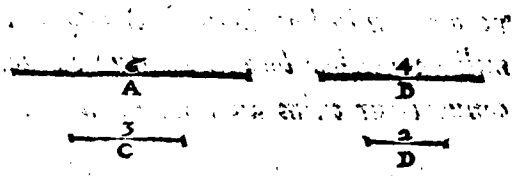
Decima, & vndecima diffinitio terminos requirunt necessario inæquales, & primum ipsorum maiorem. Nam si æquales sint eadem est primi ad secundum, & ad tertium proportio. Si vero primus sit minor, non poterit primus ad tertium duplum proportionem habere propriæ eius, quam habet ad secundum, cum primi ad secundum maior sit proportio, quàm ad tertium ex 8. huius.

XII.

Homologæ, vel similis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

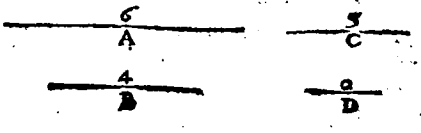
XIII.

Permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.



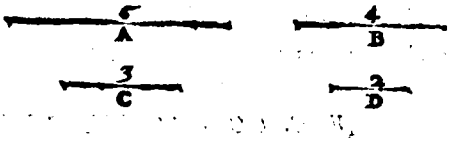
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita esse demonstrabitur in 16. propositione huius libri.



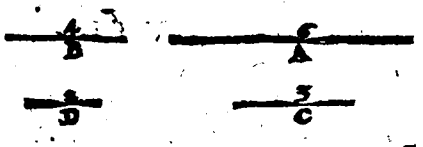
XIV.

Conuersa ratio est sumptio consequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad consequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit rursus A ad B, vt C ad D. erit conuertendo B ad A vt D ad C. quod demonstratur in corollario quartæ huius.



Composito

XV.

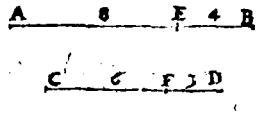
Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis vnà cum conſequente tamquam vnius ad ipſam conſequentem.

SCHOLIVM.

Iuniores hanc proportionem appoſuerunt. neque enim compoſitio magnitudinum eadem eſt, quæ compoſitio proportionum. hic autem antecedens vnà cum conſequente ſumptum totam magnitudinem efficit, quæ ex magnitudinibus componitur; atque hæc eſt magnitudinum compoſitio compoſitio enim proportionũ aliam proportionem efficit, vt ipſe deinceps dicet. proportio, inquit ex proportionibus componi dicitur, cum proportionum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam efficiunt proportionem: ipſe autem, vt in antiquioribus libris inuenitur, compoſitionem hanc vocat, hoc eſt componendo, vel componendo appellat; etenim in rationalibus non aliter dixit, quàm componendo; ſimiliter autem, & diuiſio, vna enim proportio diuiditur. at diuiſio de qua hoc loco ſermo fit, magnitudinum eſt, exceſſus namq; antecedentium ab antecedentibus diſſecatur. ipſe vero etiam in hoc dicit διελὸντι videlicet diuidenti, vel diuidendo, & ſimiliter quæ hoc loco appellatur conuerſio rationis ipſe ἀνασρέφοντι dicit, conuertitur enim ad antecedentia.

F. C. COMMENTARIVS.

Compoſitio rationis eſt proportio, quæ oritur ex compoſitione terminorum ipſius proportionis, videlicet ex compoſitione antecedentis cum conſequente, cum totum conſequenti comparatur, quamquam improprie à iunioribus compoſitio proportionis, vel rationis appellata ſit: compoſitio enim proportionis longe alia eſt, vt in precedenti ſcholio adnotatur. ſit AE ad EB, vt CF ad FD, erit componendo AB ad BE, vt CD ad DF. illud vero in 18. huius demonſtratur.

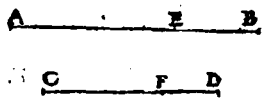


XVI.

Diuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit diuidendo AE ad EB, vt CF ad FD. quod in 17. huius demonſtrabitur.

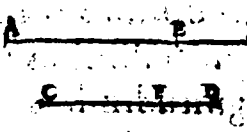


XVII.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

Sit

F. C. COMMENTARIVS.



Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit per conuersionem rationis BA ad AE, vt DC ad CF, hoc autē cōstat ex corollario 19. huius.

XVIII.

Æqua ratio, siue ex æquali est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad vltimā: vel aliter est sumptio extremarū per subtractionē mediarū.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. sint tres magnitudines ABC, & aliæ ipsis numero æquales DEF sitq; vt A ad B, ita D ad E; & vt B ad C, ita E ad F. erit ex æquali vt A ad C, ita D ad F. quod demostrabitur in 22. huius.

In perturbata vero hoc pacto. sint rursus tres magnitudines ABC, itemq; aliæ tres DEF, & sit vt A ad B ita E ad F, vt autē B ad C, ita D ad E. erit ex æquali vt A ad C, ita D ad F. hocautē in 23. huius ostendetur. Idem sequitur etiam si plures sint, quàm tres magnitudines. sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliæ ipsis numero æquales EFGH, & in ordinata quidem analogia vt A ad B, ita sit E ad F, vt autem B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. erit ex æquali, vt A ad D, ita E ad H. In perturbata vero, sit vt A ad B, ita F ad G, vtq; B ad C, ita sit G ad H, & vt C ad D, ita E ad F. erit ex æquali vt A ad D, ita E ad H. Et similiter continget in alijs magnitudinibus quotquot illæ fuerint.



XIX.

Ordinata analogia est quando fuerit vt antecedēs ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem cōsequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero analogia est, quando tribus existentibus magnitudi-

gnitudinibus,& alij ipſis numero æqualibus, fuerit vt in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem. vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam: ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

I. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla ſuperius poſita ſunt, ſed præter diffinitiones ſunt etiam communes quædam notiones, quæ in hoc libro ſumuntur nempe hæc.

I.

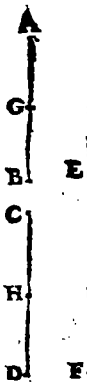
Eiuſdem ſiue æqualium æque multiplices inter ſe æquales ſunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æque multiplices, & ipſæ inter ſe ſunt æquales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulæ ſingularum æque multiplices, quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erunt, & omnes omnium.



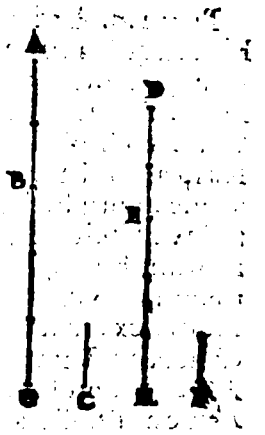
Sint quotcumq; magnitudines AB CD quotcumq; magnitudinum EF æqualium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices. Dico quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices eſſe, & AB CD ipſarum EF. Quoniam .n. AB aeque multiplex eſt ipſius E, & CD ipſius F, quot magnitudines ſunt in AB aequales ipſi E, tot erunt, & in CD aequales ipſi F. diuidatur AB quidē in partes ipſi E aequales, quae ſint AG GB. CD vero diuidatur in partes aequales ipſi F videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipſarum AG GB. & quoniam AG eſt aequalis E, & CH aequalis F; erunt, & AG CH aequales ipſi EF. eadem ratione quoniā GB eſt aequalis E, & HD ipſi F, erunt, & GB HD æquales ipſis EF. quot igitur ſunt in AB aequales ipſi E, tot ſunt, & in AB CD aequales ipſis EF. ergo quotuplex eſt AB ipſius E, totuplices erunt, & AB CD ipſarum EF. ſi igitur fuerint quotcumq; magnitudines quotcumq; magnitudinum aequalium numero ſingulae ſingularum æque mutiplices, quotuplex eſt vna magnitudo vnius, totuplices erunt, & omnes omnium. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autē, & quinta ſecūdæ æque multiplex, ac ſexta quartæ: erit etiam cōpoſita prima, & quīta ſecūdę æque multiplex, ac tertia, & ſexta quartæ.

Prima

Prima .n. AB ſecundae C aeq; multiplex ſit, ac tertia DE quartae F. ſit autem, & quinta BG ſecundae C aeque multiplex, ac ſexta EH quartae F. Dico & com poſitam primam, & quintam AG ſecundae C aeque multiplicē eſſe, ac tertiam, & ſextā DH quartae F. Quoniam .n. AB aeq; multiplex eſt C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB aequales C, tot erunt, & in DE aequales F. eadem ratione, & quot ſunt in BG aequales C, tot, & in EH erunt aequales F. quot igitur ſunt in tota AG aequales C, tot erunt, & in tota DH aequales F. ergo quotuplex eſt AG ipſius C, totuplex eſt, & DH ipſius F. & compoſita igitur prima, & quinta AG ſecundae C aeque multiplex erit, ac tertia, & ſexta DH quartae F: quare ſi prima ſecundae: aeque multiplex fuerit, ac tertia quartae: fuerit autem, & quinta ſecundae aeque multiplex, ac ſexta quartae: erit compoſita quoq; prima, & quinta aeque multiplex ſecundae, ac tertia, & ſexta quarta. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA III. PROPO. III.

Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: erit, & ex æquali ſumptarum vtraq; vtriuſq; æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Prima .n. A ſecundae B aeque multiplex ſit, ac tertia C quartae D: & ſumantur ipſarum AC aeque multiplices EF GH. Dico EF aeque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D. Quoniā .n. EF aeque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF æquales A, tot erūt & in GH aequales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipſi A aequales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines aequales C, videlicet GL LH. erit igitur ipſarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipſarum GL LH. & quoniā aeque multiplex eſt A ipſius B, ac C ipſius D, ae qualis autem EK ipſi A, & GL ipſi C; erit Ek aeq; multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadē ratione æque multiplex erit KF ipſius B, & LH ipſius D. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt, ac tertia GL quartæ D; eſt autem, & quinta KF ſecūdæ B æque multiplex ac ſexta LH quartę D: erit, & compoſita prima, & quinta EF ſecundę B æque multiplex, ac tertia, & ſexta GH quartae D. Si igitur prima ſecundae aeq; fuerit multiplex ac tertia quartae, ſumantur autem primae, & tertiae aeque multiplices: erit, & ex aequali ſumptarum vtraque vtriuſq; aeque multiplex, altera quidem ſecundae, altera vero quartae. quod oſtendiſſe oportuit.

Ex antecedente.



THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

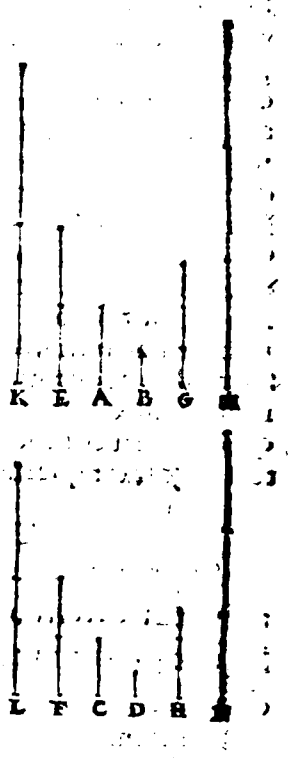
Si prima ad ſecundam eandem habent proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primæ, & tertiæ ad æq; multiplices ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eādem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ.

Prima .n. A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quàm tertia C ad quartam D: & ſumantur ipſarum quidem AC aliae vtcunque aeque multiplices E F; ipſarum uero BD aliae utcunque aeque multiplices GH: dico E ad G ita eſſe, ut F ad H. ſumantur .n. rurſus ipſarum EF aeque multiplices KL, & ipſarum GH aeque multiplices MN. Quoniam igitur E aeque multiplex eſt ipſius A, atq; F ipſius C; ſumuntur autem ipſarum EF aeque multiplices KL: erit K aeque multiplex ipſius A, atque L ipſius C. eadē ratione M aeque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D. ſumptae autem ſunt ipſarum AC aeque multiplices KL; & ipſarum BD aliae utcūq; aeque multiplices MN: ſi K ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N; & ſi aequalis aequalis; & ſi minor minor. Sunteque KL quidem ipſarum EF aeque multiplices; MN uero ipſarum GH aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur E ad G, ita erit F ad H. quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, & aeque multiplices primae ac tertiae ad aeq; multiplices ſecundae ac quartae juxta quāuis multiplicationem eādem proportionem habebūt inter ſe cōparatae. quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedente.

Per conuerſam quintæ diffinitionis.

5 diffinit.



Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, & L ipſam N ſuperare; & ſi aequalis, aequalem eſſe, & ſi minor, minorem: conſtat etiam ſi M ſuperat K, & N ſuperare ipſam L; & ſi aequalis, aequalem eſſe; & ſi minor, minorem; ac proterea ut G ad E, ita eſſe H ad F.

5. diffinit.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi quattuor magnitudines ſint proportionales, & contra proportionales eſſe.

SCHOLIVM.

Hoc theorema pertinet ad demonſtrationem diffinitionis magnitudinum, quae ſunt in eadem proportione, vt eſt quando aeque multiplices primae, & tertiae, videlicet antecedentium, aeque multiplices ſecundae, & quartae, hoc eſt conſequentium, vel vnà ſuperant, vel vnà aequales ſunt, vel vnà deficiunt; hic enim demonſtrat, & ipſas eandem inter ſe proportionem habere. reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportione eſſe, quorum multiplicia ſunt in eadem proportione, quando nos idipſum quaereremus, quaenam eſſent in eadem proportione. Cum igitur dixiſſet in principio eas ſimul ſuperare, vel ſimul aequales eſſe, vel ſimul deficere; hic oſtendit & in eadem eſſe proportione, ſi inter ſe comparentur, vt appareat diffinitio earū, quae ſunt in eadem proportione, quando ſcilicet, aeque multiplices primae, & tertiae ad ſecundas, & quartas aeque multiplices eandem proportionem habeant. oſtendit autē ipſas in eadē proportione per hoc, & per conuerſionem.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, & reliqua reliq. æque multiplex erit, atq; tota totius.



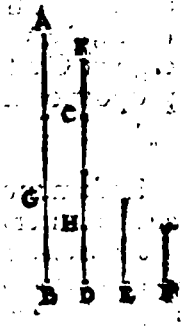
Magnitudo .n. AB magnitudinis CD æque multiplex sit, atq; ablata AE ablatæ CF. dico & reliquam EB reliq; FD æq; multiplicem esse, atq; totã AB totius CD; quotuplex.n.est AE ipsius CF, totuplex fiat & EB ipsius CG. & quoniã AE æq; multiplex est CF, atq; EB ipsius CG; erit AE æq; multiplex CF, & AB ipsius GF ponitur autem æq; multiplex AE ipsius CF, & AB ipsius CD. æq; multiplex igitur est AB vtriusq. GF CD; ac propterea CF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DE. Itaq; quoniam AE æque multiplex est CF, & EB ipsius CG, estq; CG æqualis DF; erit AE æq; multiplex CF, & EB ipsius FD. æq; multiplex autem ponitur AE ipsius CF, & AB ipsius CD. ergo EB est æq; multiplex FD, & AB ipsius CD, & reliqua igitur EB reliq; FD æque multiplex est, atq; tota AB totius CD. quare si magnitudo magnitudinis æq; multiplex sit, atq; ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æq; erit multiplex, atq; tota totius. Quod oportebat demonstrare.

1. huius.

2. com. not.

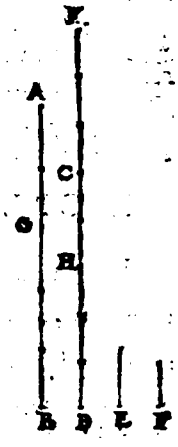
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarũ magnitudinũ æque multiplices sint, & ablatæ quædã sint earumdẽ æq; multiplices, erunt & reliquæ vel eiusdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.



Duae.n. magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF æque multiplices sint, & ablatae AG CH earumdem sint æq; multiplices. dico & reliquas GB HD vel ipsis EF æquales esse, vel ipsarum æq; multiplices. sit .n. primũ GB æqualis E. dico & HD ipsi F esse aequalem. ponatur ipsi F aequalis CK. & quoniã AG aeq; multiplex est E & CH ipsius F; estq; CB quidem aequalis E; CK vero aequalis F: erit AB aeque multiplex E, & KH ipsius F. aeq; autem multiplex ponitur AB ipsius E, & CD ipsius F. ergo KH aeq; multiplex est F, & CD ipsius F. quoniam igitur vtraq; ipsarum KH CD est aeq; multiplex F, erit KH aequalis CD. communis auferatur CH. ergo reliqua KC reliq; HD est aequalis. Sed KC est aequalis F. & HD igitur ipsi F est aequalis; ideoq; GB ipsi E, & HD ipsi F aequalis erit. Similiter demostrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E, & HD ipsius F aeq; multiplicem esse. Si igitur duae magnitudines duarum magnitudinum aeq; multiplices sint, & ablatae quaedam sint earumdem aeq; multiplices, erunt & reliq;, vel eisdem aequales, vel ipsarum aeq; multiplices. Quod demonstrare oportebat.

1. huius.



2. com. not.

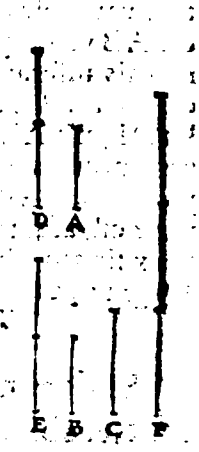
SCHOLIVM.

Non propositum est ostendere si à multiplici multiplex auferatur reli-

quum vel æquale esse, vel multiplex; hoc enim manifestum est, sed duabus magnitudinibus ad duas magnitudines ita se habentibus, vt dictum est. si reliqua prioris sit multiplex, & reliquam alterius multiplicem esse, & si æqualis sit, esse æqualem, veluti si quadrupla existente tripla auferatur, reliqua æqualis erit, & in altera eodem modo.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Æquales ad eãdẽ, eãdẽ habẽt proportionẽ, & eadẽ ad æquales.



Sint æquales magnitudines A B, alia autem quæuis magnitudo C. Dico vtramq; ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad vtramq; A B similiter eandem habere proportionem. sumantur .n. ipsarũ A B æque multiplices DE, & ipsius C alia vtcumq; multiplex F. Quoniam igitur æq; multiplex est D ipsius A, & E ipsius B, estq; A ipsi B æqualis; erit, & D æqualis E; alia autem vtcũq; est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt DE quidem ipsarum A B æqui multiplices: F vero alia vtcumq; multiplex ipsius C. erit igitur vt A ad C, ita B ad C. Dico insuper C ad vtramq; ipsarũ A B eandem habere proportionem. ijsdem .n. constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, aliam vero quandã F. si igitur F superat D ipsam quoq; E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atq; est F quidem ipsius C multiplex; DE vero aliæ vtcumq; æq; multiplices ipsarum AB. ergo vt C ad A, ita erit C ad B. æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

1. com. not.

5. diffi.

5. diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demõstrabimus, & æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere proportionem.

Sint .n. magnitudines æquales AB; sintque aliæ magnitudines inter se æquales CD. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. sumantur ipsarum AB æque multiplices EF: & ipsarum CD aliæ vtcumque æque multiplices GH. Itaque quoniam æque multiplex est E ipsius A, & F ipsius B, est autem A æqualis B: erit, & E ipsi F æqualis. rursus quoniam æque multiplex est G ipsius C, & H ipsius D, estque C ipsi D æqualis: & G ipsi H æqualis erit. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. ergo A ad C eandem proportionem habet, quam B ad D. quod oportebat demonstrare.

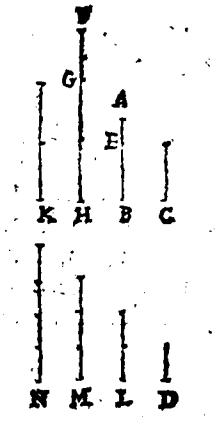


THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandẽ maiorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quam ad maiorẽ.

Sint inæquales magnitudines ABC: & sit AB maior; alia vero vtcũq; D. dico AB ad D maiorem habere ꝓportionem, q̃ C ad D: & D ad C maiorem habere, quam ad AB. quoniam .n. AB maior est, quam C, ponatur ipsi C æqualis BE. Itaque minor ipsarum AE multiplicata maiorẽ aliquando erit, q̃ D. Sit primum

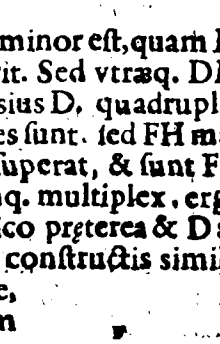
mũ AE minor, quã EB. & multiplicetur AE, quo ad fiat maior, quàm D, ſitq. ipſius multiplex FG, quæ ipſa D ſit maior: quotuplex aũt eſt FG ipſius AE, totuplex fiat & GH ipſius EB, & K ipſius C. ſumaturq. ipſius D dupla quidẽ L, tripla vero M, & deinceps vna plus, quo ad ea, quæ ſumitur, multiplex fiat ipſius D, & primo maior, quã K. ſumatur, ſitq. N ipſius D quadrupla, & primo maior quã K. quoniã igitur K primo minor eſt, quã N, non erit K minor, quã M. & cũ æque multiplex ſit FG ipſius AE, & GH ipſius EB, erit & FG æq. multiplex AE, & FH ipſius AB. æq. aũt multiplex eſt FG ipſi' AE, & K ipſius C. ergo FH æq. multiplex eſt AB, & K ipſius C, aequea FH K ipſarũ AB C æq. multiplices erũt. rurſus qm̃ GH æq. multiplex eſt EB, & K ipſius C, eſtq. EB æqualis C, erit & GH ipſi K æqualis. Sed K non eſt minor, quã M. non igitur GH minor eſt, quam M maior autem FG quã D. ergo tota FH vtriſq. DM maior erit. Sed vtræq. DM ſunt æquales N, eſt enim M tripla ipſius D, & vtreq. MD ipſius D, quadruplę, eſt autem & N quadrupla D. vtreq. igitur MD ipſi N æquales ſunt. ſed FH maior eſt quã MD. Quare FH ſuperat N, K vero ipſam N non ſuperat, & ſunt FH K æq. multiplices ipſarum AB C, & N ipſius D alia vtcumq. multiplex, ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quam C ad D. Dico prętera & D ad C maiorem habere proportionem, quã D ad AB. ijſdem. n. conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero FH non ſuperare, atq. eſt N multiplex ipſius D, & FH K aliae vtcunq; ipſarum AB C aeq. multiplices. ergo D ad C maiorẽ proportionem habet, quàm D ad AB. Sed ſit AE maior, quã EB. erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, & ſit GH multiplex quidem ipſius EB, maior vero, quã D. & quotuplex eſt GH ipſius EB, totuplex fiat & FG ipſius AE, & K ipſius C. ſimili rõne oſtendemus FH K ipſarũ AB C aeq; multiplices eſſe. ſumatur deinde N. multiplex D, primo autem maior, quam FG. ergo rurſus FG nõ eſt minor, quã M; maior autem FG, quã D. tota igitur FH ſuperat DM, hoc eſt N; & K ipſam N. non ſuperat: quoniã EG maior exiſtẽs, quã GH, hoc eſt quã K, non ſuperat N. & ſimiliter vt in ijs, quae ſuperius dicta ſunt, demonſtrationem abſoluemus. Inaequalium igitur magnitudinũ maior ad eandem maiorem habet proportionem, quã minor; & eadem ad minorem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem. Quod oſtendere oportebat.



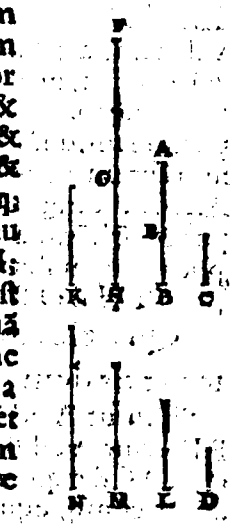
1.huius.

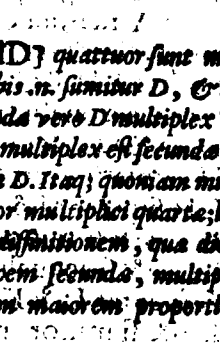
1.huius.

11 com.not.



7.diff.





*

SCHOLIVM.

Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quã C ad D] *quattuor ſunt magnitudines, prima quidem AB, ſecunda D, tertia autem C, & quarta D. bis. n. ſumitur D, & vt ſecunda, & vt quarta. atque eſt primæ quidem AB multiplex FH: ſecundæ vero D multiplex N, & tertiæ C multiplex K. eſt igitur FH maior, quàm N; quæ quidem N, multiplex eſt ſecundæ D: K vero multiplex tertiæ C, minor eſt, quàm N, quæ eſt multiplex quartæ D. Itaq; quoniam multiplex primæ maior eſt multiplici ſecundæ, multiplex autem tertiæ non maior multiplici quartæ; habebit AB ad D maiorem proportionem, quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quæ dicit, quando æque multiplicium multiplex quidem primæ ſuperauerit multiplicem ſecundæ, multiplex autem tertię non ſuperauerit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam maiorem proportionẽ habere dicetur, quam tertia ad quartam.*

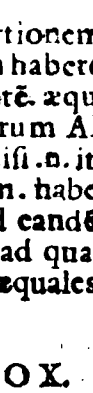
THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandẽ, eandẽ proportionẽ hẽt, inter ſe æquales ſunt; & ad quas eadẽ, eãdẽ hẽt proportionẽ, ipſæ inter ſe ſunt æquales.

Habeat.n. vtraq; ipſarum AB ad C eandem proportionem. Dico A ipſi B ęqualē eſſe. nam ſi non eſſet æqualis, non haberet vtraq; ipſarum AB ad eandem proportionem. habet autē. æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad vtramque ipſarum AB eandem proportionem. Dico A æqualem eſſe ipſi B. niſi .n. ita ſit, non habebit C ad vtramq; AB eandem proportionem. habet autem. ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis. quæ igitur ad eandē, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: & ad quas eadem eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales. quod demonſtrare oportebat.

ax antecedente

ax antecedente.



THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Ad eādē ꝓportionē habētiū q̄ maiorē ꝓportionē hēt, illa maior eſt; ad quā vero eadē maiorē habet proportionē, illa minor eſt.

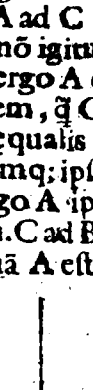
Habeat.n. A ad C maiorem proportionem, quam B ad C. Dico A, quam B maiorem eſſe. ſi .n. non eſt maior, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B, vtraq; .n. ipſarum AB ad C eandem haberet proportionē. atqui eandē non habet. non igitur A ipſi B eſt ęqualis. Sed neq; minor eſt A quam B; haberet .n. A ad C minorē proportionem, quā B. atqui non habet minorem, nō igitur A minor eſt, quam B. oſtenſum autem eſt neq; eſſe æqualē. ergo A quā B maior erit. Habeat rurſus C ad B maiorem proportionem, q̄ C ad A. Dico B minorē eſſe, quam A. ſi .n. non eſt minor, vel ęqualis eſt, vel maior. æqualis vtiq; non eſt B ipſi A; etenim C ad utramq; ipſarū AB eandem proportionem haberet. non habet autem. ergo A ipſi B non eſt æqualis. Sed neq; maior eſt B, quam A; haberet .n. C ad B minorem ꝓportionem, quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quā A eſt maior. Oſtenſum autem eſt neq; æqualē eſſe. ergo B minor erit, quā A. Ad eandē igitur ꝓportionē habētiū quę maiorē proportionē hēt, illa maior eſt. & ad q̄ eadem maiorē habet ꝓportionem, illa minor eſt. ꝙ oportebat demonſtrare.

7.huius.

8.huius.

7.huius.

8.huius.



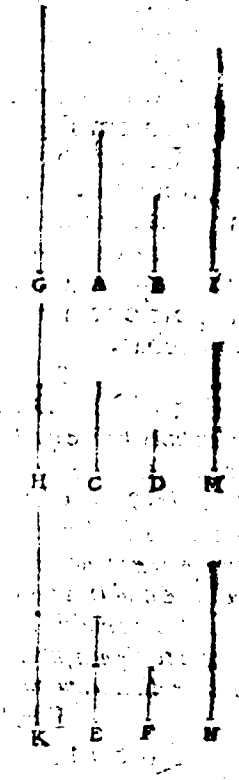
THEOREMA XI. PROPO. XI

Quæ eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt.

Sit .n. ut A ad B, ita C ad D: ut autem C ad D, ita E ad F. Dico ut A ad B, ita eſſe E ad F. ſumantur .n. ipſarū quidem ACE æque multiplices GHK; ipſarum uero BDF aliæ utcūmq; ęque multiplices LMN. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarū AC æque multiplices GH, & ipſarum BD aliæ utcumq; ęque multiplices LM, ſi G ſuperat L, & H ipſam M ſuperabit, & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. rurſus q̄m eſt ut C ad D, ita E ad F, & ſumptæ ſunt ipſarū CE æque multiplices HK, ipſarū uero DF aliæ utcūq; æque multiplices MN, ſi H ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed ſi H ſuperat M, & G ſuperabit L, & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor minor, quare ſi G ſuperat L, & K ipſā N ſuperabit, & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt GK q̄dē ipſarū AE aeq. multiplices; LN uero ipſarū BF aliæ utcūq; aeq. multiplices. ergo ut A ad B, ita erit E ad F. quae igitur eidem eaedem ſūt ꝓportiones, & inter ſe eaedem ſūt. ꝙ oſtendiſſe oportuit.

ax conuer. 5.diff.

5.diff.

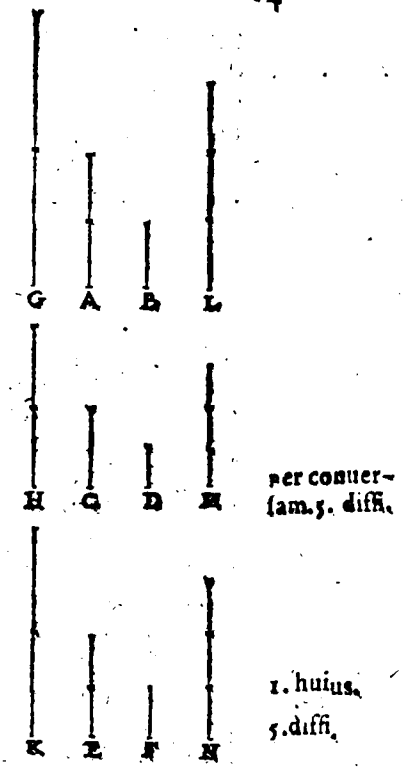


THEO-

THEOREMA XII. PROPO. XII.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentium ad vnam cõsequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunq; magnitudines proportionales AB CD EF, & vt A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. Dico vt A ad B. ita esse ACE ad BDF. sumantur.n. ipsarum ACE æque multiplices GHK, & ipsarũ BDF aliæ vtcumq; æque multiplices LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita est C ad D, & E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem ACE æq; multiplices GHK, ipsarũ vero BDF aliæ utcumq; æque multiplices LMN; si G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqualis, æquales, & si minor, minor. quare & si G superat L, superabunt & GHK ipsas L M N, & si æqualis, æquales; & si minor, minores. sunt q; G, & GHK ipsarũ A, & ACE æq; multiplices: quoniã si fuerit quot cũq; magnitudines quotcũq; magnitudinũ æqualiũ numero, singulæ singularum æq; multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erũt & oẽs omniũ. eadẽ rõne & L & L M N ipsarum B, & BDF sunt æq. multiplices. est igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare si quotcumq. magnitudines proportionales fuerint, vt una antecedẽtiũ ad unã cõsequentiũ, ita erunt antecedẽtia oẽs ad omnes consequentes. quod demonstrare oportebat.



per conuersam. 5. diffi.

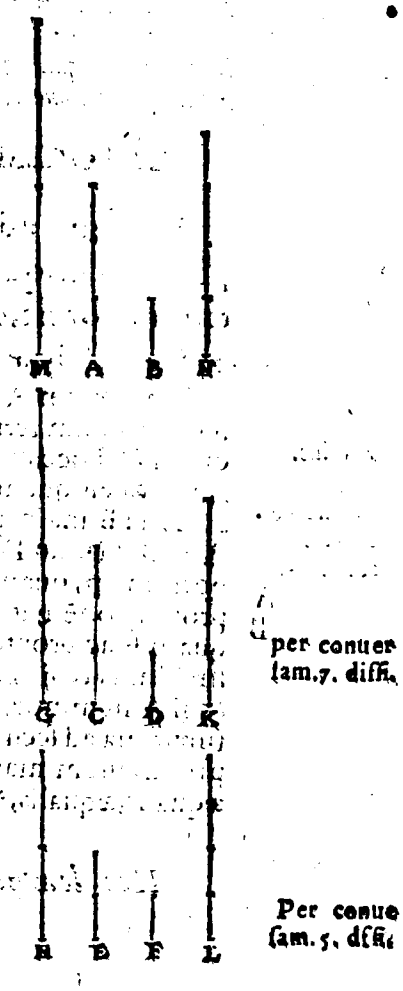
1. huius.

5. diffi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quam quinta ad sextã; & prima ad secũdã maiorẽ habebit proportionẽ, quam quinta ad sextã.

Prima.n. A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartã D, tertia autem C ad quartã D maiorem habeat proportionem, quã quinta E ad sextã F. Dico & primam A ad secundam B maiorem pportionẽ habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam.n. C ad D maiorem proportionem habet, quã E ad F, sunt quædã ipsarum CE æque multiplices, & ipsarum DF aliæ vtcũque æque multiplices: & multiplex quidẽ C superat multiplicẽ D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumãtur & sint ipsarum CE æque multiplices GH, & ipsarũ DF aliæ vtcumque æque multiplices K L, ita vt G quidẽ superet K: H vero ipsam L nõ superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit, & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit, & N ipsius B. & quoniã est vt A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum AC æque multiplices MG, & ipsarũ BD aliæ vtcumque æq; multiplices NK; si M superat N, & G ipsã K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero nõ superat



per conuersam. 7. diffi.

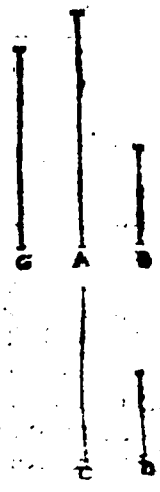
Per conuersam. 5. diffi.

ſuperat L. ſuntq. MH ipſarum AF æque multiplices, & NL ipſarum BF aliæ vt
7. diff. cumque æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. ſi igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionem habeat, quã quinta ad ſextam, & prima ad ſecundam maiorem habebit proportionem, quã quinta ad ſextam. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonſtrabitur ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quàm quinta ad ſextam: & primam ad ſecundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad ſextam.

Quod ſi prima ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quã tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorẽ habeat, quam quinta ſextam, & prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad ſextam.

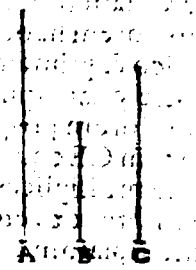


Habeat A ad B maiorem proportionem, quam C ad D, & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem, quã E ad F. fiat n. vt C ad D, ita G ad B. erit G minor, quam A. & quoniam G
8. huius. *ad B eandem proportionem habet, quam C ad D, & C ad D maiorẽ habet proportionem, quam E ad F: habebit, & G ad B maiorem proportionem quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quam E ad F. & ſimiliter demonſtrabitur ſi prima ad ſecundam minorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam habeat minorem, quam quinta ad ſextam: & primam ad ſecundam minorẽ habere proportionem, quam quintam ad ſextam.*

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior ſit, quam tertia, & ſecunda quam quarta maior erit, & ſi æqualis, æqualis, & minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: maior autem ſit A
8. huius. quàm C. Dico & B quàm D maiorem eſſe. Quoniam. n.
ax antecedente. A maior eſt quam C, & alia vtcumq. magnitudo B, habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt
10. huius. A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C ad B. ad quam vero eadem maiorẽ
A proportionẽ habet, illa minor eſt. Quare D. eſt minor,
B quàm B, ac propterea B quã D maior erit. Similiter demõſtrabimus & ſi A æqualis ſit ipſi C, & B ipſi D eſſe æqualẽ, & ſi A ſit minor, quã C. & B quàm D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartã, prima autem maior ſit, quàm tertia, & ſecunda, quàm quarta maior erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor, quod demonſtrare oportebat.



S C H O L I V M.

Hoc lemma eſt ſextidecimi theorematis, quamadmodum exiſtẽ-

mum est lemma vigesimi secundi, & vigesimum primum vigesimi tertii.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabimus, & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem] *Quoniam n. A est æqualis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita C ad D ergo, & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem habet proportionem ipsæ æquales sunt. ergo B ipsi C est æqualis.*

Et si A sit minor, quam C, & B quam D minorem esse,] *nam cum A minor sit, quam C; habebit A ad B minorem proportionem quam C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D quare ex antecedente, & C ad D minorem habebit proportionem, quam C ad B; ac propterea C ad B maiorem habebit, quam C ad D. ergo B quam D minor erit.*

A

11. huius.
9. huius.
8. huius.

B

10. huius.

PROBLEMA XV. PROPO. XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem.

Sit. n. AB æque multiplex C, & DE ipsius F. Dico vt C ad F, ita esse AB ad DE; Quoniam. n. æque multiplex est AB ipsius C, & DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt & in DE æquales F. diuidatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB, & DE diuidatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE, erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales sunt AG GH HB, sunt q; DK KL LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, & HB ad LE. atque erit vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia, est igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F. ergo vt C ad F; ita erit AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter se cõparatæ eandẽ habent proportionem. quod ostẽdendum fuit.



15. huius.

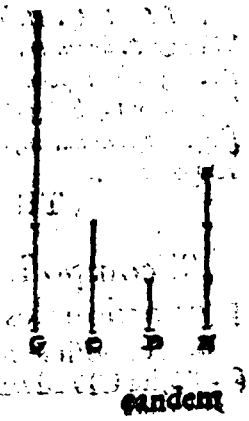
F. C. COMMENTARIVS.

Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, & HB ad LE] *Ex ea, quam nos ad septimam huius, addidimus.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales A B C D, sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico & permutatas proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. sumantur. n. ipsarum quidẽ AB æq; multiplices EF, ipsarũ vero CD aliæ vtcumq; æque multiplices GH, & q̃m æque multiplex est E ipsius A, & F ipsius B, partes autẽ eodem modo multiplicium inter se cõparatæ eædẽ habent proportionẽ: erit vt A ad B, ita E ad F. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita E ad F. rursus q̃m GH sunt ipsarũ; C D æq; multiplices, partes autẽ eodẽ modo multiplicium



15. huius.

22 antecedente.
21 huius.

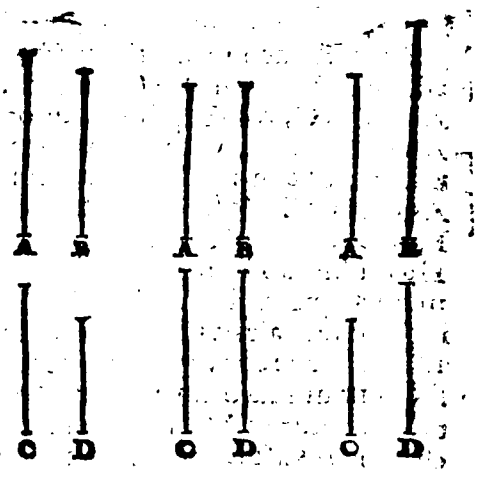
eandem

eandem proportionem habent inter se comparata, erit vt C ad D, ita G ad H.
14.huius. sed vt C ad D, ita E ad F. ergo & vt E ad F. ita G ad H. Quod si quattuor magnitudines proportionales sint, prima autem maior sit, quàm tertia; & secunda quam quarta maior erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit, & si æqualis, & si minor, minor; suntq; EF
5.diff. ipsarũ AB æque multiplices, & CH ipsarum CD aliae vtcumq; aeque multiplices ergo vt A ad C, ita erit B ad D. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatae proportionales erunt. Quod ostẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quæ demonstrata sunt, illud quoque demonstrabitur,

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; sitq; prima maior, quàm secunda; & tertia, quam quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.



Prima enim A ad secundam B eandem habeat proportionem, quàm tertia C ad quartam D: & sit A maior, quàm B. Dico & C quàm D maiorẽ esse. Quoniam enim A ad B eandem proportionẽ habet, quàm C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandem proportionem, quàm B
8.huius. *ad D. Rursus quoniam A maior est quàm B, alia vero vtcumque est C; habebit A ad C maiorem proportionem, quàm B ad C: Sed vt A ad C, ita est B ad D, quod demonstratum est: ergo B ad D maiorem proportionem habet, quàm ad C: Ad*
10.huius. *quam vero eadem maiorẽ habet proportionem, illa minor est, quare D minor est, quàm C; ideoq; C maior, quàm D. Sit deinde A æqualis ipsi B: dico & C ipsi D æqualem esse. nam cum A & B*
7.huius. *sint æquales, habebit A ad C proportionem eandem, quàm B ad C; vt autem A ad C ita B ad D, ergo B ad D eandem proportionem habet, quàm*
9.huius. *ad C. Ad quas vero eadem proportionem eandem habet, illæ æquales sunt. ergo C ipsi D est æqualis. Sit postremo A minor, quàm B. Dico & C, q̃ D minorẽ esse. quoniam enim A minor est quàm*
8.huius. *B, habebit A ad C minorem proportionem, quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita B ad D. habebit igitur B ad D minorem proportionem, quàm ad C. ideoq; B ad D maiorem proportionem habebit,*
10.huius. *quàm ad D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionẽ, illa minor est. ergo C quàm D minor erit. Si igitur prima ad secundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: sitq; prima maior, quàm secunda, & tertia, quã quarta maior erit; & si æqualis, æqualis, & si minor minor.*

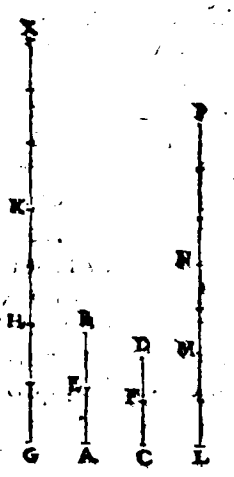
ALITER. Habeat A ad B eandem proportionem, quàm C ad D: sitq; A maior, quàm B. Dico & C, quam D maiorem esse. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quàm C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quàm B ad D: sed A maior est quàm B. ergo ex 14. huius & C, quàm D maior erit. Eodem modo demõstrabimus si A sit æqualis B, & C ipsi D esse æqualem, & si A sit minor, quàm B, & C quàm D minorem esse. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt.

Sint cõpositae magnitudines proportionales AB BE CD DF. sitq; vt AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiã diuisas proportionales esse, videlicet vt AE ad EB, ita

ita esse CF ad FD. sumantur.n. ipsarum quidem AE EB CF FD aeque multiplices GH HK LM MN. ipsarũ vero EB FD aliae vtcũq; aeque multiplices KX NP. & quoniam aeque multiplex est GH ipsius AE, & HK ipsius EB; erit GH ipsius AE aeque multiplex, & GK ipsius AB. aeque autẽ multiplex est GH ipsius AE, & LM ipsius CF. ergo Gk aeque multiplex est AB, & LM ipsius CF. rursus quoniã aeque multiplex est LM ipsius CF, & MN ipsius FD; erit LM aeque multiplex CF, & LN ipsius CD. Sed aeque multiplex erat LM ipsius CF. & GK ipsius AB. aeq; igitur multiplex est GK ipsius AB, & LN ipsius CD. quare Gk LN ipsarũ AB CD aeq; multiplices erunt. rursus quoniam aeq; multiplex est HK ipsius EB, & MN ipsius FD, est autem & KX ipsius EB aeq; multipex, & NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB aq; multiplex est, & MP ipsius FD. quod cum sit vt AB ad BE, ita CD ad DF, & sumptae sint ipsarum quidem AB CD aeq; multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliae vtcunq; aeque multiplices HX MP; si GK superat HX, & LN superabit MP, & si aequalis, aequalis, & si minor minor superet igitur GK ipsam HX, communique ablata HK, & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP. itaque superet LN, ipsam MP, communiq; MN ablata, & LM superabit NP quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus, & si GH sit aequalis KX, & LM ipsi NP esse aequalem, & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF aeq; multiplices, & ipsarum EB FD aliae vtcunq; aeq; multiplices KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compositae magnitudines sint proportionales, & diuisae proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.



1. huius.
11. huius.
1. huius.
11. huius.
2. huius.
ex conuers. 2 5. diffi.
5. diffi.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint diuisae magnitudines proportionales AE EB CF FD. & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet vt AB ad BE, ita esse CD ad DF. si enim non est vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm DF, vel ad maiorem. sit primum ad minorem, nempe ad DG. & quoniam est vt AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales. ergo & diuisae proportionales erunt. est igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem. & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior est, quam tertia CF. ergo & secunda DG, quàm quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est vt AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neq; esse ad maiorem, quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est quare si diuisae magnitudines sint proportionales, & compositae proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



ex antecedente.
11. huius.
14. huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totã CD, ita ablata AE ad ablatã CF. dico & reliquam EB

EB ad reliquam FD ita esse, vt tota AB ad totam CD. quoniam
16.huius. enim est vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF, & permutando
erit ut BA ad E, ita DC ad CF. quoniam compositæ magnitudi-
17.huius. nes sunt proportionales, & diuisæ proportionales erunt, vt igitur
BE ad EA, ita DF ad FC, rursusq. permutando vt BE ad DF, ita
11.huius. EA ad FC. Sed vt AE ad CF, ita posita est AB ad CD. & reliqua
igitur EB erit ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD. quare si
fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquã
erit vt tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



Et quoniam ostensum est vt AB ad CD, ita esse EB ad FD, erit permutando vt AB ad BE, ita CD ad DF. ergo compositæ magnitudines proportionales sunt. ostensum autem est vt BA ad AE, ita DC ad CF, quod est per conuersionem rationis.

COROLLARIVM.

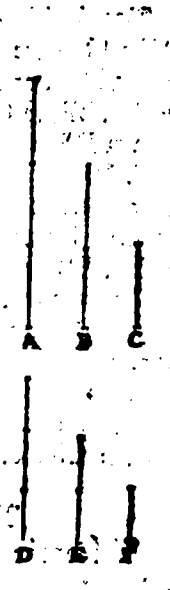
Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales & per conuersionẽ rationis proportionales esse.

Factæ autem sunt proportiones, & in æque multiplicibus, & in analogijs. nã si prima secundę æque multiplex sit, atque tertia quartæ, erit & vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam. sed non item ex contrario conuertitur. Si enim sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam, non omnino erit prima quidẽ secundę æque multiplex, tertia vero, quartae, velut in sesquialteris, vel in sesquitertijs proportionibus, vel alijs eiusmodi. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia, & quarta quàm sexta maior erit; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

Sint tres magnitudines ABC, & aliae ipsis numero æquales DEF binae sumptae, & in eadem proportione, sitq; vt AB, ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F, ex aequali autem maior sit A, q̃ C. Dico & D quam F maiorem esse, & si aequalis, aequalem, &
8.huius. si minor, minorem. Quoniam.n. A maior est, quàm C, alia uero utcumq. B, & maior ad eandem maiorem habet proportio-
A nem, quàm minor, habebit A ad B maiorem proportionem, q̃ C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E, & conuertendo ut C ad B. ita
10.huius. F ad E. ergo & D ad E maiorem habet proportionem, quàm F
B ad E. Ad eandem uero proportionem habentium quae maiorem habet proportionem, illa maior est. maior igitur est D quã F. similiter ostendemus & si A sit aequalis C, & D ipsi F aequalem esse, & si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur, & in eadem proportione, ex aequali autem prima maior sit, quam tertia, & quarta quam sexta maior erit, & si aequalis, aequalis, & si minor, minor. Quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

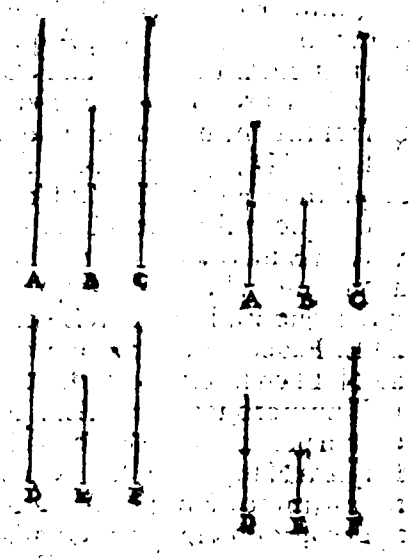
A Habebit A ad B maiorem proportionẽ, quã C ad B. sed ut A ad B, ita D ad E

Et

Ex his sequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quam C ad B. vt autem C ad B; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quam F ad E.

Similiter ostendemus, & si A sit æqualis C & D ipsi F æqualē esse; & si minor, minorē.

Si enim A sit æqualis C, habebit A ad B proportionem eandem, quam C ad B. Sed vt A ad B ita D ad E, & vt C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quæ vero ad eandē, eandem habent proportionem, inter se æquales sunt. ergo D ipsi F est æqualis. Quod si A ponatur minor quam C habebit A ad B proportionem minorem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quam C ad B. Sed vt C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorem proportionē, quā F ad E; ac propterea D quam F, minor erit.

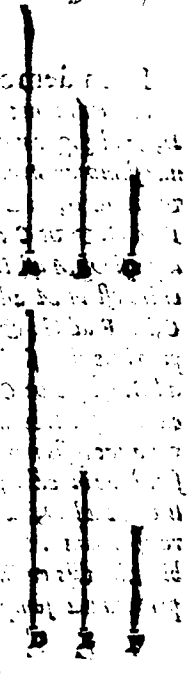


B
7. huius.
11. huius.
9. huius.
8. huius.
13. huius.
10. huius.

THEOREMA XXI.
PROPO. XXI.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadē proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima maior sit quam tertia; & quarta quā sexta maiorem, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales A B C, & aliæ ipsi numero æquales D E F, binę sumptæ, & in eadem proportione. Sit autem perturbata earum analogia, videlicet vt A quidē ad B. ita E ad F; vt vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A maior sit quam C. Dico & D quam F maiorem esse; & si æqualis, æqualem & si minor, minorem. Quoniam n. maior est A, quam C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quam C ad B. Sed vt A ad B, ita E ad F, & cōuertendo vt C ad B, ita E ad D. Quare, & E ad F maiorem habebit proportionem, quam E ad D. Ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. minor igitur est F, quàm D; ac propterea D quam F maior erit. Similiter ostendemus, & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima maior sit quam tertia: & quarta quam sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quod demonstrare oportebat.



8. huius.
10. huius.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcumque magnitudines ABC, & aliæ ipſis numero æquales DEF binæ ſumptæ in eadem proportione, ſitq. vt A quidem ad B, ita D ad E, vt autem B ad C, ita E ad F. Dico & ex æquali in eadem proportione eſſe vt A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipſarum quidem AD æque multiplices GH; ipſarum vero BE aliæ vtcumque æque multiplices KL, & ipſarum CF aliæ vtcumque æque multiplices MN. Quoniam igitur eſt vt A ad B, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum AD æque multiplices GH, & ipſarum BE aliæ vtcũque æque multiplices KL; erit vt G ad K, ita H ad L. Eadem quoq. ratione erit vt K ad M, ita L ad N. Et cũ ſint tres magnitudines GKM, & aliæ ipſis numero æquales HLN, binæ ſumptæ, & in eadem proportione; ex æquali ſi G ſuperat M, & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor ſuntq. GH ipſarum AD æque multiplices, & MN ipſarum CF aliæ vtcumque æq. multiplices. Vt igitur A ad C, ita erit D ad F. Quare ſi ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, in eadẽ proportione, & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.

4. huius.

aq. huius.

5 diff.

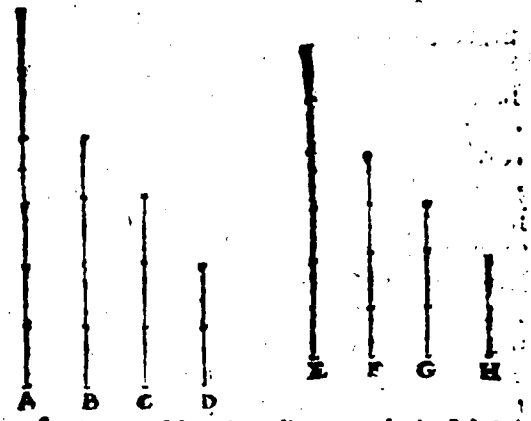


F. C. COMMENTARIVS.

Idem demonſtrabitur etiam ſi plures ſint, quàm tres magnitudines.

Sint enim quattuor magnitudines ABC D, & aliæ ipſis numero æquales EFGH binæ ſumptæ in eadem proportione, ſitque vt A ad B, ita E ad F, vt autẽ B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. Dico ex æquali vt A ad D, ita eſſe E ad H. Quoniã enim eſt vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita F ad G, & ex æquali per ea, quæ proxime oſtenſa ſunt, vt A ad C, ita erit F ad G. eſtque vt C ad D, ita G ad H. Quare cum rurſus tres magnitudines ſint ACD, & aliæ ipſis numero æquales EGH binæ ſumptæ in eadẽ proportione, erit ex æquali vt A ad D, ita E ad H. Quod demonſtrare oportebat. & eodem modo demonſtrabitur in alijs eiuſmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non ſolum in ordinata analogia, ſed & in perturbata. ſemper enim ad tres magnitudines eiuſdem ordinis ſimiliter reducentur.

8

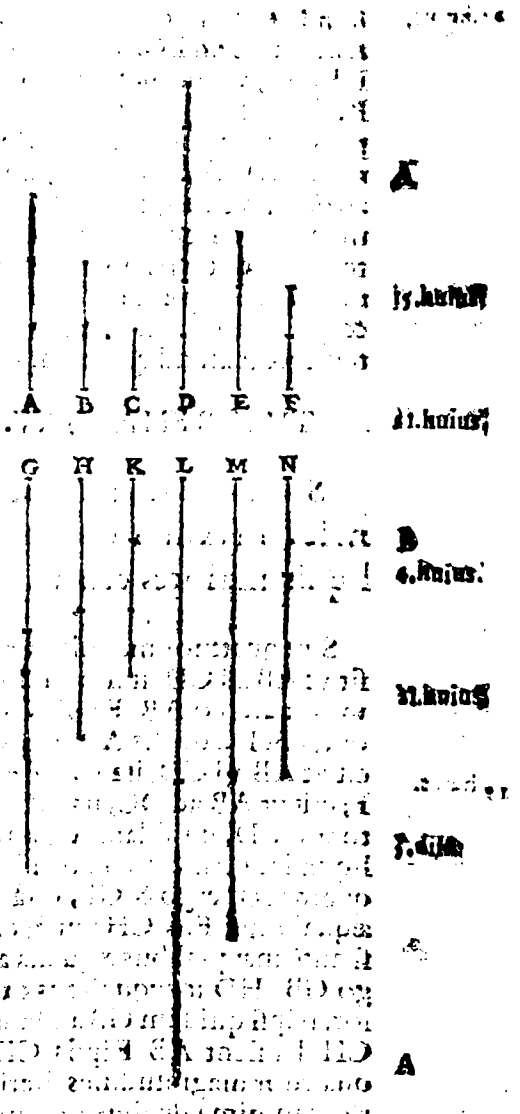


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia, & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint

Sint tres mãgnitũdines ABC, & aliæ ipſis numero æquales binæ ſumptæ in eadem proportione DEF; ſit autem perturbata earum analogia, & ſit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E. Dico vt A ad C, ita eſſe D ad F. ſumantur ipſarum quidem ABD æque multiplices GHL ipſarum vero CEF aliæ vtcunque æque multiplices KMN. & quoniam GH æque multiplices ſunt ipſarum AB, partes autem eodem modo multiplicium eãdem habent proportionẽ; erit vt A ad B, ita G ad H. & ſimili ratione vt E ad F, ita M ad N. atque eſt vt A ad B, ita E ad F. vt igitur G ad H, ita M ad N. rurſus q̃m eſt vt B ad C, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarũ BD æque multiplices HL, ipſarum vero CE aliæ vtcunque æque multiplices KM: erit vt H ad K, ita L ad M. oſtenſum autem eſt, & vt G ad H, ita eſſe M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales ſunt GHK, & aliæ ipſis numero æquales LMN binę ſumptae in eadem proportione, eſtq; ipſarum perturbata analogia; ex aequali ſi G ſuperat K, & L ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, aequalis; & ſi minor, minor. ſunt aũt GK ipſarum AC aeq; multiplices: & LN aeq; multiplices ipſarũ DF. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumãtur in eadem proportione, ſit aũt perturbata earũ analogia; & ex aequali in eadem proportione erunt. quod demonſtrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Dico vt A ad C, ita eſſe D ad F) *in græco codice impreſſo hæc deſiderantur.* λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

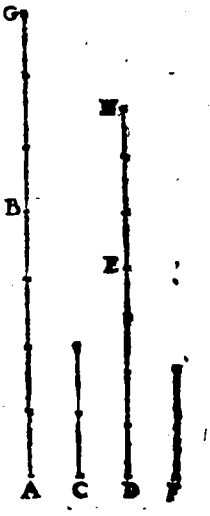
Erit vt H ad L, ita K ad M. oſtenſum autem eſt vt G ad H, ita eſſe M ad N] *hoc loco in græco codice impreſſo, & in cæterorum verſione multa inſeruntur ſuperuacanea, quæ a nobis conſulto omiſſa ſunt.*

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem, & quinta ad ſecũdam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima, & quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & ſexta ad quartam.

Prima n. AB ad ſecundam C eandem habeat proportionem, q̃ tertia DE ad quartam F; habeat autem, & quinta BG ad ſecundam C proportionem eandem quam ſexta EH ad quartam F. dico & cõpoſitam primam, & quintam AG, ad ſecundam C eãdem proportionem habere, q̃ tertiam, & quintam DH ad quartam

22.huius. tam F. quoniam .n. est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita est DE ad F, vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex æquali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quod cum diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. vt igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F. si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionẽ, quàm tertia ad quartã: habeat autem, & quinta ad secundã proportionem eandem, quam sexta ad quartã: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quã tertia & sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

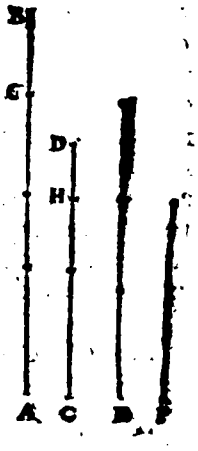


THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis maiores erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD EF; & sit vt AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB & F minima. dico AB F ipsis CD E maiores esse ponatur .n. ipsi quidem E æqualis AG, ipsi vero F æqualis CH. Quoniã igitur est vt AB ad CD, ita E ad F estq; AG æqualis E, & CH æqualis F; erit vt AB ad DC, ita AG ad CH, & quoniam vt tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquã HD erit vt tota AB ad CD totam. maior autem est AB, quàm CD. ergo & GB, quàm HD maior. quòd cum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG F ipsius CH E æquales. si autẽ inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inaequalibus existentibus, quippe cum GB sit maior, si ipsi quidẽm GB addantur AG F, ipsi vero HD addantur CH E, fient AB F ipsis CD F necessario maiores. Si igitur quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarũ, & minima duabus reliquis maiores erunt. Quod demonstrare oportebat.

19.huius.



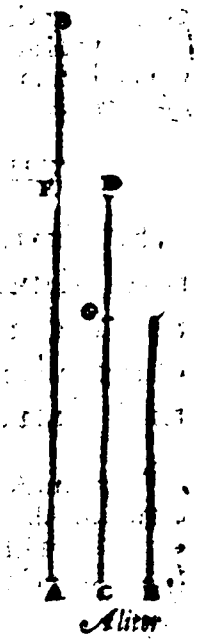
F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quæ proxime demonstrata sunt, possumus etiam illud theorema demonstrare.

Si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima quàm dupla reliquae maiores erunt.

Sint tres magnitudines proportionales AB CD E, quarum maxima AB, sitq; vt AB ad CD, ita CD ad E. dico AB E maiores esse, quàm dupla ipsius CD. ponatur AF æqualis ipsi CD, & CG ipsi E. Quoniam igitur vt AB ad CD, ita CD ad E; erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad totam. & ablata ad ablatam, quare & reliqua FB ad reliquam GD est, vt AB ad CD. sed AB ponitur maior, quã CD. ergo & FB, quàm GD est maior. æqualis autẽ est AF ipsi CD, & CG ipsi E. sunt igitur AF E ipsis CD CG æquales, quod si inæqualibus æqualia addãtur, tota inæqualia erũt. itaque additis AF E ipsi FB, quæ maior est, quàm GD, & additis CD CG ipsis GD, fient AD E maxima scilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipsarũ, & minima, quam dupla reliqua maiores erunt. Quod demonstrare oportebat.

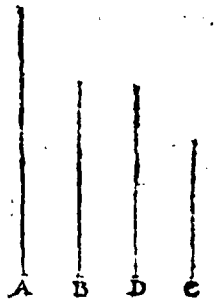
19.huius.



Aliter

Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC. & ipsi B ſit natur aequalis D. Itaq. quoniã eſt vt A ad B ita B ad C, erit & vt A ad B, ita D ad C. ſunt igitur quattuor magnitudines proportionales AB D C. quare ex iam demonſtratis A C maiores erunt, quam B D, hoc eſt quam ipſius A B dupla.

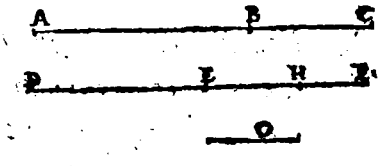
Hac Euclides de proportionibus ſcripta reliquit. Sed quoniam Archimedes, Apolloniuſq; & alij poſteriores nonnullis theorematibus, quæ ad huiuſmodi tractationem pertinent, tamquam demonſtratis vtuntur; optimum fore iudicauimus, ſi ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine, & quibuſdam additis, datractiſue, prout res ipſa exigere videbatur.



THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

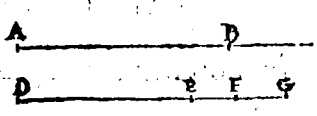
Si prima ad ſecundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, & conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem habebit, quàm quarta ad tertiam.

Habeat AB ad BC maiorẽ proportionem, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. vt enim AB ad BC, ita ſit DE ad aliam aliquã, vt ad G. ergo DE ad G maiorẽ habebit proportionem, quàm DE ad EF, ac propterea G minor erit, quàm EF. ponatur ipſi G æqualis EH. Quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita DE, ad EH; erit conuertendo vt CB ad BA, ita HE ad ED. Sed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED. ergo & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED quod demonſtrare oportebat.



8. huius.
8. huius.

Similiter autem, & ſi AB ad BC minorem proportionẽ habeat, quam DE ad EF; demonſtrabimus conuertendo CB ad BA maiorem habere proportionem, quàm FE ad ED. ſed vt AB ad BC, ita ſit DE ad aliam, vt ad EG quæ maior erit, quàm EF. quare conuertendo vt CB ad BA, ita GE ad ED. at GE ad ED maiorem habet proportionem, quam FE ad ED. ergo CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED.



8. huius.

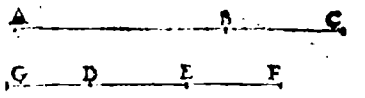
COROLLARIVM.

Ex his conſtat, ſi AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, & FE ad ED maiorem habere proportionem quàm CB ad BA. Et ſi AB ad BC minorem habeat proportionem quàm DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quàm CB ad BA.

THEOREMA XXVII. PROPO. XXVII.

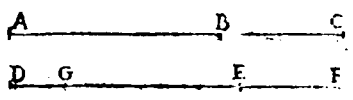
Si prima ad ſecundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm ſecunda ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF, dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quaedam G E sit ad EF. manifestum est eam maiorem esse, quàm DE. quare permutando vt AB ad GE, ita est BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc est quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonstrare.



8.huius.
8.huius.

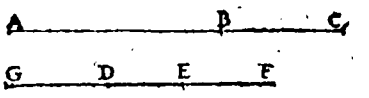
Eadem ratione & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorē proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quædam GE ad EF, quae minor sit, quàm DE. Sed AB ad DE minorem habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF: habebit igitur AB ad DE minorem proporttionem, quàm BC ad EF.



THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

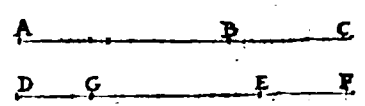
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam: etiam componendo prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad FE, vt. n. AB ad BC, ita sit alia quedam G E ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniam igitur est vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componendo vt AC ad CB, ita GF ad FE. Sed GF ad FE maiorē proportionē habet, quā DF ad FE. ergo & AC ad CB maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demostrare oportebat.



8.huius.
18.huius.
8.huius.
13.huius.

Quòd si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componendo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE. rursus enim quoniam AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, si vt AB ad BC, ita sit alia quaedam ad FE, velut GE, erit ea minor quàm DE, & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE.

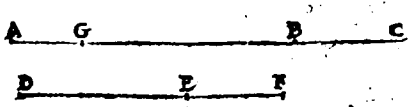


8.huius.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quā tertia, & quarta ad quartam, & dividendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quā DE ad EF. vt. n. DF, ita sit alia quedam GC ad CB. erit vtique GC minor,

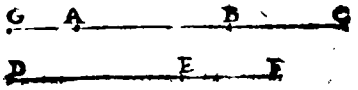


8.huius.

quàm

quàm AC: & diuidendo GB ad BC, vt DE. ad EF at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 17.huius. 13.huius.

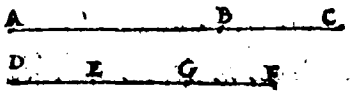
Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & diuidendo AB ad BC minorem proportionē habebit, quàm DE ad EF. si enim rursus sit vt DF ad FE, ita alia quaedam GC ad CB; erit GC quàm AC maior: atque erit diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem prōportionem, quàm GB ad BC. ergo & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. 8.huius. 17.huius.



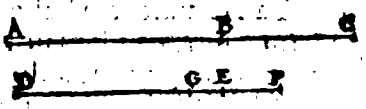
THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si prima; & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quā tertia, & quarta ad quartam; per conuersionem rationis prima, & secunda ad primam minorem hebebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. dico CA ad AB minorem habere propertionem, quàm FD ad DE. sit.n. vt AC ad CB, ita DF ad allam quandam, erit vtiq; ad minorem quàm FE, velut ad FG. quare perconuersionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. sed FD ad DG minorem proportionem habet, quàm FD ad DE, ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE. Corol. 19.huius.



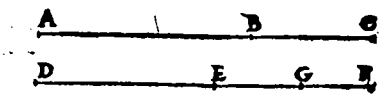
Similiter autem & si AC ad CB minorem proportionem habeat, quàm DF ad FE; habebit per conuersionē rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifesta erunt.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maioren proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima, & secunda ad tertiam, & quartam.

Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF dico & AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit.n. vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. tota igitur AC ad totam DG est; vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet quam ad DF. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF, & manifestum est totam AC ad totā DF minorē proportionē habere, quàm AB ad DE, & si minor sit proportio partis, totius maior erit. 12.huius. 8.huius.

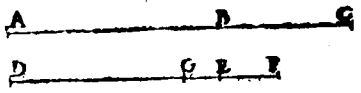


THEOREMA XXXII. PROPO. XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad ablatam

tem, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

Habeat AC ad DF maiorem proportionem, quã AB ad DE. Dico & reliquã BC ad reliquam E F maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad D G ergo & reliqua BC ad reliquam GF est vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quã ad FG. ergo & BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm A C ad DF.



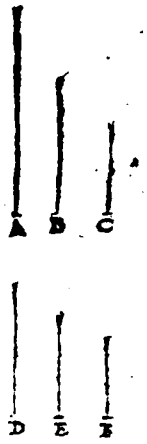
19.huius.

Si vero AC ad DF minorẽ proportionem habeat, quàm AB ad DE, & reliqua BC ad reliquam *EF* minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, qđ eodem, quo supra, modo ostendetur.

THEOREMA XXXIII. PROPO. XXXIII.

Si sint tres magnitudines, & alia ipsis numero æquales, habeat què prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorũ ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad *E*, & B ad C maiorem proportionem habeat, quam *E* ad F. Dico ex æquali A ad C maiorem habere proportionem, quam D ad F.



27.huius. Quoniam enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E, habebit permutando A ad D maiorem proportionẽ, quàm B ad E, & eadem ratione B ad *E* maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad F. & rursus permutando A ad C maiorem habebit, quàm D ad F. Quod oportebat demonstrare.

ex demonstratis ad 13.huius & 27.huius.

Quòd si prima priorum ad secundam minorem habeat proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quã secunda posteriorum ad tertiam: similiter demonstrabitur etiã ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionẽ habere, quàm primam posteriorum ad tertiam.

Finis Libri Quinti

EVCLIDIS ELEMENTORVM

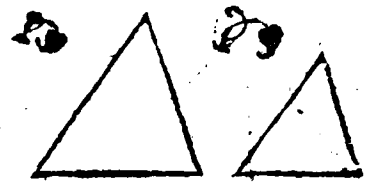
Liber Sextus

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

DIFFINITIONES.

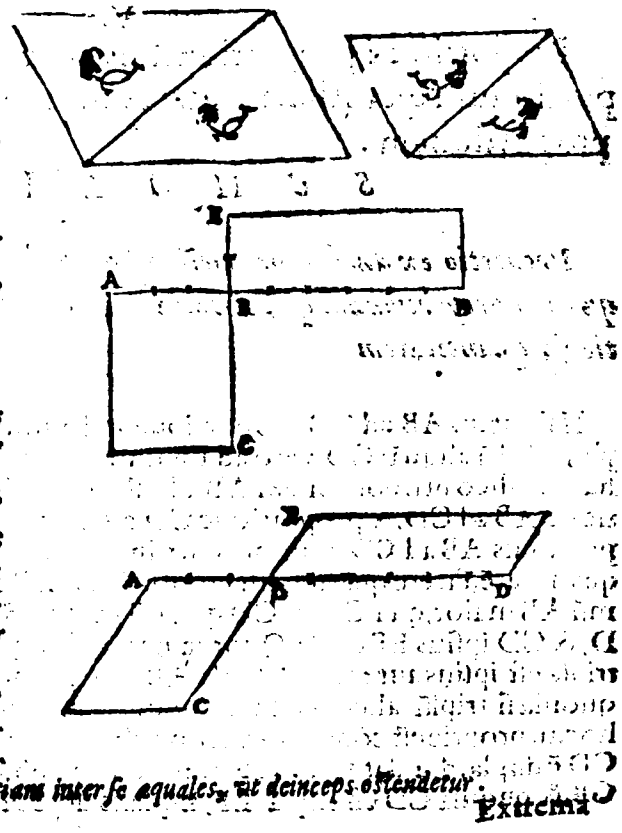
I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in vtraque figura antecedentes, & consequētes rationes fuerint.



F. C. COMMENTARIVS.

Per antecedentes, & consequentes rationes intellige antecedentes, & consequentes proportionis terminos: vt si sint duo rectangula ABC DBE, sitq; vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicentur hę figurę reciprocę, seu ex contraria parte sibi ipsis respondentes quoniam in altera quidem est terminus antecedens prima proportionis, videlicet AB, & consequens secunda BC; in altera vero est consequens primę BD & antecedens secunda EB. sunt autem dictę figurę etiam inter se æquales, vt deinceps ostendetur.

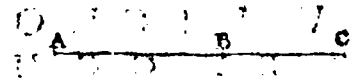
Extrema

III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit vt tota ad maiorē portionē, ita maior portio ad minorē.

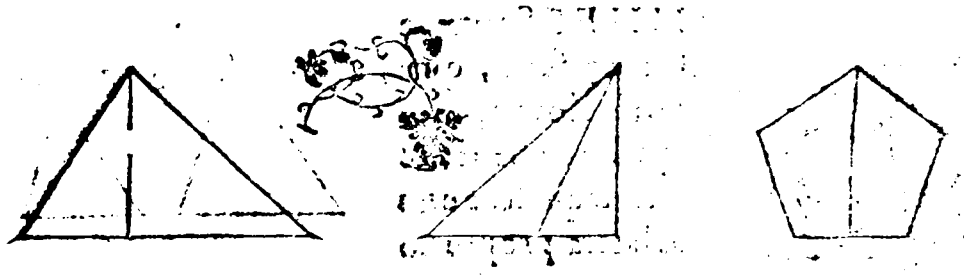
F. C. COMMENTARIVS.

Extrema ac media ratione secari recta linea idcirco dicitur, quòd secetur in duas partes, quæ proportionis terminis sunt, videlicet extremus & medius; nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim rectā linea AC ita diuisa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, & BC extremus.



IV.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



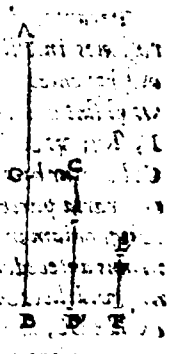
V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

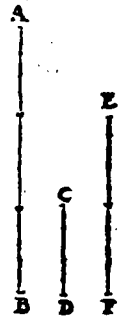
SCHOLIVM.

Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

Habeat. n. AB ad CD proportionem datam, vt duplā vel triplā, vel aliā aliquā: CD verò ad EF similiter datā proportionem habeat. dico proportionem AB ad EF compositā esse ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF, vel si quantitas proportionis AB ad CD multiplicetur in proportionis CD ad EF quantitatē, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit. n. primū AB maior, quā CD, & CD quā EF maior: Sitq; AB dupla CD, & CD ipsius EF tripla. Quoniā igitur CD quidem ipsius EF tripla est, ipsius autem CD dupla AB, erit AB ipsius EF sextupla; quoniā si triplū alicuius duplicabimus, fiet ipsius sextuplum. hoc. n. proprie est cōpositio. vel hoc modo. Quoniā AB ipsius CD ē dupla, diuidatur AB in partes æquales ipsi CD, quae sit AG GB. & quoniā CD est tripla EF, æqualis autē AG ipsi CD; erit AG ipsius EF tripla.



tripla. ideoq. tota AB ipsius EF sextupla est. Quare proportio AB ad EF coniũgitur per mediũ terminum CD; cõposita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Similiter autem & si CD sit vtrisq. AB EF minor, idem concludetur. Sit enim rursus AB quidem tripla ipsius CD, CD uero ipsius EF dimidia. Et quoniam CD dimidia est ipsius EF, & ipsius CD tripla AB; erit AB sesquialtera ipsius EF. Si enim dimidium alicuius triplicabimus, habebit ipsum semel, & eius dimidium. Et quoniam AB ipsius CD est tripla, CD uero dimidia EF, quarum partium ipsi CD aequalium AB est trium, earum est EF duarum. Ergo AB sesquialtera est ipsius EF. proportio igitur AB ad EF connectitur per CD medium terminum, composita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rursus sit CD utrisq. AB EF maior: & sit AB quidem ipsius CD dimidia, CD uero sesquitertia ipsius EF. Quoniam igitur quarum partium est AB duarum, earum CD est quattuor: quarum autem CD est quattuor, earum EF est trium, & quarum AB duarum, earundem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rursus connectitur per CD medium terminum; quae est duorum ad tria. Similiter & in pluribus & in reliquis casibus. Et manifestum est, si à composita proportione unus quiuis componentium auferatur, uno simplicium ejecto, reliquos componentium assumi.



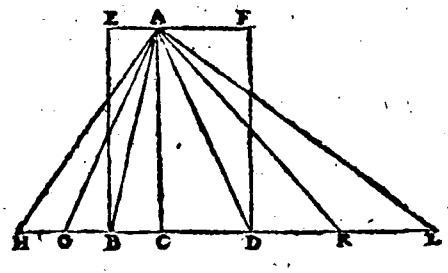


FED. COMMANDINVS.

Lege Eutocium in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphæra, & Cilindro, & in commentarijs in undecimam propositionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula, & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, vt bases.



Sint triangula qdem ABC ACD parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, uidelicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulũ ACD, & parallelogrãmum EC ad CF parallelogrammũ. producatur. n. BD ex utraq; parte ad pũcta H L, & ipsi quidem BC basi aequales quotcumq; ponantur BG GH, ipsi uero basi CD ponãtur quotcumq; aequales DK KL, & AG AH Ak AL iungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se aequales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter se aequalia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulũ trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD totuplex est, & triangulum ALC ipsius ACD triãguli: & si aequalis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triãgulo ALC est aequale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. Quattuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, et duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt aequemultiplicia, basis quidem BC, et ABC trianguli, videlicet basis HC, et AHC triangulum: basis uero CD, et trianguli ACD, alia utcunque aeque multiplicia, nempe CL basis, et ALC triangulum, atq. ostensum

38. huius.

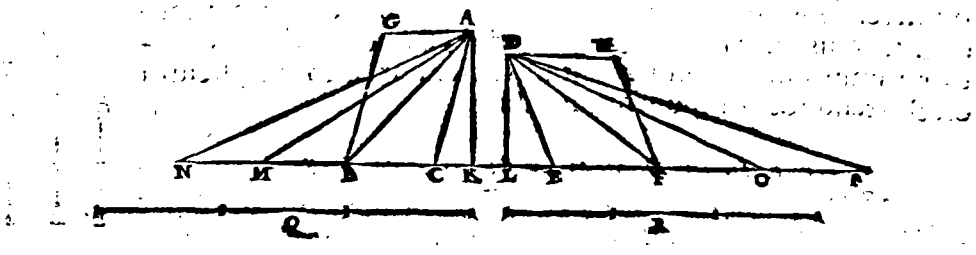
sum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulũ AL C; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur ut BC basis ad basim CD, ita triangulum CBC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum, partes autem eodem modo multiplicium eandem inter se proportionem habent erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, vt basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triãgulum ACD; vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammũ EC ad CF parallelogrammum erit vt, BC basis ad basim CD, ita parallelogrammũ EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma, quę eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases, quod demonstrare oportebat.

5. diffi. quinti.
4 1. primi.
25. quinti.
11. quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & theorema illud verum est, quod demonstrare hoc loco non putaui esse alienum.

Triangula, & parallelogramma in æqualibus basibus constituta, eadē inter se proportionem habent, quam eorum altitudines.



Sint duo triangula ABC DEF, & duo parallelogramma CG EH, quæ æquales bases habeant BC EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitudo sit AK; & trianguli DEF, & parallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita esse, & triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogramum CG ad EH parallelogrammum producantur BC EF, & ponãtur basi BC æquales quotcunque BM MN; & basi EF æquales quotcunque FO OP, iungantur q; AM AN DO DP: quot vero magnitudines sunt in CN æquales basi CB, tot sumantur in linea Q æquales ipsi AK altitudini; & quot sunt in EP æquales basi EF, tot sumantur in linea R æquales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM AMB ABC sunt in æqualibus basibus constituta, & æquali altitudine; etiam inter se æqualia erunt, & eadem ratione triangula DEF DFO DOP erunt inter se æqualia. Quotuplex igitur est linea Q ipsius AK, totuplex est triangulum ANC trianguli ABC, & quotuplex est linea R ipsius DL, totuplex est triangulum DPE trianguli DEF, & si Q sit æqualis R, & triangulum ANC triangulo DPE æquale erit, ex præmissa; erit namq; altitudo AK, cuius tripla est Q æqualis altitudini DL, cuius ipsa R est tripla, si vero Q sit maior, quàm R, & triangulum ANC maius erit, quàm triangulum DPE; & si minor, minus. triangulorum enim æquales bases habentium, quæ maiori sunt altitudine, etiam maiora sunt, alioqui sequeretur totum parti æquale esse. Cum igitur quattuor sint magnitudines, videlicet duæ altitudines, AK DL, & duo triangula ABC DEF, & sumpta sint æque multiplicia, altitudinis quidem AK, & trianguli ABC, altitudinis vero DL, & trianguli DEF, alia vtcunque multiplicia, & ostensum sit si linea Q superet R, & triangulum ANC superare triangulum DPE, & si æqualis, æquale, & si minor, minus, erit vt altitudo HA ad altitudinem DL, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Sed trianguli ABC duplum est CG parallelogrammum, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EH; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem, erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH, vt ABC triangulum ad triangulum DEF. Sed ostensum est vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita esse triangulum ABC ad triangulum DEF. Vt igitur AK ad DL, ita est parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Quare triangula, & parallelogramma in æqualibus basibus constituta eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines. quod demonstrare oportebat.

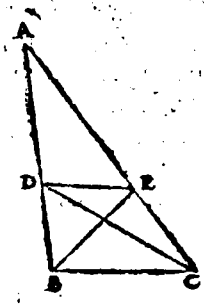
Ex antecedente.

5. dif. quinti.
41. primi.
25. quinti.

THEO-

THEOREMA II. PROPO. II.

Si vni laterum triāguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

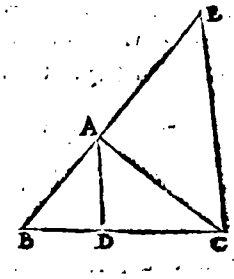


Trianguli .n. ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita esse CE ad EA. Iungantur .n. BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; in eadem .n. sunt basi DE, & in eisdem DE BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habēt proportionem. ergo vt triangulum BDE ad triāgulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triāgulum ADE, ita est BD ad DA. nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt vti bases. & ob eandem causam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. Et vt igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter secta sint, & vt BD ad DA, ita sit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. ijsdem .n. constructis, q̄m est vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE; & vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triāgulū ADE: erit vt triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triāgulum ADE. Quod cum vtrumq; triangulorum BDE CDE ad triangulū ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi cōstituta, etiā in eisdem sint parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur vni laterū trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius triāguli latera; & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quę sectiones cōiungit recta linea reliquo triāguli lateri parallela erit. q̄ oportebat demōstrare.

17. primi.
7. quinti.
Ex antecedente.
11. quinti.
12. quinti.
9. quinti.
10. primi.

THEOREMA III. PROPO. III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem proportionē habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandē proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.



Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariā recta linea AD. dico vt BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur .n. per C ipsi DA parallela CE, & producta BA cōueniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædā AC, erit ACE āgulus āgulo CAD æqualis. Sed CAD āgulus ponitur æqualis angulo BAD. Ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus q̄m in parallelas AD EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC. ostensus autē est, & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC

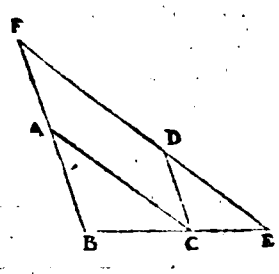
9. primi.
31. primi.
29. primi.

6.primi. æqualis erit: ac propterea latus AE æquale lateri AC. Et quoniam vni laterum
Ex antecedente. trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit vt BD ad DC, ita
7.quinti. BA ad AE; æqualis autē est AE ipsi AC. est igitur vt BD ad DC, ita BA ad AC.
Sed sit vt BD ad DC, ita BA ad AC, & AD iungatur. Dico angulum BAC bifa-
ex antecedente. riam sectum esse recta linea AD. iisdem enim constructis quoniam est vt BD
ad DC, ita BA ad AC; Sed & vt BD ad DC, ita BA ad AE, etenim vni laterum
9.quinti. trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, erit & vt BA ad AC,
29.primi. ita BA ad AE. ergo AC est æqualis AE ac propterea, & angulus AEC angulo E
CA æqualis. Sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; an-
gulus vero ACE æqualis alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æ-
qualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trī-
guli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, etiam basim
secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli la
tera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli
latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifa-
riam secabit. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IV. PROPO. IV.

Aequiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt, & homologa siue eiusdem ratio-nis sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint aequiangula triangula ABC DCE, quae an
gulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero
ACB angulo DEC aequalem habeant, & praeterea
angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum
ABC DCE proportionalia esse latera, quae sunt
circa æquales angulos, & homologa, siue eiusdem
rationis latera esse, quæ æqualibus angulis subten-
duntur. Ponatur. n. BC in directum ipsi CE. Et quo-
17.primi. niam anguli ABC ACB duobus rectis minores sunt,
æqualis aūt est angulus ACB angulo DEC; erunt A
BC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se cō-
uenient. producantur, & conueniant in puncto F. & quoniam angulus DCE
28.primi. est aequalis angulo ABC; erit BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis
34.primi. est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE. parallelogrammum
2.huius. igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est æqua-
7.quinti. lis. Et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est
2.huius. AC; erit vt BA ad AF, ita BC ad CE. aequalis autem est AF ipsi CD. Vt igitur
BA ad CD. ita BC ad CE, & permutādo vt AB ad BC, ita DC ad CE. rursus quo-
niam CD parallela est BF, erit vt BC ad CE, ita FD ad DE. Sed DF est aequalis
AC. ergo vt BC ad CE, ita AC ad ED. permutando igitur vt BC ad CA, ita CE
ad ED. Itaque quoniam ostensum est, vt AB ad BC, ita DC ad CE, vt autē BC
ad CA, ita CE ad ED: erit ex aequali vt BA ad AC, ita CD ad DE. aequiangulo-
rum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quae circum aequales an
gulos: & homologa, siue eiusdem rationis latera sunt, quae aequalibus angulis
subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

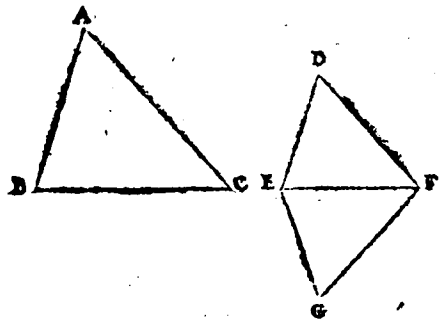


THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC DEF, quae latera proportionalia habeãt, ſitq; vt AB quidem ad BC, ita DE ad EF, vt aũt BC ad CA, ita EF ad FD, & adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triãgulum ABC triangulo DEF aequiãgulũ eſſe, & aequales habere angulos quibus homologa latera ſubtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, ãgulũ vero BCA angulo EFD, & praeterea angulum BAC angulo



EDF. conſtituatur enim ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipſa EF, angulo quidem ABC aequalis angulus FEG, angulo autem BCA angulus EFG. Quare reliquus BAC angulus reliquo EGF eſt aequalis. Ideoq; aequiangulum eſt triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia ſunt latera, quae circum aequales angulos, & homologa latera ſunt, quae aequalibus angulis ſubtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. ſed vt AB ad BC, ita DE ad EF. Vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Quod cum vtraque ipſarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipſi EG aequalis. Eadem ratione & DF aequalis FG. Itaque quoniam DE eſt aequalis EG, communis autẽ EF; duae DE EF duabus GE EF aequales ſunt, & baſis DF baſi FG aequalis. angulus igitur DEF eſt aequalis angulo GEF, & DEF triangulum aequale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera ſubtenduntur. ergo angulus quidem DFE eſt aequalis angulo GFE, angulus vero EDF aequalis angulo EGF. Et quoniã angulus FED eſt aequalis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED aequalis. Eadem ratione & angulus ACB aequalis eſt angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangula; & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oportebat demonſtrare.

33. primi.

Ex antecedente.

11. quinti.

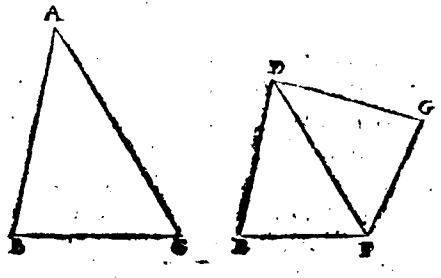
9. quinti.

8. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulũ vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus æqualia homologa latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, ſitque vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe, & angulum quidem ABC habere aequalem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE. conſtituatur enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipſa DF, alterutri angulorum BAC EDF aequalis angulus FDG, angulo autem ACB aequalis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G eſt aequalis. ergo triangulum ABC triãgulo DGF, æquiangulum eſt, ac propterea vt BA ad AC, ita eſt GD ad DF: ponitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis eſt ipſi DG, & cõis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF



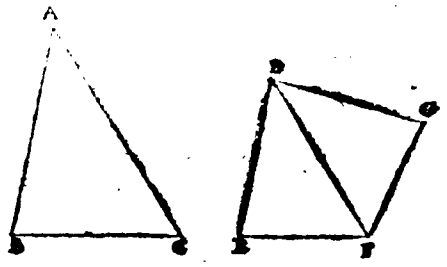
3. primi.

4. huius.

11. quinti

9. quinti

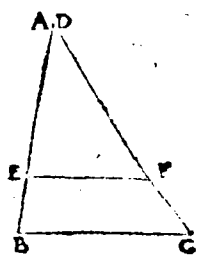
æquales ſunt, & angulus EDF angulo
4.primi. GDF eſt æqualis. baſis igitur EF eſt æ-
qualis baſi FG, triãgulumq; DEF æqua-
le triangulo GDF, & reliqui anguli reli-
quis angulis æquales, alter alteri, quib.
æqualia latera ſubtenduntur. ergo an-
gulus quidem DFG eſt æqualis angulo
DFE; angulus vero ad G angulo ad E.
Sed angulus DFG æqualis eſt angulo A
CB. & ãgulus igitur ACB angulo DFE



eſt æqualis ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF. ergo & reli-
quus qui ad B æqualis reliquo, qui ad E. æquiangulum igitur eſt triangulum
ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula vnum angulum vni angulo æqua
lem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula
erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubten
duntur. Quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

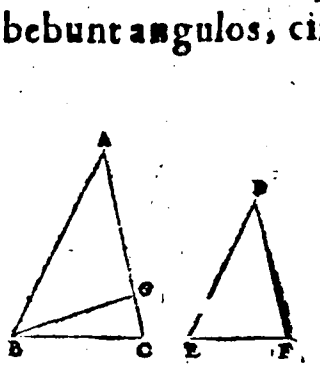
Sunt qui hoc etiam aliter demonſtrẽt. Nam impoſito latere DE lateri AB, cadet DF in AC, quoniam angulus ad punctum D angulo ad A eſt
4.primi. *æqualis. Vel igitur DE eſt æquale ipſi AB, vel inæquale. & ſi quidem æqua le, erit & DF æquale AC. ergo & baſis EF baſi BC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si vero DE ſit inæquale ipſi AB, ſit vtrumuis ipſorum maius; verbi cauſſa AB. tunc vt BA ad AC, ſic ED ad DF. ergo*
2.huius. *permutando vt BA ad AE; ſit CA ad AF: & diuidendo vt BE ad EA*
ſic CF ad FA. quare latus EF parallelum eſt lateri BC, & idcirco angu
29.primi. *lus AEF angulo ABC, & angulus AFE angulo ACB eſt æqualis. quod oſtenſum oportuit.*



THEOREMA VII. PROPO. VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, vnum angulũ vni angulo æqualem habentia, videlicet angulũ BAC angulo EDF æqualem, circa alios autẽ an gulos ABC DEF latera ꝓportionalia, vt ſit DE ad EF, ſicut AB ad BC: & reliquorum q ad CF. primum vtrumq; ſimul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulũ eſſe; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F
23.primi. æqualem. Si .n. inæqualis eſt angulus ABC ãgu lo DEF, vnus ipſorum maior erit. Sit maior ABC: & cõſtituatur ad rectã lineã AB, & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqualis angulus ABG. Et qm̃ angu-
lus quidẽ A eſt æqualis angulo D, ãgulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus
4.huius. AGB reliquo DFE æqualis. ¶ æquiãgulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. quare vt AB ad BG, ſic DE ad EF: vtq; DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC. & vt igitur AB ad BC, ſic AB ad BG. Quod cũ AB ad vtramq. BC BG eandẽ ha-

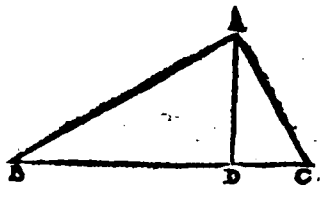


beat

bear proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: ac propterea angulus ad C est æ- 9.quinti.
qualis angulo BGC. minor autem recto ponitur angulus, qui ad C. ergo, & B 5.primi
GC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB maior recto. atq; ostensus
est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F. angulus igitur qui ad F recto maior 13.primi.
est. atqui ponitur minor recto, quod est absurdū. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autem, & angulus ad A æqualis ei, qui ad D. quare, & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur vterq; angulorū qui ad CF non minor recto. Dico rursus, & sic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. ijsdem .n. constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumq; ad C angulo BGC æqualem. sed angulus qui ad C nō est minor recto. non minor igitur recto est BGC. quare trianguli BGC duo an 17.primi.
guli non sunt duobus rectis minores. quod fieri non potest. non igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF. ergo æqualis necessario erit. est autē, & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquus igitur qui ad C reliquo qui ad F est æqualis. ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumq; simul, vel minorē, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VIII. PROPO. VIII.

Si in triangulo rectangulo a b angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti, & inter se similia sunt.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam .n. angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus .n. vterq; est, & angulus qui ad B cōis duob. triangulis ABC ABD erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis, æquiangulum igitur est triangulum 4.huius
ABC triāgulo ABD. quare vt BC, quæ subtendit angulum rectū trianguli ABC ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentē angulū æqualē angulo qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: & adhuc AC ad AD subtendentē angulum qui ad B, cōem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; & circa æquales angulos latera habet proportionalia: 1.dif.huius.
Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Eadem ratione demonstrabimus etiā ADC triangulū triangulo ABC simile esse. Quare vtrumq. ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triāgula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC. Sed & BAD ostēsus est æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo vt BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se, similia sunt. Quod oportebat demonstrare.

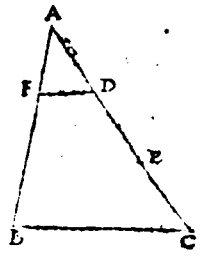
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; ductam basis partium mediam proportionalem esse, & adhuc basis, & vniuscuiusque partium, latus quod ad partem, medium esse proportionale. Quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia, & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturq; in AC quod vis punctum D, & ipsi AD æquales ponantur DE EC. deinde iungatur BC; & per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniã vni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est FD; erit vt CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

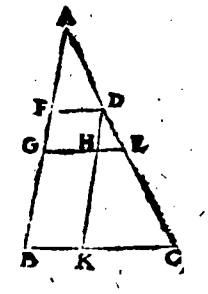


2. huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC. oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D E. & ponantur ita, vt angulum quem vis contineant, iunctaquè BC per puncta quidem DE ipsi BC parallelæ ducantur DF EG: per D. vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammũ igitur est vtrumq; ipsorum FH HB: ac propterea DH quidẽ est æqualis FG, HK vero ipsi GB. Et quoniam vni laterũ trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit vt CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est kH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est vt CE ad ED, ita esse BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & vt ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.



34. primi.

2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

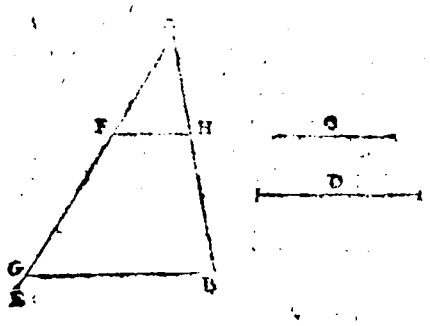
Huic non dissimile est, quod docuit Pappus in septimo libro mathematicarum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem secare.

Sit data quidem recta linea AB, data aũt proportio quam habet C ad D: & oporteat secare AB in proportionẽ C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE, & ipsi quidẽ C æqualis abscindatur AF; ipsi vero D æqualis FG, & iuncta

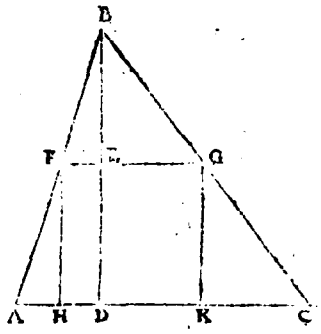
iuncta BG ducatur FH ei parallela. Quoniã igitur vt AH ad HB, ita est AF ad FG, est autẽ AF æqualis C, & FG ipsi D. erit vt AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB secta est ad punctum H in proportionem C ad D. Quod facere oportebat. 4 huius.

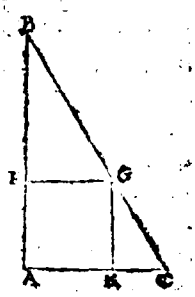
Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita sũt, licebit problema absoluere, & ad quartam propositionẽ quarti lib. nos futuros recepimus.



In dato triãgulo quadratũ describere.

Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum describere. vel igitur datum triangulũ acutiangulum est, vel rectangulum, vel obtusiangulum. Sit primũ acutiangulũ, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatur BD, & ex præmissa diuidatur BD in puncto E, ita, vt DE ad EB eandem proportionem habeat, quàm AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipsi AC parallela, & à punctis F G ducantur FH GK parallelæ ipsi BD.





Quoniam igitur in triangulo AED ducta est FE ipsi AD parallela: erit angulus EFE angulo BDA æqualis; & angulus BFE æqualis angulo BAD, atque est angulus FBE vtrique communis. ergo FBE triangulum triangulo ABD æquiangulum est. Similiter demonstrabimus triangulum EBG æquiangulum ipsi DBC. Vt igitur AD ad DB, ita est FE ad EF, & vt BD ad DC, ita BE ad EG. quare ex æquali vt AD ad DC, ita FE, ad EG, & componendo vt AC ad CD, ita BG ad GE; conuertendoquè vt DC ad CA, ita EG ad GF. Sed vt BD ad DC ita est BE ad EG. ergo ex æquali, vt BD ad AC, ita BE ad FG. Itaquè cum sit vt AC ad BD, ita DE ad EB, erit rursus ex æquali vt AC ad se ipsam, ita DE, hoc est HF ad FG. ergo HF ipsi FG est æqualis; ac propterea omnes HF FG GK KH inter se æquales sunt. Et quoniam FH est parallela ipsi BD: estque angulus BDA rectus, & ipse KHF rectus erit. eadẽ ratione cum FG sit parallela AC, erit & HFG angulus rectus. Ergo & ipsis oppositi FGK GKH recti sint necesse est. quadratũ igitur est ipsum FGKH: & descriptum est in triangulo ABC. Non aliter in triangulo rectangulo, vel obtusiangulo quadratum describemus, ab angulo recto, vel obtuso ad latus oppositum perpendicularem ducentes. Quòd si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo quadrati latera duobus lateribus trianguli nitantur; vt in subiecta figura, vtemur altera perpendiculari, quæ est trianguli latus, videlicet BA, & similiter diuidetur AB in F, ita vt AF ad FB eandem proportionem habeat, quam CA ad AB; ducaturquè FG parallela ipsi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC ducta est FG ipsi AC parallela; similiter demonstrabimus triangulum BFG triangulo BAC æquiangulum esse. quare vt BA ad AC, ita BF ad FG, est autem vt CA ad AB, ita AF ad FB. ex æquali igitur, vt CA ad se ipsam, ita AF ad FG; ideoquè AF FG inter se æquales sunt. Et ex ijs, quę proxime diximus, sequetur AFGK quadratum esse, quod descriptum est in triangulo ABC, atque illud est. quod facisse oportuit.

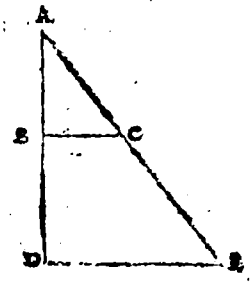
29.primi 4.huius. 22.quinti 18.quinti. 4.quinti. 34.primi. 29 primi. 34.primi. 2.huius. 4.huius.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint datę duæ rectæ lineę AB AC, & ponantur ita, vt angulũ quemuis cõtineant. oportet ipsarum AB AC tertiã proportionalem inuenire. producãtur enim

enim AB AC ad puncta DE: ponaturq; ipsi AC aequalis, BD. & iuncta BC, ducatur per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur vni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit vt AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem est BD ipsi AC. vt igitur BA ad AC, ita est AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inuenta est CE. Quod facere oportebat.

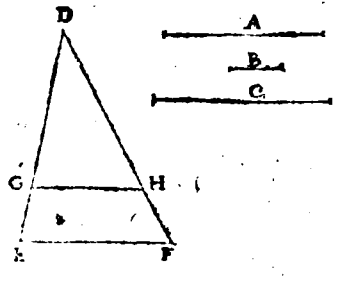


PROBLEMA IV. PROPO. XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

Sint datæ tres rectae lineae ABC. oportet ipsarum ABC quartam proporrionalem inuenire. Exponantur duae rectae lineae DE DF angulum quemuis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A aequalis DG. ipsi vero B aequalis GE, & ipsi C aequalis DH: iunctaq; GH per E ipsi parallela ducatur EF. Itaq; quoniam vni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF parallela ducta est GH, erit vt DG ad GE ita DH ad HF. est autem DG ipsi A aequalis; GE vero aequalis B: & DH aequalis C. Vt igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis ABC quarta proportionalis inuenta est HF. Quod facere oportebat.

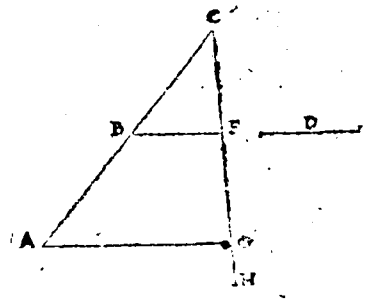
2. huius.



FED. COMMANDINVS EX PAPPO.

Tribus datis rectis lineis AB BC, & D, Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipsam D.

Rursus inclinetur recta linea CH in quouis angulo, & abscindatur CF æqualis D: iunctaque BF, ipsi parallela ducatur AG. ergo rursus vt AB ad BC, ita erit GF ad FC, hoc est ad D. Inuenta igitur est FG. quod facere oportebat.



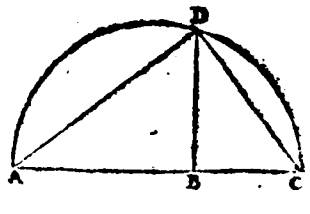
PROBLEMA. V. PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC, oportet ipsarum AB BC mediam proportionalem inuenire. ponantur in directum, & in ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD DC iungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus est. & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB basis partium AB BC media proportionalis. Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inuenta est DB. Quod facere oportebat.

31. tertij.

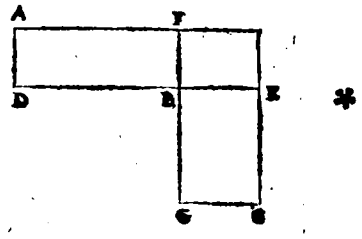
cor. 8. huius.



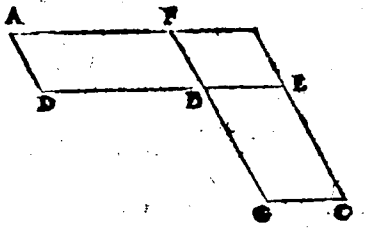
THEO-

THEOREMA IX. PROPOSITIO XIV.

Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex cõtraria parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum vni æqualem habentium angulum latere, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia.



Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directũ DB BE. ergo & indirectum erunt FB BG. Dico parallelogrammorũ AB BC latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere: hoc est vt DB ad BE, ita esse GB ad BF. compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniã parallelogrammũ AB æquale est parallelogrãmo BC; aliud autem aliquod est FE parallelogrãmum, erit vt AB ad FE, ita BC ad FE. Sed vt AB quidem ad FE, ita est DB ad BE; vt autẽ BC ad FE, ita GB ad BF. & vt igitur DB ad BE, ità GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quę circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera, quę circum æquales angulos, sitquè vt DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrãmum AB parallelogrãmo BC æquale esse. Quoniã.n.est vt DB ad BE, ita GB ad BF, vt autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & vt GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit & vt AB ad FE, ita BC ad FE. aequale igitur est AB parallelogrammũ parallelogrammo BC. ergo aequalium vt vnum vni aequalem habentium angulum parallelogrammorum latera, quae circum aequales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum parallelogrammorum vnum vni aequalem habentium angulũ latera, quae circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt aequalia. Quod oportebat demonstrare.



7.quinti.
1.huius.
11.quinti.
1.huius.
11.quinti
9.quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo & indirectum erunt FB BG.] *Sunt enim anguli FBD FBE aequales duobus rectis sed angulus EBG ponitur æqualis angulo FBD. anguli igitur FBE, EBG duobus rectis sunt æquales, ac propterea rectæ lineæ FB BG in directum sibi ipsis erunt.*

14.primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO XV.

Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum triãgulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC ADE vnum angulũ vni angulo aequalem habẽtia, ãgulum

lum ſcilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere hoc eſt vt CA ad AD, ita eſſe EA ad AB. ponantur. n. ita

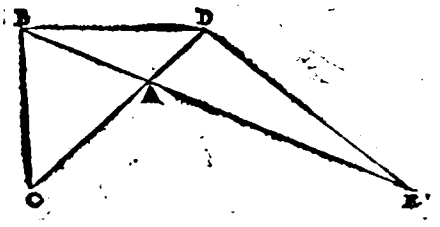
14. primi. vt in directum ſit CA ipſi AD. ergo & EA ipſi AB in directum erit; & iungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC

7. quinti. æquale eſt triangulo ADE, aliud aũt eſt ABD; erit vt CAB triangulum ad triangulum BAD, ita triangulũ ADE ad triangulum BAD. Sed vt triangulum quidem

1. huius. CAB ad BAD triangulũ, ita CA ad AD.

11. quinti. vt autem triangulum EAD ad ipſum BAD, ita EA ad AB. & vt igitur CA ad AD, ita EA ad AB. Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera triangulorum ABC ADE: & ſit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale eſſe. Iuncta. n. rurſus BD, quoniam vt CA ad AD, ita eſt EA ad AB, vt autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD; & vt EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum, erit vt ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Vtrumque igitur triangulorũ ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale eſt

9. quinti. ABC triangulum triangulo ADE. æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum triangulorum vnũ vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.



SCHOLIVM.

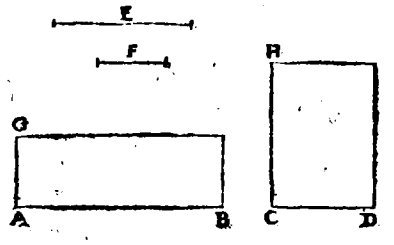
Aequiangulis duntaxat triangulis contingit proportionalia latera habere, non etiam latera ex contraria parte ſibi ipſis proportione reſpondentia. Aequalibus autem, & aequiangulis latera quoque ex cõtraria parte reſpondentia habere contingit; aequalia enim ſunt, & latera, aqualitatis autem proportio ad ſe ipſam conuertitur, hoc eſt ex antecedente ſumpto & conſequente eadem eſt, & differens. At aequalibus quidem, & vnum angulum aequalẽ habentibus contingit ſolum latera habere ex contraria parte reſpondentia, non tamen omnia, ſed quæ circum aequales angulos conſiſtunt. Quare alia quidem ſolum proportionalia habent latera, alia vero, & proportionalia, & ex contraria parte reſpondentia. & ſunt prima quidem aequiangula, & non aequalia; ſecunda vero aequalia, & vnum angulum habentia aequalem, non tamen aequiangula; reliqua autem, & aequalia, & aequiangula ſunt.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale eſt ei rectangulo quod medijs cõtinetur; & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erũt.

Sint

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF, sitq; vt AB ad CD. ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F æquale esse ei, quod ipsis CD E continetur. Ducantur.n. à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturque ipsi quidem F æqualis AG: ipsi vero E æqualis CH, & compleãtur BG DH parallelogramma. Quoniã igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; est autẽ E æqualis CH, & F ipsi AG: erit vt AC ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrãmo DH. atq; est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur; est.n. AG æqualis F, parallelogrammum vero DH quod continetur ipsis CD E, cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F est æquale ei, quod ipsis CD E continetur. Sed rectangulum contentum A B F sit æquale ei, quod CD E continetur. Dico quattuor rectas lineas proportionales esse, videlicet vt AB ad CD, ita E ad F. ijsdem.n. constructis quoniam rectãgulum contentum AB F est æquale ei, quod CD E continetur, atque est contentum quidem AB F rectangulum BG; etenim AG est æqualis F: contentum uero CD E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis, erit parallelogrãmum BG æquale parallelogrammo DH, & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quę circum æquales angulos ex cõtraria parte sibi ipsis respondent. quare vt AB ad CD, ita CH ad AG, æqualis autẽ est CH ipsi E, & AG ipsi F. Vt igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quattuor rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectę lineę proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



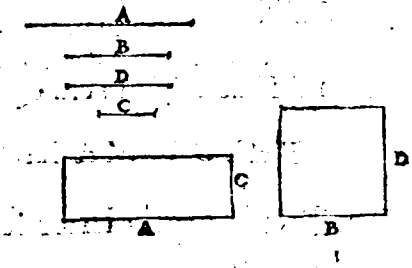
14. huius

14. huius.

THEOREMA XII. PROPO. XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato, & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt.

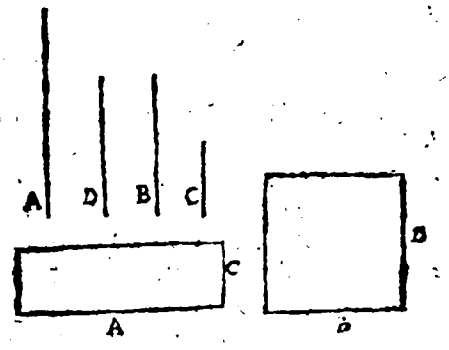
Sint tres rectae lineae pportionales A B C: & sit vt A ad B, ita B ad C. Dico rectãgulũ contentum A C aequale esse ei, qp à media B fit, quadrato. ponatur ipsi B aequalis D. Et qm vt A ad B, ita B ad C, aequalis aũt B ipsi D; erit vt A ad B, ita D ad C. Si aũt quattuor rectae lineae proportionales fuerint rectangulũ extremis cõtentum est aequale ei, qp medijs continetur. ergo rectangulum AC contentũ est aequale ei, qp continetur BD. Sed rectangulum contentum BD est aequale quadrato, qp fit ex ipsa B; etenim B est aequalis D. rectangulum igitur contentũ AC est aequale, ei qp ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC aequale sit quadrato, qp fit ex B. Dico vt A ad B, ita esse B ad C. ijsdem enim constructis quoniam



7. quinti: ex antecedente.

quoniam rectangulum cõtentum AC aequale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B est rectangulum, quod ipsis BD continetur, est.n. B aequalis ipsi D; erit rectangulum contentum AC aequale ei, quod BD continetur. Si autem rectangulum extremis contentum aequale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectae lineae proportionales erunt. est igitur vt A ad B, ita C ad D aequalis autem B ipsi D. ergo vt A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum extremis cõtentum est aequale ei, quod à media fit, quadrato, & si rectangulum extremis contentum aequale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectae lineae proportionales erunt. quod oportebat; demonstrare.

ex antecedente.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum describere. Iungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipsa AB, angulo quidem C aequalis angulus constituatur GAB; angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est aequalis. ergo aequiangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. Rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa BG angulo quidem DFE aequalis angulus BGH, angulo autem FDE aequalis GBH ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H est aequalis. aequiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. Quare vt FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. ostensum autem est & vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. & vt igitur FC ad AG, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD est aequalis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH, erit totus CFE angulus toti AGH aequalis. Eadem ratione & CDE est aequalis ipsi ABH, & praeterea angulus quidem ad C angulo ad A aequalis, angulus vero ad E angulo ad H. aequiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circũ aequales ipsi angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit. A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum AH descriptum est. Quod facere oportebat.

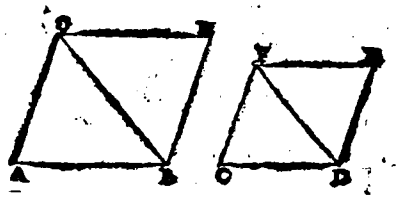
23. primi.

4. huius.

4. huius.

22. quinti.

22. huius.

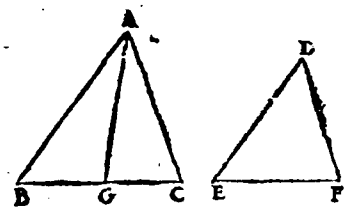


THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se sunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint similia triãgula ABC DEF habẽtia angulũ ad B aequalẽ angulo ad E, & sit vt AB ad BC, ita DE ad EF, ita vt latus BC homologũ sit lateri EF. Dico AB C triãgulũ ad triangulũ DEF duplã proportionẽ habere eius quã habet BC ad EF.

EF. Sumatur enim ipſarum BC EF tertia proportionalis BG, vt ſit, ſicut BC ad EF, ita EF ad BG. & iungatur GA. quoniam igitur vt AB ad BC, ita eſt DE ad EF; erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG. & vt igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. quorum autem triangulorũ vnum vni æqualem habentium anguium latera, quę circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ęqualia ſunt. æquale igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF. & quoniã eſt vt BC ad EF, ita EF ad BG; ſi aũt tres rectę lineæ proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habet eius, quam habet ad ſecundam: habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triãgulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. eſt autem ABG triangulum triangulo DEF ęquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula inter ſe in dupla ſunt proportione laterum homologorum. quod oſtendere oportebat.



11.huius.

11.quinti.

15.huius.

Diffinit.10. quinti

1.huiui.

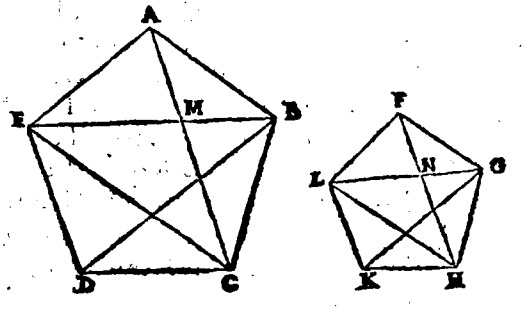
COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum, quod fit à prima ad triangulum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniã oſtenſum eſt vt CB ad BG, ita ABC triangulũ ad triangulũ ABG, hoc eſt ad trianglũ DEF. quod oſtẽdere oportebat.

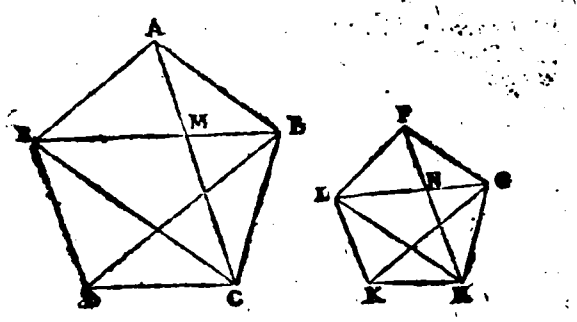
THEOREMA. XIIII. PROPOSITIO. XX.

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona ABCDEFGHKL, & ſit AB homologũ ipſi FG. dico polygona ABCDEFGHKL in ſimilia triangula diuidi, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonũ FGHKL duplam proportionẽ habere eius, quam habet AB ad FG. iungantur BE EC GL LH. & quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt æqualis: atq. eſt vt BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula ſunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo & ſimile. angulus igitur ABE æqualis eſt angulo FGL. eſt autem & totus ABC angulus



6.huius.



us aequalis toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorũ. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt aequalis. & quoniam ob ſimilitudinem triangulorũ ABE FGL, eſt vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter ſimilitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex aequali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum aequales angulos EBC LGH latera ſunt proportionalia. aequiangulum igitur eſt EBC triangulum triangulo LGH. quare & ſimile. eadem ratione & ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHKL in ſimilia triangula diuiduntur, & numero aequalia. dico & homologa totis, hoc eſt vt proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem eſſe ABE EBC ECD, conſequentia autem ipſorũ FGL LGH LHK & ABCDE polygonum ad polygonũ FGHKL duplã proportionem habere eius, quã latus homologũ habet ad homolũm latus; hoc eſt AB ad FG. iungantur .n. AC FH. Et quoniã propter ſimilitudinem polygonorũ angulus ABC eſt aequalis ãgulo FGH; atq, eſt vt AB ad BC, ita FG ad GH, erit triangulum ABC triangulo FGH aequiangulũ, aequalis igitur eſt angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF. praeterea quoniam aequalis eſt BAM angulus angulo GFN, oſtenſus autem eſt & ABM angulus; aequalis angulo FGN; erit & reliquus AMB reliquo FNG aequalis. ergo aequiangulum eſt ABM triangulũ triangulo FGN. ſimiliter oſtendemus, & triangulum BMC triangulo GNH aequiangulum eſſe. Vt igitur AM ad MB ita eſt FN ad NG & vt BM ad MC, ita GN ad NH, quare, & ex aequali vt AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triangulũ ad triangulũ MBC, & triangulũ AME ad ipſum EMC, inter ſe .n. ſunt vt baſes, & vt vnum antecedentiũ ad vnum conſequentiũ, ita omnia antecedentia ad õia conſequentia. Vt igitur AMB triangulũ ad triangulũ BMC, ita triangulũ ABE ad ipſum CBE. Sed vt AMB ad BMC, ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triangulum ad triangulum EBC. eadẽ ratione & vt FN ad NH, ita FGL triangulum ad triangulum GLH. atque eſt vt AM ad MG, ita FN ad NH. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum, & permutando vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad triangulum GHL. Similiter oſtendemus iunctis BD GK, & vt BEC triangulũ ad triangulũ LGH, ita eſſe triangulum ECD ad triangulum LHK. et quoniam eſt vt ABE triangulum ad triangulũ FGL, ita triangulum EBC ad triangulum LGK, & ad huc triangulum ECD ad ipſum LGK: erit & vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, ergo vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplã proportionem habet eius, quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG: ſimilia .n. triangula in dupla ſunt proportione laterum homologorũ. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologũ latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula diuidũtur, & numero aequalia. & homologa totis, & polygonum ad polygonum duplã habet proportionẽ eius, quã habet latus homologũ ad homologũ latus. Quod oportebat demõſtrare.

6. huius.

1. huius.

12. quinti.

1. huius.

12. quinti.

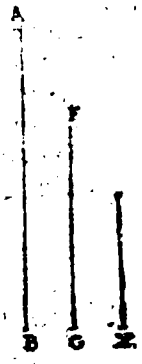
Ex antecedentibus.

Eodem modo & in ſimilibus quadrilateris oſtendetur ea eſſe in dupla proportione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt & in triangulis.

CORO-

COROLLARIVM PRIMVM.

Ergo vniuerſe ſimiles rectilineę figure inter ſe ſunt in dupla proportione homologorum laterum. & ſi ipſarum AB FG tertiam proportionalem ſumamus, quæ ſit X; habebit AB ad X duplam proportionẽ eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologũ habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.

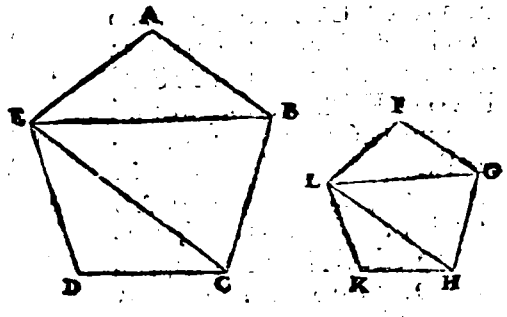


COROLLARIVM SECVNDVM.

Vniuerſe igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita eſſe figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptã. quod oſtendere oportebat.

Oſtendemus etiã aliter & expeditius homologa eſſe triangula.

Exponantur enim rurſus polygona ABCDE FGHKL, & iungantur BE EC GL LH. dico vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita eſſe triãngulum EBC ad triangulum LGH, & triangulum CDE ad ipſum HKL. quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triãgulum ad triangulum FGL duplam proportionem eius, quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet eius, quã BE ad GL. eſt igitur vt ABE triangulũ ad triangulum FGL ita triangulũ BEC ad GLH triãgulũ. rurſus quoniã ſimile eſt triãgulũ EBC triãgulo LGH, habebit EBC triangulũ ad triangulũ LGH duplã proportionẽ eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione, & ECD triangulum ad triãgulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. eſt igitur vt triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt, & vt EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulũ ABE ad triangulũ FGL. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK. & vt igitur vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, & reliqua, vt in priori demonſtratione. Quod ipſum demoſtrare oportebat.



12. antecedente.

11. quinti.

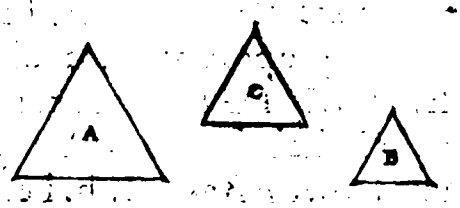
12. quinti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

Sit enim vtrũq; rectilineorum A B ſimile rectilineo C. dico & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe: Quoniam .n. ſimile eſt A rectilineũ rectilineo C, & ipſi æquiangulum erit, & circũ æquales angulos latera habebit proportionalia. Rurſus quoniã ſimile eſt rectilineũ B rectilineo C, æquiãgulũ ipſi erit, & circum

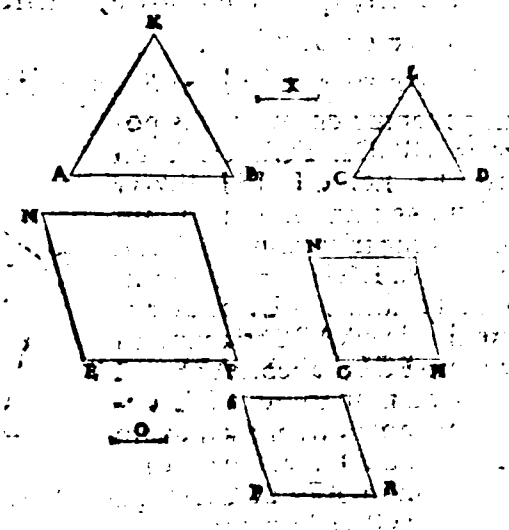
cum æquales angulos latera proportionalia habebit. Vtrumq; igitur rectilineorum AB ipsi C æquiangulū est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. Qd demōstrare oportebat.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XXII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & vt AB ad CD, ita sit EF ad GH, describanturq; ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineū MF ad ipsum NH rectilineū. Sumatur.n. ipsarum quidem AB CD tertia proportionalis X, ipsarum vero EF GH tertia proportionalis O. & quoniam est vt AB ad CD, ita EF ad GH: vt autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum, vt autem EF ad O, ita rectilineū MF ad rectilineū NH. Vt igitur KAB rectilineum ad rectilineū LCD, ita est rectilineū MF ad NH rectilineum. Sed sit vt KAB rectilineū ad rectilineū LCD, ita rectilineū MF ad rectilineū NH. Dico vt AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat.n. vt AB ad CD, ita EF ad PR, & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorū MF NH simile, & similiter positum rectilineū SR. Quoniā igitur est vt AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidē AB CD similia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR, erit vt KAB rectilineū ad rectilineū LCD, ita rectilineū MF ad RS rectilineū, ponitur aūt, & vt rectilineū KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineū ad rectilineū NH. ergo vt rectilineū MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineū ad rectilineū SR. Quod cum rectilineū MF ad vtrumq; ipsorū NH SR eandē habeat proportionem, erit rectilineū NH ipsi SR æquale. est autē ipsi similе, & similiter positū. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit vt B ad ACD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint. & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erūt, & si rectilinea, quæ ab ipsis



18.huius.

11.huius.

Coro.20.huius.

11.quinti.

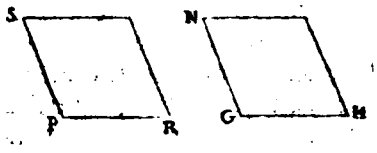
12.huius.

9.quinti.

ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsę rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

LEMMA.

At vero si rectilinea æqualia, & similia sint, homologa ipsorũ latera inter se æqualia esse, hoc modo demonstrabimus.

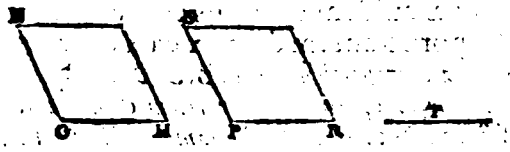


Sint æqualia, & similia rectilinea NH SR: & sit vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP ipsi HG esse æqualem. Si enim inæquales sint, vna ipsarum maior erit. Sit RP maior, quã HG. Et quoniam est vt RP ad PS ita HG ad GN; & permutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN. Maior autem est PR, quam HG. ergo & PS quam GN maior erit. Quare & rectilineum RS rectilineo HN est maius. Sed & æquale, quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est PR ipsi GH. Ergo æqualis sit necesse est. Quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo GH est æqualis PR.] *Demonstrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id quod fieri non potest. Sed tamen licet etiam recta demonstratione vti, in hunc modum.* *

LEMMA.

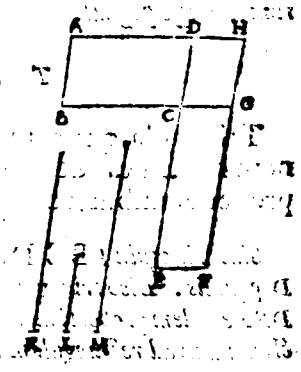


Sint æqualia & similia rectilinea NH SR: sitque latus GH homologum ipsi PR. Dico GH ipsi PR æqualem esse.

Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliam quæ sit T, erit GH ad T, vt rectilineũ NH ad rectilineum SR; ergo GH est æqualis ipsi T. Sed cum tres rectæ lineæ GH PR T sint proportionales, erit rectangulum contentum GHT, hoc est quadratum GH, æquale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipsi PR est æqualis. quod oportebat demonstrare. 11. huius. Coroll. 20. huius. 17. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habẽt ex lateribus compositam,

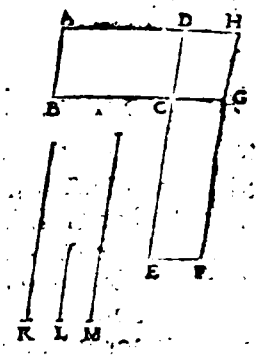


Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualẽ habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammũ AC ad parallelogrãmũ CF proportionẽ habere compositã ex lateribus, videlicet cõpositã ex proportione, quã habet BC ad CG, & ex proportione quã DC habet ad CE ponatur. n. vt BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum erit: & cõpleatur DG parallelogrãmũ: exponaturq; recta linea quædam K, & fiat vt BC quidẽ ad CG, ita K ad L, vt autẽ DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsis K ad L, & L ad M eædẽ sunt, quæ proportiones laterũ, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M cõposita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M. proportionẽ habet ex lateribus compositã. Et quia est vt BC ad CG, ita 14. primi. 12. huius. 1. huius.

AC parallelogrammum ad parallelogrammum CG; sed vt BC ad CG, ita K ad L: erit, & vt K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrãmum. Rursus quẽ est vt DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: vt autem DC ad CE, ita L ad M. & vt L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. Itaq; cum ostensum sit, vt K quidem ad L ita AC parallelogrãmum ad parallelogrammum CH: vt aũt L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali vt K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum GF. habet autem K ad M pportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. quod oportebat demonstrare.

11. quinti.

11. quinti.



F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM. Ex iam demonstratis colligitur triangula, quæ vnũ angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus eõpositam; sunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus. n. BC ad CG, & DC ad CE, pportio composita est K ad M. Quod si ex tribus componenda sit proportio, rursus ex ea, quæ ex duabus constat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quæ quidem ex tribus composita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportione maiori hoc modo auferetur.

Sint datæ proportiones A ad B, & C ad D, quarum proportio C ad D sit maior, & oporteat à proportione C ad D auferre proportionẽ A ad B. fiat vt A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quæ inter C, & D media statuatur. Dico proportionem A ad B iam ablatam esse à pportione C ad D, & proportionem, quæ relinquitur esse eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportione C ad F, & proportione F ad D, si auferatur una dictarum proportionum, videlicet C ad F, quæ est A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud est. quod facere oportebat.

5. huius.

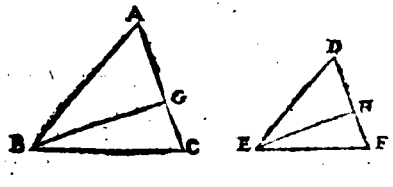


Quomodo autem in numeris proportiones, & componantur, & auferantur ex iam dictis facile constare potest, & ex ijs quæ tradit Purbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnæ constructionis Ptolemæi propositione XVIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theoremata nonnulla à nobis elaborata, quæ ab his non multum abhorrent, & elementorum loco esse possint.

THEOREMA 1.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo est æqualis, inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem angulum comprehendentibus, continentur.

Sint triangula ABC DEF, sitq; angulus A angulo D æqualis. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo EDH simile; est enim angulus ad A æqualis angulo



ad D,

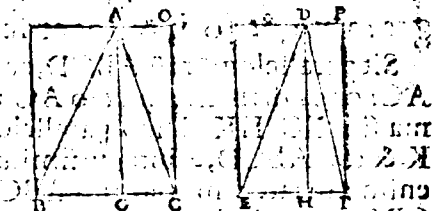
ad D, & angulus BCA rectus æqualis recto EHD. ergo; & reliquus reliquo æqualis. Vt igitur 4.huius.
GB ad BA, ita HE ad ED. Sed vt GB ad BA, ita rectangulum quod fit ex BG, & AC, ad rectã- 1.huius.
gulum BAC, cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AG: & similiter vt
HE ad ED, ita rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF. rectangulum igitur ex BG & 11.quinti.
AG ad rectangulum BAC est vt rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF; & permu-
tando rectangulum ex BG & AC ad rectangulum ex EH & DF, vt BAG rectangulum ad re-
ctangulum EDF. Sed rectanguli ex BG, & AC dimidium est ABC triangulum ex 41. primi; ha-
bent enim eandem basim AC, & altitudinem eandem BG: & rectanguli ex EH, & DF dimidiũ
triangulum DEF. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habet, 15.quinti.
quam rectangulum BAC ad rectangulum EDF. Quare triangula quorum vnus angulus vni angu-
lo est æqualis inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem an-
gulum comprehendentibus continentur. Quod demonstrare oportebat.

COROLARIVM.

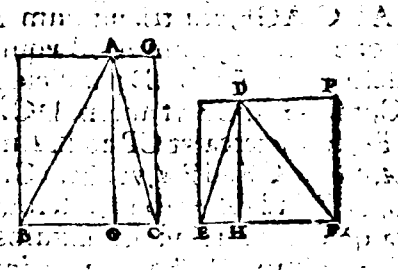
Ex hoc sequitur parallelogramma etiam æquiangula inter se proportionẽ 5.quinti.
habere eandem, quam rectangula, quæ ipsorum lateribus continẽtur, cũ sint
eiusmodi triangulorum dupla.

THEOREMA II.

Triangula, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.



Sint triangula ABC DEF, & ducantur perpendicu
lares AG DH. Dico triangulum ABC ad triangulũ
DEF proportionem habere compositam ex proportio-
ne basis BC ad basim EF, & ex proportione altitudi-
nis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG est æqua-
lis DH, vel inæqualis, & rursus vel BC est æqualis
EF vel inæqualis. Sit primum AG æqualis DH, & BC inæqualis ipsi EF, sitq; vt BC ad EF, 12.huius.
recta linea quædam K ad L, & vt AG ad DH, ita L ad M. Itaque triangulum ABC ad trian-
gulum DEF est, vt basis BC ad EF basim: ex prima huius, hoc est vt K ad L. & cum DH sit
æqualis AG, erit M ipsi L æqualis: triangulumque ABC ad ipsum DEF, vt K ad M: proportio- 17.quinti.
nem K ad M composita est ex proportione, K ad L, & proportione L ad M, hoc est ex proportione
basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Eodem modo demon-
strabitur, si basis BC sit æqualis basi EF, cum inæquales sint altitudines AG DH. erunt enim KL
inter se æquales, & ex iis, quæ demonstrauimus



ad primam huius, triangulum ABC ad triangu-
lum DEF proportionem habebit eandem, quam
L ad M, hoc est quam K ad M. triangulum igitur
ABC ad triangulum DEF proportionem habet
compositam ex proportione K ad L, hoc est basis
BC ad basim EF, & ex proportione L ad M, hoc
est altitudinis AG ad DH altitudinem. Quod si
bases BC EF æquales sint, itemq; altitudines æ-
quales AG DH, nihilominus idem sequetur, nam
KLM inter se æquales erunt, & triangulũ ad trian-
gulũ proportionẽ habebit compositam ex propor-
tione K ad L, & L ad M. hoc est ex proportione basium, & proportione altitudinũ. Deniq; si ba-
ses BC EF inæquales sint, & similiter inæquales altitudines AG DH. Ponatur AG minor quã

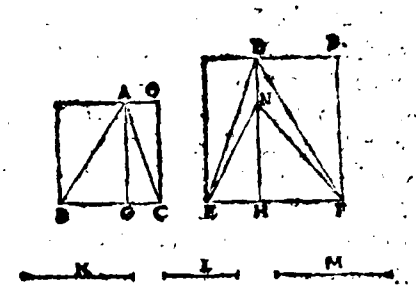
DH,

DH. & ab ipsa DH abscindatur HN, æqualis A G: iungantur q; EN, NF; & rursus fiat vt basis B C ad basim EF, ita K ad L: vt autem NK ad HD hoc est vt AG ad HD, ita L ad M. Quoniam igitur triangula ABC, NEF eandem habent altitudinem, inter se erunt vt bases. quare triangulum ABC ad triangulum NEF est vt BC ad EF, hoc est vt K ad L. Sed triangulum NEF ad triangulum DEF est vt altitudo NH, vel AG ad DH altitudinem, videlicet vt L ad M. ex æquali igitur triangulum ABC ad triangulum DEF, est vt K ad M habet autem K. ad M proportionem compositam ex proportione K ad L, & proportione L ad M. ergo & triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habet compositam ex proportione K ad L & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Sed cum trianguli ABC duplum sit parallelogrammum BO, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EP, habebit parallelogrammum BO ad parallelogrammum EP proportionem compositam ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad DH altitudinem: triangula igitur & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, et proportione altitudinum. Quod oportebat demonstrare.

9.huius.

ex demõstratis. 7.huius.

15.quinti.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se similia sunt.

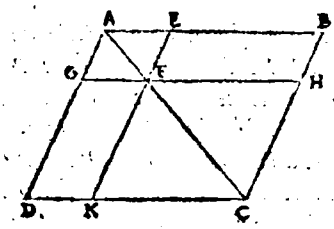
Sit parallelogrãmũ ABCD, cuius diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogrãma sint EG HK. Dico parallelogrãma EG HK, & toti ABCD, & inter se similia esse. quoniã enim vni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit vt BE ad EA, ita CF ad FA. Rursus quoniam vni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela FG, vt CF ad FA, ita erit DG ad GA. sed vt CF ad FA, ita ostensa est, & BE ad EA. ergo, & vt BE ad EA, ita DG ad GA, componendoq; vt BA ad AE, ita DA ad AG, & permutando vt BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD EG latera, quæ circa cõem angulum BAD proportionalia sunt. Et quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est cõis duobus triangulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammũ ABCD parallelogrammo EG est æquiangulum. ergo vt AD ad DC, ita AG ad GF, vt autem DC ad CA, ita GF ad FA, & vt AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea vt CB ad BA, ita FE ad EA. Itaq; qm̃ ostensum est vt DC ad CA, ita esse GF ad FA, vt aũt AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali vt DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorũ ABCD EG proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogrãmo EG est simile. Eadem rõe, & parallelogrammũ ABCD simile est parallelogrãmo KH. Vtrumq; igitur ipsorum EG HK parallelogrammorũ parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammum, quæ circa diametrum sunt parallelogrãma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

11.quinti.

29.primi.

4.huius.

21.huius.

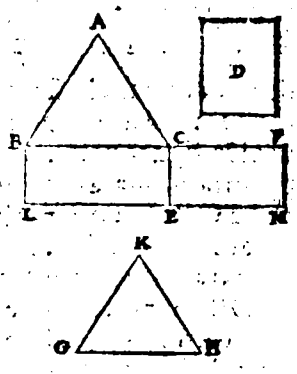


PRO-

PROBLEMA VII. PROPO. XXV.

Datō rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet ſimile conſtituere ABC, cui autem æquale ſit D. oportet ipſi ABC ſimile, & ipſi D æquale idem cōſtituere. applicetur enim ad rectam quidem lineā BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipſi D, in angulo FCE, qui CBL angulo eſt æqualis. in directum igitur eſt BC ipſi CF, & LE ipſi EM. Sumatur ipſarum BC CF media proportionalis GH, & ab ipſa GH deſcribatur triangulum KGH ſimile & ſimiliter poſitum triāgulo ABC. Et quoniā eſt vt BC ad GH, ita GH ad CF, ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, vt prima ad tertiam, ita eſt figura, quæ fit à prima, ad eam, quę à ſecunda, ſimilem & ſimiliter deſcriptam, erit vt BC ad CF, ita ABC triangulum ad triangulum KGH. ſed & vt BC ad CF, ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, & vt igitur triāgulum ABC ad triangulū KGH, ita BE parallelogrammū ad parallelogrammum EF. Quare permutando vt ABC triangulum ad parallelogrammum BE ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum. eſt autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur eſt & KGH triangulum parallelogrammo EF. Sed EF parallelogrammum æquale eſt rectilineo D. ergo & triangulum KGH ipſi D eſt æquale, eſt autem KGH ſimile triangulo ABC. Dato igitur rectilineo ABC ſimile, & alteri dato æquale idem conſtitutum eſt KGH Quod facere oportebat.

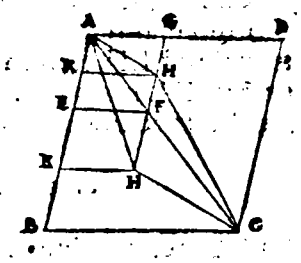


44 primi.
14. primi.
13. huius.
18. huius.
cor. 20. huius.
11. quinti.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti.

A parallelogrāmo. n. ABCD parallelogrammū AE auferatur, ſimile ipſi ABCD, & ſimiliter poſitū communemq; ipſi angulum habens DAB. dico parallelogrāmum ABCD circa eandē eſſe diametrū parallelogrammo AF, non. n. ſed ſi fieri poteſt, ſit ipſorum diameter AHC, & producatur GF vſq; ad H; ducaturq; per H alterutri ipſarum AD BC parallela HK. quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG; & erit parallelogammum ABCD parallelogrammo KG ſimile. ergo vt DA ad AB, ita GA ad AK. eſt autem, & propter ſimilitudinem parallelogrāmorū ABCD EG, vt DA ad AB, ita GA ad AE. & vt igitur GA ad AE, ita GA ad AK. Quòd cum GA ad vtramq; ipſarum AK AE eandem proportionem habeat erit AE ipſi AK æqualis, minor maior, quod fieri nō poteſt. non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipſi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem ipſi angulū habens, circa eandem diametrum eſt toti. quod demonſtrare oportebat.

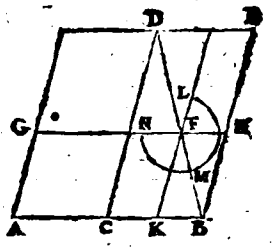


24. huius.
1. diffi. huius
11. quinti.
9. quinti.

THEO-

THEOREMA XX. PROPO. XXVII.

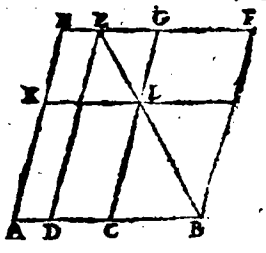
Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineã applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximũ est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.



A Sit recta linea AB; seceturq; bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammũ AD deficiẽs figura parallelogrãma DB, simili, & similiter posita ei, quæ a dimidia ipsius AB descripta est hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorũ ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientiũ figuris parallelogrãmis similibus, & similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. applicetur. n. ad rectam lineam AB parallelogrãmum AF, deficiẽs figura parallelogramma FB simili, & similiter posita ipsi DB. dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF maius esse. Quoniam. n. simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eandem diametrum sunt. Ducatur eorum diameter DB, & describatur figura. qm igitur CF est æquale ipsi FE, cõe apponatur FB. totum igitur CH toti KE est æquale. Sed CH est æquale CG, quoniam, & recta linea AC ipsi CB. ergo & GC ipsi EK æquale erit. cõe apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare & DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est maius omnium igitur parallelogrãmorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientiũ figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei, quę à dimidia describitur; maximũ est, quod ad dimidiam est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

B

21 antecedente.
43. primi.
36. primi.



C ALITER. Sit. n. rursus AB secta bifariã in pũcto C, & applicatum sit AL. deficiens figura LB. & rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammũ AE deficiens figura EB simili, & similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL. quod ad dimidiã est applicatum maius esse parallelogrammo AE. Quoniã enim simile est EB ipsi LB, circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter EB, & describatur figura. Et qm LF æquale est LH, etenim FG ipsi GH est æqualis: erit LF ipso EK maius. est aũt LF æquale DL. maius igitur est, & DL ipso EK. commune apponatur KD. ergo totum AL toto AE est maius. quod oportebat demonstrare.

36. primi.
43. primi.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma,]

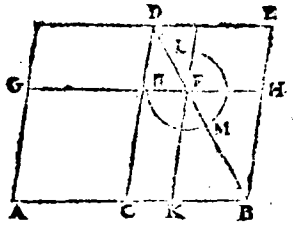
Describatur à recta linea CB parallelogrammum quodcunq; libuerit DB, & totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma DB, simili, & similiter posita ei, quæ à dimidia ipsius AB descripta est.

B Applicetur. n. ad rectam lineam AB parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili, & similiter posita ipsi DB.

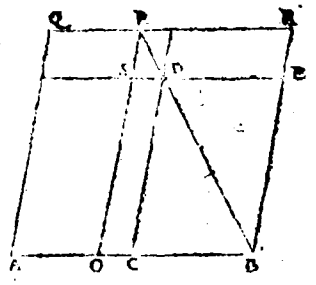
Sumatur in recta linea AB inter CB quoduis punctum K, & ab ipsa KB describatur parallelogrammum simile, & similiter positum ipsi DB parallelogrammo, quod sit K B H F, & HF ad G producatur

producatur, erit rursus ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, & similiter posita ipsi DB.

Sit enim rursus ab secta bifariam in puncto C. *Non videtur hęc alia demonstratio, sed alius casus. quare theorema fortasse in hūc modum aptius, & manifestius explicabitur.*



Sit recta linea AB, secetur q; bifariam in C, & ab ipsa C B describatur parallelogrammum utcumque DB, & totum parallelogrammum ABE compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammū AD, deficiens figura parallelogrāma DB simili, & similiter posita ei, quæ descripta est à dimidia ipsius AB, hoc est à (B. dico omniū parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris similibus, & similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Iungatur enim DB parallelogrammi DB diameter: erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicāda sunt, vel maior quā dimidia ipsius AC vel minor. Sumatur primo maior. & sit AK: atque à puncto K ipsi BE parallela ducatur KF, quę diametro DB in F occurrat; & per F ducatur GFH parallela ipsi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB; quippe quę circa eandem diametrum consistat. Dico igitur AD maius esse quam AF. Quoniam enim suplementum CF est æquale ipsi FE; communi apposito FB, erit totum CH toti KE æquale. at CH est æquale GC, quoniam & AC ipsi CB. ergo & GC æquale est KE. apponatur utrique commune (F. totum igitur AF gnomoni LMN est æquale. quare & DB parallelogrammum, hoc est AD maius erit quam AF: 43. primi.

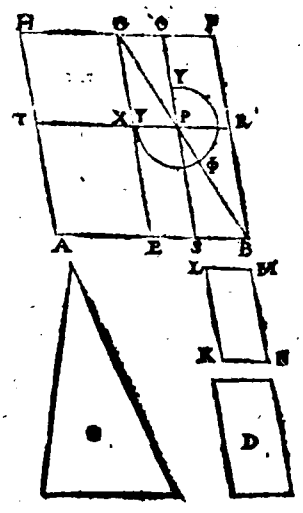


Sumatur deinde AO minor, quàm dimidia AC, & per O ipsi BE parallela ducatur OP, quæ cum diametro BD producta conueniat in P. denique per P ducatur QPR parallela ipsi AB, & secunda figura compleatur. Erit rursus ad AB applicatum aliud parallelogrammum AP deficiens figura parallelogramma PB ipsi DB simili & similiter posita. Dico rursus AD quàm AP maius esse. Quoniam .n. parallelogrammum DR est æquale parallelogrammo DQ erit DR maius quàm SQ. sed OD est æquale DR. ergo & OD ipso SQ est maius. commune apponatur AS. totum igitur AD, quàm totum AP maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris similibus, & reliqua, quę sequuntur. Quod oportebat demostrare. 36. primi. 43. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datā rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrāmum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo, cui oportet simile deficere.

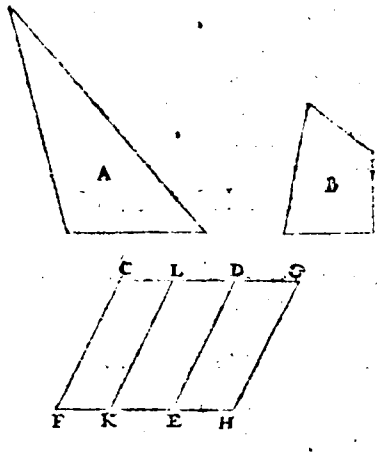
Sit data quidē recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datā rectam lineam AB applicare. sit C non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatū, est similibus existentibus defectibus: cui autē oportet simile deficere sit D. oportet ad datā rectā lineā AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariā in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & cōpleat AG parallelogrāmū. itaq; AG vel æquale est ipsi 18. huius.



est ipsi C, vel eo maius, ob determinationem, & si quidem AG sit æquale C, factum iam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammũ AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem nõ est æquale, erit HE maius quàm C; atq; est HE æquale GB. ergo & GB quàm C est maius. quo autem GB superat C, ei
* excessui æquale, ipsi vero D simile, & similiter po
25. huius. situm idem constituatur KLMN. sed D est ipsimile GB. quare & KM ipsi GB simile erit. sit igitur recta linea quidem KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniam æquale est GB ipsis C KM, erit GB ipso KM maius. maior igitur est recta linea GE ipsa KL; & GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & cõpleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur est & simile GP ipsi KM. sed KM simile est GB. ergo & GP ipsi
21 huius. GB est simile. circa eandem igitur est diametrum
26. huius. GP ipsi GB. sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. itaq; quoniam GB est æquale ipsis C KM, quorũ GP est æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon
43. primi. æqualis reliquo C. & quoniam OR est æquale XS, commune apponatur PB.
36. primi. totum igitur, OB toti XB est æquale. sed XB est æquale TE, quoniã & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totũ TS est æquale toti gnomoni ΥΦΨ. At ΥΦΨ gnomon ipsi C ostensus est æqualis. & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectã lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogrãma PB ipsi D simili, quoniã & PB simile est ipsi GP. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

* Quo autem GB superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur.] *Vt autem excessus, quo alterum rectilineum alterum superat, facile inueniatur libuit, sequens problema apponere.*

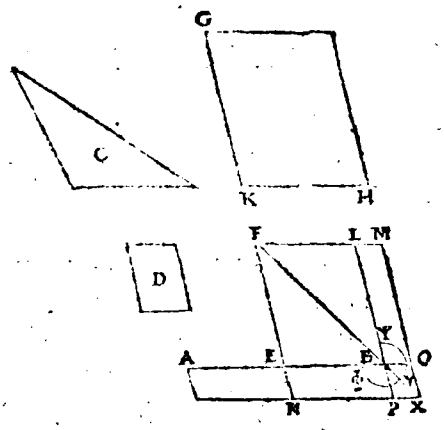


Duorum rectilineorũ inæqualiũ excessum, quo maius superat minus, innenire. *Sint duo rectilinea inæqualia A B, quorum maius sit A. oportet inuenire excessum,*
14. primi. *quo rectilineũ A ipsum B superat. Dato .n. rectilineo A in quouis angulo æquale parallelogrammum constituatur CDEF: & ad rectam lineam DE in angulo æquali ipsi DCF, applicetur parallelogrammum DGHE æquale rectilineo B. erit*
14. primi. *recta linea DG in directum ipsi CD, & EH in directum FE. est igitur vt parallelogrammum FD ad parallelogrammum DH, hoc est vt recti lineum A ad rectilineum B, ita recta linea FE ad EH atque est rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur est recta linea FE ipsa EH. Itaque à recta linea FE abscindatur EK ipsi EH æqualis, & à puncto K alterutri ipsarum FC ED parallela ducatur KL. erit parallelogrammum KD parallelogrammo DH æquale, & ob id parallelogrammum FL est excessus, quo parallelogrammum FD superat parallelogrammum DH, hoc est quo rectilineum A ipsum B rectilineum superat. Duorum igitur rectilineorum inæqualium AB excessus inuentus est. Quod fecisse oportuit.*

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrãmum applicare, excedens figura parallelogrãma, quæ similis sit alteri datæ.



Sit data recta linea AB, datum vero rectilineũ cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. itaq; oportet ad AB rectam lineã dato rectilineo C æquale parallelogrãmũ applicare, excedens figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF. & vtrisque quidem BF. C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positũ idẽ cõstituatur GH. Simile igitur est GH ipsi FB Sitq; KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE Et quoniam parallelogrammum GH maius est ipso FB, erit recta linea KH maior quàm FL. & KG maior quàm FE. producãtur FL FE, & ipsi quidem KH aequalis sit FLM, ipsi vero KG aequalis FEN, & complentur MN parallelogrammum. ergo MN aequale est & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL, & MN igitur ipsi EL simile erit; ac propterea circa eandẽ diametrum est EL ipsi MN. Ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsis EL C est æquale, sed GH est aequale MN; erit & MN æquale ipsis EL C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΨΥΦ gnomõ ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est aequalis EB. aequale erit & AN parallelogrãmum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX aequale est gnomoni ΦΥΤ. Sed ΨΥΤ gnomon est aequalis C. ergo & AX ipsi C erit aequale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrãmum applicatum est AX, excedens figura parallelogrãma PO ipsi D simili, quoniã & ipsi EL simile est OP. Φ faciſſe oportebat.

18.huius.

25.huius.

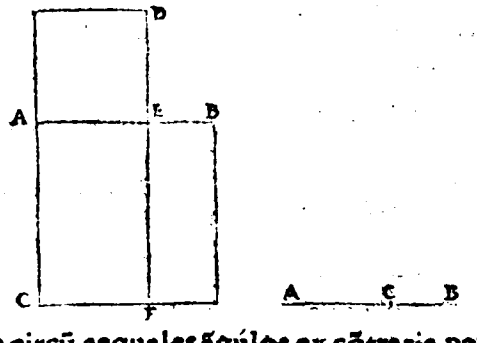
21.huius.

26.huius.

31.huius.

PROBLEMA X. PROPO. XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.



Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsã AB extrema, ac media rõe secare. Describatur. n. ex AB quadratũ BC, & ad AC ipsi BC aequale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. Quadratum autem est BC. ergo. & AD, quadratum erit. Et quoniã BC est aequale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est aequale. est autem & ipsi aequiangulum. ergo ipsorũ BF AD latera, quae circũ aequales ãgulos ex cõtraria parte sibi ipsis respõdẽt. vt igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est aũt FE aequalis AC hoc ẽ ipsi AB, & ED ipsi AE. quare vt BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB maior est

46 primi. Ex antecedente.

14.huius.

34.primi.

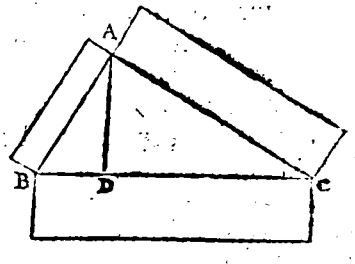
14.quinti. eſt quam AE. ergo AE quam EB eſt maior. Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione ſecta eſt in E. & maior ipſius portio eſt AE, ꝙ facere oportebat.

11.ſecun, ALITER. Sit data recta linea AB. oportet ipſam AB extrema ac media ratione ſecare. Secetur. n. AB in C, ita vt rectangulum, quod continetur AB BC

17.huius. æquale ſit quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ABC æquale eſt quadrato ex AC, erit vt BA ad AC ad CB, ergo AB recta linea extrema ac media atione ſecta eſt. quod facere oportebat.

THEOREMA XXI. PROPO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ à lateribus rectum angulū continentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figurā, quæ fit ex BC æqualem eſſe eis, quæ ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangu

8.huius. lo rectangulo ABC ab āgulo recto, qui eſt ad A ad BC baſim perpendicularis ducta eſt AD erunt triangula ABD ADC. quę ſunt ad perpendicularem ſimilia toti ABC, & inter ſe ſe.

c oro, 20.hu Et qm̄ ſimile eſt ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad

ius. BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, vt prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quæ ex ſecunda, ſimilem, & ſimiliter deſcriptā.

A Vt igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam, quæ ex BA, ſimilem & ſimiliter deſcriptam. Eadem ratione, & vt BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex CA. quare, & vt BC ad ipſas BD DC ita figura, quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, ſimiles, & ſimiliter deſcriptas. æqualis autē BC ipſis BD DC. ergo figura, quæ fit ex BC æqualis eſt eis, quæ ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectū angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. quod oſtendere oportebat.

ALITER. Quoniam ſimiles figuræ ſunt in dupla proportione laterum

20.huius. homologorum; figura, quæ fit ex BC ad eam, quę ex BA duplam proportionē

12.quinti. habebit eius, quam habet BC ad BA. habet autem, & quadratum ex BC ad quadratum ex BA duplam proportionem eius, quam BC ad BA. ergo & vt figura quę ex BC ad eam, quæ ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. eadē ratione, & vt figura, quę ex BC ad eam, quę ex CA, ita quadratū, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum, & vt igitur figura quae ex BC ad eas, quae ex

47.primi. BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quae ex BA AC. quadratū autem, quod ex BC aequale eſt eis, quae ex BA AC quadratis. ergo & figura, quae fit ex BC eſt aequalis eis, quae ex BA AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. quod oſtendere oportebat.

F. 6. COMMENTARIVS.

A Quare, & vt BC ad ipſas BD DC, ita figura, q̄ ex fit BC ad eas, quę ex BA AC ſimiles, & ſimiliter deſcriptas.] *Quoniā enim eſt vt CB ad BD, ita figura, quæ fit à CB ad eam quæ à BA ſimilem, & ſimiliter deſcriptam; erit, & conuertendo vt DB ad BC, ita figura, quæ fit à BA ad eam, quæ à BC ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. præterea cum ſit vt BC ad CD ita figura, quæ fit à BC ad eam, quæ à CA: & conuertendo vt DC ad CB, ita erit figura, quæ fit ab AC ad eam quæ à CB. Sit igitur figura, quæ fit à BA magnitudo prima; figura, quæ à BC magnitudo ſecunda; recta linea DB magnitudo tertia, & recta BC quarta; figura vero, quę fit ab*

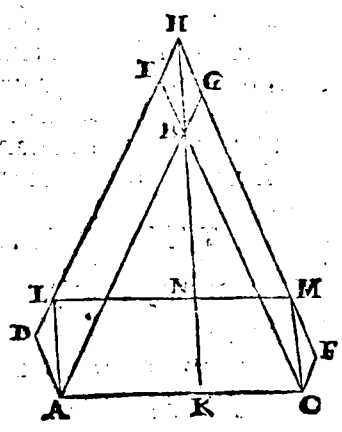
AC

AC magnitudo quinta & recta linea DC sexta. Itaque prima magnitudo ad secundam, est vt tertia ad quartam: quinta vero ad secundam, vt sexta ad quartam. ergo ex vigesima quarta quinti libri composita prima, & quinta ad secundam erit, vt composita tertia & sexta ad quartam, hoc est figuræ quæ fiunt à BA AC ad eam, quæ à BC erunt vt rectæ lineæ BD DC ad rectam BC & rursus conuertendo figura, quæ fit à BC ad eas, quæ à BA AC erit, vt recta linea BC ad rectas BD DC.

Et vt igitur figura, quæ à BC ad eas, quæ à BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA AC. B

Hoc similiter concludemus, vt proxime dictum est, ex vigesima quarta quinti. erit enim figura quæ fit a BA magnitudo prima; figura, quæ à BC secunda; quadratum ex BA tertia; & quadratū ex BC quarta; figura vero, quæ fit ab AC quinta; & quadratum ex AC sexta. Hoc theoremate multo vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

Si sit triangulum ABC, & ab ipsis AB BC describātur quæuis parallelogràma AB ED BCFG; & lineæ DE FG producantur ad H, iungaturque HB fient parallelogramma ABED BCFG æqualia parallelogrammo contento AC HB in angulo, qui veriſque BAC DHB sit æqualis.



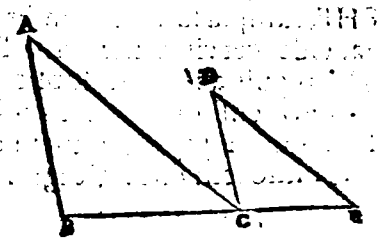
Producatur. n. HB ad K, & per AC ipsi KH parallelæ ducantur AL CM; & LM iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum est AL HB; erunt AL BH æquales, & parallelę. Similiter æquales & parallelæ MCHB. ergo & LA MC æquales, & parallelæ sint necesse est; & propterea LM AC. parallelogrammum igitur est ALMC in angulo LAC, hoc est angulo æquali vtriſque BAC DHB. est. n angulus DHB ipsi LAB æqualis. Et quoniam DABE parallelogrammū æquale est parallelogrammo LABH, etenim in eadem basi AB, & in eisdem parallelis ABDH consistit: parallelogrammum autem LABH parallelogrammo LAKN est æquale, cum sit in eadem basi LA, & in eisdem parallelis LA HK, erit parallelogrammum ADEB æquale parallelogrammo LAKN. & ob eandem causſam parallelogrammum BGFC parallelogrammo KNMC. parallelogrāma igitur DABE BGFC parallelogrammo LACM æqualia sunt, hoc est ei, q AC HB continetur, in angulo LAC, qui est æqualis vtriſque BAC BHL. Atq; hoc multo vniuersalius est, quàm quod in triangulo rectangulo de quadratis in elementis demonstratur.

84. primi. 30. primi. 33. primi 34. primi 35. primi.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

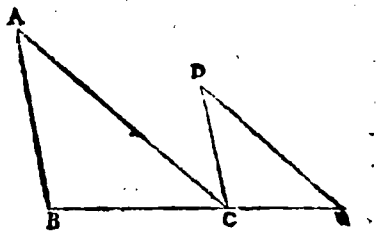
Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE, quæ duo latera BA AC. duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, vt sit sicut BA ad AC. ita CD ad DE; parallela autē sit AB ipsi DC & AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directū esse. Quoniam. n. AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt āguli



29. primi.

alterni BAC ACD æquales inter ſe ſc. eadē ratione, & angulus CDE æqualis eſt angulo ACD. quare & BAC ipſi CDE eſt æqualis & quoniam duo triangula ſunt ABC DCE, vnum angulum, qui ad A, vni angulo qui ad D æqualem habentia, circum æquales autē angulos latera proportionalia, quod ſit vt BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE. oſtenſus autē eſt, & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC eſt æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales ſunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis ſunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineā AC, & ad punctum in ipſa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad eaſdem partes poſitę angulos, qui deinceps ſunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipſi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad vnū angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. Quod demonſtrare oportebat.



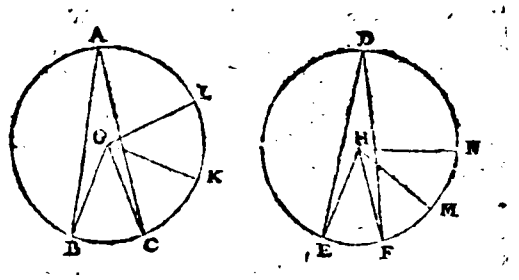
6. huius

4. primi.

THEOREMA XXIII. PROPO. XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtant. Adhuc autem & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

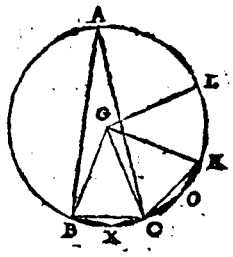
Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipſorum GH ſint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. dico vt circūferentia BC ad EF circūferentiā, ita eſſe & BGC angulū ad angulū EHF, & angulū BAC ad angulū EDF: & adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorē. ponātur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcūque deinceps CK KL; circumferētię vero EF, rurſus æquales quotcumque FM MN: & iungantur GK GL HM HN. quoniam igitur circūferentiæ BC CK KL inter ſe ſunt æquales, & anguli BGC CGK KGL inter ſe æquales erunt. quotuplex igitur eſt circumferentia BL circūferentię BC, totuplex eſt & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex eſt circūferentia NE circūferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis eſt BL circūferentia circūferentiæ EN, & angulus BGL angulo EHN erit æqualis, & ſi circumferentia BL maior eſt circūferentia EN, maior erit & BGL angulus angulo EHN, & ſi minor, minor quattuor igitur exiſtētibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentijs BC EF; & duobus angulis BGC EHF, ſumpta ſunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiae vero EF, & EHF anguli æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare angulum EHN, & ſi aequalis, aequalem, & ſi minor, minorem eſſe. Vt igitur circumferentia BC ad EF circumfentiam, ita angulus

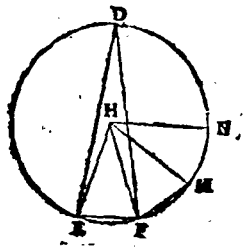


57. tertij.

diff. 5. quinti

angulus BGC ad angulũ EHF. Sed vt BGC angulus ad angulũ EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum. vterque enim vtriusque est duplus. & vt igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentiam insistant. dico insuper, & vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Iungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentijs BC CK punctis XO, iungantur & BX XC CO OK. itaq; quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est & GBC triangulum triangulo GCK. et quoniam circumferentia BC circũferẽtiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia, quæ complet totũ circulum ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est æqualis. similis igitur est BXC portio portioni COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones, & inter se æquales sunt. ergo portio BXC est æqualis portioni COK. est autem & BGC triangulũ triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit. eadem ratione & GKL sector vtrique ipsorum GKC GCB est æqualis. Tres igitur sectores BGC CGK K GL æquales sunt inter se. Similiter & sectores HEF HFM H MN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiae BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiae EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. quare si circumferentia BL circumferentiae EN est aequalis, & sector BGL aequalis est sectori EHN. & si circumferentiae BL superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorem EHN, & si minor minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentijs, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC, & GBC sectoris circumferẽtia BL, & GBL sector. circumferẽtiæ vero EF, & sectoris HEF æque multiplicia circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN. & si æqualis æqualem esse; & si minor minorem. est igitur vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.





15. quinti. 20. tertij. 4. primi.

COROLLARIVM.

Perspicuum etiam est, & vt sector ad sectorem, ita esse angulũ ad angulum.

Finis Libri Sexti.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Liber Septimus
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS *Federici Commandini Vrbinatis.*

DIFFINITIONES.

I.

VNITAS est, qua vnumquodque eorum, que sunt vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus constans multitudo.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis metitur maiorem, dicetur pars dimidia, si ter dicetur tertia, si quater quarta, & ita in alijs.

IIII.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque ipsorum metitur. nam si communis eorum mensura minorem numerum bis metiatur, & maiorem ter, dicentur hæ partes duæ tertiæ; si vero minorem ter metiatur, & maiorem quater, dicetur tres quartæ. Quòd si maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintæ, & ita in reliquis. Recentiores numerum, per quem communis mensura minorem metitur, numerantem, vel numeratorem appellant, vtpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem communis mensura maiorem metitur, denominantem, seu denominatorem dicunt, vt qui his partibus nomen imponat.

V.

Multiplex est maior minoris, quãdo minor eum metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur. Si enim minor bis metiatur maiorem, dicetur maior minoris duplus; si ter itrplus; si quater, quadruplus, & eodem modo in alijs.

VI.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

SCHOLIVM:

Si huic diffinitioni addamus tantum, vt pariter per numerus dicat ur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur, faciemus pytagoræorum pariter parem, qui ad vnitatem vsque bifariam diuiditur, vt octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidl est pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum, bis enim sex sunt duodecim, & impar numerus per parem metitur. nam si quattuor ter sumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; vt decem, quem binarius per quinarium metitur. Ἀπερισσοάρτιος, hoc est impariter par est duodecim; etenim ternarius per quaternarium metitur; & simpliciter quod perfectum nomen est in compositione, per illud dicimus numerum metiri alium numerum. Itaque sciendum est περισσοάρτιον, hoc est impariter parem à pythagoræis sic dictum, plures diuisiones suscipere, quæ in partes æquales fiunt, non tamen ad vnitatem vsq; diuisionem procedere. Noluit autem hunc, & in ipse Euclides, cuius mentionem facit in nono libro, pulchre ipsum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum significauit, quemadmodum in contrariis mediatis, media. quibus nomina impposita non sunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34. noni libri.

IX.

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex diffinitione octaua, & nona, & ex ijs, quæ in nono libro traduntur, apparet Euclidem pariter parem numerum appellare eum, quem par numerus per numerum parem metitur, siue sit ex numeris à binario duplatis, siue non, & pariter imparem appellare eum, quem par numerus per numerum imparem metitur, siue dimidium habeat imparem, siue parem. numeros enim à binario duplatos ipse pariter pares tantum appellat, & eos, quidimidium imparem habent vocat pariter impares tantum. Eos vero, qui neque à binario duplati sunt, neque dimidium habent imparem, & pariter pares, & pariter impares dicit. At Nicomacho, Boetioq; paris numeri species tres sunt; Vnà quæ dicitur pariter par, alia quæ pariter impar, & tertia, quę impariter par. Pariter par numerus est, qui potest in duo paria diuidi, eiusque pars in alia duo paria, & rursus partis pars in alia duo paria; & hoc semper, quoad diuisio partium ad vnitatem perueniat, vt 64. Pariter impar numerus est, qui quoniam par est, in partes quidem æquales diuiditur, partes vero eius mox iudiuisibiles sunt, vt 6. 10. 14. 18. 22. Impariter par numerus est, qui inter duos iam dictos quodammodo medius est, diuiditur enim in partes æquales, eiusque pars rursus diuiditur in alias partes æquales, & interdum partes partium in alias æquales diuidi possunt; sed diuisio ad vnitatem vsque non perducitur. Qui igitur his est pariter par, Euclides pariter parem tantum vocat; qui vero his pariter impar est, Euclides pariter imparem tantum. & qui bis impariter par Euclides & pariter parem, & impariter parem appellat. Quare illud, quod in extrema parte antecedentis scholij additur, verum non videtur, nisi fortasse intelligamus eum, qui pariter par est, & pariter impar eo modo, quo sumit Euclides, neque pariter parem esse tantum, neque pariter imparem tantum.

XI.

Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

XL

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Primum numerum nullus metitur numerus, præterquam quod ipse se ipsum metitur.

XII.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

XIII.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

XIV.

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

XV.

Numerus numerũ multiplicare dicitur, quãdo quot vnitates sunt in ipso, toties cõponitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

Quando

XVI.

Quando duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt planus appellatur: latera vero ipſius ſunt numeri ſeſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius ſeſe multiplicantes numeri.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter eſt æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter eſt æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecũdi, & tertius quarti æque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eædem partes.

F. C. COMMENTARIVS.

Vel igitur primus eſt maior ſecundo, vel minor, & ſi quidem maior, vel eum minor metitur, vel non metitur, & ſi metitur erit primus ſecundi æque multiplex, atque tertius quarti; ſi vero non metitur, quæ partes eſt ſecundus primi, eędem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo ſi primus eſt maior ſecundo, quæ pars, vel partes eſt ſecundus primi, eadem pars, vel partes erit, & quartus tertij. ſed ſi primus ſit minor, quę pars, vel quę partes eſt primus ſecundi, eadem pars, vel eadem partes erit, & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem eſſe, vel partes, quod poſtea in quarto theoremate huius demonſtratione confirmat.

XXI.

Similes plani, & ſolidi numeri ſunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

F. C. COMMENTARIVS.

Numerus autem qui ſuis ipſius partibus minor eſt abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His diffinitionibus nos aliam addidimus. ſed & petitiones quaſdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris vti viſus eſt.

Cum

XXIII.

Cum fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in aliis.

PETITIONES.

1 *Cuilibet numero quotlibet sumi possūt æquales, vel multiplices.*

2 *Quilibet numero sumi potest multiplex.*

3 *Numerus infinite augetur, sed non infinite diminuitur.*

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quicumque eiusdem, vel æqualium æque multiplices fuerint, & ipsi inter se sunt æquales.*

Quorum idem numerus æque multiplex fuerit, vel quorum æque multiplices fuerint æquales, & ipsi inter se æquales sunt.

3 *Quicumque eiusdem numeri, vel æqualium eadem pars, vel eædem partes fuerint, & ipsi inter se sunt æquales.*

4 *Quorum idem, vel æquales numeri eadem pars, vel eædem partes fuerint inter se sunt æquales.*

5 *Omnis numeri pars est vnitas ab eo denominata, binarii enim numeri vnitas pars est ab ipso binario denominata quæ dimidia dicitur, ternarii vero vnitas est pars, quæ à ternario denominata tertia dicitur, quaternarii quarta, & ita in aliis.*

6 *Vnitas omnem numerum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt.*

7 *Omnis numerus se ipsum metitur.*

8 *Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ sunt in metiente, vnitates.*

9 *Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus à eo per quem metitur, illum ipsum producit.*

10 *Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates quæ sunt in multiplicato: multiplicatus vero metitur eundem per vnitates, quæ sunt in multiplicante.*

11 *Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eum, qui ex illis componitur.*

12 *Quicumque numerus metitur aliquē, metietur quoque eum, quem ille ipse metitur.*

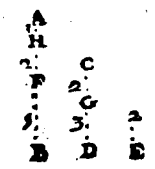
13 *Quicumq; numerus metitur totū, & ablatū, etiam reliquū metietur.*

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

Si duobus numeris inæqualibus expositis, detracto semper minore de maiore, reliquus minime metiatur præcedentem, quo ad assumpta fuerit vnitas; numeri à principio positi primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris expositis AB CD, detracto semper minore de maiore reliquus minime metiatur precedentem, quoad assumpta fuerit vnitas. Dico numeros AB CD inter se primos esse, hoc est ipsos AB CD vnitatem solam metiri. Si enim AB CD nō sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; E, & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem FA, AF vero metiens DC relinquat se ipso minorem GC; & GC metiens FH vnitatem HA relinquat. Quoniam igitur numerus E ipsū CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipsum BF metitur; metitur autem & totum BA. ergo & reliquum AF metietur. Sed AF metitur DG. quare & E ipsum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipsum FH metietur, sed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus existēs. Quod fieri non potest. non igitur ipsos ABCD metietur aliquis numerus. Ergo AB CD primi inter se sunt. Quod oportebat demonstrare.



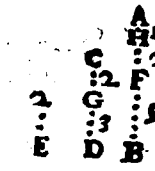
per 12. cōem notionem. 13. com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius conuersam hoc modo demonstrabimus.

Expositis duobus numeris inter se primis: si de maiori sēper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentū fuerit.

Sint enim numeri inter se primi AB CD, & si fieri potest ijsdem manentibus & detracto semper minore de maiore deuentum sit ad numerum HA, qui precedentem GC metiatur. Si igitur HA metitur GC, & ipsum FH metietur. metitur autem, & se ipsum, ergo & FA metietur; ac propterea ipsum DG. sed & metiebatur GC. quare & totum DC metietur. atque ob id ipsum BF metitur. metitur autem & FA, vt ostensum est. ergo & totum BA metietur. Itaque quoniam HA numerus duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter se compositi. Sed & inter se primi ponuntur. quod fieri non potest non igitur expositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, cessabit detractio, antequam ad vnitatē deuentum fuerit. Quod oportebat demonstrare. Sed & illud constat.



12. com. no. 11. com. not. Diffin. 14.

Expositis duobus numeris inter se compositis, si de maiori semper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vsque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter se primi, sed & compositi. Quod est absurdum. 1. huius.

Ex iam demonstratis problema quoque illud perspicue apparere potest.

Duobus numeris expositis comperire an inter se primi sint, an compositi.

Facta namque detractione, vt dictum est, si deueniet ad vnitatem vsque, dicemus eos inter se primos esse, sin minus, compositos.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

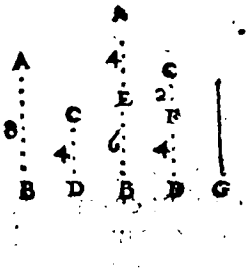
Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Sint dati duo numeri nō primi inter se AB CD; quorū minor sit CD. oportet ipsorū AB CD maximā cōem mensuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam se ipsum metiatur, erit CD ipsorum AB CD cōis mensura, & perspicuum est eam maximā esse: nullus enim maior CD ipsum CD metietur; si verò

si vero CD non metitur AB, ipsorum AB CD detracto semper minore de maiore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur præcedentem. vnitas quidem nō relinquetur; essent enim AB CD primi inter se. quod non ponitur. & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem AE; AE vero metiens CD relinquat se ipso minorem CF: & CF ipsum AE metiatur. Itaq; quoniam CE ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF; & CF ipsum DF metietur. sed & metitur se ipsum. & totum igitur metietur CD. At CD ipsum BE metitur. ergo & CF metitur BE. metitur autem, & EA. & totum igitur AB metietur. sed & metitur CD. ergo CF ipsos AB CD metitur; ac propterea CF ipsorum AB CD est communis mensura. dico etiam maximam esse. Si enim non est maxima, ipsos AB CD metietur aliquis numerus maior ipso CF. metiatur, sitq; G. & quoniam G ipsum CD metitur; CD vero ipsum BE & G ipsū BE metitur. metitur autem, & totum BA. & reliquum igitur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipsum DF metitur. metitur autē. & totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non potest. Non igitur ipsos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipso CF. ergo CF ipsorum AB CD maxima erit communis mensura Duobus igitur numeris datis non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenta est. Quod facere oportebat.

Ex antecedente.

12.com.no
11.com.no



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, & maximam eorum communem mensuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

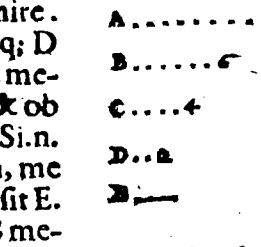
Hoc corollarium apparet ex postrema parte demonstrationis. sit enim duorum numerorum AB CD communis mensura CF: & sit numerus aliquis G, qui ipsos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem mensuram CF metiri. Quoniam enim G ipsum CD metitur: CD vero metitur BE; & G ipsum BE metitur. sed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metietur: metitur autem AE ipsum DF. ergo G ipsum DF metitur. Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam scilicet eorum communem mensuram metietur. Quod demonstrare oportebat.

12.com.no.
14.com.no.

PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram inuenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se ABC. oportet ipsorum ABC maximam communem mensuram inuenire. Sumatur. n. duorum AB maxima cōis mensura D. itaq; D vel ipsum C metitur, vel non metitur. metiatur primū. metitur aūt & ipsos AB. ergo D numeros ABC metitur: & ob id ipsorum est cōis mensura. Dico & maximam esse. Si. n. D non est ipsorum ABC maxima communis mensura, metietur eos aliquis numerus maior ipso D. metiatur, & sit E. quoniam igitur E metitur numeros ABC, & ipsos AB metietur, & ipsorum AB maximam cōmunē mensurā, quæ est D. ergo E ipsum D metitur, maior minorē. Quod fieri non pōt. nō igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso D metietur. ergo D ipsorū ABC maxima est cōis mēsura.



Non

Non metiatur autem D ipſum C. dico primum numeros DC non eſſe primos inter ſe. Quoniã. n. ABC non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. & qui metitur ipſos ABC, & ipſos AB metietur, & ipſorum AB maximam communem menſuram, videlicet D. metitur autem & ipſum C. ergo ipſos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non ſunt inter ſe primi. Sumatur ipſorum maxima communis menſura E. & quoniam E ipſum D metitur, & D metitur ipſos AB; & E ipſos AB metitur. metitur autẽ, & C. ergo & ipſos ABC metietur; eritq, E ipſorũ ABC communis menſura. dico & maximam eſſe. ſi. n E non eſt ipſorum ABC maxima communis mẽſura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E. metiatur, ſitq; F. & quoniam F metitur numeros ABC. & ipſos AB. & ipſorum AB maximam communem menſuram metietur, videlicet ipſum D ergo F ipſum D metitur. metitur autem, & ipſum C. quare F & ipſos DC. & ipſorum DC maximam communẽ menſuram metietur, videlicet ipsũ E. ergo F ipſum E metitur, maior minorẽ. quod fieri nõ poteſt nõ igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipſo E metietur. ergo ipſorũ ABC maxima eſt cõmunis menſura. Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inuenta eſt. quod facere oportebat.

A.....18
B.....12
C....4
D.....6
E..2 (2 x coroll. antecedent.)
F.—

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, & ipſorum maximam communem menſuram metiri.

Eodem modo, & pluribus numeris datis maximam communem menſuram inueniemus.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his manifeſtum eſt, &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonſtrauimus.* Eodem modo, &c.] *Sed & illud conſtat, ſi numerus plures numeros metiatur, & communem eorum menſuram metiri.*

THEOREMA II. PROPOSITIO. IIII.

Omnis numeros omnis numeri minor maioris, vel pars eſt vel partes.

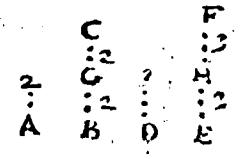
Sint duo numeri ABC, quorum BC ſit minor. dico BC ipſius A vel partem eſſe, vel partes. numeri enim A BC vel primi ſũt inter ſe vel nõ. ſint prius inter ſe primi, & diuiſo BC in vnitates, quæ in ipſo ſunt, erit vnaquęque vnitas earum, quę in BC, pars aliqua ipſius A. ergo BC ipſius A partes eſt. ſed non ſint A BC inter ſe primi. itaq; BC vel ipſum A metitur, vel non, & ſiquidem metitur, erit BC pars ipſius A: ſin minus, ſumatur ipſorũ A BC maxima commmunis menſura D; & diuidatur BC in numeros ipſi D æquales BE EF FC. quoniã igitur D numerũ A metitur, erit D pars ipſius A æqualis autẽ eſt D vni cuiq; ipſorũ BE EF FC. ergo & vnuſquiſq; ipſorũ B E EF FC pars eſt ipſius A: ac propterea BC ipſius A partes eſt.

A.....8
B.....5C
A.....8
B....4C
A.....8
B..2E..2F..2C
D..2

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vterque vtriusque eadem pars erit quæ vnus vnius.



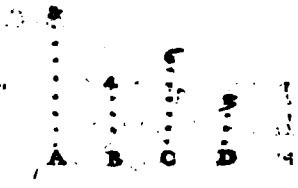
Numerus A numeri BC pars sit: & alter D alterius EF eadē pars. quæ est A ipsius BC, dico & vtrumque AD vtriusq; BC EF eandem partem esse, quæ est A ipsius BC. quoniam enim quæ pars est A ipsius BC, eadem est, & D ipsius EF, quot numeri sunt in BC æquales ipsi A, tot erunt & in EF numeri æquales ipsi D. diuidatur BC quidem in numeros æquales ipsi A, videlicet in BG GC; EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales, hoc est EH HF. erit vtique æqualis multitudo numerorū BG GC multitudini ipsorum EH HF. & quoniā æqualis est BG ipsi A, & EH ipsi D, erunt BG EH ipsis A D æquales. & eadem ratione cum GC sit æqualis ipsi A, & HF ipsi D, & GC HF ipsis A D æquales erūt. quot igitur numeri sunt in BC, æquales ipsi A, tot sunt & in BC EF æquales ipsis A D. ergo quotuplex est BC ipsius A, totuplex erit et vterq; BC EF vtriusq; A D. quæ igitur pars est A ipsius BC, eadem pars erit, & vterque A D vtriusque BC EF. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS

Ex hoc autem licet illud etiam demonstrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit, & alter alterius æq; multiplex: & vterq; vtriusq, æque multiplex erit, atque vnus vnius.

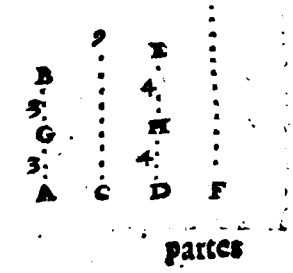
Sit enim A numerus numeri B multiplex, & alter C alterius D æq; multiplex. dico vtrumq; AC vtriusq; BD æque multiplicem esse, atq; A ipsius B. quoniam enim A ipsius B multiplex est, & C ipsius D æq; multiplex; erit B ipsius A pars aliqua, & D ipsius C eadem pars. quare ex iis, quę proxime tradita sunt, & vterq; BD vtriusque AC eadem pars erit, quę est B ipsius A. vterq; igitur AC vtriusque BD æque multiplex est, atq; A ipsius B. quod demonstrare oportebat.



Sed quod de duobus dicitur, poßumus etiam ad quotcumque numeros amplificare. vt] Si fuerint quotcumq; numeri quotcumq; numerorum æqualium multitudine, singuli singulorū æq; multiplices, quotuplex est vnus vnius, totuplices erunt, & omnes omnium.] *Quod eodem modo demonstrabimus. Hoc autem respondebit ei, quod in prima propositione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonstratur.*

THEOREMA IV. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vterque vtriusque eædem partes erit, quę vnus vnius.



Numerus. n. AB numeri C partes sit, & alter D alterius F eaedē partes, quae AB ipsius C. dico & vtrūq; AB DE vtriusq; CF easdē partes esse. quę AB ipsius C. quoniā. n. quae partes est AB ipsius C, eaedem est DE ipsius F, quot partes sunt in AB ipsius C, tot erunt & in DE

partes ipsius F. Diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AC GB; DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit ipsorum AG GB multitudo æqualis multitudini ipsorum DH HE. & quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars & DH ipsius F, quę pars est AG ipsius C; eadem pars erit, & vterque AG DH vtriusque CF. Simili ratione & quę pars est GB ipsius C, eadem pars erit & vterq; GB HE vtriusq; CF. Quæ igitur partes est AB ipsius C, eædem partes est & vterq; AB DE vtriusq; CF. Quod demonstrare oportebat.

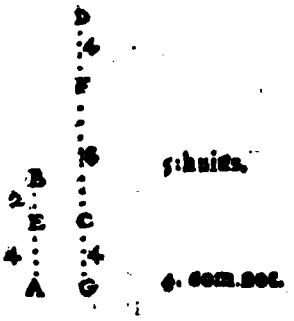
F. C. COMMENTARIVS.

similiter, & hanc, & antecedentem possumus ad quotcũque numeros transferre; vt Si quot cumq; numeri minores ad totidem alios maiores referantur, sintque singuli singulorum vel eadem pars, vel eædē partes; quæ pars, vel partes est vnus vnius eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si numerus numeri pars, fuerit quæ ablatus; ablati, & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD pars sit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem esse, quæ est totus AB totius CD. quæ enim pars est AE ipsius CF, eadem pars sit & EB ipsius CG. ergo quæ pars est AE ipsius CF, eadem pars est & AB ipsius GF. Quæ autem pars est AE ipsius CF, eadem pars ponitur & AB ipsius CD. Quæ igitur pars est AB ipsius GF, eadē est & AB ipsius CD. quare AB vtriusq; GF CD eadem est pars. æqualis igitur est GF ipsi CD. cõis auferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD est æqualis. & quoniam quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & EB ipsius GC. æqualis autem est GC ipsi FD: quę pars est AE ipsius CF, eadem erit & EB ipsius FD. sed quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & AB ipsius CD. ergo quæ pars est EB ipsius FD, eadem est, & AB ipsius CD. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. Quod demonstrare oportebat.



5. huius.

6. eiusdem.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonstrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reliqui ęque multiplex erit, atque totus totius.

Iisdem enim, quæ supra, manentibus. Sit numerus CD ęque multiplex numeri AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico, & reliquum FD reliqui EB ęq; multiplicem esse, atque totum CD totius AB. quoniam enim CF ipsius AB æque multiplex est, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipsius CD eadem pars, quae est AE ipsius CF. ergo ex iam demonstratis, & reliquus EB reliqui FD eadem pars est, quę totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB ęquemultiplex erit, atque totus CD totius AB. Quod demonstrandum fuerat.



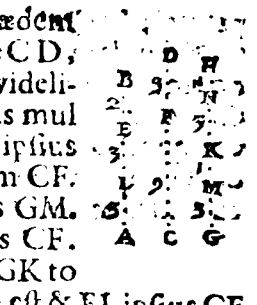
THEOREMA VI. PROPO. VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

Numerus. n. AB numeri CD partes sit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eadē partes esse, quę totus AB totius CD. ponatur enim

ipſi AB æqualis GH. quæ igitur partes eſt GH ipſius CD, eædem eſt & AE ipſius CF. Diuidatur GH quidem in partes ipſius CD, videlicet GK KH: AE vero diuidatur in partes ipſius CF, videlicet AL LE, erit igitur ipſarum GK KH multitudo æqualis multitudini ipſarum AL LE. Et quoniam quæ pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt, & AL ipſius CF: maior autem CD, quam CF. ergo & GK, quam AL eſt maior, ponatur ipſi AL æqualis GM. quæ igitur pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt & GM ipſius CF. quare & reliquus MK reliqui FD eadem pars eſt, qua totus GK totius CD. Rurſus quoniam quę pars KH ipſius CD, eadem eſt & EL ipſius CF; maior autem CD, quàm CF: erit & KH quàm EL maior. ponatur ipſi EL æqualis KN. quæ igitur pars eſt KH ipſius CD, eadem eſt & KN ipſius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadem pars eſt, quæ totus KH totius CD. oſtenſum autem eſt & reliquum MK reliqui FD eandem partem eſſe; quæ totus GK totius DC. & vterq; igitur MK NH ipſius DF eędem partes eſt, quę totus HG totius DC. æqualis aũt vterq; quidem MK NH ipſi EB; HG vero ipſi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes eſt, quæ totus AB totius CD. Quod demonſtrare oportebat.

7.huius.

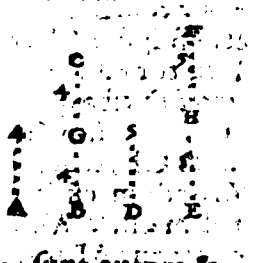


THEOREMA VII. PROPO. IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars eſt, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes, & ſecundus quarti.

Numerus enim A numeri BC pars ſit, & alter D alterius EF eadem pars, quæ A ipſius BC. minor autem ſit A, quàm D. dico & permutando quæ pars eſt A ipſius D, vel partes, eandē partem eſſe & BC ipſius EF, vel eaſdem partes. Quoniam.n. quæ pars eſt A ipſius BC, eadē eſt & D ipſius EF; quot numeri ſunt in BC æquales ipſi A, tot ſunt & in EF æquales ipſi D. diuidatur BC quidē in numeros ipſi A æquales, videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales, EH HF. erit ipſorum BG GC multitudo qualis multitudini ipſorum EH HF. & quoniam numeri BG GC inter ſe ſunt æquales; ſunt autem & æquales EH HF; atque eſt ipſorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF: quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes, eadem pars erit & GC ipſius HF, vel eædem partes. ergo quæ pars eſt BG ipſius EH, uel partes, eadem pars erit, & utercque BC utriuſq; EF, uel eędem partes. æqualis autem eſt BG ipſi A, & EH ipſi D. quae igitur pars eſt A ipſius D, uel partes, eadem pars erit & BC ipſius EF, uel eaedem partes. quod demonſtrare oportebat.

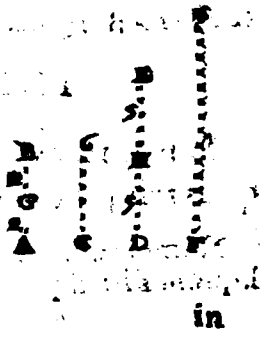
5.huius. 6.huius.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quæ partes eſt primus tertij, vel pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, vel eadem pars.

Numerus.n. AB numeri C partes ſit, & alter DE alterius F eaedem partes: ſit autem AB minor, quã DE. Dico & permutãdo quae partes eſt AB ipſius DE, uel pars; eaſdem partes eſſe & C ipſius F, uel eandem partem. quoniam.n. quae partes eſt AB ipſius C, eaedē partes eſt & D E ipſius F, quot ſunt in AB partes ipſius C, tot erit; &



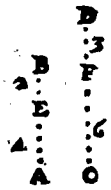
in

in DE partes ipsius F diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtiq; ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis. & quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars, & DH ipsius F. & permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit, & C ipsius F, vel eædem partes. simili ratione, & quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit, & C ipsius F, vel eadem partes. ergo quæ pars est AG ipsius DH, vel partes; eadem pars erit, & AB ipsius DE, vel eædem partes. sed quæ pars est AG ipsius DH; vel partes, eadem pars est & C ipsius F, vel eędem partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, eædem partes est, & C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSIT. XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

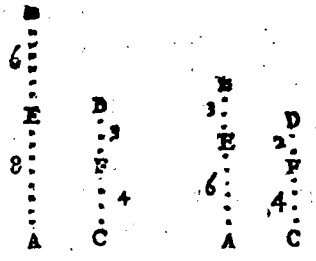
Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. dico & reliquum EB ad reliquum FD ita esse, ut totus AB ad totum CD. Quoniam n. est ut AB ad CD ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, uel partes eadem pars erit, & AE ipsius CF, uel eædem partes. ergo & reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, uel eædem partes, quę AB ipsius CD. est igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. Quod demonstrare oportebat.



diffi. 20.
7 3. huius.
per cõuersã diffi. 20.

F. C. COMMENTARIVS.

Præcedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quam CD. sed si AB maior sit, quam CD, nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsum AB, vel nõ metitur. & si quidem metitur, quoniam est vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipsius CD æque multiplex, atque AE ipsius CF. quare ex ijs, quæ nos demonstrauimus ad septimam huius; & reliquus EB reliqui FB reliqui FD æque multiplex est, atq; totus AB totius GD. reliquus igitur EB ad reliquũ FD, erit vt totus AB ad totum CD. si vero CD non metitur ipsum AB, rursus quoniam vt AB ad CD, ita est AE ad CF, quæ pars est CD ipsius AB, eadem partes erit CF ipsius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eadem partes est, quæ totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonstrare.

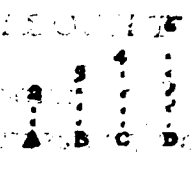


diffi. 20.
per cõuersã Diffi. 20.
Diffi. 20.
8. huius:
per cõuersã Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPO. XII.

Si quotcumq; numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; ut A ad B, ita C ad D. Dico ut A ad B, ita esse AC ad BD. Quoniã enim est ut A ad B, ita C ad D, quę pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit, & C ipsius D, uel partes. & uterq; igitur AC utriusq; BD eadem pars est, uel partes, quę A ipsius B. ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.

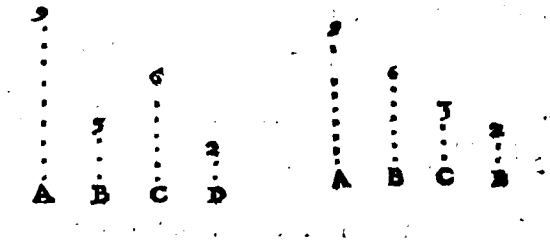


SCHOLIVM.

Hoc quinto, & sexto vniuersalius est. quæ enim illic seorsum in parte, & partibus, eadem hoc loco vnà demonstrantur.

F. C. COMMENTARIVS.

Et hæc demonstratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint consequentibus. quòd si maiores sint, rursus vel B metitur ipsum A, vel non metitur si metitur, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D, æque multiplex erit A ipsius B, atque C ipsius D. ergo ex ijs, quæ demonstrauimus ad quintam huius, & vterq; A vtriusque BD æque multiplex est, atq; A ipsius B. Vt igitur A ad B, ita erit vterq; AC ad vtrumque BD.



Conuer. 20. di fin. 6. huius.

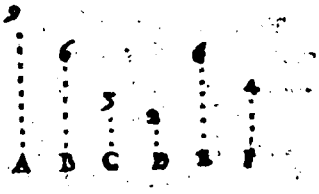
Quod si B non metitur ipsum A, ita argumentabimur. quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quæ partes est B ipsius A, eadem partes erit D ipsius C. ergo & vterque AC vtriusque BD eadem partes est, quæ A ipsius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.

Conuer. 20. diffi.

Idem demonstrabimus etiam si plures sint numeri proportionales, hoc quod sequitur, præmisso

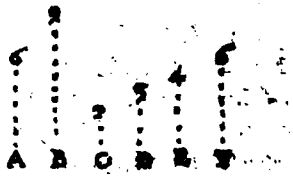
Quæ eidem eædem sunt numerorum proportiones, & inter se eædem erunt.

Sit vt A ad B, ita C ad D; vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. Si enim numerus A sit maior, quàm B, quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes D ipsius C. Rursus quoniam vt C ad D, ita est E ad F, quæ pars est, vel partes D ipsius C, eadem pars, vel partes erit F ipsius E. quæ igitur pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes F ipsius E. Ergo vt A ad B, ita est E ad F.



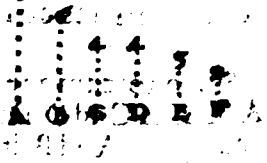
Conuer. 20. diffi.

Si vero A sit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita est C ad D, quæ pars est, vel partes A ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius D. Rursus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quæ pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes erit E ipsius F. ergo quæ pars, vel partes est A ipsius B, eadem est pars, vel partes E ipsius F. vt igitur A ad B, ita E ad F, quod demonstrandum proposuimus.



Conuer. 20. diffi.

Hoc demonstrato, sint numeri proportionales ABC, DEF; sitq; vt A ad D, ita E ad E, & C ad F. Eadem ratione demonstrabimus vt A ad D, ita esse AB ad DE. Et quoniam vt A ad D, ita est C ad F, erit ex ijs, quæ nos proxime demonstrauimus, vt AB ad DE, ita C ad F. non aliter ostendemus vt AB ad DE, ita esse ABC ad DEF. vt igitur A ad D, ita erũt ABC ad DEF. & eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem respondet ei, quod in 12. quinti vniuerse de magnitudinibus demonstratur.



THEOREMA XI. PROPOS. XIII.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutãdo proportionales erunt.

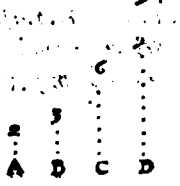
Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. dico

& per

& permutando proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quoniam n. est vt A ad B, ita C ad D, quae pars est A ipsius B, vel partes, eadē pars erit & C ipsius D, vel eadem partes. permutando igitur quae pars est A ipsius C, vel partes, eadem pars est & B ipsius D, vel partes: ergo vt A ad C ita est B ad D. Quod demonstrare oportebat.

diff. 10

9. 10. huius.



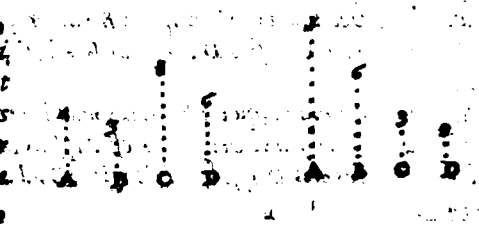
F. C. COMMENTARIVS.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedētes numeri minores sint consequentibus, sitq; A minor, quam C. si vero sint maiores, & A maior sit quā B, & minor quam C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B ita C ad D; quæ pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quæ pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D.

Diff. 10.

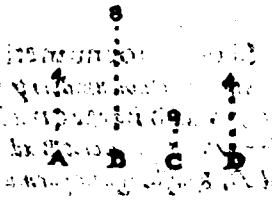
9. 10. huius

Con. dif. 10



Quod si A sit maior, quam B, & maior, quam C, ita demōstabimus. Quoniā vt A ad B, ita C ad D, quæ pars, vel partes est D ipsius C. eadem pars vel partes erit B ipsius A. ergo permutando quæ pars, vel partes est D ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius A. est igitur vt A ad C, ita B ad D. Deniq; si A sit minor, quā B, & maior quam C. hoc modo. Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quæ pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes est A ipsius B. permutādo igitur quæ pars est, vel partes C ipsius A, eadem pars vel partes est D ipsius B. ergo vt A ad C ita erit B ad D.

9. 10 huius.
Con. dif. 10



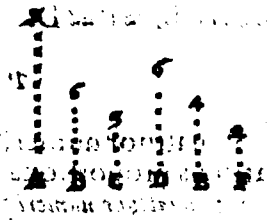
THEOREMA XII. PROPOS. XIV.

Si fuerint quotcumque numeri, & alij ipsis multitudine aequales, qui bini sumantur, & in eadem proportione; etiam ex aequali in eadem proportione erunt.

Sint enim quotcumq; numeri A B C, & alij ipsis multitudine aequales, qui bini sumantur, & in eadem proportione D E F; sitque vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex aequali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E, erit permutando vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E; ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutādo vt A ad C, ita D ad F. Quod oportebat demonstrare.

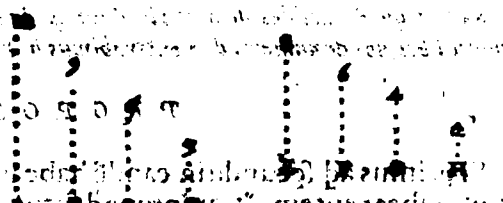
Ex antecedente.

Ex demonstratis ad 13 huius



F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures, quàm tres numeri proportionales fuerint A B C D E F G H; sitq; vt A ad B, ita E ad F; vt autem B ad C, ita F ad G; & vt C ad D, ita G ad H. similiter demōstrabimus vt ad ita esse A ad C, ita esse E ad G. & quia vt C ad D, ita



D, ita G ad H, rursus demonstrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modo in alijs.

Sed quoniam Euclides conuersam rationem, compositam, & diuisam, conuersionemq; rationis in numeris omisit; nos eas, ne quid desideretur hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

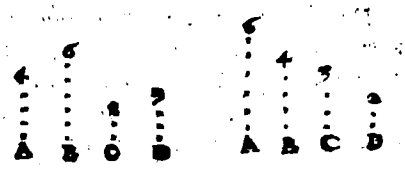
Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erũt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita esse D ad C. fi.n. A sit minor, quam B. quoniam est vt A ad B, ita C ad

Diffi. 20. *B, quæ pars vel partes est A ipsius B, eadem pars, vel eadẽ partes erit C ipsius D. ergo vt B ad A, ita est D*

Con. dif. 20 *ad C.*

Si vero A sit maior, quam B, rursus quoniam vt A ad B, ita C ad D, quæ pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. Vt igitur B ad A, ita est D ad C.



PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales sint, & componẽdo proportionales erũt

Sint quattuor numeri proportionales AB C D; & sit vt A ad B, ita C ad D. dico vt AB ad B ita esse CD ad D. nam cum sit vt A ad B, ita C ad D; & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt AB ad CD, ita est B ad D. Rursus igitur permutando vt AB ad B, ita CD ad D.



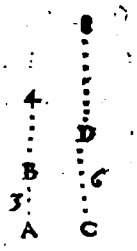
PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt numerus AB, qui ex duobus numeris constat ad numerum B, ita CD ex duobus CD constans ad ipsũ D. Dico vt A ad B, ita esse C ad D. Quoniam enim est vt AB ad B, ita CD ad D

12. huius. *erit permutando vt AB ad CD, ita B ad D. si autem fuerit vt totus ad totum,*

11. huius. *ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. ergo A ad C est vt AB ad CD. sed vt AB ad CD, ita erat B ad D. Ex eo igitur, quod demonstrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D; & rursus permutando vt A ad B, ita C ad D.*



PROPOSITIO IIII.

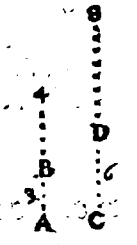
Si quattuor numeri proportionales sint, & per conuersionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt AB ad B, ita CD ad D. Dico vt AB ad A, ita esse CD ad C. quoniam enim est vt AB ad B, ita CD ad D, erit permutando vt AB ad CD, ita B ad D. quod cum sit vt

13. huius. *totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt*

11. huius. *AB ad CD; & rursus permutando, conuertendoq; vt AB, ad A, ita CD ad C.*

Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonstrauit in vigesima quarta quinti libri, nos de numeris demonstrabimus in hunc modum.

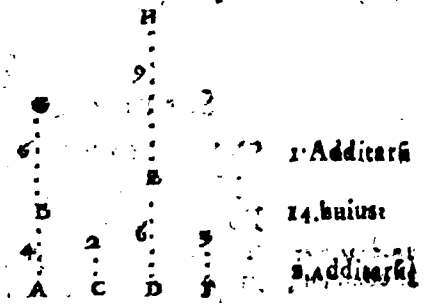


PROPOSITIO V.

Si primus ad secundum eandẽ habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem, & quintus ad secundum proportionẽ eandem, quã sextus ad quartum; & compositus primus, & quintus ad secundum eandem proportionem

nem habebit, quam tertius & ſextus ad quartum.

Primus enim numerus AB ad ſecundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq; quintus BG ad ſecundum C eandem proportionem, quam ſextus EH ad quartum F. Dico primum, & quintum AG ad ſecundum C eandem proportionẽ habere, quam tertius, & ſextus DH ad quartum F. Quoniam enim eſt vt BG ad C, ita EH ad F, erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex æquali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quare componẽdo vt AG ad GB, ita erit DH ad HE. Sed vt GB ad C, ita eſt EH ad F. rurſus igitur ex æquali vt AG ad C, ita eſt DH ad F.



1. Additarũ
14. huius
2. Additarũ

THEOREMA XIII. PROPO. XV.

Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem, & permutando vnitas tertium numerum æqualiter metietur, atque ſecundus quartum.

Vnitas.n. A numerum aliquem BC metiatur, alter autẽ numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipſum EF. quoniam.n. A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipſum EF; quot vnitates ſunt in BC, tot ſunt, & in EF numeri æquales ipſi D. diuidatur BC quidem in vnitates q̃ in ipſo ſunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales EK KL LF: erit igitur ipſorum BG GH HC multitudo æqualis multitudini ipſorum EK KL LF. & quoniam BG GH HC vnitates inter ſe æquales ſunt: ſuntq; numeri EK KL LF inter ſe æquales, & vnitatũ BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum, & vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes eſt igitur vt BG ad numerum EK, ita BC ad EF. æqualis autem eſt BG vnitas vnitati A, & EK numerus numero D. quare vt A vnitas ad numerum D, ita eſt BC ad EF. æqualiter igitur A vnitas numerum D metitur, atque BC ipſum EF. Quod demonſtrare oportebat.

A. B. G. H. C. D. K. L. F.

12. huius.

diff. 20.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipſis inter ſe æquales erunt.

Sint duo numeri A B, & A quidem ipſum B multiplicãs faciat C; B vero multiplicãs A faciat D. Dico C ipſi D æqualem eſſe. Quoniam.n. A ipſum B multiplicans fecit C, metietur B ipſum C per vnitates, quæ ſunt in A. metitur autem & E vnitas numerũ A per vnitates. quæ in ipſo ſunt. æqualiter igitur E vnitas numerũ A metitur, atq; B ipſum C. quare permutando vnitas E numerum B æqualiter metitur, atq; A ipſum C. Rurſus q̃ B ipſum A multiplicans fecit D A metietur ipſum D per vnitates, quae ſunt in B. metitur autem, & E vnitas numerũ B per vnitates, quae in ipſo ſunt. ergo E vnitas numerũ B æqualiter metitur, atq; A ipsũ D. ſed E vnitas numerũ B æqualiter

E. 1
A. a
B. 5. 1
C. 6
D 6

ſe. com. not.
6. com. not.
ex antecedẽtib.

4.com.not. B aequaliter metitur, atque A ipsum C. cum igitur A vtrumque ipsorum CD aequaliter metiatur, erit C ipsi D, aequalis. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSIT. XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros BC multiplicans faciat ipsos DE. Dico vt B ad C, ita esse D ad E. quoniam enim A ipsum B multiplicãs fecit D, metietur B ipsum D per vnitates, quae sunt in A. metitur autem & F vnitas numerum A per vnitates, quae in ipso sunt. aequaliter igitur F vnitas numerum A metitur, atque B ipsum D. ergo vt F vnitas ad numerum A, ita est B ad D. eadem ratione & vt F vnitas ad numerum A, ita C ad E. & vt igitur B ad D, ita C ad E; & permutando vt B ad C, ita D ad E, quod demonstrare oportebat.

19.com.not. 6. com. not. con, se, diff.

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5
F 6

F. C. COMMENTARIVS.

Idem sequetur etiam si numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipsos EFG. Dico vt B ad C, ita esse E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt supra, demonstrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita esse B ad E; & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaq; quoniam est vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita F ad E. Rursus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita est E ad F. & vt C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonstrare.

H 1
A 2
B 3
C 4
D 5
E 6
F 8
G 10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicãtes fecerint aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebũt quam multiplicantes.

Duo.n. numeri AB numerum aliquem C multiplicantes faciant ipsos DE. Dico vt A ad B, ita esse D ad E. Quoniam enim A ipsum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipsum D fecit. Eadem ratione & C ipsum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C duos numeros AB multiplicans ipsos DE fecit. est igitur vt A ad B, ita D ad E. Quod demonstrare oportebat.

7.huius. ex antecedente.

A 3
B 4
C 2
D 6
E 8

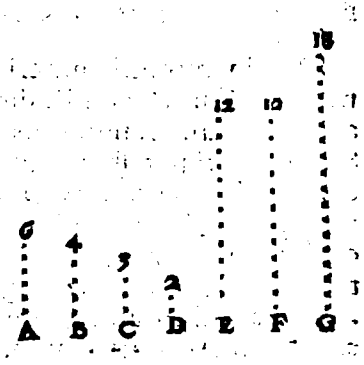
F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti similiter eãdem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. Quod eodem modo demonstrabimus.

THEOREMA XVII. PROPO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.



Sint quattuor numeri proportionales ABC D; sitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidē ipsum D multiplicans faciat E: B vero multiplicans .n. A ipsum C faciat G. & quoniā A ipsum quidē C multiplicans fecit G; ipsum vero D multiplicās E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipsos G E. est igitur vt C ad D, ita G ad E. vt autem C ad D, ita A ad B. quare & vt A ad B, ita G ad E. rursus quoniā A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicans fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipsos G F. vt igitur A ad B, ita est G ad F. sed & vt A ad B, ita G ad E. ergo & vt G ad E, ita est G ad F. quod cum G ad vtrūq; ipsorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E æqualis ipsi F. dico vt A ad B, ita esse C ad D. iisdem enim constructis quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit vt C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F æqualis. vt igitur G ad E, ita G ad F. sed vt G ad E, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita G ad F. vt autem G ad F, ita A ad B: & vt igitur A ad B, ita C ad D. quod demōstrare oportebat.

17. huius.

Ex antecedente.

A

17. huius.

B C

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd cum G ad vtrumq; ipsorum E F eādem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis.] *Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quam E vel F; erit vterq; ipsorum E F vel eadem pars, vel eadem partes ipsius G si vero G; sit minor, erit G vel eadem pars, vel eadem partes vtriusq; ipsorum E F inter se æquales sint necesse est.*

A

Est autem E ipsi F æqualis, vt igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuersam vigesimę diffinitionis. nam siue vterq; ipsorum E F eadem pars, vel eadem partes sit ipsius G, siue G eadem pars sit, vel eadem partes vtriusque ipsorum E F. erit vt G ad E, ita G ad F.*

2. 4. co. not.

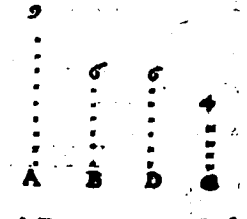
B

Vt autem G ad F. ita A ad B.] *cum enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.*

C

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si tres numeri proportionales fuerint qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.



Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; vt A ad B, ita B ad C. dico numerū, qui fit ex AC. æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur .n. ipsi B æqualis D. est igitur vt A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex B D. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B. æqualis etenim est B ipsi D. qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis fit ei, qui ex B. dico vt A ad B, ita esse B ad C. quoniā .n. qui ex AC fit æqualis est ei, qui fit ex B; qui autē fit ex B est æqualis ei, qui ex BD: erit vt A ad B, ita D ad C. sed B ipsi D est æqualis. vt igitur A ad B ita est B ad C. quod demōstrare oportebat.

Ex antecedente.

Ex antecedente.

THEO-

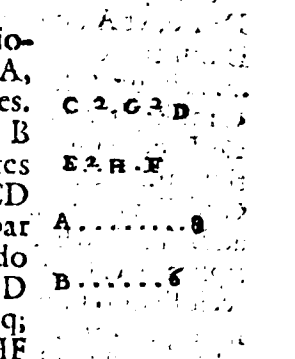
THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Minimi numeri eãdem, quam ipſi proportionem habẽtium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur; maior maiorem, & minor minorem.

Sit enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habẽtium CD EF. dico CD æqualiter metiri ipſum A, atq; EF ipſum B. numerus enim CD ipſius A non eſt partes. Si enim fieri poteſt, ſit CD partes ipſius A. ergo EF ipſius B eędem partes erit, quę CD ipſius A. quot igitur in CD partes ſunt ipſius A tot erunt & in EF partes ipſius B. Diuidatur CD quidem in ipſius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipſius B, EH HF. erit igitur ipſarum CG GD multitudo aequalis multitudinẽ ipſarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter ſe ſũt; ſunt autẽ & EH HF inter ſe æquales, atq; eſt ipſarum CG GD multitudo multitudini ipſarum EH HF æqualis: erit vt CG ad EH: ita GD ad HF. erit igitur & vt vnus antecedentium ad vnum conſequentiũ, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quare vt CG ad EH, ita eſt CD ad EF: ac propterea CG EH in eadẽ ſunt proportione, in qua CD EF, minores ipſis exiſtentes, quo fieri non poteſt: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandẽ, quã ipſi proportionem habentium non igitur CD ipſius A partes eſt. ergo eſt pars. & EF ipſius B pars eadẽ eſt quę CD ipſius A. æqualiter igitur CD ipſum A, atq; EF ipſum B metitur. Quod oportebat demonſtrare.

20. diffi.

* 12. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

* Erit vt CG ad EH, ita GD ad HF.] *Per conuerſam vigeſimæ diffinitionis. Nam cum CG GD inter ſe æquales ſint, itemque æquales inter ſe EH HF, ſi (G ſit minor, quàm EH, quę pars. vel partes eſt CG ipſius EH: eadem pars, vel partes erit GD ipſius HF. ſi vero ſit maior, quæ pars, vel partes EH ipſius CG, eadem erit pars, vel partes HF ipſius GD. ergo vt GG ad EH, ita GD ad HF.*

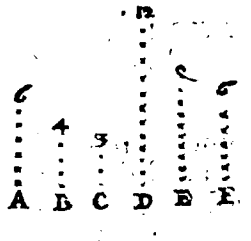
THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXII.

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem proportione; ſit autem perturbata eorum analogia: etiam ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres numeri ABC, & alij ipſis multitudine æquales qui bini ſumantur, & in eadem proportione DEF; ſitq; perturbata eorum analogia: & vt A quidem ad B, ita ſit E ad F; vt autem B ad C, ita D ad E. dico etiam ex æquali vt A ad C, ita eſſe D ad F. quoniam enim eſt vt A ad B, ita E ad F; qui fit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rurſus quoniam eſt vt B ad C, ita D ad E; qui fit ex CD æqualis erit ei, qui ex BE. oſtenſum autem eſt & qui fit ex AF aequalem eſſe ei qui ex BE. ergo & qui fit ex AF aequalis eſt ei, qui fit ex CD. vt igitur A ad C, ita D ad F. Quod demonſtrare oportebat.

29. huius.

29. huius.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter ſe numeri minimi ſunt eorum, qui eandem, quam ipſi proportionem habent.

ſunt.

Sint primi inter se numeri A B. Dico eos minimos esse eorũ, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent. si n. non ita sit, erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandem, quam A B proportionẽ habebunt. sint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium eos, qui eandẽ habent proportionem, æqualiter metiuntur maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens ãtecedentem, & consequẽs consequentem, numerus C ipsum A æqualiter metietur, atq; D ipsum B. quoties autem C metitur ipsum A, tot vnitates sint in E. ergo & D ipsum B metitur per vnitates, quæ sunt in E. & quoniam C metitur ipsum A per vnitates quæ sunt in E. numerus E ipsum A per vnitates, quę sunt in C, metietur. & eadem ratione E metietur B per vnitates, quæ sunt in D. ergo E ipsos AB metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis AB, qui eandem habeant proportionem. ergo AB minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. Quod oportebat demonstrare.

A..... 5
B.... 4
E——
C——
D——

21. huius.

8. com. not.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIV.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipsi proportionẽ habent, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipsi proportionem habent A B. Dico A B primos inter se esse. si enim nõ sunt A B inter se primi, eos aliquis numerus metietur metiatur; sitque C. & quòties C ipsum quidẽ A metitur, tot vnitates sint in D. quoties vero C metitur ipsum B, tot vnitates sint in E. & quoniam C ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in D, multiplicans C ipsum D fecit A. Eadem ratione, & C multiplicans E ipsum B fecit. Itaq; cum numerus C duos numeros DE multiplicans faciat AB, erit ut D ad E, ita A ad B. ergo DE in eadem sunt proportione, in qua AB, minores ipsis existentes. quod fieri non potest. non igitur A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B primi inter se sunt. Quod oportebat demonstrare.

A..... 6
B.....5
C.....
D——
E——

11. com. not.

17. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum ipsorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se AB, & aliquis numerus C ipsum A metiatur. Dico & B C inter se primos esse. Si enim B C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. & quoniam D ipsum C metitur, & C ipsũ A; & D ipsum A metietur, metitur autem & ipsum B. ergo D numeros AB metitur primos inter se existentes. quod fieri non potest non igitur B C numeros numerus aliquis metietur, ideoque B C inter se primi sunt. Quod oportebat demonstrare.

A.....6
B.....5
C.....5
D——

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & qui fit ex ipsis ad eum primus erit.

Duo enim numeri A B ad aliquem numerum C primi sint: & A ipsum B multiplicans faciat D. dico CD inter se primos esse. si enim CD non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur; sitq; E. & quoniam C A primi inter se sunt, & ipsum C metitur aliquis numerus E; erunt EA inter se primi. quotiens autem E ipsum D metitur, tot vnitates sint in F. quare & F metitur ipsum D per vnitates, quæ sunt in E. ergo E ipsū F multiplicans fecit D. sed & A multiplicans B ipsum D fecit. qui igitur fit ex E F est æqualis ei, qui ex A B. si uero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor numeri proportionales erunt. est igitur ut E ad A, ita B ad F. sunt autem A E inter se primi, & qui primi etiam minimi sunt. minimi uero eandem, quam ipsi, proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionē æqualiter metiūtur, maior maiorem, minor minorē hoc est ātecedēs ātecedentē, & cōsequens consequentē. ergo E ipsum B metitur. metitur autē & ipsum C. quare E ipsos B C metitur, primos inter se existētes. quod fieri nō potest. nō igitur C D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C D inter se primi sunt. Quod oportebat demonstrare.

ex antecedente.

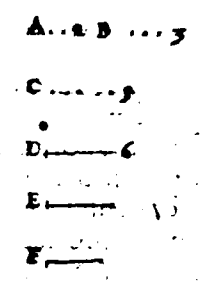
8.com not.

9. com. not.

19. huius.

23. huius.

21. huius.

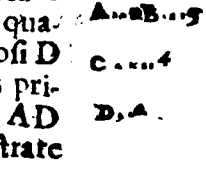


THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVII.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab vno ipsorum ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter se primi AB; & A se ipsum multiplicans faciat C. dico B C inter se primos esse. ponatur .n. ipsi A æqualis D & quoniam AB sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi D & DB inter se primi erunt. uterq; igitur ipsorum A D ad B primus est. ergo & qui ex AD fit primus erit ad B. sed qui fit ex AD est numerus C. quare C B inter se primi sunt. Quod demōstrare oportebat.

Ex antecedente.

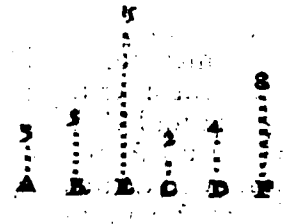


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterq; ad vtrumq; primi fuerint, & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

Duo enim numeri A B ad duos numeros C D vterq; ad vtrumq; primi sint: & A quidem ipsum B multiplicās faciat E. C vero multiplicans D faciat F. dico EF inter se primos esse. quoniā enim vterq; ipsorum A B ad C primus est, & qui fit ex A B ad C primus erit. qui autem fit ex A B est E. ergo E C primi inter se sunt. eadem ratione & E D primi sunt inter se. vterq; igitur ipsorum C D ad E primus est ac propterea, qui fit CD primus erit ad E. qui vero ex CD fit est numerus F. ergo EF primi inter se erunt. Quod demonstrare oportebat.

26. huius.

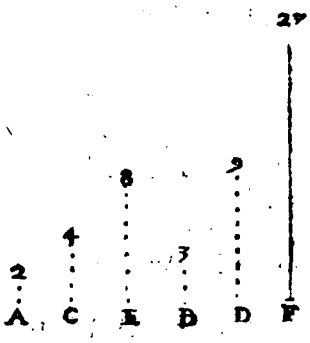


THEOREMA XVII. PROPO. XXIX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterq; seipsum multiplicās faciat aliquos: facti ex ipsis primi erunt inter se. & si numeri à principio positi eos, qui facti sunt, multiplicātes aliquos faciant

faciant,& ipſi inter ſe primi erunt:& ſemper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter ſe primi AB:& A ſe ipſum quidem multiplicans faciat C, multiplicãs vero C faciat E. & B ſe ipſum multiplicans D faciat;multiplicans autem D faciat ipſum F. Dico CD,& EF inter ſe primos eſſe. Quoniam enim AB primi inter ſe ſunt;& A ſe ipſum multiplicãs fecit C;erunt CB primi inter ſe. & quoniam CB inter ſe primi ſunt,& B ſe ipſum multiplicans fecit D; erunt CD inter ſe primi. Rurſus quoniã AB primi ſunt inter ſe, & B ſe ipſum multiplicãs D fecit; AD inter ſe primi erũt. Cum igitur duo numeri AC ad duos numeros BD vterq; ad vtrumque primi ſint,& qui ex AC fit ad eum, qui fit ex BD primus erit. Sed qui fit ex AC eſt numerus E qui vero ex BD fit eſt F.ergo E F primi inter ſe ſunt. Quod oportebat demonſtrare.



17.huius.

2.& antecedente.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint,& vterq; ſimul ad vtrũq; ipſorum primus erit.quod ſi vterque ſimul ad vnum aliquem ipſorum ſit primus, & numeri a principio poſiti inter ſe primi erunt.

Componantur .n. duo numeri inter ſe primi AB BC. Dico & vtrumq; ſimul videlicet A C ad utrumque ipſorum AB BC primum eſſe. Si.n.non ſint CA AB inter ſe primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur,& ſit D.Quoniam igitur D metitur ipſos CA AB;& reliquum BC metietur.metitur autem & BA. ergo D ipſos AB BC metitur,primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur CA AB numeros numerus aliquis metietur;ac propterea AB AC inter ſe primi ſunt. ergo CA ad utrumq; ipſorum eſt primus. Sint rurſus CA AB primi inter ſe. Dico & ipſos AB BC inter ſe primos eſſe. Si enim AB BC non ſint inter ſe primi,metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque D.& quoniam D metitur utrumque ipſorum AB BC, & totum CA metietur;metitur autem & AB. ergo D ipſos CA AB metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt. non igitur ipſos AB BC numeros numerus aliquis metietur, ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt.quod oportebat demonſtrare.

A... 2. B. 4. 8
D

13. eiuſd.no.

A

11.com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ergo CA ad utrumq; ipſorum eſt primus] *eodem enim modo demonſtrabitur & A C CB inter ſe primos eſſe.* A

Ideoq; AB BC inter ſe primi ſunt] *idem etiam ſequetur ſi AC CB inter ſe primi ſint. quod eodem modo demonſtrabimus.* B

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum,quem non metitur, primus eſt.

Sit primus numerus A, qui numerũ B nõ metiatur. Dico BA inter ſe primos

esse, si enim non sint B A inter se primi, metietur eos aliquis
A numerus. metiatur, & sit C. ergo C non est vnitas. & quoniã A ... 5 B ... 1
C ipsum B metitur, A vero non metitur ipsum B; non erit C
B idẽ qui A. & quoniã C ipsos B A metitur, & metietur ipsum C —
A primũ existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non
potest. non igitur ipsos B A numeros numerus aliquis metitur, quare A B inter se primi sunt. Quod demonstrare oportebat.

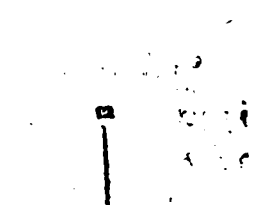
F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo C non est vnitas.] *Si enim eos vnitas sola metiretur, primi essent inter se. quod non ponitur.*

B Et quoniam C ipsos B A metitur, & metietur ipsum A primum existentem,
9. com not. cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest.] *Omnis .n. numerus se ipsum metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipsorum, qui à principio positi sunt, metietur.



Duo enim numeri A B se inuicem multiplicantes faciãt
ex antecedente. C, ipsum vero C metiatur aliquis numerus primus, qui
sit D. dico D vnum ipsorum A B metiri. ipsum enim A
non metiatur; atq; est D numerus primus. ergo A D pri
Com. not. 9. mi inter se sunt. & quoties D ipsum C metitur, tot vnitates sint in E. Quoniam igitur D metitur ipsum C per eas,
19. huius; quæ sunt in E vnitates; numerus D ipsum E multiplicans
23. huius. fecit C. sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui
21. huius. fit ex D E æqualis est ei, qui ex A B. est igitur vt D ad A ita B ad E. & sunt A D primi inter se, primi vero & minimi. sed minimi eos, qui eandẽ habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo D ipsum B metitur. similiter demonstrabimus, si D non metiatur B ipsum A metiri. quare D metitur vnum ipsorum A B. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPO. XXXIII.

Omnem numerum cõpositũ primus aliquis numerus metitur.

Sit compositus numerus A. dico primum aliquem numerũ
Diff. 15 ipsum A metiri. quoniam enim compositus numerus est A, A 8
metietur ipsum aliquis numerus metiatur; & sit B. & si quidẽ B 4
primus est B, manifestum est, quod quæritur. si vero compositus, ipsum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. & quo C ... 2
14. com. not. niam C metitur ipsum B, B vero ipsũ A; & C ipsum A metitur.
& si quidem primus est C. manifestum est quod quæritur. Si vero compositus
eum aliquis numerus metitur. & hac consideratione facta, relinquetur tandem
8. postul. aliquis numerus primus, qui præcedentem, & ipsum A metietur. si enim non relinquitur primus, metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor. quod in numeris fieri non potest. ergo relinquetur aliquis, qui & præcedentem metietur, & ipsum A. omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. Quod demonstrare oportebat.

ALITER

ALITER. Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam n. A compositus est, metietur ipsum aliquis numerus & sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur. Dico B primum esse. si enim non sit primus, compositus erit. ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; sit que C. erit C minor, quam B. & quoniam C ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & C ipsum A metietur. minor existens ipso B, qui est minimus omnium, qui metiuntur. quod est absurdum. non igitur B compositus numerus est. ergo est primus. quod demonstrandum fuit.

A.....2
B...3
C..

THEOREMA XXXII. PROPO. XXXIV.

Omnis numerus vel primus est vel cum primus aliquis numerus metitur.

Sit numerus A. Dico A vel primum esse, vel primum aliquē numerum ipsum A metiri. si quidem igitur primus est A, manifestum est quod quęritur. si vero compositus ipsum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus est, vel cum primus aliquis numerus metitur. Quod demonstrare oportebat.

A.. 3
A.....4
...3

Ex antecedente.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXXV.

Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum qui eandem quam ipsi proportionem habeant.

Sint dati quotcunq; numeri ABC. oportet inuenire minimos eorum, qui eādem, quam ipsi ABC, proportionē habeant. vel igitur ABC primi inter se sūt, uel non. si quidem primi, & minimi erunt eandem, quam ipsi proportionem habentiū. si vero non primi, sumatur ipsorum ABC maxima cōis mensura D & quotics D. vnumquemq; ipsorum ABC metitur, tot vnitates sint in vnoquoq; horum EFG. & vnusquisque igitur ipsorum EFG vnumquemq; ipsorum ABC metitur per eas, quæ sunt in D vnitates. ergo EFG ipsos ABC æqualiter metiuntur, ac propterea EFG in eadem sunt proportione, in qua ipsi ABC. Dico eos etiam minimos esse. si enim EFG non sint minimi, eandē, quam ipsi ABC, proportionem habentium, erunt aliqui ipsis EFG minores in eadem proportione, in qua ABC. sint HKL, æqualiter igitur H metitur ipsum A, ac vterq; ipsorū KL vtrumq; BC metitur. quoties aūt H metitur ipsum A, tot vnitates sint in M. & vterq; igitur KL vtrumq; BC metitur per eas, quæ sunt in M vnitates. & quoniā H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, & M ipsum A per vnitates, quæ sunt in H metietur. Eadem ratione & M vtrumque ipsorum BC metietur per vnitates quæ sunt in vtroq; KL. ergo M ipsos ABC metitur. Rursus quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M; H ipsum M multiplicans fecit A. Eadē ratione & E multiplicans D ipsum A fecit. ergo qui ex ED fit ei, qui fit ex HM, est æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D. maior autem est E, quam H. ergo & M quam D est maior, & ipsos ABC metitur. Quod fieri non potest. Ponitur n. D ipsorum ABC maxima communis mensura. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis EFG, in eadem proportione, in qua ABC. ergo EFG minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi ABC proportionem habent. Quod oportebat demonstrare.

A.....6
B.....8
C.....10
D.. 2
E... 3
F—4
G—5
H———
K———
L———
M———

13. huius.
2. huius.
18. huius.
21. huius.
8. com. not.
9. com. not.
19. huius.

F. C. COMMENTARIVS

Quoniam sæpe vsu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueniendi sint, libuit hoc loco sequens problema adnectere.

Numeris quotcumq; datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcumq; numeri deinceps proportionales A B C. oportet inuenire duos minimos numeros, qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeāt. Itaq; vel A B primi sunt inter se, vel non primi; & si quidem primi, & minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent; sin minus, sumatur ipsorum A C maxima communis mensura D: & quoties D metitur A, tot vnitates sint in E; quoties vero idem metitur B, tot vnitates sint in F. ergo & E F ipsos A B æqualiter metiuntur: ideoq; E F in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B. Dico E F etiam minimos esse. si enim non sint minimi, erunt aliqui numeri minores ipsis E F, qui eandem quam A B proportionem habeant. sint G H. ergo G æqualiter metitur A, atque H ipsum B. & quoties G metitur A, tot vnitates sint in K. quare & H metietur B per eas, quæ sunt in K vnitates. & ob id K metietur A per vnitates, quæ sunt in G, metietur quo B per vnitates, quæ sunt in H. ergo K ipsos A B metitur. & quoniam G ipsum A metitur per eas, quæ sunt in K vnitates, G multiplicans K fecit A. Rursus quoniam E metitur A per vnitates, quæ sunt in D; & E multiplicans D fecit A. qui igitur fit ex E D est æqualis ei qui ex G K: ac propterea vt E ad G, ita erit K ad D. est autem E maior quam G. ergo & K maior quam D, & ipsos A B metitur, quod fieri non potest. erat enim D ipsorum A B maxima communis mensura non igitur sunt aliqui numeri minores ipsis E F, qui eandem, quam ipsi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B, ita est B ad C, erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua A B C. Inuenti igitur sunt minimi numeri E F, qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant. quod facere oportebat.

A....4
B....6
C.....9
D..2
E..2
F...3
G—
H—
K—

23.huius. 2.huius. 19 huius. 21.huius. 8. com. not. 19.huius.

PROBLEMA IV. PROPO. XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati duo numeri A B oportet inuenire quem minimum numerum metiantur. numeri enim A B vel primi inter se sunt, vel non. sint primum A B inter se primi & A ipsum B multiplicans faciat C. ergo & B multiplicans A ipsum C fecit. ac propterea numeri A B ipsum C metiuntur. Dico etiam C minimum esse. si enim nō ita sit, metientur A B numerum aliquem minorem, quā C. metiantur ipsum D. & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in E; quoties autem B metitur D, tot vnitates sint in F. ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D; B vero multiplicans F ipsum D fecit. quare numerus, qui ex A E fit est æqualis ei, qui fit ex B E. vt igitur A ad B, ita est F ad E. & sunt A B primi. primi autem, & minimi, sed minimi eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipsum E metitur, & consequens consequentem. & quoniam A numeros B E multiplicans fecit C D, erit vt B ad E, ita C ad D. metitur autem B ipsum E. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. q fieri nō potest. nō igitur A B metiuntur aliquē numerū minorē ipso C, quādo A B primi inter se fuerint. ergo A B ipsum C minimū existentē metiūtur. Sed nō sint A B primi inter se. & sumātur minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, q sint F E. æqualis igitur est, q ex A E fit ei, q ex B F. & A ipsum E multiplicans faciat C. ergo & B multi-

A...3 B...4
C.....12
D——
E——
F——

16.huius. 19.huius. 23 huius. 21.huius. 13.huius. 9.huius.

multiplicãs F ipsum C fecit. quare A B ipsum C metiũtur.

Dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A B aliquem numerum minorem, quam C. metiãtur ipsum D & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in G. quoties autẽ B metitur D, tot vnitates sint in H. ergo A quidẽ ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsũ D, fecit. qui igitur ex A G fit est æqualis ei, qui fit ex B H. vt igitur A ad B, ita H ad G. sed vt A ad B ita F ad E. ergo & vt F ad E, ita H ad G; & sunt F E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem & minor minorem. quare E ipsum G metitur. & quoniam A numeros E G multiplicans ipsos C D fecit, ut E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipsum G ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. Quod fieri non potest. Non igitur metiuntur A B aliquem numerum minorem, quàm C. Ergo A B ipsum C minimum existentem metientur. Quod demonstrare oportebat.

F ..2A. ..4
E ...3D. 6
C 12
D ——— 9. com. not.
G ——— 39 h. ius, 21. huius.
H ——— 18. huius.

SCHOLIVM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non possunt. vt est 15. eo enim minorem duo numeri 3. & 5. non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E. Dico & E ipsum C D metiri. Si enim E non metitur C D E, metiens F D relinquat se ipso minorem C F. & quoniam A B ipsum E metiuntur, E uero ipsum D F, & A B metientur D F. sed & metiuntur totum C D ergo & reliquum C F minorem ipso E metientur. Quod fieri non potest. Non igitur E ipsum C D non metitur. Quare ipsum metiatur necesse est. Quod demõstrare oportebat.

A ..2
B ...3
E 6
C ——— F ——— D
12. com. not. 13. com. not.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXIII.

Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerũ metiantur.

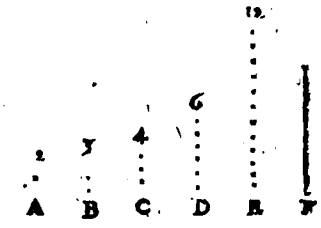
Sint dati numeri A B C. Oportet inuenire quem minimum metiantur numerum. Sumatur n D, quem minimum duo A B metiuntur. itaq; C uel metitur D, uel non metitur. Metiatur primum. Sed & A B metiuntur ipsum D. ergo A B C ipsum D metientur. Dico & minimum. Si enim non, metientur A B C quendam numerum minorem ipso D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiuntur ipsum E, & A B ipsum E metiũtur. ergo & minimus, quem metiuntur A B ipsum E metietur. minimus autẽ, quem metiuntur A B, est D. quare D metitur ipsum E, maior minorẽ. Qđ fieri non potest. Non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipso D minorem. Ergo A B C minimũ D metiuntur. Nõ metiatur autẽ C ipsum D. & sumatur minimus

A B C D E
Ex antecedente. 36. huius

nimus numerus E, quem C D metientur. Itaq; quoniã A B metiuntur ipſum D, D vero ipſum E; & A B ipſum E; metientur. metitur autem & C ipſum E. ergo A B C ipſum E metiuntur. dico & minimum. ſi .n. nõ, metientur A B C numerum minorẽ ipſo E. metiantur F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipſum F metientur. ergo & minimus, quem A B C metiũtur, metietur ipſum F: minimus autem quem A B C metiuntur, eſt D. quare D ipſum F metitur, & metitur C ipſum F. ergo D C ipſum F metientur; ac propterea minimus, quem metiuntur D C, metietur & F. ſed minimus, quem metiuntur D C, eſt E ergo E ipſum F metitur, maior minorem. quod fieri non poteſt. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum minorem ipſo E. ergo numerum E minimum exiſtentem ipſi A B C metiuntur. Quod demonſtrare oportebat.

12. com. not.

11 ante cẽ dente;



THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, menſus partem habebit à metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur, dico A partem habere ab ipſo B denominatam. quoties .n. B ipſum A metitur, tot vnitates ſint in C. quoniam igitur B metitur ipſum A per eas, quæ ſunt in C, vnitates; metitur autem & D vnitas ipſorum C per vnitas, quæ in ipſo ſunt: & D vnitas ipſum C numerum æqualiter metietur, atq; B ipſum A. quare permutando vnitas D ipſum B numerum æqualiter metietur, atq; C ipſum A. quæ igitur pars eſt vnitas D ipſius B numeri, eadem eſt pars, & C ipſius A. ſed vnitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata. ergo & C ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B. quare A partem habet C ab ipſo B denominatam. Quod oſtendere oportebat.

A 12
B . . . 3
C . . . 4
D . 1

15. huius,

3. com not.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XXXX.

Si numerus partem quamcumq; habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

Numerus enim. A partem habeat quamcũq; B; & ab ipſo B denominatus ſit numerus C. dico C ipſum A metiri. quoniam enim B ipſius A pars eſt denominata ab ipſo C. eſt autem & D vnitas ipſius C numeri pars ab eo denominata. quæ igitur pars eſt vnitas D ipſius C numeri, eadem pars eſt & B ipſius A. ergo vnitas D æqualiter metitur ipſum B numerum, atq; B ipſũ A. & permutando vnitas D ipſum B numerum æqualiter metitur, atq; C ipſum A. ergo C ipſũ A metitur. Quod oportebat demonſtrare.

A 12
B . 2
C 6
D . 1

3. com. not.

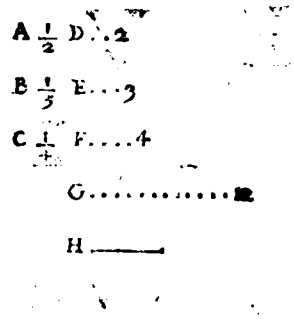
15. huius.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XXXXI.

Numerum inuenire, qui minimus exiſtẽs datas partes habeat.

Sint

Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus sit habeat partes A B C. sint ab ipsis A B C partibus denominati numeri D E F. & sumatur minimus numerus G, quem ipsi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F metiuntur ipsum G; habebit G partes ab ipsis D E F denominatas: partes autem denominatæ ab ipsis D E F sunt A B C. ergo G partes A B C habet. dico & minimũ esse si .n. G non existens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. sit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, cum metiẽtur numeri ab ipsis A B C partibus denominati; sunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipsum H metientur; atque est H minor ipso G. quod fieri non potest. non igitur erit aliquis numerus minor ipso H, qui partes A B C habeat. Quod oportuit demonstrare.



58. huius.

59. huius.

Finis Libri Septimi.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
Liber Octauus
CVM COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A BCD, quorum extremi AD primi inter se sint. Dico ABCD minimos esse omnium, qui eandem, quã ipsi proportionem habent. si enim non, sint minores ipsis ABCD numeri EFGH, & eandem proportione. Et quoniam ABCD sunt in eadem proportione, in qua EFGH, atque est ipsorum ABCD multitudo aequalis multitudini ipsorum EFGH: erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H: & sunt AD primi; primi autem, & minimi numeri aequaliter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem & consequens consequentem. ergo A ipsum E metitur, maior minuorem. quod fieri non potest. nõ igitur EFGH minores ipsis ABCD existentes in eadem sunt, in qua ipsi, proportione; ac propterea ABCD minimi sunt omnium, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. Quod demonstrare oportebat.

14. septimi.

21. septimi.

A.....8
B.....12
C.....18
D.....27
E
F
G
H

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcũque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quã habet A ad B. oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumq; quis imperauerit in proportione A ad B, imperẽtur quattuor: & A se ipsum multiplicãns faciat C, multiplicans vero B faciat D, & B se ipsum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans CDE ipsos FGH faciat, B vero multiplicans E faciat K. Qm igitur A se ipsũ multiplicãs fecit C, multiplicãs vero B ipsum D fecit; numerus A duos numeros AB multiplicans fecit CD. est igitur vt A ad B, ita A ad A. rursus quo-

17. septimi.

niam

niam A ipsum B multiplicans fecit D, & B seipsum multiplicans fecit E; vterq; ipsorum AB multiplicans B vtrumq; ipsorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. & quoniã A numeros CD multiplicans ipsos FG fecit, vt C ad D, ita erit F ad G. vt autẽ C ad D, ita erat A ad B. & vt igitur A ad B, ita F ad G. rursus quoniam A numeros DE multiplicãs fecit GH, erit ut D ad E, ita G ad H. sed ut D ad E, ita A ad B. ergo & ut A ad B, ita G ad H. quòd cum A B ipsum E multiplicantes faciant HK; erit ut A ad B, ita H ad K, ostensum autem est & ut A ad B, ita esse & F ad G, & G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H & H ad K. numeri igitur CDE, & FGHK proportionales sint in proportione, quã habet A ad B. dico etiam minimos esse. Quoniam n. A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; minimi uero, & primi sunt inter se: erunt ipsi AB inter se primi. & vterq; quidem ipsorum A B seipsum multiplicans utrumq; C E fecit; uterq; uero C E multiplicans fecit utrumq; F K. ergo C E, & FK primi inter se sunt. si autem sint quotcumq; numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipsi proportionem habentium. ergo CDE, FG HK minimi sunt omnium, qui eandem quam A B proportionem habent. Quod oportebat demonstrare.

A..2
B...3
C....4
D.....6
E.....?
F.....8
G.....12
H.....13
K.....24

18. septimi.
13. septimi.
23. septimi.
29. septimi.
Ex antecedente.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipsi proportionem habentium: extremos eorũ quadratos esse: si vero quattuor esse cubos.

A.....8
B.....12
C.....18
D.....27

THEOREMA II. PROPOSITIO. III.

Si sint quotcũq; numeri deinceps proportionales, minimi omniũ, qui eadẽ, quã ipsi proportionem habent; eorum extremi primi inter se erunt.

E..2
F...3
G....4
H.....6
K.....9
L..... 8
M.....12
N 18
O.....27

Sint quotcumq; numeri deinceps proportionales ABCD minimi omniũ qui eandem, quã ipsi, proportionẽ habent. dico eorum extremos A D inter se primos esse. sumantur .n. duo numeri minimi in proportione ipsorũ A BCD, qui sint EF, tres vero GHK, & semper de inceps vno plures, quo ad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorũ ABCD. sumantur. & sit LM MX. extremi igitur ipsorũ

Ex antecedente.

LX primi inter se sunt. Quoniam enim EF primi sunt, & vterque ipsorum se ipsum multiplicans vtrumque GK fecit; vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX: erunt & GK, & LX primi. & quoniam ABCD minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; sunt autem & LMNX minimi in eadem proportione, in qua ABCD; estque ipsorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipsorum LMNX: erit vnusquisque ipsorum ABCD vnicuique ipsorum LMNX æqualis. Ergo A quidem est æqualis L, B vero ipsi M, C ipsi N, & D ipsi X. quod cum LX primi sint inter se, & L ipsi A æqualis, & X ipsi D & AD inter se primi erunt. Quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Sumantur enim duo minimi numeri in proportione ipsorum ABCD *ex eo quod ad 35 huius addidimus.*

PROBLEMA II. PROPO. IV.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

Sint datæ proportiones in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportione A ad B, & in proportione C ad D; & adhuc in proportione E ad F. Sumatur.n. minimus numerus, quē BC metiuntur; sitq; G. & quoties B metitur G, totiesA ipsum H metiatur; quoties vero C ipsum G metitur, toties & D metiatur K. itaque E ipsum K vel metitur, vel nō metitur. metiatur primum. & quoties E metitur K. toties F ipsum L metiatur, & quoniā A æqualiter metitur H, atq; B ipsum G; erit vt A ad B, ita H ad G. Eadem rōne & vt C ad D, ita G ad K, & adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales sunt in proportione A ad B, & in proportione C ad D, & adhuc in proportione E ad F. Dico & minimos esse. Si .n. non sint HGKL deinceps minimi in pportionib. A ad B, C ad D, & E ad F; erūt aliqui numeri minores ipsis HGKL deinceps minimi in eisdē proportionib. sint NXMO. & quoniam est vt A ad B. ita N ad X, & sunt AB minimi; minimi autem eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorē, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentē, & consequens consequentem: metietur B ipsum X. Eadem ratione & C ipsum X metietur. quare BC metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur BC, ipsum X metietur. minimus autē quem metiuntur BC, est G. ergo G metietur X, maior minorem. Quod fieri non potest. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis HGKL deinceps minimi in proportione A ad B, C ad D, & E ad F. Sed non metiatur E ipsum K; & sumatur minimus numerus, quem ipsi EK metiuntur; sitque M quoties autem K metitur M, toties & vterque ipsorum HG vtrumque NX metiatur, & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipsum N æqualiter metitur, atq; G ipsum X; erit vt H ad G, ita N ad X. vt autem H ad G, ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M. rursus quoniā E ipsum M æqualiter metitur, atq; F ipsum O; erit vt E ad F, ita M ad O. quare NXMO deinceps pportionales sunt in proportionib. A ad B, C ad D, & E ad F. Dico minimos quoq; esse. Si.n. nō sint NXMO deinceps minimi

A ... 2 B ... 5
C ... 3 D ... 4
E ... 5 F ... 6
G ... 6
H ... 15
K ... 20
L ... 24

36. septimi.

35. septimi.

21. septimi.

37. septimi.

36. septimi.

7. septimi.

in

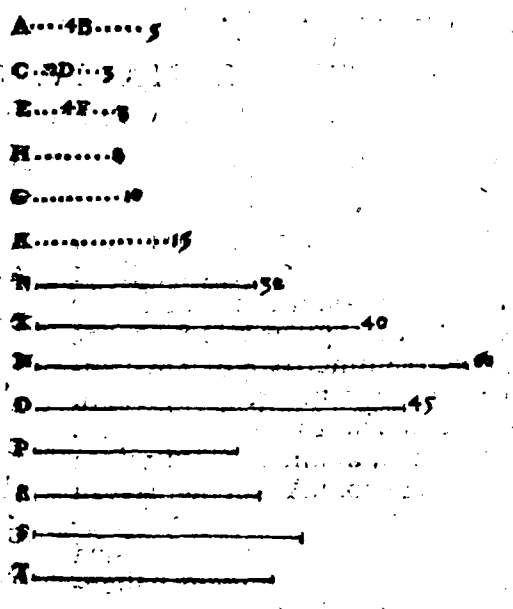
in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F, erunt aliqui numeri minores ipsis N X M O deinceps minimi in eisdem proportionibus. sint P R S T. & cum sit vt P ad R, ita A ad B; sintq; A B minimi; minimi vero eos qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem: numerus B ipsum R metietur. 21. septimi.

B

Eadem ratione & C metietur ipsum R. ergo B C ipsum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiuntur B C, ipsum R metietur. minimus autem, quem metiuntur B C, est G. ergo G metitur ipsum R. atq; est vt G ad R, ita K ad S. quare & K ipsum S metitur: metitur autē & E ipsū S; ideoq; E K ipsum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipsum S. sed minimus, quem metiuntur E K, est M. ergō M ipsum S metietur, maior minorem. quòd fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N X M O deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo N X M O deinceps minimi sunt in eisdem proportionibus. quod demonstrare oportebat.

37. septimi

C



F. C. COMMENTARIVS.

A

Eadem ratione & C ipsum X metitur.] *Quoniam enim est vt C ad D, ita X ad M; & sunt C D minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur: numerus C ipsum X metietur.*

B

Eadem ratione & C metietur ipsum R.] *Est enim vt C ad D, ita R ad S: sintq; C D minimi. ergo ob iam dictam causſam C ipsum R metietur.*

C

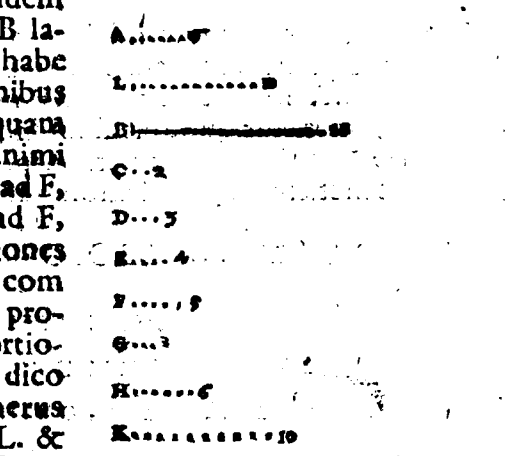
Atq; vt G ad R, ita K ad S.] *Est enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad R, ita K ad S.*

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri inter se proportionē habēt ex lateribus cōpositā

Sint plani numeri A B, & ipsius quidem A latera sint C D numeri: ipsius vero B latera sint E F. dico A ad B proportionē habere ex lateribus cōpositam. proportionibus .n. datis. uidelicet quī hōt G ad E, & quam D ad F, sumātur numeri deinceps minimi G H K in proportionibus C ad E, & D ad F, sitq; ut C ad E ita G ad H: ut autē D ad F, ita H ad K. ergo G H K inter se proportiones habent laterum. sed proportio G ad K composita est ex proportione G ad H, & proportione H ad K. quare G ad K proportionem habet ex lateribus compositam. dico igitur ut A ad B. ita esse G ad K, numerus enim D ipsum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit ut C ad

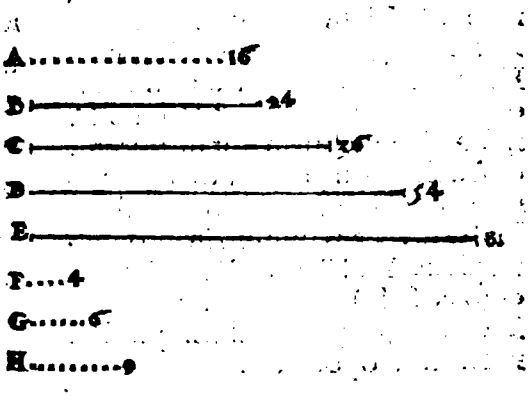
Ex antecedente.



E, ita A ad L. vt autem C ad E, ita G ad H. ergo & vt G ad H, ita A ad L. rursus quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipsum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. sed vt D ad F, ita est H ad K. & vt igitur H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est & vt G ad H, ita A ad L. quare ex æquali vt G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compositam ex lateribus. Ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compositam. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IV. PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis vllum metietur.



Sint quotcumque numeri deinceps proportionales ABCDE, & A ipsum B non metiatur. Dico neque alium aliquem vllum metiri. At vero numeros ABCDE deinceps sese non metiri, perspicuum est, neque. n. A ipsum B metitur. Dico neq; alium aliquem vllum metiri. Dico. n. A non metiri ipsũ C. nam quot sunt ABC, tot sumãtur minimi numeri eandem, quã ipsi ABC proportionem habentes. & sint FGH. Quoniam igitur FGH in eadem sunt proportione, in qua ABC, atque est ipsorum ABC multitudo æqualis multitudini ipsorum FGH; erit ex æquali vt A ad C, ita F ad H. & quoniam est A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B; neque F ipsum G metietur. non igitur F vnitas est; vnitas enim omnem numerum metitur. & sunt FH primi inter se. ergo neque F metitur ipsum H. atque est vt F ad H, ita A ad C. neque igitur A ipsum C metietur. similiter demonstrabimus neque alium aliquem vllum metiri. Quod demonstrare oportebat.

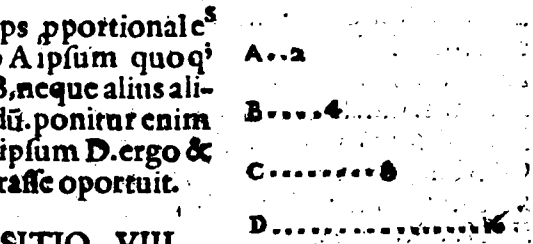
35. septimi.

14. septimi.

3. huius.

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum, & secundum metietur.



Sint quotcumque numeri deinceps proportionales ABCD; & A ipsum D metiatur. Dico A ipsum quoq; B metiri. si. n. A non metitur ipsum B, neque alius aliquis vllum metietur. quod est absurdũ. ponitur enim A ipsum D metiri. metitur autem A ipsum D. ergo & A ipsum B metietur. Quod demonstrasse oportuit.

Ex antece

THEORMAE VI. PROPOSITIO. VIII.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales cecident, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eandem, quam ipsi, proportionem habentes, cadent.

Inter duos enim numeros AB cadant numeri CD deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter AB, totidem & inter EF deinceps proportionales cadere. Quot enim numeri sunt ACDB, totidem sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi ACDB proportionem habentiū GHKL. ergo extremi ipsorum GL primi inter se sunt. & quoniam ACDB ad ipsos GHKL in eadem sunt proportione; atque est ipsorum ACDB multitudo æqualis multitudini ipsorum GHKL; erit ex æquali vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F. & vt igitur G ad L, ita E ad F; & sunt GL primi. Sed primi, & minimi; minimi verò eos qui eandem proportionem habent, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo G æqualiter metitur ipsum E, atq; L ipsum F. quoties autem G metitur ipsum E, toties & vterq; ipsorum H K vtrūq; M N metiatur. numeri igitur GHKL ipsos EMNF æqualiter metiuntur. Ideoq; GHKL in eadem sunt proportione, in qua ipsi EMNF. at GHKL similiter in eadem sunt proportione, in qua ACDB. ergo ACDB in eadem proportione erunt, in qua EMNF. Sed ACDB sunt deinceps proportionales. ergo & EMNF deinceps proportionales erunt. Quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem deinceps proportionales & inter EF cadent. Quod demonstrare oportebat.

A..2
C....4
D.....8
B.....16 — 35. septimi
G.1 — 3. huius.
H..2
K....4 — 14. septimi.
L.....8 — 23. septimi.
E...3
M.....6 — 21. septimi.
N.....12
F.....24 — 20. diffi. septimi.

THEOREMA VII. PROPO. IX.

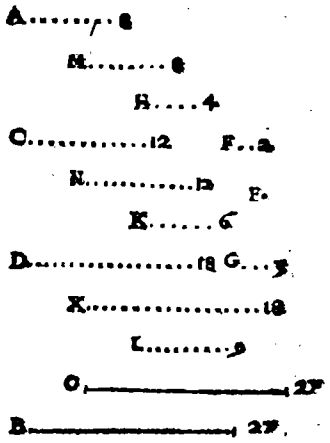
Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A B. & inter ipsos deinceps proportionales cadant CD; exponatur q; vnitas E. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A B, totidem & inter vtrumq; ipsorum A B, & vnitatem E numeros deinceps proportionales cadere. sumantur. n. duo quidem numeri minimi FG in eadē proportione, in qua sunt ACDB; tres vero H K L, & semper deinceps vno plures; quo ad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorū ACDB. sumantur, & sint MNXO. itaq; manifestum est F se ipsum quidem multiplicantem fecisse H, multiplicantem vero H fecisse M: & G se ipsum quidem multiplicantem fecisse L, multiplicantem vero L fecisse O. & quoniam MNXO minimi sunt qui eādem, quam ipsi FG, proportionem habent; sunt autem & A C D B minimi eandem quam FG proportionem habentium; atque est ipsorum MNXO multitudo æqualis multitudini ipsorum ACDB; erit vnusquisque ipsorum MNXO vnicuiq; ipsorum ACDB æqualis. æqualis igitur est M ipsi A, & O ipsi B. & quoniam F se ipsum multiplicans fecit H, metitur F ipsum H per vnitates, quæ sunt in

A.....8
M.....8
H....4
C.....12 F..2
N.....12 E.
K.....6
D.....18 G..3
X.....18
O.....27
B.....27

A — 2. huius. — 10. septimi

6.com. nor. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas numerum
con.20.diff. F æqualiter metitur, atque F ipsum H. est igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rursus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipsum M per vnitates, quę sunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ con.20.diff. in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerũ F metitur, atque H ipsum M. ergo vt E vnitas ad numerum F, ita H ad M. ostensum est autem & B vt E vnitas ad numerum F, ita esse F ad H. & vt igitur E vnitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. sed M est æqualis ipsi A. quare vt E vnitas A ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Eadem ratione & vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter vtrumq; ipsorum AB, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent. Quod oportebat demonstrare.



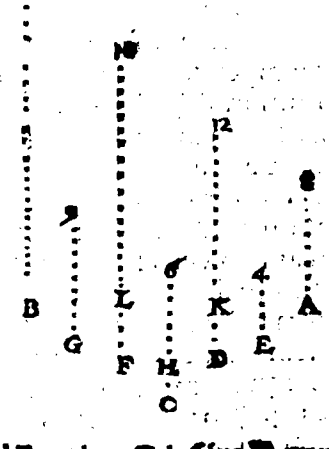
F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri FG in eadem proportione, in qua sunt ACDB) *Ex problemate, quod nos ad 35. septimi conscripsimus.*

B Eadem ratione, & vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B) *quoniam.n. G seipsum multiplicans fecit L, metitur G ipsum L per vnitates, quæ sunt in ipso G: metitur autem & E vnitas ipsum G per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas æqualiter metitur numerum G, atque G ipsum L. quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rursus quoniam G multiplicans L fecit O, numerus L ipsum O metietur per vnitates, quæ sunt in G. sed E vnitas metitur ipsum G per vnitates, quæ in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas metitur G, atque L ipsum O. ergo vt E vnitas ad G, ita est L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc est ad B, qui ipsi O est æqualis. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales; totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadent.



Inter duos enim numeros AB, & unitatem C numeri deinceps proportionales cadant DE, & FG. Dico quot inter vtrumque ipsorum AB, & unitatẽ C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos AB numeros deinceps proportionales cadere. numerus.n. D. ipsum F multiplicans faciat H: utercq; autem ipsorum DF ipsum H multiplicans faciat utrumq; 19.VII. KL. & quoniã est vt G unitas ad numerũ D, ita D ad E, unitas C ipsum D numerum

sum æqualiter metietur, atque D ipsum E. Sed vnitas C numerum D metitur per vnitates, quę sunt in D. ergo & numerus D ipsum E per vnitates, quæ sunt in D metitur: ac propterea numerus D seipsum multiplicans fecit E. rursus quoniam vt vnitas C ad D numerum, ita est E ad A; vnitas C ipsum D numerum æqualiter metitur, atque E ipsum A. sed vnitas C ipsum D numerum metitur per vnitates, quę sunt in D. quare & E ipsum A per vnitates, quæ sunt in D metietur: ideoq; D ipsum E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F se ipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero G ipsum B fecit. & quoniã D se ipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eãdem causſam vt D ad F, ita H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rursus quoniã D vtrumq; ipsorum E H multiplicans fecit vtrumq; AK, erit vt E ad H, ita A ad K. sed vt E ad H, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad K. rursus quoniam vterq; D F ipsum H multiplicans vtrumque KL fecit, vt D ad F, ita est K ad L, vt autem D ad F, ita erat A ad K. & vt igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque HG multiplicans vtrumque LB faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. sed ut H ad G, ita D ad F. ergo & ut D ad F, ita L ad B. ostensum autem est & ut D ad F, ita & A ad K, & K ad L, & L ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales sunt. quot igitur inter vtrumq; ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter A B numeri deinceps proportionales cadent. Quod demonstrare oportebat.

6. com. not.
9. com. not.
20. Diff.
9. com. not.
17. septimi
19. septimi
18. septimi.
17. septimi.

THEOREMA IX. PROPO. XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet latus.

Sint quadrati numeri AB; & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos AB vnum medium proportionalem cadere, & A ad B duplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E. & quoniam A numerus quadratus est, cuius latus C; numerus C seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione & D se ipsum multiplicans fecit B. Quoniam igitur C vtrumq; ipsorum CD multiplicans vtrumque AE fecit, ut C ad D, ita erit A ad E rursus quoniam C multiplicans D ipsum E fecit, & D se ipsum multiplicans fecit B, duo numeri CD vnum, & eundem numerũ D multiplicantes ipsos EB fecerunt. est igitur ut C ad D, ita E ad B. sed ut C ad D, ita erat A ad E. ergo & ut A ad E, ita E ad B. inter numeros igitur AB vnus medius proportionalis E cadit. Dico & A ad B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt AEB, habebit A ad B duplam proportionem eius, quam habet A ad E. Vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.

A....4
C...2
E.....6
D...3
B.....9

18. Diff.
17. septimi.
18. septimi.
Diff. 13.

THEOREMA X. PROPOSITIO XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadũt, & cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi AB; & ipsius quidẽ A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos AB duos medios proportionales cadere; & numerum A ad B triplã habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus n. C seipsum multiplicãs faciat E; multiplicans vero D ipsum F faciat, & D se ipsum multiplicãs faciat

clat G, & vterq; ipsorum CD multiplicans F vtrumq; HK faciat. Quoniam igitur cubus est A, & eius latus C, numerus C se ipsum multiplicans fecit E; multiplicans vero E ipsum A fecit. similiter & D se ipsum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipsum B. & quoniam
17. septimi. C vtrumq; ipsorum CD multiplicans vtrumq; EF fecit, vt C ad D, ita est E ad F. eadem ratione, & vt C ad D, ita F ad G. rursus quoniam C vtrumq, ipsorum EF multiplicãs fecit vtrumq; AH, erit vt E ad F, ita A ad H. vt autem E ad F,
8. septimi. ita C ad D. & vt igitur C ad D, ita A ad H. rursus quoniam vterq; ipsorum CD multiplicans F vtrumq; HK fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. rursus quoniam D vtrumq; FG multiplicans fecit vtrumq; KB, erit vt F ad G, ita K ad B. vt autem F ad G, ita C ad D. & vt igitur C ad D, ita K ad B. ostẽsum autem est vt C ad D, ita esse A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipsos AB duo HK medij proportionales cadunt. dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri proportionales sunt AHKB, habebit A ad B tri-
13. diffi. plam proportionem eius, quã habet A ad H. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam G habet ad D. Quod demonstrare oportebat.

A.....8
H.....12
K.....18
B.....27
C..2
D..3
E..4
F..6
G..9

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si sint quotcumq; numeri deinceps proportionales, & vnusquisq; se ipsum multiplicans faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt. & si positi à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, & ipsi proportionales erunt. & semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumq; numeri proportionales ABC; sitque vt A ad B, ita B
13. ad C. & ipsi ABC se ipsos multiplicantes faciant DEF: ipsos vero DEF multiplicantes faciant GHK. dico numeros DEF & GHK deinceps proportionales esse. numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L. vterq; autem ipsorum AB multiplicans L faciat vtrumq; MN. & rursus B quidẽ multiplicans C ipsum X faciat; vterq; vero ipsorum BC multiplicans X faciat vtrumq; OP. similiter ijs, quæ dicta sunt, ostendemus DLE, & GMNH deinceps proportionales esse in proportione, quæ est A ad B: & adhuc EXF, & HOK deinceps esse proportionales in proportione B ad C. atq; est vt A ad B, ita B ad C. ergo & DLE in eadẽ sũt proportione, in qua EXF, & præterea GMNH in eadem proportione, in qua HOK. estque ipsorum quidem DLE multitudo

A...2...4...8
D...4
L...8
E...16
X...32
F...64
G...128
M...256
N...512
H...1024
O...2048
P...4096
K...8192

multitudo multitudini ipſorum EXF æqualis. multitudo autem ipſorum GM NH æqualis multitudini ipſorum HOPK. ex æquali igitur vt D ad E, ita E ad F. 14. ſeptimi.
vt autem G ad H, ita H ad K. Quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter ijs, quæ dicta ſunt, oſtendemus DLE, & GMNH deinceps pportionales eſſe in proportione, quæ eſt A ad B] *quoniam enim A duos numeros AB multiplicans fecit DL erit; vt A ad B, ita D ad L. rurſus quoniam B duos numeros AB multiplicans ipſos LE fecit; vt A ad B, ita erit L ad E. ſed vt A ad B, ita eſt D ad L. vt igitur A ad B, ita eſt & D ad L, & L ad E. quare ſequitur DLE deinceps proportionales eſſe in eadem proportione, in qua eſt A ad B. & quoniam A duos numeros DL multiplicans fecit ipſos GM, erit vt D ad L hoc eſt vt A ad B, ita G ad M. rurſus quoniam duo numeri AB multiplicantes L ipſos MN fecerunt, vt A ad B ita erit M ad N. Præterea cum B duos numeros LE multiplicans faciat NH, erit vt L ad E, videlicet vt A ad B, ita N ad H. Sed vt A ad B, ita erat, & G ad M & M ad N. Et igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo GMNH deinceps proportionales ſunt in eadem proportione, in qua eſt A ad B.* A 17. ſeptimi. 18. ſeptimi.

Et ad huc EXF, & HOPK deinceps eſſe pportionales in proportione B ad C] *hoc eodem, quo ſupra, modo oſtendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans fecit ipſos XF, & numerus C duos numeros BC multiplicans ipſos XF fecit. ergo vt B ad C, ita eſt, & E ad X, & X ad F. Præterea B duos numeros EX multiplicans fecit HO. & duo numeri BC multiplicantes X fecerunt ipſos OP. rurſus C duos numeros XF multiplicans ipſos PK fecit. quare vt E ad X, hoc eſt vt C ad B, ita H ad O. & rurſus vt C ad B, ita O ad P. præterea vt X ad F, hoc eſt vt B ad C, ita eſt P ad K. vt igitur B ad C ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus conſtat EXF, & HOPK deinceps proportionales eſſe in ea proportione, in qua eſt B ad C.* B C

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIV.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latum metietur; & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri AB, quorum latera CD, & A ipſum B metiatur. Dico & latus C ipſum D metiri. numerus .n. C multiplicans D ipſum E faciat. ergo AEB deinceps proportionales ſunt in proportione, quæ eſt C ad D. Quoniam igitur AEB deinceps ſunt proportionales, metiturq; A ipſum B, & A ipſum E metietur. atq; eſt ut A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipſum D. ſed C metiatur ipſum D. Dico & A ipſum B metiri. Iiſdem .n. conſtructis ſimiliter oſtendemus AEB deinceps proportionales eſſe in proportione C ad D. & quoniam eſt ut C ad D, ita A ad E, metitur autem C ipſum D. & A ipſum E metietur. & ſunt AEB deinceps proportionales, metitur igitur & A ipſum B. ſi igitur numerus quadratus &c. reliqua. Quod oportebat demonſtrare.

ex demonſtratis in 8. 7. huius *

F. C. COMMENTARIVS.

Metitur igitur, & A ipſum B] *quoniam enim AEB deinceps proportionales ſunt; metiturq; A ipſum E; & E ipſum B metietur: quare A ipſum B metiatur neceſſe eſt. ex undecima communi notione.* * 10. dif.

THEOREMA XIII. PROPO. XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur

rietur; & si latus metiatur latus, & cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D metiri. Numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E, & multiplicans D faciat F: D vero se ipsum multiplicans faciat G, & vterq; ipsorũ C D multiplicans F vtrumq; HK faciat. Manifestum est EFG, & AHKB deinceps proportionales esse in proportione, quæ est C ad D. & quoniã AHKB deinceps proportionales sunt, metiturq; A ipsum B; & A ipsum H metietur. est aũt vt A ad H, ita C ad D. ergo C ipsum D metietur. Sed C metiatur D. Dico & A ipsum B metiri. ijsdẽ enim constructis similiter ostendemus AHKB deinceps proportionales esse in proportione C ad D. quoniam C ipsum D metitur, estque vt C ad D, ita A ad H; & A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur. Quod demonstrare oportebat.

A
7.huius.

A 8
H 16
K 32
B 64
C 2
D 4
E 4
F 8
G 16

F. C. COMMENTARIVS.

A Manifestum est EFG, & AHKB deinceps proportionales esse in proportione, quæ est C ad D] *hoc similiter vt in 13. demonstrabimus.*

B Et A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur] *quoniam enim est vt A ad H, ita H ad K; metiturq; A ipsum H; & H metietur ipsum K. quare & A ipsum K metietur. rursus quoniam vt A ad H, ita est K ad B, & K ipsum B metietur, ergo & A ipsum B metiatur necesse est.*

B
10.Diffin. 11.cum.not.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur; & si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri AB, quorum latera GD. & A non metiatur ipsum B. Dico neque C ipsum D metiri. si enim metitur C ipsum D, & A ipsum B metietur. Non metitur autem A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. Sed C non metitur D. Dico neque A ipsum B metiri. Si enim A metitur ipsum B, & C ipsum D metietur: atqui C non metitur D; neque igitur A ipsum B metietur. Quod demonstrare oportebat.

14.huius.

A 2
B 16
C 4
D 8

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur, & si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubũ numerum B non metiatur: & ipsius quidẽ A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D no metiri;

A 8
B .....
D 5

si enim

si enim C metitur ipsum D, & A ipsum B metietur. atqui non metitur A ipsum B non igitur C ipsum D metietur. Sed non metiatur C ipsum D. Dico neque A ipsi B metiri. si enim A ipsum B metitur, & metietur ipsum D. non metitur autC ipsum D. neq; igitur A ipsum B metietur. Quod demõstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVIII.

Inter duos similes planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes AB; & ipsius quidem A latera sint CD; ipsius vero B latera EF. & quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia; erit vt C ad D, ita E ad F. Dico inter ipsos AB vnum medium proportionalem cadere: & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam.n est vt C ad D, ita E ad F; & permutando vt C ad E, ita erit D ad F, & quoniam planus numerus est A, cuius latera CD, numerus D ipsum C multiplicans fecit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipsum B fecit. numerus autẽ D ipsum E multiplicans faciat G, & cum D ipsum quidem C multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat G, erit vt C ad E, ita A ad G. sed vt C ad E, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad G. rursus quoniã E ipsum D multiplicans fecit G, multiplicans vero F ipsum B fecit, vt D ad F, ita erit G ad B. ostensum est autem & vt D ad F, ita esse A ad G. & vt igitur A ad G, ita G ad B. ergo AGB deinceps proportionales sunt, ac propterea inter AB vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam C ad E, vel D ad F. Quoniam.n. AGB deinceps proportionales sunt, A ad B duplam proportionẽ habebit eius, quam habet ad G atque est vt A ad G. ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. Quod oportebat demonstrare.

A.....8
G.....12
B.....18
C..2
D...3
E....4
F.....6

21. diffinit.

17. septimi.

Diffin. 9.

THEOREMA XVII. PROPOS. XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medij proportionales cadunt; & solidus ad solidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri solidi inter se similes AB, & ipsius quidem A latera sint CDE; ipsius vero B latera FGH & quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia, erit ut C ad D, ita F ad G. ut autem D ad E ita G ad H. Dico inter ipsos AB duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionẽ habere eius, quã habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus.n. C ipsum D multiplicans faciat K, F vero multiplicans G ipsum L. faciat & quoniam CD in eadem sunt proportione, in qua EG. & ex ipsis CD fit

A.....8
K.....12
X.....18
B.....27
C..2
D..3
E..4
F...9
G...6
H...4
M.....8
L.....12

21. Diffi.

Ex antecedente. fit R; ex ipſis vero F G ſit L, erunt KL ſimiles plani numeri. quare inter ipſos vnus medius proportionalis cadit. ſit is numerus M. ergo M fit ex DF, vt in precedenti theoremate. eſt igitur vt K ad M, ita M ad L. & quoniam D ipſum C multiplicans fecit K, multi-
17. ſeptimi. plicans vero F fecit M; erit vt C ad F, ita K ad M. ſed vt K ad M, ita M ad L. ergo KML deinceps proportionales ſunt in proportione C ad F. & q̃m vt C ad D ita F ad G, erit permutando vt C ad F, ita D ad G. rurſus quoniam vt D ad E, ita G ad H, & permutando erit vt D ad G, ita E ad H. ergo KML deinceps proportionales ſunt in proportione C ad F, & D ad G, & E ad H. vterq; autem ipſorum EH multiplicans M faciat vtrumq; NX. & quoniam ſolidus eſt A, latera autem ipſius CDE, numerus E eum, qui fit ex CD multiplicans fecit A: qui vero fit ex CD eſt K. ergo E multiplicans K ipſum A fecit. Eadem ratione, & H multiplicans L, qui fit ex FG, fecit ipſum B. & quoniã E
A ipſum K multiplicans fecit A. ſed & multiplicans M fecit N; erit vt K ad M, ita A ad N. vt autẽ K ad M, ita C ad F, & D ad G, & ad hũc E ad H. ergo vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita A ad N. rurſus quoniam vterq; ipſorum EH multiplicãs M fecit vtrumq; NX, erit vt E ad H, ita N ad X. ſed vt E ad H, ita C ad F, & D ad G. eſt igitur vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita & A ad N, & N ad X. rurſus quo-
B niam H multiplicans M fecit ipſum X; ſed & multipticans L fecit B: erit vt M ad L, ita X ad B. Sed vt M ad L, ita C ad F, & D ad G, & E ad H. & vt igitur C ad F & D ad G, & E ad H, ita non ſolum X ad B, ſed & A ad N, & N ad X. ergo ANXB deinceps proportionales ſunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam habet numerus C ad F, vel D ad G, & E ad H. Quo-
Diff. 24. niam enim quattuor numeri proportionales ſunt ANXB, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad N. ſed vt A ad N, ita oſtenſus eſt & C ad F, & D ad G, & E ad H. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quã latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam C habet ad F, & D ad G, & E ad H. Quod demonſtrare oportebat.

A 8
N 12
X 18
B 27
C 2
D 2
E 2
F 3
G 3
H 3
K 4
M 6
L 9

AF. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam E ipſum K multiplicans fecit A] *eſt enim K, qui fit ex CD, & E multiplicans eum, qui fit ex CD ipſum A fecit.*

B Rurſus quoniã H multiplicans M fecit ipſum X, ſed & multiplicãs L fecit B] *eſt enim L, qui fit ex FG, & H eum, qui fit ex FG multiplicans ipſum B fecit.*

THEOREMA. XVIII. PROPOSITIO XX.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri ſimiles plani erũt.

A 8
C 12
B 18
D 4
E 6
F 2
G 3

Inter duos. n. numeros AB vnus medius proportionalis cadat C. Dico numeros AB ſimiles planos eſſe. Sumantur. n. minimi numeri DE, eandem, quam ipſi
A ACB proportionem habentium. eſt igitur vt D ad E, ita A ad C. vt autem A ad C, ita C ad B. ergo & vt D ad
20. Diff. E ita C ad B. æqualiter igitur D ipſum A metitur, atq; E ipſũ C. ergo quoties D metitur A, tot vnitates ſint in

F; propterea q; F multiplicans D ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare A planus numerus est, cuius latera DF. rursus qm DE minimi numeri sunt, eandem quam CB proportionem habentium; æqualiter D ipsum C metitur, & E ipsum B. quoties autem E ipsum B metitur, tot vnitates sint in G. ergo E ipsum B metitur per eas, quæ sunt in G unitates. quare G ipsum E multiplicans fecit B: ideoq; B numerus planus est, cuius latera EG. ergo numeri AB sunt plani. Dico & similes esse. Quoniam. n. uterq; ipsorum FG multiplicans E utrumq; CB fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut autem C ad B. ita D ad E. & ut igitur D ad E, ita F ad G. quare AB similes plani sunt; cum ipsorum latera sint proportionalia. id quod demõstrare oportebat.

9. com. not.

21. septimi.

9. com. not

18. septimi.

B.

A

B

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur. n. minimi numeri DE, eandem, quam ipsi ACB proportionem habentium) *ex eo, quod additum est ad 35 septimi.*

Quare AB similes plani sunt, cum ipsorum latera sint proportionalia) *quoniã enim est vt D ad E, ita F ad G, erit permutando vt D ad F, ita E ad G. & sunt DF latera ipsius A, & EG latera ipsius B. cum igitur plani AB latera habeant proportionalia, similes inter se erunt.*

THEOREMA XIX. PROPO. XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadãt, numeri similes solidi erunt.

Inter duos. n. numeros AB duo medij proportionales cadant CD. Dico ipsos AB similes solidos esse. sumantur. n. minimi numeri tres, eandẽ quã ACDB proportionẽ habentiũ, qui sint EFG. extremi igitur ipsorũ EG primi inter se sunt. & quoniam inter EG vnus medius proportionalis cecidit F, erunt numeri EG similes plani. sint ipsius quidẽ E latera HK; ipsius vero G latera LM. manifestum est ex antecedẽte EFG deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M. & quoniam EFG minimi sunt, eandẽ, quã ACD proportionẽ habẽtiũ, erit ex æquali vt E ad G, ita A ad D: & sunt EG primi, sed primi & minimi. minimi vero eos, qui eandem habẽt proportionẽ æqualiter metiũtur, maior maiorẽ, & minor minorẽ hoc est antecedens antecedentem, & cõsequẽs consequẽtem. ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. quoties aũt E metitur A, tot vnitates sint in N. ergo N ipsum E multiplicans fecit A. sed E fit ex HK: ac propterea N eũ, qui fit ex Hk multiplicãs ipsũ A fecit. solidus igitur est A, cuius latera HKN. rursus qm EFG minimi sunt, eandẽ quam ipsi CDB proportionem habentiũ, E ipsum C æqualiter metitur, asq; G ipsum B. & quoties G metitur B, tot vnitates sint in X: ergo G ipsum B metitur per eas, quæ sunt in X vnitates; ideoq; X multiplicãs G ipsum B fecit. at G fit ex LM. ergo X cum, qui fit ex LM multiplicãs fecit B; multiplicãs vero E ipsum C fecit. solidus igitur est B & eius latera LMX. quare AB solidi sunt. Dico etiam similes esse. quoniam. n. NX multiplicantes E ipsos AC fecerunt, vt N ad X, ita erit A ad C, hoc est E ad F. sed vt ea ad F, ita H ad L, & K ad M. & vt igitur H ad L, ita K ad M. & N ad X, sunt ergo HKN

A.....8
C.....12
D.....18
B.....27
E....4
F....6
G....9
H..2
K..3
N..8
L...3
M...3
X...3

A

3. huius.

Ex antecedẽte

B

23 septimi

22. septimi.

9. com. not.

C

HKN latera ipsius A, & LMX latera ipsius B. ergo AB similes solidi erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam ACDB proportionem habentium.] *Inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam ACDB proportionem habentium ex ijs, quæ nos ad 35. septimi tradidimus: deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant; vel ex 35 septimi sumantur tres minimi numeri eadem, quam ACD proportionem habentium.*

B Manifestum est ex antecedente EFG deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M.] *Quoniam enim EG similes plani sunt, ipsa latera eandem habent proportionem. est igitur vt H ad K, ita L ad M. & permutando vt H ad L, ita K ad M. & K multiplicans L faciat F. itaq; quoniam K ipsum H multiplicans fecit E; multiplicans vero L ipsum F fecit, vt H ad L, ita erit E ad F. rursus quoniam L ipsum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipsum G fecit, vt K ad M, ita est F ad G. ostensum est autem vt H ad L, ita esse K ad M. ergo & vt E ad F, ita F ad G: ac propterea EFG deinceps proportionales sunt in proportione H ad L, & in proportione K ad M.*

19. septimi.

C Quoniam.n. NX multiplicantes E ipsos AC fecerunt, vt N ad X, ita erit A ad C.) *Etenim E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B, vt ostensum est. quoties autem G metitur B, tot unitates sunt in X. ergo X multiplicans E ipsum C fecit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autē sit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A B C; sitq; primus A quadratus. dico & tertium C quadratum esse. Quoniam enim inter AC vnus medius proportionalis cadit B, erunt AC similes plani. sed A est quadratus. ergo & C quadratus erit. Quod oportebat demonstrare.

20. huius.

A.....4
B.....6
C.....9

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

Sint quattuor numeri deinceps proportionales ABCD, & A sit cubus. dico & D cubum esse. Quoniam enim inter AD duo medij proportionales cadunt BC, erunt AD similes solidi. est autem A cubus; ergo & D cubus erit. Quod demonstrare oportebat.

21. huius.

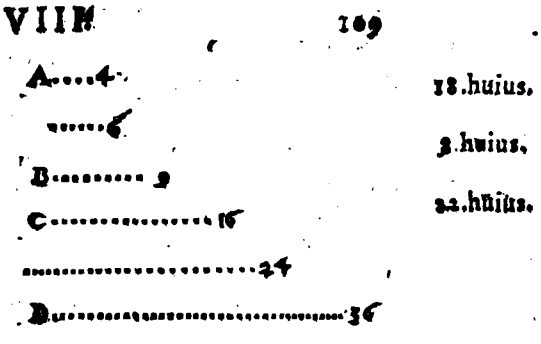
A..... 8
B.....12
C..... 18
D.....27

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIV.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri AB inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratū numerum D: sitq; A quadratus. dico & B quadratū esse, quoniam

quoniam enim CD quadrati ſunt, erunt CD ſimiles plani; ideoque inter ipſos CD vnus medius proportionalis cadit. eſt autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter A B cadit vnus medius proportionalis. eſtq; A quadratus. ergo & B quadratus erit.

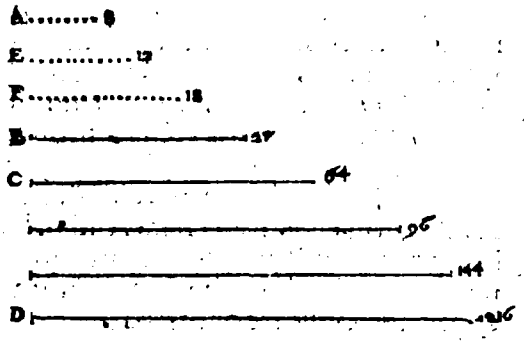


18.huius.
8.huius.
22.huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter ſe proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus, & ſecundus cubus erit.

Duo.n. numeri AB inter ſe proportionem habeant, quã cubus numerus C ad numerum cubum D; ſitq; A cubus, dico & B cubum eſſe. Quoniam enim CD cubi ſunt, erũt CD ſimiles ſolidi. idcircoq; inter ipſos duo medij proportionales cadent: quot autem inter CD cadunt medij proportionales, totidem cadent & inter eos, qui eandem, quam ipſi proportionem habent. ergo inter AB duo medij cadent proportionales cadant EF. quoniam igitur quattuor numeri AEFB deinceps pportionales ſunt, eſtq; A cubus; & B cubus erit. Quod oportebat demõſtrare.

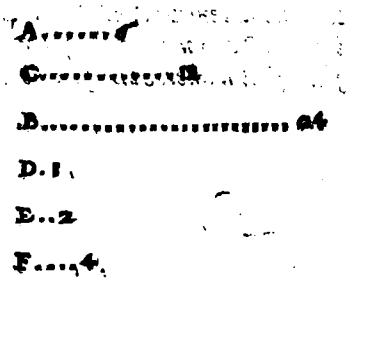


19.huius.
8.huius.
23.huius.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO. XXVI.

Similes plani numeri inter ſe proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint ſimiles plani numeri AB. dico A ad B proportionem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quoniam enim AB ſimiles plani ſunt, inter eos vnus medius cadit proportionalis. cadat, ſitq; C: & ſumantur minimi numeri, eandem, quã ABC proportionẽ habentiũ DEF. ergo ipſorum extremi DF quadrati ſunt. & quoniam eſt vt D ad F, ita A ad B; & ſunt DF quadrati: habebit A ad B proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quod demonſtrare oportebat.



18.huius:
35.ſeptimi;
Com. 2. huius.

F. C. COMMENTARIVS

Sed & huius conuerſum verum eſt. quod hoc modo demonſtrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter ſe ſimiles ſunt.

Sint plani numeri AB, qui proportionem habeant, quam quadratus numerus C ad quadratum numerum D. dico eos inter se similes esse. quoniam enim CD quadrati sunt, erunt similes plani quare inter eos cadit vnus medius proportionalis: atq; est vt C ad D, ita A ad B. ergo & inter ipsos AB vnus medius proportionalis cadit. numeri igitur AB similes plani sunt. quod demonstrare oportebat.

18.huius. 8.huius. 20.huius.

A..... 6
B..... 24
C. 1
D....4

THEOREMA XXV. PROPO. XXVII.

Similes solidi numeri inter se proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri AB. dico A ad B proportionem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum. quoniam enim A B similes solidi sunt, inter ipsos duo medij cadent proportionales. cadant CD; & sumantur minimi numeri, qui eandem, quam ACDB proportionem habeant, ipsis multitudine æquales EFGH. ergo eorum extremi EH cubi sunt. atq; est vt E ad H, ita A ad B. habet igitur A ad B proportionem, quam numerus cubus ad cubum numerum. Quod demonstrare oportebat.

19.huius. 35.septimi. Corol.2. huius.

A.....16
C.....24
D.....36
B.....54
E.....8
F.....12
G.....18
H.....27

F. C. COMMENTARIVS.

Huius etiam conuersum verum est. quod ita demonstratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt.

Sint solidi numeri AB proportionem habentes, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. dico eos inter se similes esse. quoniam enim CD cubi sunt, erunt similes solidi; ac propterea inter eos cadunt duo medij proportionales. est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter ipsos AB duo medij proportionales cadent. similes igitur solidi sunt numeri AB. quod demonstrare oportebat.

19 huius. 8 huius. 21 huius.

A.....16
B.....54
C.....8
D.....27

Finis Libri Octaui.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Nonus

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS,

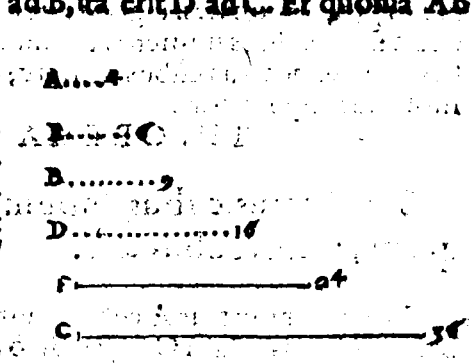
Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI DVO similes plani numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri AB, & A ipsum B multiplicans faciat C. dico C quadratum esse. numerus enim A se ipsum multiplicãs faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. Et quoniã AB similes plani sunt, inter ipsos vnus medius proportionalis cadet. Si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales cediderint, quot inter ipsos cadunt, totidem cadent, & inter eos, qui eandem habent proportionem. quare & inter DC vnus medius proportionalis cadit. atque est D quadratus, ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonstrare.

17. septimi.
18. octaui.



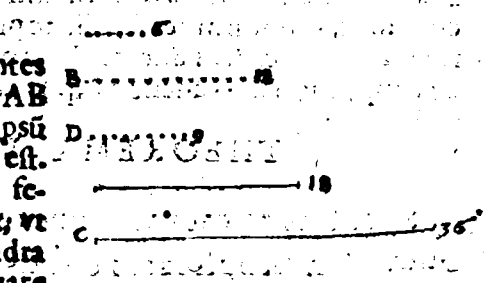
8. octaui.

11. octaui.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri se multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

Duo enim numeri AB se se multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico AB similes planos esse. numerus enim A se ipsũ multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D quadratus est, sed & C; erũt DC similes plani. quare



septimi.

8.octaui. inter ipsos vnus medius proportionalis cadit. atq; est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B cadet vnus medius proportionalis. si autem inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat. erunt similes plani. ergo A B similes plani
20.octaui. sunt. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus. n. numerus A se ipsum multiplicans faciat B, dico B cubũ esse. sumatur. n. ipsius A latus C, & C se ipsum multiplicãs faciat D. manifestum est C multiplicantem D facere ipsum A. & quoniam C seipsũ multiplicãs fecit D, metitur
20.dẽ. not. C ipsum D per vnitates, quæ in ipso sunt. sed & vnitas metitur C per
6.com.not. eas, quæ in ipso sunt vnitates. est igitur vt vnitas ad C, ita C ad D.
Conuer.20. diffi. rursus quoniam C multiplicans D ipsum A fecit, metitur D ipsum A per vnitates, quæ sunt in C. metitur autẽ & vnitas ipsum C per vnitates, quę in ipso sunt. ergo vt vnitas ad C, ita D ad A. sed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D & D ad A. ideoq; inter vnitatem, & numerũ A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rursus quoniam A se ipsum multiplicans fecit B & A ipsum B metitur per vnitates, quæ in ipso sunt. metitur autem & vnitas ipsum A per vnitates, quę sunt in ipso. est igitur vt vnitas ad A, ita A ad B. sed inter vnitatem, & A cadunt duo
8.octaui. 23.octaui. medij proportionales. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quòd si inter duos numeros cadant duo medij proportionales, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit. atq; est A cubus, ergo & B cubus erit. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IV. PROPO. IV.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

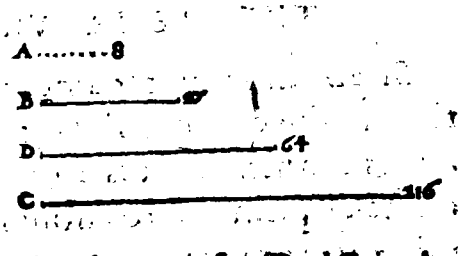
Cubus. n. numerus A cubum numerũ B multiplicans ipsum C faciat. dico C cubuũ esse. numerus enim A se ipsum mul
Ex anteced. tiplicans faciat D. ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum multiplicans fecit
17.septimi. D; multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi sunt, erunt similes solidi, ac propte
8.octaui. rea inter ipsos cadent duo medij propoportionales. quare & inter D C duo me
23.octaui. dij proportionales cadent. estq; D cubus. ergo & C cubus erit.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus

Cubus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum C. dico B cubum esse. numerus enim A se ipsum multiplicans faciat D. ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum quidē multicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniā DC cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos cadunt duo medij proportionales: atq; est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B duo medij proportionales cadent estq; A cubus. ergo & B cubus erit. Quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente. 17. septimi. 8. octaui. 23. octaui.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex duobus præcedentibus, & illa sequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus non erit cubus.

Si enim factus sit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex antecedente. quod non ponitur.

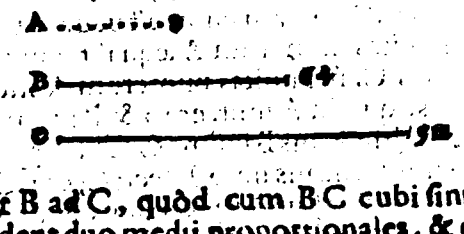
Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum, & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsū multiplicans cubū faciat, & ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum B faciat. dico & A cubum esse. numerus .n. A multiplicās B faciat C. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B. multiplicans vero B ipsū C fecit, erit C cubus. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit B; multiplicans vero B fecit C, vt A ad B, ita erit B ad C, quòd cum B C cubi sint, similes solidi erunt. ideoq; inter ipsos cadent duo medij proportionales. & est vt B ad C, ita A ad B. quare & inter A B duo medij proportionales cadunt. atq; est B cubus, ergo & A cubus erit. Quod oportebat demōstrare.

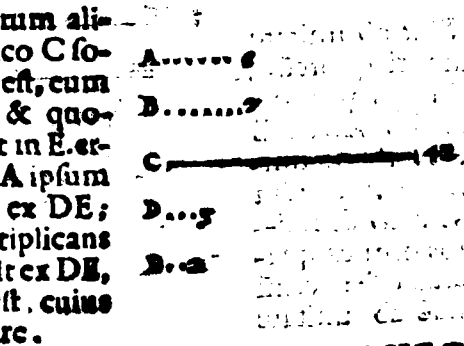


Diffin. 19. 19. septimi. 10. octaui. 23. octaui.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si compositus numerus numerū aliquem multiplicans, quēpiam faciat, factus solidus erit.

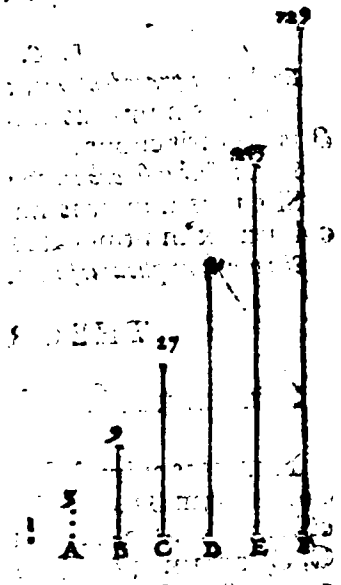
Compositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat. dico C solidum esse. Quoniam .n. A compositus est, cum numerus aliquis metietur. metiatur D. & quoties D ipsum A metitur, tot vnitates sint in E. ergo E multiplicans D fecit A. & quoniā A ipsum B multiplicans fecit C; estq; A. qui fit ex DE; numerus, qui fit ex DE, ipsum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans eum. qui fit ex DE, ipsum C fecit. ac propterea C solidus est. cuius latera DE. Quod oportebat demonstrare.



13. Def. 9 com. not. 16. septimi Diff. 17.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitate quotcumq; numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinq; intermittentes omnes.

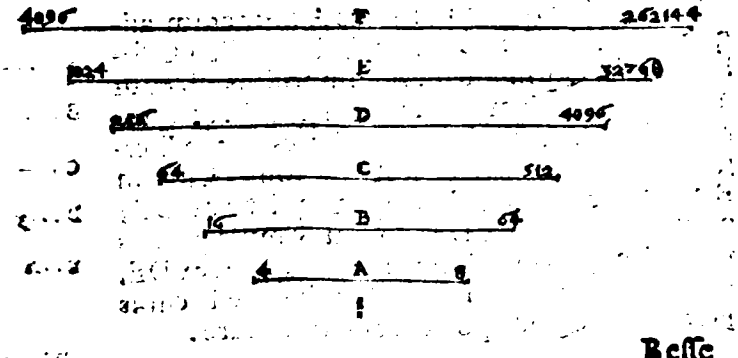


Sint ab vnitate quotcumq; numeri deinceps proportionales ABCDEF. dico tertium quidem ab vnitate B quadratum esse, & vnum intermittentes omnes: quartum autem C cubum, & duos intermittentes omnes; septimum vero F cubum simul, & quadratum, & quinq; intermittentes omnes. Quoniam enim vt vnitas ad A, ita A ad B, vnitas æqualiter metitur numerum A, atq; A ipsum B. sed vnitas metitur A per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo & A ipsum B per vnitates, quæ sunt in A metitur. quare A se ipsum multiplicans fecit B. quadratus igitur est B. & quoniam BCD deinceps proportionales sunt; estq; B quadratus; & D quadratus erit. eadem ratione erit & F quadratus. similiter demonstrabimus, & vnum intermittentes omnes quadratos esse. dico & quartum ab vnitate uidelicet C esse cubum, & duos intermittentes omnes. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita B ad C; unitas numerum A æqualiter metitur, atq; B ipsum C. sed unitas numerum A metitur per unitates, quæ in A sunt. ergo & B metitur C per unitates, quæ sunt in A; & ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B; multiplicans uero B fecit C; erit C cubus. quod cum CDEF deinceps proportionales sint; sitq; C cubus, & F cubus erit. ostensum autem est quadratum esse. septimus igitur ab unitate F, & cubus est, & quadratus. similiter quoq; demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos, & quadratos esse. Quod demonstrare oportebat.

Diffin. 20. 6. com. not. — 22. octaui. — 20. dif. 6. com. not. 9. com. not. — 19. diffi. 23. octaui.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem sit, quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.



Sint ab unitate numeri quotcũq; deinceps proportionales ABCDEF, & qui post unitatem A sit quadratus. dico & reliquos omnes quadratos esse: tertiũ quidẽ ab unitate

B esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, demonstratum iam est. sed & reliqui omnes quadrati erunt. Quoniam enim ABC deinceps sunt proportionales; estq; A quadratus: & C quadratus erit. rursus; quoniam BCD deinceps proportionales sunt; est autem B quadratus: & D quadratus erit. similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse. sit autem A cubus. dico & reliquos cubos esse. quartum quidem ab vnitate C esse cubum, & duos intermittentes omnes, iam demonstratum est. sed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam .n. est vt vnitas ad A, ita A ad B. vnitas numerũ A æqualiter metitur; atq; A ipsum B. sed vnitas metitur numerum A per vnitates, quæ sunt in ipso. quare & A numerum B metitur per vnitates, quæ in ipso sunt ergo A seipsum multiplicans fecit B, atq; est A cubus. si autem cubus numerus se ipsum multiplicans fecerit aliquem, factus cubus erit. ergo B est cubus. & quoniam quattuor numeri AB CD deinceps proportionales sunt, estq; A cubus; & D cubus erit. cadẽ ratione & E est cubus, & similiter reliqui ōnes cubi sunt. Quod oportebat demōstrare.

A

20. Diffin.

2. huius.

B

F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam BCD deinceps proportionales sunt, est autẽ B quadratus; & D quadratus erit.] *Videntur hæc superuacanea esse, cum superius demonstratum sit tertium ab vnitate quadratum esse, & vnum intermittentes omnes.*

A

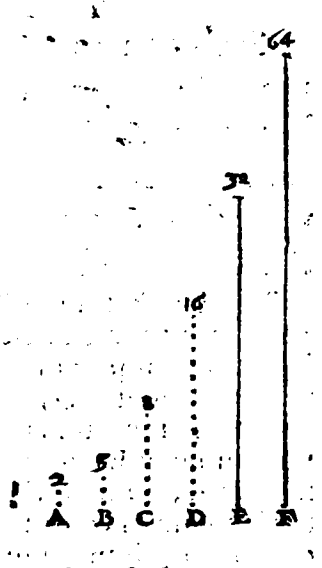
Eadem ratione & E est cubus.] *Quattuor enim numeri BCDE deinceps proportionales sunt; atq; est B cubus. ergo & E cubus sit necesse est.*

A'

23. octaui.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem non sit quadratus; neq; alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si qui post vnitatem non sit cubus; neq; alius vllus cubus erit, præter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes.



Sint ab vnitate deinceps proportionales numeri ABCDEF, & qui post vnitatem A non sit quadratus. dico neq; alium vllum quadratũ esse, præter tertium ab vnitate, & vnũ intermittentes omnes. si .n. fieri potest, sit C quadratus; est autẽ & quadratus B. ergo BC inter se proportionẽ habẽt, quã numerus quadratus ad quadratũ numerum: atq; est vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B inter se proportionem eã, quã numerus quadratus ad quadratũ numerũ: ideoq; AB similes plani sũt. & est B quadratus. ergo & A quadratus est. quod non ponitur. nõ igitur C quadratus erit. similiter ostendemus neq; aliũ vllum quadratum esse, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. sed non sit A cubus. dico neq; alium ullum cubum esse, præter quartũ ab unitate, & duos intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit D cubus. est autem & cubus C, quartus enim est ab unitate. & ut C ad D, ita est B ad C. ergo & B ad C proportionẽ habet, quã cubus ad cubũ; ac propterea BC similes solidi sunt. atq; est C cubus. ergo & B cubus erit. & quoniã est ut unitas ad numerum A, ita A ad B; unitas autẽ numerũ A metitur per unitates, quæ sũt in ipso: & A metietur B per unitates, quæ in ipso sunt

26. octaui.

A

27. octaui.

B

sint. quare A se ipsum multiplicans cubum B fecit. si autem numerus se ipsū
6. huius multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit. cubus igitur est A. quod non ponitur. ergo neq; D est cubus. similiter demonstrabimus neq; alium vllum cubū esse, prēter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. Quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

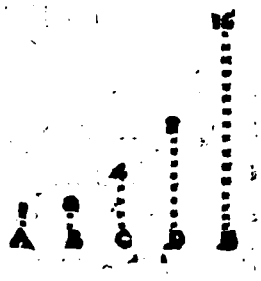
A Ideoque AB similes plani sunt. & est B quadratus; ergo & A quadratus erit)
18. octaui. 22. octaui. *quoniam enim AB similes plani sunt, inter eos vnus medius proportionalis cadit. sunt igitur tres numeri deinceps proportionales: estque primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.*

B Ac propterea BC similes solidi sunt; atque est C cubus; ergo & B cubus erit)
19. octaui. 23. octaui. *quoniam enim similes solidi sunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri deinceps proportionales erunt. Quod cum primus sit cubus, & quartus cubus sit necesse est.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si ab vnitate quotcumq; numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris propottionalibus.

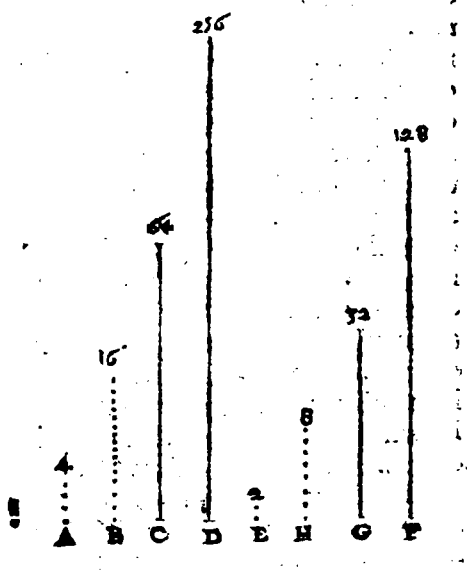
Sint ab vnitate A quotcumq; numeri deinceps proportionales BCDE. Dico horum BCDE minorem numerum B maiorem E metiri per aliquē ipsorum CD.
15. septimi. Quoniam. n. est vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numerum B æqualiter metitur, atque D ipsum E. quare permutando A vnitas numerum D æqualiter metitur, atque B ipsum E. sed A vnitas metitur D per eas, quæ sunt in ipso D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ sunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus. Quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XII. PROPO. XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint, quicumq; primorum numerorum metiuntur vltimū, ijdē & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

Sint ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumq; primorum numerorum metiuntur D, eosdē & ipsū A metiri. metiatur. n. aliquis primus numerus E ipsum D. Dico E ipsum quoq; A metiri. Non. n. metiatur E ipsum A, atq; E est primus.
31 septimi. omnis aūt primus numerus ad omnem numerum, quē non metitur,
9. com. not. primus est. ergo EA numeri inter se primi sunt. & quoniā E metitur ipsum D, metiatur per vnitates, quæ



sunt

sunt in F. ergo E multiplicans F ipsum D fecit. rursus quoniam A metitur ipsũ D per eas, quæ sunt in C vnitates, A multiplicans C ipsum D fecit. Sed & E multiplicans F fecit D. qui igitur fit ex A C ei qui fit ex E F est æqualis. ergo vt A ad E, ita F ad C. suntq; A E primi: primi autẽ, & minimi; minimi vero eos, qui eãdem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentẽ, & consequens consequentem. metitur igitur E ipsum C metiatur per G. ergo E ipsum G multiplicans fecit C. sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit. qui igitur fit ex A B æqualis est ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & sunt A E primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. quare & E ipsum B metitur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipsum H fecit B. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. ergo qui fit ex H E est æqualis ei, qui fit ab ipso A. est igitur vt E ad A, ita A ad H. suntq; A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiuntur, eos qui eandem, quã ipsi proportionem habent, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E metitur ipsum A. sed & non metitur. quod fieri non potest. non igitur A E sunt inter se primi. ergo compositi erunt. compositos vero primus aliquis numerus metitur. quare ipsos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniã E primus ponitur, primũ autẽ nõ metitur alius numerus præter se ipsum. metitur igitur E ipsos A E. ideoq; E ipsum A metitur. metitur autem, & ipsum D. ergo E ipsos A D metietur. similiter demonstrabimus quicumq; primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem & ipsum A metiri. Quod demonstrare oportebat.

19 cõ. not. A
19. septimi.
23. septimi.
21. septimi.
B
19. septimi.
23. septimi.
21. septimi.
20. septimi.
33. septimi.
14. diffi.

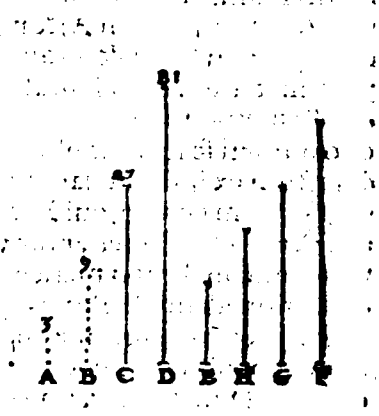
F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates.] *Hoc enim in antecedente demonstratum fuit.* A

Sed ex antecedente, & multiplicans B ipsum C fecit.] *Quoniam enim, vt in antecedente demonstratum est, A metitur ipsum C per B; & A multiplicans B fecit C.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

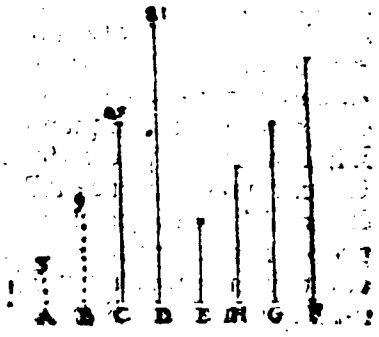
Si ab vnitate quotcumq; numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem primus sit, & maximum nullus alius metietur præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.



Sint quotcũq; numeri ab vnitate deinceps proportionales A B C D. & qui post vnitatẽ, videlicet A sit primus. dico maximũ D nullũ aliũ numerũ metiri, præter ipsos A B C. si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, & nõ sit E idem, qui aliquis ipsorum A B C; manifestum est E primũ non esse. Si enim primus sit, & metiatur D, ipsum quoq; A metietur primum existentem, cum nõ sit idẽ, qui A. quod fieri non potest. nõ igitur E primus est. ergo compositus: omnẽ autem compositum numerũ primus aliquis numerus metitur. dico nullũ alium primum metiri ipsum E præterquã A. si enim alius metitur E, & E metitur D, & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A primũ existentem, cum non sit idem, qui A quod fieri non potest. ergo A ipsum E metitur. & quoniã E metitur D, metiatur ipsum per F. non erit F idẽ, qui aliquis ipsorũ A B C. si. n. est idẽ metiturq; ipsum D per E, & vnus ipsorum A B C ipsum D per E metietur, sed vnus ipsorum

Ex anteced.
19. diff.
12. com. not
Ex anteced.
11. huius.

sum ABC metitur D per aliquem ipsorũ ABC. quare & E idem erit, qui vnus ipsorũ ABC. quod non ponitur. non igitur F est idem, qui vnus ipsorum A B C. similiter ostendemus A metiri ipsum F, rursus ostendentes non esse F primum numerum. si.n. est primus, & metitur ipsum D, ipsum quoq; A metietur, primũ existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur F primus est. ergo cõpositus, & cum aliquis primus metietur, Dico nullum alium metiri ipsum F præter quàm A. si.n. alius metitur F, & F metitur D, & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum F metitur. Et quoniam E metitur D per F, & E multiplicans F ipsum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D. qui igitur fit ex AC est æqualis ei, qui ex EF. ergo vt A ad E, ita est F ad C. sed A metitur E. quare & F ipsum C metietur. metiatur per G. similiter demonstrabimus G non esse eundẽ, qui vnus ipsorum AB, & A ipsum G metiri. & quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicans F ipsum G fecit C. sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex AB ei, qui ex FG est æqualis. vt igitur A ad F, ita est G ad B. metitur autẽ A ipsum F. ergo & G ipsum B metietur. metiatur per H. similiter demonstrabimus H non esse eundem, qui A. & quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. Sed & A se ipsum multiplicans fecit B. qui igitur fit ex HG est æqualis quadrato, qui ex A. ergo vt H ad A, ita A ad G. metitur autẽ A ipsum G. quare & H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idẽ qui A. quod est absurdum. non igitur aliquis alius metietur ipsum D numerũ, præter ipsos ABC. Quod demonstrandum fuerat.



21 anteced.

19. 7. primi.

20 septimi.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos, qui à principio metiebãtur.

Minimum.n. numerum A primi numeri BCD metiantur. Dico nullum alium primum numerũ metiri ipsum A, præter ipsos BCD. si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; & non sit E idem, qui aliquis ipsorum BCD. & quoniã E metitur A, ipsum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri BCD. si autem duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, & vnum eorum, qui à principio positi sunt, metietur. ergo BCD metientur vnum ipsorum EF. ipsum quidem E non metientur, etenim E primus est; & non idem qui aliquis ipsorum BCD. ergo ipsum F metiẽtur, qui est minor, quàm A. quod fieri non potest, ponitur enim A minimus eorum, quos BCD metiantur. non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos BCD quod demonstrare oportebat.



2. septimi

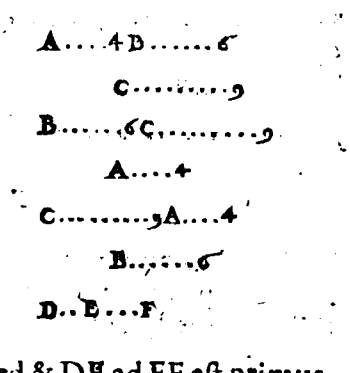
THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorũ

qui

qui eandem, quam ipsi proportionem habeant; duo quilibet cõ positi ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales minimi eorum, qui eandem, quã ipsi proportionem habent ABC. Dico duos quoslibet compositos ad reliquũ primos esse, videlicet AB ad C, & BC ad A, & AC ad B. sumãtur. n. duo minimi numeri qui eandem, quam ipsi ABC proportionem habeant DE EF. manifestum est DE se ipsum quidem multiplicantem facere A; multiplicantẽ vero EF facere B, & EF se ipsum multiplicantem facere C. & quoniam DE EF minimi sunt, primi erunt igitur se. si autẽ duo numeri primi inter se fuerint, & vterq; simul ad vtrumq; primus erit.



A
2. octaui.
24. septimi.
30. septimi.

ergo DF ad vtrumq; ipsorum DE EF primus est. Sed & DE ad EF est primus. Quare DF DE ad EF primi sunt: ac propterea qui fit ex FD DE primus est ad EF. Si autẽ duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ex vno ipsorum ad reliquũ primus erit. ergo qui fit ex FD DE ad eum, qui fit ex EF est primus. sed qui ex FD DE est qui fit ex DE vnà cum eo, qui ex DE EF. qui igitur ex DE vnà cum eo, qui ex DE EF primus est ad eum, qui ex EF. sed qui fit ex DE est A; qui uero ex DE EF est B, & qui ex EF est C. ergo AB compositi ad ipsum C primi sunt. similiter ostendemus & BC ad A esse primos. Dico & AC ad B primos esse. quoniam. n. DE ad vtrumq; ipsorum DE EF est primus, & qui fit ex DF ad cũ, qui ex DE EF primus erit. Sed ei, qui fit ex DF æquales sunt qui ex DE, & EF fiunt unà cum eo qui bis fit ex DE EF. qui igitur ex DE, & EF fiũt unà cum eo, qui bis ex DE EF primi sunt ad eum, qui ex DE EF. ergo & diuidendo qui fiunt ex DE, & EF unà cum eo, qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum qui ex DE EF. & rursus diuidendo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE EF primi sunt. Sed qui fit ex DE est A; qui uero ex DE EF est B; & qui ex EF est C. ergo AC compositi ad ipsum B primi erunt. Quod demonstrare oportebat.

B
C
D
E
F

EVCLIDIS COMMENTARIVS

A

Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipsi ABC proportionẽ habentium] *ex iis, quæ demonstrauimus ad 35. septimi.*

B

Sed qui ex FD DE est qui fit ex DE unà cũm eo, qui ex DE EF] *Hoc in lineis demonstratur ab Euclide in secundo libro, propositione tertia. sed quoniam numeri propria habẽt principia, Barlaam monachus non solũm hoc ex illis demonstrauit, sed & quæcunque in secundo libro tradita sunt, quæ nos vtpote non aliena hoc loco apponendæ censuimus. demonstrat autem hoc theoremate tertio.*

C

Quoniam. n. DF ad vtrumq; ipsorum DE EF est primus, & qui fit ex DF ad eum, qui ex DE EF primus erit] *nam cum DF ad vtrumq; ipsorum DE EF sit primus erit DF primus ad eum, qui ex DE EF ex 26. septimi. quare ex 27. eiusdem, & qui fit ex DF ad eum, qui ex DE EF est primus.*

D

Sed ei, qui fit ex DF æquales sunt qui ex DE, & EF] *hoc in lineis demonstratur in secundo libro propositione 4. sed in numeris Barlaam demonstrauit theoremate quarto.*

E

Ergo & diuidendo qui fiunt ex DE, & EF unà cũ eo, qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum, qui fit ex DE EF.] *si enim non sunt primi, compositi erunt. quæ eos aliquis numerus communis mensura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrumque & compositum ex illis metietur, videlicet qui fiunt ex DE, & EF vna cum eo, qui bis fit ex DE EF. sed & metitur eum, qui fit ex DE EF, ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui bis fit ex DE EF non sunt primi ad eum, qui ex DE EF. atqui primi sunt. Quod est absurdum. non igitur sunt compositi. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum, qui fit ex DE EF.* 11. com. not

F

Et

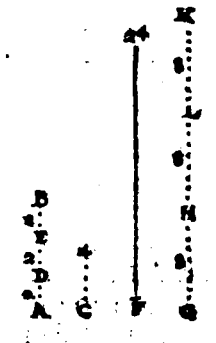
Et rurſus diuidẽdo q fiunt ex DE, & EF ad eũ, qui fit ex DE, EF primi ſunt.

Si enim non ſint primi, eodem, quo ſupra, modo oſtendemus eos, qui ſiunt ex DE, & EF vna cum eo, qui fit ex DE EF non eſſe primos ad eum, qui ex DE EF, quod eſt abſurdum; ſunt enim primi, vt demonſtratum iam fuit. Ergo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui ex DE EF primi ſint neceſſe eſt.

Barlaam Monachi Aritmetica demonſtratio eorum, quæ Euclides libro ſecundo in lineis demonſtrauit.

THEOREMA I.

Si duobus numeris propoſitis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi fiunt.

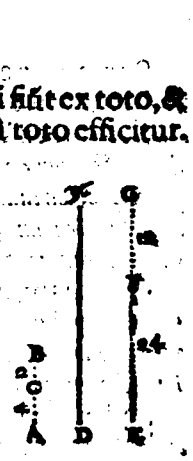


Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex CAB numeris planis, qui fiũt ex C AD, & C DE, & C EB æqualem eſſe. ſit .n. numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex CAD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, q ex C EB. quoniam igitur 10.com.not. *AB multiplicans C ipſum F fecit, C metitur F per eas, quæ ſunt in AB vnitates. Eadem ratione C metitur GH per vnitates, quæ ſunt in AD: & metitur HI per vnitates, quæ in DE: et IK per vnitates, quæ in EB. ergo C metitur totũ GK per vnitates, quæ ſunt in A metiebatur aũt & ipſũ F per eas, quæ ſunt in AB vnitates. vterq; igitur ipſorũ FGK æque multiplex eſt numeri C. qui vero eiuſdẽ ſunt æq; multi*

1.Com.not. *plices, inter ſe æquales ſunt. ergo F ipſi GK eſt æqualis: eſt F quidẽ numerus planus, qui fit ex CAB: GK vero compoſitus ex numeris planis qui ſiunt ex C & ſingulis ipſorum AD DE EB. qui igitur fit ex CAB numerus planus æqualis eſt planis numeris, qui ex C, & ſingulis ipſorum AD DE EB ſiunt. quare ſi duobus numeris propoſitis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus. qui fit ex duobus numeris ab initio propoſitis æqualis erit numeris, qui ex numero indiuiſo, & ſingulis partibus numeri diuiſi ſiunt. quod oportebat demonſtrare.*

THEOREMA II.

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiũt ex toto, & utraq; parte, inter ſe cõpoſiti æquales ſũt numero quadrato, qui à toto efficitur.



N umeros enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui ſiunt ex BA AC, & AB BC inter ſe compoſitos, quadrato qui fit ex AB, æquales eſſe. numerus enim AB ſe ipſum multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eandem AB multiplicãs faciat

10.com.not. *FG. quoniam igitur AC multiplicans AB ipſum EF fecit, AB metitur EF per eas, quæ ſunt in AC vnitates. Rurſus quoniã CB ipſum AB multiplicans fecit EG, AB metitur FG per vnitates, quæ ſunt in CB. metiebatur autem, & EF per vnitates, quæ in AC. ergo AB totum EG per vnitates, quæ in ſe ipſo ſunt metitur. rurſus quoniam AB ſe ipſum multiplicans fecit D, metitur AB ipſum quoq; D per vnitates, quæ in ſeipſo ſunt. ergo AB vtrumq; ipſorum D EG metitur per eas, quæ in ſeipſo ſunt vnitates. quotuplex igitur eſt D ipſius*

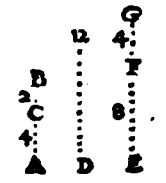
1.com.not. *AB, totuplex erit, & EG ipſius AB. qui vero eiuſdem numeri ſunt æq: multiplices inter ſe æquales ſunt. ergo D ipſi EG eſt æqualis. atq; eſt D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compoſitus ex duobus planis; qui ſiunt ex AB BC, & BA AC. quadratus igitur numerus ex AB eſt æqualis numero compoſito ex duobus planis, qui ex AB BC, & BA AC ſiunt. quare ſi numerus in duos numeros diuidatur; duo numeri plani, qui ſiunt ex toto, & vtraq: parte inter ſe compoſiti æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur. atq; illud eſt. Quod oportebat demonſtrare.*

THEO-

THEOREMA III.

Si numerus in dùos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit æqualis eſt plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico planum numerum, qui fit ex AB BC plano, qui ex AC CB vna cum quadrato, qui fit à CB æqualem eſſe. numerus enim AB multiplicans BC ipſum D faciat. AC vero multiplicans CB faciat EF: & CB ſe ipſum multiplicans faciat FG. itaque quoniam AB ipſum BC multiplicans fecit D, metitur BC ipſum D per vnitates, quæ ſunt in AB. rurſus quoniam AC multiplicans CB fecit EF, CB metitur EF per eas, quæ ſunt in AC vnitates. rurſus quoniam CB ſeipſum multiplicans fecit FG, CB metitur FG per vnitates, quæ in ſe ipſo ſunt; metiebatur autem, & EF per vnitates, quæ ſunt in AC. totum igitur EG metitur CB per eas, quæ ſunt in AB vnitates; metiebatur autem, & ipſum D per vnitates, quæ in AB. ergo CB vtrumq; D, EG æqualiter metitur: ij vero, quos idem numerus æqualiter metitur, inter ſe æquales ſunt. quare D eſt æqualis ipſi FG. atq; eſt D quidem planus numerus, qui fit ex AB BC: EG vero, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui à CB. ergo planus numerus, qui fit ex AB BC eſt æqualis ei, qui ex AC CB & quadrato, qui à CB. ſi igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto & vna parte fit æqualis eſt plano, qui fit ex partibus vna cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. quod oportebat demonſtrare.



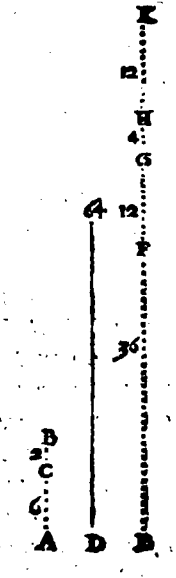
10. com. not.

4. com. not.

THEOREMA IIII.

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis eſt quadratis, qui à partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB, & numero plano, qui bis ex AC CB fit, æqualem eſſe. ſit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB: EF vero quadratus, qui ex AC & GH quadratus qui ex CB: numerus autem planus, qui fit ex AC CB vterq; ipſorum FG HK. quoniam igitur AC ſe ipſum multiplicans fecit EF, metitur AC numerum EF per vnitates, quæ in ſe ipſo ſunt. rurſus quoniam BC multiplicans CA fecit FC, metitur CA ipſum FG per vnitates, quæ ſunt in BC. metiebatur autem, & EF per vnitates, quæ in ipſo ſunt, ergo AC totum EG per vnitates, quæ ſunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipſum EG fecit: ideoq; EG eſt numerus planus, qui fit ex B A AC. ſimiliter oſtendemus, & GK numerum planum eſſe, qui fit ex AB B C. atq; eſt D numerus quadratus, qui ex AB efficitur. ſi autẽ numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus æqualis eſt duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraq; parte. ergo D ipſi EK eſt æqualis. ſed EK conſtat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo qui bis ex AC CB numero plano. atq; eſt D quadratus ex AB. quadratus igitur ex AB eſt æqualis quadratis, qui ex AC CB, & ei, qui bis ex AC, CB fit numero plano. Ergo ſi numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus æqualis eſt quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano. quod demonſtrare oportebat.



10. com. not.

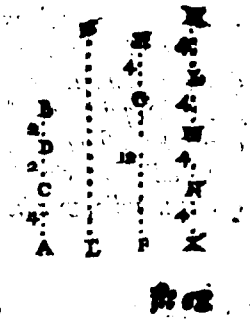
9. com. not.

12. 2. huius.

THEOREMA V.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vna cum quadrato numeri interiecti æqualis eſt ei, qui ex dimidio fit quadrato.

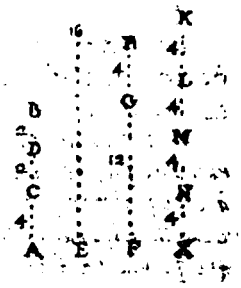
Sit par numerus AB; & bifariã in AC CB diuidatur, diuidatur q. in partes inæquales AD DB. Dico quadratum ex CB numero plano, qui



fit ex AD DB vna cum quadrato, qui ex CD æqualem esse. sit enim E quadratus ex CB: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus sit GH. itaq; quoniam numerus BC diuiditur in duos numeros BD DC, erit quadratus ex BC, hoc est E æqualis quadratis ex BD DC vna cum eo, qui bis fit ex BD DC numero plano. sit igitur ex BD quidem quadratus KL, ex DC vero quadratus NX: & planus ex BD DC vterq; ipsorum LM MN: totus igitur KX ipsi E est æqualis. & quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, metitur BD ipsum KL per vnitates, quæ in se ipso sunt. rursus quoniam CD ipsum DB multiplicans fecit LM; DB metitur LM per vnitates, quæ sunt in CD. metiebatur autem KL per eas quæ in se ipso sunt vnitates. ergo DB totum KM metitur per vnitates, quæ sunt in CB; æqualis autem est CB ipsi CA. quare DB metitur KM per vnititates, quæ sunt in CA. rursus quoniam CD multiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quæ sunt in CD vnitates, metiebatur autē & KM per vnitates, quæ sunt in AC. ergo DB totum KN per vnitates, quæ sunt in AD metitur. sed & DB metitur FG per vnitates, quæ sunt in AD; ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. æqualis igitur est FG ipsi KN. qui enim sunt eiusdem æque multiplices inter se æquales sunt. est autem & GH æqualis NX, cum vterq; quadratus ex CD ponatur. totus igitur KX toti FH est æqualis; estq; ipsi E æqualis KX. ergo FH ipsi E æqualis erit. atq; est FH quidem numerus planus ex AD DB vna cum quadrato, qui fit ex DC. E vero est qui fit ex CB quadratus. numerus igitur planus; qui fit ex AD DB vna cum quadrato ex DC æqualis est ei, qui fit ex CB quadrato. ergo si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem, & in numeros inæquales; qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vna cum quadrato numeri interiecti æqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato. quod oportebat demonstrare.

1x anteced.

10.com.not.



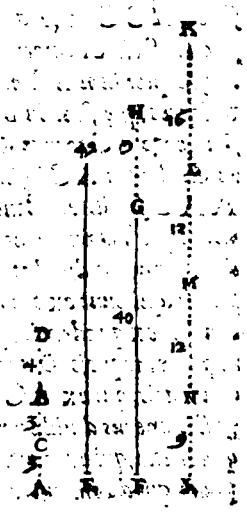
THEOREMA VI.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus una cum quadrato dimidij est æqualis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat.

Par enim numerus AB diuidatur bifariam in numeros AC CB; & ipsi alius numerus BD adijciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB vna cum quadrato ex CB æqualem esse ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD: numerus autem planus qui fit ex AD DB sit FG. & ex CB quadratus CH. & quoniam quadratus ex CD est æqualis quadratis ex DB BC vna cum eo; qui bis fit ex DB BC, sit quadratus quidem ex BD numerus KL: planus vero numerus NX DB BC sit vterq; ipsorum LM MN; & ex BC quadratus NX. totus igitur KX est æqualis quadrato ex CD: est autem E, qui fit ex CD quadratus. ergo KX ipsi E est æqualis. & quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, BD metitur KL per vnitates quæ in se ipso sunt. metitur autem & LM per vnitates, quæ sunt in CB. ergo DB metitur totum KM per eas, quæ sunt in CD vnitates. est autem CB ipsi CA æqualis, vt ponitur. quare DB totum KN metitur per vnitates, quæ sunt in AD. sed DB metitur quoque ipsum FG per vnitates, quæ sunt in AD. ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipsi KN est æqualis. est autem, & HG æqualis NX. vterq; enim est quadratus, qui fit ex CB. totus igitur FH est æqualis toti KX. sed KX ostensus est æqualis ipsi E. ergo & FH ipsi E est æqualis. atq; est FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB vna cum quadrato, qui ex CB; E vero est quadratus qui fit ex CD. qui igitur fit ex AD DB vna cum quadrato, qui ex CB est æqualis ei, qui fit ex CD quadrato. Ergo si par numerus bifariam diuidatur, adijciatur quipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto; & adiecto planus numerus vna cum quadrato dimidij est æqualis quadrato eius qui ex dimidio, & adiecto constat. Quod oportebat demonstrare.

4.anteced.

10.com.not.



THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui a toto fit quadratus vnà cũ quadrato vnius partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquę partis quadrato.

Numerus enim AB diuidatur in numeros AC CB. Dico quadratos, qui fiunt ex BA AC æquales esse numero plano, qui bis fit ex BA AC vna cum ipsius BC quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex AB, est æqualis quadratis, qui ex BC CA, & ei, qui bis fit ex BC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC. quadratus igitur ex BA vna cum quadrato ex AC est æqualis duobus quadratis, qui ex AC, & quadrato ex CB vna cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. & quoniam qui semel fit ex BA AC est æqualis ei, qui semel fit ex BC CA vna cum ipsius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC æqualis erit ei, qui bis fit ex BC CA vna cum duobus quadratis ipsius CA. Communis apponatur quadratus, qui ex BC. Duo igitur quadrati ex AC, & quadratus vnus ex CB vna cum eo, qui bis fit ex BC CA æquales sunt ei, qui bis fit ex BA AC vna cum ipsius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vna cum quadrato ex AC æqualis est ei, qui bis fit ex BA AC vna cum quadrato reliquę partis CB. ergo si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vna cum quadrato vnius partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vna cum reliqua partis quadrato. quod oportebat demonstrare.

B
C
A

4. antecedentium.

3. antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vna cum quadrato reliquę partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. dico numerum planum qui quater fit ex AB, BC vna cum quadrato ipsius AC æqualem esse ei, qui ex AB BC tamquam ex toto fit quadrato. ponatur enim ipsi BC æqualis BD. & quoniam quadratus ex AD æqualis est quadratis, qui ex AB BD, & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano. atq; est BD æqualis BC. ergo qui fit ex AD quadratus æqualis est quadratis, qui ex AB BC, & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. sed quadrati, qui ex AB BC æquales sunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vna cum ipsius AC quadrato. est igitur qui fit ex AD quadratus æqualis ei, qui quater fit ex AB BC, & quadrato ex AC. atq; est quadratus ex AD, qui ex AB, & BC, tamquam ex vno efficitur: etenim BD ipsi BC est æqualis, ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno est æqualis ei, qui quater fit ex AB BC, & ipsius AC quadrato. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vna cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D
B
C
A

Ex antecedentium.

THEOREMA IX.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem, & in numeros inæquales. quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vna cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Par enim numerus AB bifariam diuidatur in numeros AC CB: diuidatur etiam in numeros inæquales AD DB. dico quadratos, qui fiunt ex AD DB quadratorum, qui ex AC CD duplos esse. quoniam enim par numerus AB in numeros æquales diuiditur AC CB: & in numeros inæquales AD DB: qui fit ex AD DB vna cum quadrato ex CD æqualis est ei, qui fit ex AC quadrato, qui igitur bis fit ex AD DB vna cum duobus ex CD quadratis duplus est eius quadrati, qui fit ex AC. Quoniam igitur AB bifariam diuiditur in numeros AC CB, quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vna cum duobus quadratis ex CD duplus est quadrati, qui ex AC. si autem sint duo numeri, quorum alter eiusdem quadruplus sit, alter vero duplus, qui quadruplus est dupla est du-

B
D
C
A

5. antecedentium,

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB vna cum duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor est, quam dimidius quadrati ex AB. duplo quadrati ex (D. rursus quoniam qui bis fit ex AD DB vna cum numero
4. anteced. cõposito ex quadratis AD DB æqualis est ei, qui fit ex AB quadrato: erit compositus ex AD DB quadratis maior, quam dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. atq; est quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compositus igitur ex quadratis AD DB maior est, quam duplus quadrati ex AC; duplo quadrati ex DC. Ergo duplus est quadratorum, qui ex AC (D fiunt. si igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem, & in numeros inæquales; quadrati. qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vna cum quadrato numeri inter ipsos interiecti. quod demonstrare oportebat.

B 2 D 3 C 5 A

F. C. COMMENTARIVS.

Præcedens demonstratio obscuriuscula est, quare apertius hoc modo explicabitur.

Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD, erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD, æqualis quadratis ex AC CD vna cum numero plano, qui bis fit ex AC CD. & cum numerus CB sit æqualis ipsi AC, quadratus ex AD æqualis erit quadratis ex BC CD vna cum eo, qui bis fit ex BC CD. addatur communis quadratus ex DB quadrati igitur ex AD DB æquales sunt quadratis ex BC CD DB vna cum eo, qui bis fit ex B(CD. sed quadrati ex B((D ex 7. antecedentium sunt æquales ei, qui bis fit ex BC CD vna cum quadrato DB. ergo quadrati ex AD DB æquales sunt duplis quadratorum ex B(CD, hoc est duplis quadratorum ex AC CD; ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonstrare oportebat.

B 2 D 5 C 5 A

THEOREMA X.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquã ex vno efficitur.

Sit enim par numerus AB, & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adiciatutq; ipsi alter numerus BD. Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD
7. anteced. duplos esse. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AE BD, erunt quadrati ex AD DB æquales numero plano, qui bis fit ex AD DB vna cum quadrato ex AB. quadratus autem ex AB est æqualis quattuor quadratis, qui fiunt ex AC (B; est enim AC ipsi CB æqualis. quadrati igitur ex AD DB sunt æquales ei, qui bis
6. anteced fit ex AD DB, & quattuor quadratis ex AC CB. & quoniam qui fit ex AD DB vna cum quadrato ex CB est æqualis quadrato ex CD; erit qui bis fit ex AD DB vna cum duobus ex CB quadratis æqualis duobus quadratis, qui ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB æquales sunt duobus quadratis ex CD, & duobus quadratis ex AC. dupli igitur sunt quadratorũ ex AC (D. atq; est quadratus quidem ex AD, qui fit ex toto cum adiecto: quadratus vero ex DB, qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD, qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cum adiecto vna cum eo, qui ex adiecto, duplus est quadrati qui fit ex dimidio vna cum quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat. quare si par numerus bifariam diuidatur. adiiciaturq; ipsi alter numerus; q fit ex toto cũ adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D 2 B 3 C 3 A

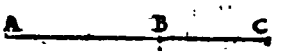
F. C. COMMENTARIVS.

Illud autem quod vndecimæ secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

Si enim fieri posset, diuidatur numerus AB in numeros AC CB. vt qui ex AB BC fit numé-

rus

rus planus æqualis sit quadrato ex AC. qui igitur quater fit ex AB BC quadrati ex AC quadruplus est. ergo qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ex AC quintuplus est ipsius quadrati ex AC. sed qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ex AC numerus quadratus est: etenim æqualis est quadrato, qui à toto AB, & à parte BC tamquam ab vno efficitur ex octauo præmissorum. est autem, & qui fit AC quadratus. duo igitur quadrati numeri inter se proportionem habent, quam quinque ad vnũ. quod fieri non potest. Ergo numerus non diuiditur ita, vt qui à toto, & altera parte sit numerus planus æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit, quadrato, quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit vt primus ad secundum ita secundus ad alium vllum.

Duo enim numeri AB primi inter se sint. dico non esse vt A ad B, ita B ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita B ad C. & sunt AB primi, & minimi, minimi verò eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem, metitur igitur A ipsum B, vt antecedens antecedentẽ. sed & ipsé se ipsum metitur. ergo A metitur ipsos AB primos inter se existẽtes, quod est absurdum, non igitur est vt A ad B, ita B ad C, quod oportebat demonstrare.

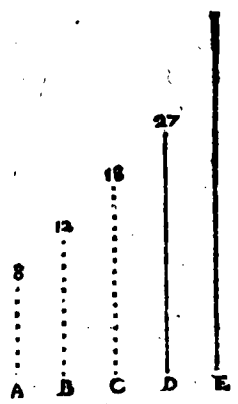


23. septimi.
21. septimi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint, non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportiõnales ABCD, extremi autem ipsorum AD primi sint inter se. dico non esse vt A ad B, ita D ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita D ad E. quare permutando, vt A ad D, ita erit B ad E. & sunt AD primi, sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & B metitur ipsum C, & ob id A quoque ipsum C metitur, & quoniam est vt B ad C ita C ad D, metitur autem B ipsum C, & C, ipsum D metitur. Sed A metitur C, quare & ipsum D metitur autem & se ipsum. ergo A ipsos AD primos inter se existentes metitur, quod fieri non potest non igitur erit vt A ad B, ita D ad aliũ vllum, quod demonstrare oportebat.



23. septimi
21. septimi

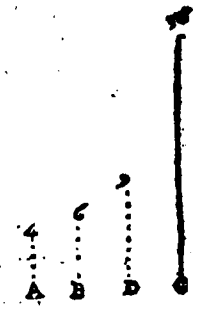
2. com. not

PROBLEMA I. PROPOSITIO XVIII.

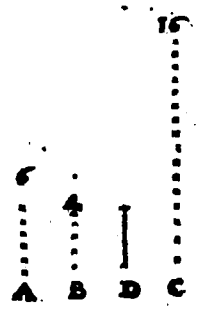
Duobus numeris datis considerare an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati duo numeri AB, & oporteat cõsiderare an posſit tertius ipſis proportionalis inueniri. Itaque AB vel primi inter ſe ſunt, vel non primi, ſi quidem primi, iam oſtenſum eſt, fieri non poſſe, vt tertius ipſis proportionalis inueniatur. Sed non ſint AB inter ſe primi, & B ſe ipſum multiplicans faciat C vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipſum C fecit. ſed & B ſe ipſum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex AD eſt æqualis ei, qui ex B. ergo vt A ad B ita B ad D; ac propterea ipſis AB tertius proportionalis D inuentus eſt.

16. huius.
9. com. not.
19. ſeptimi



Sed non metiatur A ipſum C. dico fieri non poſſe, vt ipſis AB tertius proportionalis inueniatur, Si enim fieri poteſt, inuentus ſit D. ergo qui fit ex AD æqualis eſt ei, qui fit ex B. ſed qui fit ex B eſt C, qui igitur fit ex AD ipſi C eſt æqualis. ergo A ipſum D multiplicans fecit C. & ob id A ipſum C per D metitur. ſed & non metiri poſitum eſt. quod eſt abſurdum. non igitur fieri poteſt, vt ipſis AB tertius inueniatur proportionali, quando A ipſum C non metitur quod demonſtrare oportebat.



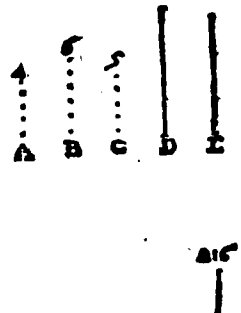
PROBLEMA II. PROPOSIT. XIX.

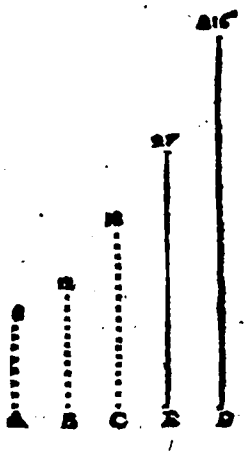
Tribus numeris datis cõſiderare an quartus ipſis proportionalis inueniri poſſit.

* demonstratio huius propositionis est difficilis facile autem concludetur propositio per 19 propositionem li. 7.

Sint dati tres numeri ABC, & oporteat conſiderare an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri, ergo ipſi AB C vel deinceps ſunt proportionales; & eorum extremi primi inter ſe ſunt, vel non deinceps proportionales, & eorum extremi ſunt primi inter ſe, vel proportionales quidem deinceps. non autem exttemi ipſorum inter ſe primi, vel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter ſe ſunt, ſi quidem igitur ABC deinceps ſunt proportionales & eorum extremi AC primi inter ſe, iam demonſtratum eſt fieri non poſſe, vt quartus ipſis proportionalis inueniatur. ſi vero non ſunt deinceps proportionales & extremi ipſorum ſũt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non poſſe. ſi enim inueniri poteſt ſit D. vt gitur A ad B, ita C ad D: & vt B ad C, ita ſit D ad E. ergo ex æqualis vt A ad C, ita C ad E, ſed ſunt AC primi, primi autem, & minimi, minimi vero eos, qui eandem proportionem habent æqualiter metiuntur. antecedens antecedentẽ & conſequens conſequentem, ergo A ipſum C metitur, antecedens antecedentem, metitur autem & ſe ipſum, quare A ipſos AC primos inter ſe exiſtentes metitur. quod fieri non poteſt. ipſis igitur ABC non poteſt quartus proportionalis inueniri.

37. huius.
13. ſept.
21. ſept.



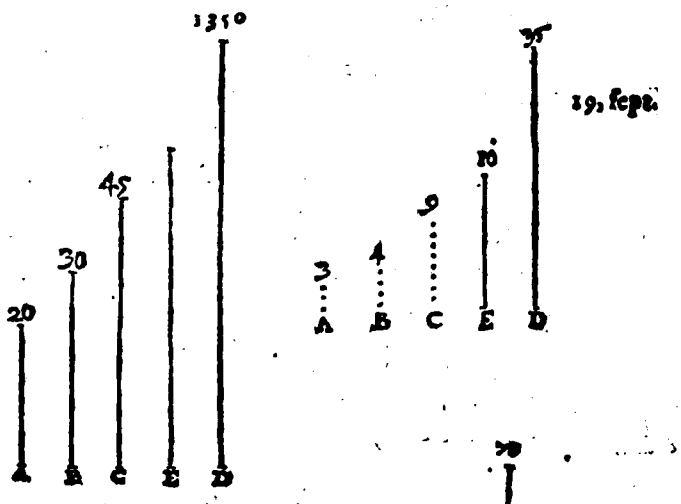


Rurſus ABC proportionales quidem ſint deinceps non autem extremi eorum primi. dico quartum proportionalem inueniri poſſe. multiplicans enim B ipſum C faciat D. itaque vel A metitur B ipſum D vel non metitur. metiatur primum per E ergo A mutiplicans E fecit D ſed & B multiplicans C ipſum D fecit. qui igitur fit eſt AE eſt æqualis ei qui ex BC proptereaque vt A ad B ita eſt C ad E ipſis igitur ABC quartus proportionalis E inuentus eſt.

9 com. not.
19. ſept.

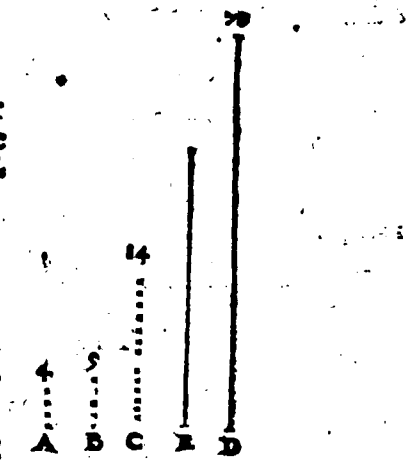
Sed

Sed non metiatur A ipſum D. dico fieri non poſſe. vt ipſis ABC inueniatur quartus proportionalis. ſi enim inueniri poteſt. inueniatur. ſitque E. ergo qui ſit ex AE eſt æqualis ei, qui ex BC. ſed qui fit ex BC eſt D, quare qui fit ex AE ipſi D eſt æqualis & ob id A ipſum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipſum D per E, quare A ipſum D metitur. ſed & non metitur, quod eſt abſurdum, non igitur fieri poteſt, vt ipſis ABC inueniatur quartus proportionalis, quando A ipſum D non metitur.



19. ſept.

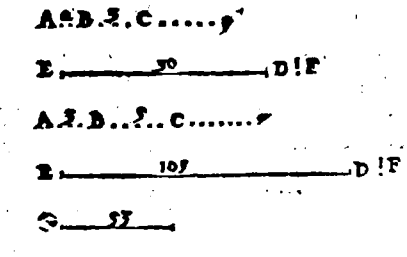
Sed non ſint neque deinceps proportionales ABC, neq; AC interſe primi, & B ipſum C multiplicans faciat D, ſimiliter demonſtrabimus: ſi A ipſum D metiatur, inueniri poſſe quartum proportionalem, ſin minus inueniri non poſſe. quod demonſtrandum fuerat.



THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

Sint propoſiti primi numeri ABC. dico ipſis ABC plures eſſe primos numeros. ſumatur enim minimus, quem ipſi ABC metiantur; ſitque DE, & ipſi DE apponatur vnitas DF. ergo EF vel primus eſt, vel non. ſit primum primus. Inuenti igitur ſunt primi numeri ABC EF plures, quam ipſi ABC. ſed non ſit EF primus. ergo cum primus aliquis metitur. metiatur G dico G nulli ipſorum ABC eundem eſſe, ſi. n. G idem ſit, qui vnus ipſorum ABC; ipſi autem ABC metiantur DE. & G ipſum DE metietur. metitur autem & EF. & reliquam igitur DF vnitatem metietur numerus exiſtens. quod eſt abſurdum, ergo G non eſt idem, qui vnus ipſorum ABC, & ponitur primus. inuenti igitur ſunt primi numeri ABCG plures propoſita multitudine primorum numerorum ABC. quod oportebat demonſtrare.



38. ſeptimi

13. com. not

SCHOLIUM.

In hoc theoremate vult oſtendere infinitos eſſe numeros primos, ſi enim omni propoſita numerorum multitudine primi plures ſint, infinitos eſſe primos manifeſtum eſt. ſi autem hoc, videtur obſiſtere philoſophorum dogmati, qui aſſerunt prima determinata eſſe; & numero minora:

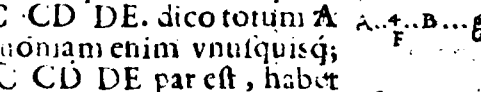
quid

quid igitur dicemus? primos numeros non esse principium numerorum, sed vnitatem ipsam, qua & contracta est & sola quare & in numeris hoc seruatur principium non esse infinitum sed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

Componãtur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisq; ipsorum AB BC CD DE par est, habet partem dimidiam. quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus est, qui bifariam diuiditur. ergo AE par est. quod demonstrare oportebat.



6. diff.

F. C. COMMENTARIVS.

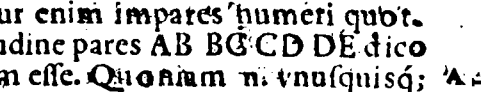
Quare & totus AE partem dimidiam habebit.] *Quotiam enim vnusquisque eorum habet dimidium, sit ipsius AB dimidia AF, & ipsius BC dimidia BG, & ipsius CD dimidia CH, denique ipsius DE dimidia DK. vt igitur AB ad eius dimidiam AF, ita & vnusquisque reliquorum ad eius dimidiam. quare vt AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK, sed AF dimidia est ipsius AB. ergo & AF BG CH DK sunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoque etiam par erit.*

12. sept.

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur multitudo autem ipsorum sit par, totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcumque multitudine pares AB BC CD DE dico totum AE parem esse. Quoniam n. vnusquisq; ipsorum AB BC CD DE impar est, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnusquisque reliquorũ par. quare & compositus ex ipsis par erit. est autem par & vnitatum multitudo & totus igitur AE par est. quod oportebat demonstrare.

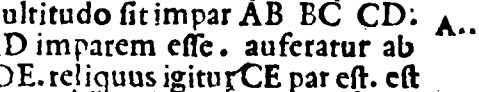


Ex antec.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componantur, & multitudo ipsorum sit impar, & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcũque, quorum multitudo sit impar AB BC CD: dico & totum AD imparem esse. auferatur ab ipso CD vnitas DE. reliquus igitur CE par est. est autem & AC par, ergo & totus AE par erit. atque est DE vnitas, impar igitur AD. quod oportebat demonstrare.



21. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Atque est DE vnitas. impar igitur est AD.] *impar enim numerus est qui à pari vnitate differt.*

7. diff.

THEO-

THEOREMA XXII. PROPO. XXIV.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquũ CA parem esse. Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. Eadem ratione & BC. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur est AC. Quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Quare & reliquus AC partem habet dimidiam) *Sit ipsius AB dimidia BD, & ipsius CB dimidia BE, erit AB ad BD, vt CB ad BE. & permutando AB ad BC, vt DB ad BE. & diuidendo AC ad CB, vt DE ad EB. rursusque permutando AC ad DE, vt CB ad BE. sed BE est dimidia ipsius CB. ergo & DE ipsius AC dimidia erit. cum igitur AC partem habeat dimidiam bifariam diuiditur, ac propterea par est. quod demonstrandum proponebatur.*

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si à pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquũ CA imparem esse. auferatur ab ipso BC vnitas CD. ergo DB par est. est autem par & AB. & reliquus igitur AD est par. atque est CD vnitas. ergo CA impar est. Quod demonstrare oportebat.



Ex antecedente.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB impar est, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD est par. Eadem ratione & CD est par. quare & reliquus AC par est. Quod oportebat demonstrare.



24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem esse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par est. est autem par & BC. & reliquus igitur CD est par. atque est DA vnitas. ergo CA impar est. Quod oportebat demonstrare.



24. huius.

THEOREMA XXVI. PROPO. XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, cõponitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot vnitates sunt in A. atque est B par. ergo C ex paribus numeris cõponitur. si autem pares numeri quotcumque componantur totus par erit. ergo C est par. Quod demonstrare oportebat.



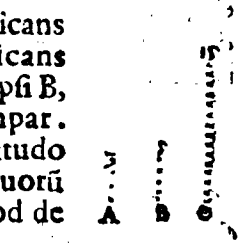
21. huius.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A vnitates. atque est vterque ipsorum AB impar. Ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorũ multitudo impar, & ipse impar erit. Ergo C est impar. Quod demonstrare oportebat.

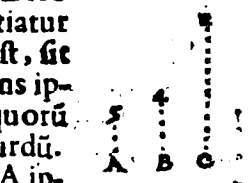


a 3. huius

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXX.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium eius metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium eius metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per C. Dico C non esse imparem. nam si fieri potest, sit impar. & quoniam A ipsum B metitur per C, A multiplicans ipsum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorũ multitudo est impar; ac propterea impar est. Quod est absurdũ. par enim ponitur. non igitur C est impar. Ergo par. quare A ipsum B pariter metitur. & ob id eius quoque dimidium metitur. Quod oportebat demonstrare.



9. com. not.

SCHOLIVM.

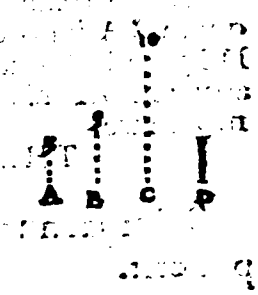
Et ob id eius quoq; dimidium metitur] *quoniam enim A ipsum B metitur per C, & C ipsum B per A metietur. habet autem vterque ipsorum CB partem dimidiam. quare vt C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. sed C metitur ipsum B per A. ergo & ipsius C dimidium, dimidium ipsius B per A metietur; ideoq; A multiplicans ipsius C dimidium, dimidium ipsius B fecit. quare A ipsius B dimidium per dimidium ipsius C metitur.*

9. com. not. 10. com. not.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, & sit C ipsius B duplus. Dico A etiam ad C primum esse. Si enim non sint AC primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitque D. & est A impar. impar igitur est & D. & quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; & D ipsius C dimidium metietur. sed ipsius C dimidium est B. ergo D ipsum B metitur, metitur autem & ipsũ A. quare D ipsos A B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest. non igitur A ad C primus non est. ergo AC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.



Ex anteced

SCHOLIVM.

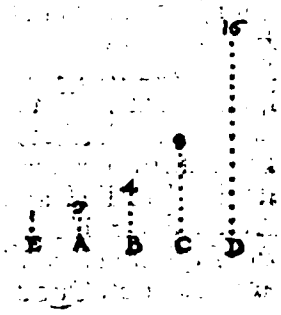
Et est A impar. impar igitur est & D] *quoniam enim A impar est, metietur autem ipsum numerus D, vt positum est & D seipsum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.*

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnuſquiſq; pariter par eſt tantum.

A binario enim A duplẽtur quotlibet numeri BCD. dico BCD pariter pares eſſe tantũ. at vero vnũquemq; ipſorũ BCD pariter parem eſſe. manifeſto conſtat à binario namq; duplatus eſt. dico & tantum. exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab unitate quotlibet numerri deinceps proportionales ſunt, & poſt vnitatem A primus eſt; maximũ ipſorum numerũ ABCD, videlicet D, nullus alius metietur præter ipſos ABC. atq; eſt vnuſquiſque ipſorum ABC par. ergo D pariter par eſt tantum. ſimiliter demonſtrabimus, & vnumquemq; ipſorum ABC pariter parem eſſe tantum. Quod demonſtrare oportebat.



13. huius.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXIII.

Si numerus dimidiũ habeat imparẽ, pariter impar eſt tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat. dico A pariter imparem eſſe tantum. at vero pariter imparem eſſe perſpicuum eſt: dimidium enim ipſius impar exiſtens ipſum pariter metitur. dico & tãtum. nam ſi A ſit etiam pariter par, dimidius ipſius par erit; atque eum par numerus per parem numerum metietur. ergo dimidium ipſius par numerus metitur; impar exiſtens. quod eſt abſurdum. quare A pariter impar eſt tantum.

A 10

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIV.

Si par numerus neq; ſit à binario duplatus, neq; dimidium imparem habeat; pariter par eſt, & pariter impar.

Numerus enim A neq; ſit A binario duplatus, neq; dimidium imparem habeat. dico A & pariter parem, & pariter imparem eſſe. at vero A pariter eſſe parem, manifeſtum eſt; dimidium enim imparem non habet. dico etiam pariter imparem eſſe. nam ſi A bifariam ſecemus, & dimidium ipſius bifariam, & hoc ſemper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipſum A per numerum parem metietur. ſi enim non, incidemus in binariũ, atq; erit A à binario duplatus. quod non ponitur quare A & pariter impar eſt. oſtenſum autem eſt & pariter eſſe parẽ. eſt igitur A & pariter par, & pariter impar. Quod demonſtrare oportebat.

A 24

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint quotcumq; numeri deinceps proportionales: auferantur autem à ſecundo, & vltimo æquales primo; erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

Sint

Sint quotcumq; numeri deinceps proportionales A BC D EF, incipientes à minimo A: & auferatur ab ipso BC; & ab EF æqualis ipsi A, videlicet GC FH. dico vt BG ad A, ita esse EH ad A BC D; ponatur. n. ipsi quidem B C æqualis F K; ipsi vero D æqualis FL. quoniam igitur FK est æqualis ipsi BC, quorum FH est æqualis GC; erit reliquus HK reliquo GB æqualis. & quoniam est vt EF ad D, ita D ad BC, & BC ad A; æqualis autem est D ipsi FL, & BC ipsi FK, & A ipsi FH: erit vt EF ad FL, ita LF ad FK, & KF ad FH. quare diuidendo vt EL ad LF, ita LK ad KF, & KH ad HF, & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. est igitur vt KH ad HF, ita EL LK KH ad LF KF HF. atq; est KH quidem æqualis BG, FH vero ipsi A, & LF KF HF æquales ipsis D BC A. ergo vt BG ad A, ita est EH ad D BC A. est igitur vt secundi excessus ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes. Quod oportebat demonstrare.

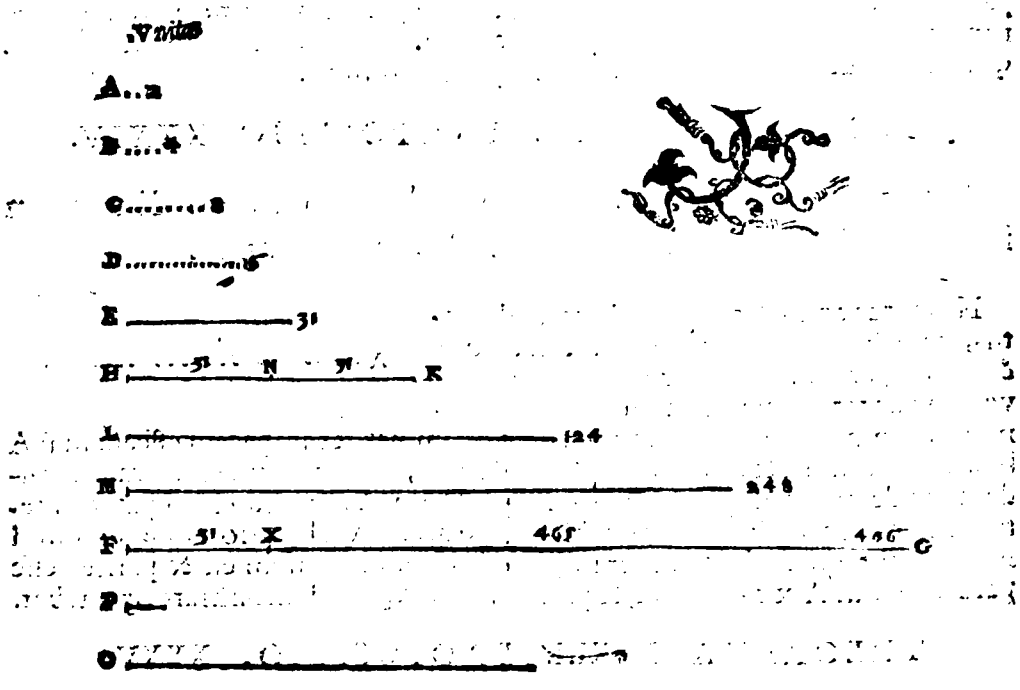
A. a
B. G. C
D..... 8
E.....6...L..4..KAHF.

F. C. COMMENTARIVS.

* Quare diuidendo vt EL ad LF.] *Ex ijs, quæ os ad 14. septimi demonstrauimus.*

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO. XXXVI.

Si ab vnitate quotcumq; numeri deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat, & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem; factus per factus erit.



Ab vnitate. n. exponantur quotcumq; numeri deinceps proportionales in dupla analogia, quoad totus cõpositus primus fiat ABCD: & toti æqualis sit E. & E ipsum D multiplicans faciat FG. dico FG perfectum esse. quot. n. sunt AB CD mul-

CD multitudine, tot ſumantur ab ipſo E in dupla analogia, qui ſint E H K L M ergo ex æquali vt A D, ita erit E ad M. ac propterea qui fit ex E D eſt æqualis ei, qui ex A M. eſt autem qui ex E D ipſe FG. quare FG eſt, qui fit ex A M multiplicans igitur A ipſum M fecit FG. ergo M metitur FG per vnitates, quę ſunt in A. atque eſt A binarius. duplus igitur eſt FG ipſius M. ſunt autē, & M L H K E deinceps dupli inter ſe. ergo E H K L M FG deinceps proportionales ſunt in dupla analogia. auferatur à ſecundo H K, & ab vltimo F G ipſi primo E æqualis vterq; H N, F X. eſt igitur vt ſecundi numeri exceſſus ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes. quare vt N K ad E, ita X G ad M L H K E. atque eſt N K ipſi E æqualis. ergo & X G eſt æqualis ipſis M L H K E. eſt autem & F X æqualis ipſi E; atque E ipſis A B C D, & vnitati æqualis. totus igitur F G æqualis eſt & ipſis E H K L M, & ipſis A B C D, & vnitati; omneſq; ipſum F G metiuntur. Dico F G nullum alium metiri præter ipſos A B C D E H K L M, & vnitatē ſi. n. fieri poteſt, metiatur aliquis numerus ipſum F G, qui ſit O: ſitq; O nulli ipſorū A B C D E H K L M idē. & quoties O ipſū F G metitur, tot vnitates ſint in P. ergo P ipſum O multiplicans fecit F G. ſed & E multiplicans D ipſum F G fecit. eſt igitur vt E ad P, ita O ad D. & quoniam ab vnitate deinceps proportionales ſunt A B C D, & poſt vnitatem A primus eſt, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipſos A B C: & ponitur O nulli ipſorum A B C idem. non igitur O ipſum D metietur. vt autem O ad D, ita E ad P. ergo neq; E metietur ipſum P atque eſt E primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt. quare E P primi inter ſe ſunt. ſed primi & minimi, minimi vero eos, qui eandem, quam ipſi, proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & conſequens conſequentem. atque eſt vt E ad P, ita O ad D. ergo E æqualiter metitur ipſum O, atq; P ipſum D. ſed D nullus alius metitur præter ipſos A B C. quare P idem eſt, qui vnus ipſorum A B C. ſit idem, qui B. & quot ſunt B C D multitudine, tot ab ipſo E ſumantur E H K L. ſuntque E H K L in eadem proportione, in qua B C D. ex æquali igitur vt B ad D, ita eſt E ad L. ergo qui fit ex B L eſt æqualis ei, qui ex D E. ſed qui fit ex D E eſt æqualis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L æqualis erit. quare vt P ad B, ita eſt L ad O. eſtq; P idem qui B. ergo & L idem erit, qui O. quod fieri non poteſt. etenim O nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur. non igitur ipſum F G metitur aliquis numerus præter ipſos A B C D E H K L M, & vnitatem. atque oſtenſus eſt F G æqualis ipſis A B C D E H K L M, & vnitati. perfectus autē numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis. ergo F G perfectus erit: quod oportebat demonſtrare.

7. ſeptimi.

10. com. not.

9. cōis not.

19. ſeptimi.

13. huius.

31. ſeptimi.

23. ſeptimi.

19. ſeptimi.

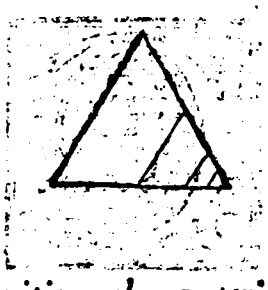
Finis Libri Noni.

SCHOLIVM.

Propositum est Euclidi in decimo libro tractare de commensurabilibus, & in commensurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. Non enim eadem sunt incommensurabilia & irrationalia: quoniam illa quidem natura sunt; irrationalia vero, & rationalia positione. Si enim quadrati diametrum natura incommensurabilem facit, vt eius latus, hoc non facit temere, sed ex illius rationibus, quæ in ipsa sunt. Quare neque irrationale est eorum, quæ natura sunt incommensurabilia, sed incommensurabile. etenim natura ipsa hoc facit iuxta omnem mensuram quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commensurabilibus, & incommensurabilibus tractat, eorum naturam exquirens: postea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus, quidem enim, velut obsistentes ipsa reprehendunt; sed de maxime simplicibus speciebus, quibus compositis infinitæ irrationales gignuntur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandauit. Ad scientiam autem attinet, causas, principia, & simplicia considerare, non singularia & infinita. Itaque exponit irrationalium simplices species tredecim, quæ tribus modis inuentæ sunt: his enim aliæ simplices non inuenientur. Horum modorum vnus est iuxta analogiam, per quem Euclides inuenit vnam speciem eorum. alius iuxta compositionem, per quem sex species; tertius iuxta diuisionem per quem reliquas sex inuenit. Venerunt autem initio ad inquisitionem symmetriæ hoc est commensurabilitatis Pythagorei primi, ipsam ex numerorum cognitione inuenientes, cum vnitas, sit omnium numerorum communis mensura & in magnitudinibus communis mensura inueniri non possit. Huius causa est quod omnis numerus iuxta quaslibet sectiones diuisus relinquit particulam aliquam minimam, & quæ sectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitum diuisa non relinquit particulam, quæ propter eam quod minima sit secari non possit sed & illa in infinitum secta infinitas efficit particulas, quarum singulæ in infinitum secabuntur & simpliciter magnitudo quatenus quidem diuiditur particeps est principii infiniti quatenus vero ad totum attinet, termini est particeps. At numerus contra quatenus diuiditur termini, quatenus vero ad totum attinet. particeps est infiniti. Itaq; quoniam oportet mensuras minores esse iis quæ mensurantur; mensuratur autem omnis numerus, necesse est omnium minimam esse mensuram. quare & magnitudinum si omnes mensura communi mensurantur, necesse est eam minimam esse. Sed in numeris quidem est communis mensura, terminatur enim, quemadmodum dictum est; in magnitudinibus vero non item. non igitur communis quædam mensura est omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent pythagorei, vt fieri potuit

in magnitudinibus. mensuram inuenerunt. omnes enim quas eadem mensura metitur, commensurabiles appellarunt eas vero quas non metitur eadem mensura, incommensurabiles. & harum rursus, quascunq; alia quæpiam communis mensura metitur inter se commensurabiles; quascunq; vero non metitur illis incommensurabiles. cum itaque linearum mensuris, omnes possunt esse commensurabiles, rationales autem omnes, & omnes irrationales esse possunt, vt ad aliquid, propter quod commensurabile quibusdam, & incommensurabile natura illis inest, rationale autem, & irrationale positione. Inueniuntur autem commensurabiles, & incommensurabiles tripliciter iuxta tres dimensiones, nimirum lineæ superficies, & solida, vt Theon demonstrauit, & alitinō nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi posse hoc theoremate ostēderunt.

Sumentes enim triangulum æquilaterum, basim bifariam secant, & vni portioni æqualem abscindentes in altero latere per punctū diuisionis ad basis partes parallelas ducunt, & rursus æquilaterum constituunt est triangulum cuius basis eodē modo secante similiter faciunt, & nūquam desinunt ad trianguli vertícem si enim desineret sequeretur aquilateri trianguli duo latera reliquo æqualia esse, quod est absurdum.



Quod autem horum vtilis nec superuacanea sit cognitio vel ex veteri pythagoræorum sermone colligi potest fabulantur enim eum qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tanquam ex aduta protulerit esse ausus, naufragio periisse. id. ea factum de causa, quod omne irrationale, atque informe vbique occultari velit. Aiunt preterea si quis forte alitui horum occurrerit, atque illud publicarit forsitan, & in generationi, hoc est profundi locum deferatur perpetuisque illic obruatur fluctibus, tanto rum ratione hi viri irrationalium hanc cognitionem sunt prosecuti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Decimus.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spacium metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectas lineas longitudine commensurabiles seorsum non diffiniuit, quòd in prima diffinitione magnitudines commensurabiles comprehendantur; sunt autem rectæ lineæ longitudine commensurabiles, quas eadem mensura metitur.

IV.

Incommensurabiles autem, cum quadratis, quæ ab ipsis fiunt, nullum commune spacium esse contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicumq; rectæ lineæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

Ee

VI.

Et huic commensurabiles siue longitudine, & potentia, siue potentia solum, rationales.

VII.

Incommensurabiles vero irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratũ, quod à recta linea proposita fit, dicatur rationale.

IX.

Et huic commensurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommensurabilia vero, irrationalia dicantur.

XI.

Et rectæ lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum lateta; si vero alia quæpiam rectilinea, quæ ipsis æqualia quadrata describunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sunt etiam quædam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro vtitur, nempe hæ.

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quælibet magnitudo multiplicata potest omnem propositam magnitudinem eiusdem generis superare.*

2 *Quæcumq; magnitudo metitur aliquam, metitur quoq; eam quam illa ipsa metitur.*

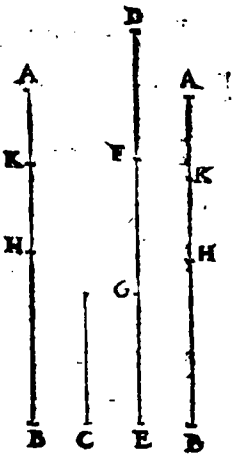
3 *Quæcunque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*

4 *Quæcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoq. eam, quæ ex ipsis componitur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

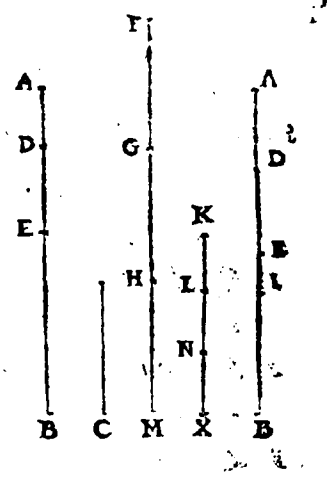
Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est rursus auferatur maius, quam dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB C, quarũ maior AB. Dico si ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius; quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quãdam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata fiet aliquãdo maior magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, maior aũt, quam AB, diuidaturq; DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur maius, quam dimidiũ BH: ab ipsa vero AH rursus maius, quam dimidium auferatur HK, atq; hoc semper fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiant diuisionibus, quę in DE: sint igitur diuisiones AK KH HB diuisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam maior est DE, quàm AB; & ablatum est ab ipsa quidem DE minus, quam dimidium EG; ab ipsa vero AB maius, q̃ dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA maius. rursus q̃m maior est GD, quam HA, & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF; ab ipsa vero HA maius, quam dimidium HK; reliquum FD reliquo AK maius erit. estq; FD æqualis ipsi C. ergo C quam AK est maior. minor igitur est AK, quã C. Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minori magnitudine C minor. quod demonstrare oportebat. similiter autem demonstrabitur etiam si dimidia ablata fuerint.



1. comm not.

* ALITER. Exponãtur duæ magnitudines inæquales AB C, sitq; C minor. & q̃m minor est C multiplicata erit aliquando magnitudine AB maior. fiat vt FM, diuidaturq; in partes ipsi C æquales MH HG GF: & ab ipsa AB auferatur maius, q̃ dimidium BE, & ab EA maius, quam dimidium ED; atq; hoc semper fiat, quoad diuisiones, quę sũt in FM, æquales fiãt diuisionibus, quæ in AB. fiãt igitur vt BE ED DA. & ipsi DA vnaquęq; ipsarũ KL LN NX sit æqualis, atq; hoc fiat, quoad diuisiones KX æquales sint diuisionibus ipsius FM. & quoniam BE maior est, quam dimidium ipsius AB, erit BE maior, quam EA. multo igitur maior est BE, quam DA. sed ipsi DA æqualis est XN. ergo BE maior est, quam XN. rursus quoniam ED maior est, quam dimidium EA, erit ED maior, q̃ DA. sed ipsi DA est æqualis NL. quare ED, quã NL est maior. tota igitur DB maior est, quam XL. ipsi vero DA æqualis est LX. quare tota AB, quam tota XK maior erit. sed & MF maior est, quam BA. multo igitur MF, quam XK est maior. & quoniam XN NL LK inter se æquales sunt; sunt autem, & MH HG GF inter se æquales: atq; est multitudo earum, quæ sunt in MF æqualis multitudini ipsarum, q̃ in XK: erit vt KL ad FG, ita KX ad FM, maior autem est FM, quam XK. ergo & GF, quam LK est maior. atq; est FG ipsi C æqualis; & KL æqualis ipsi AD. ergo C quam AD maior erit. Quod oportebat demonstrare.



12. quinti.
14 quinti.

SCHOLIVM.

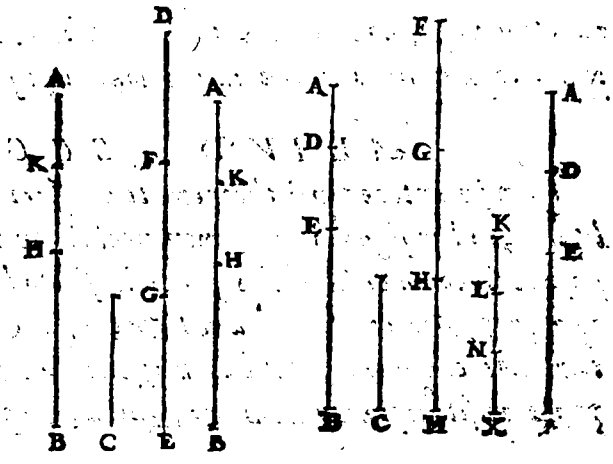
In magnitudinibus asymetriam inesse.

Ex hoc theoremate perspicuum fit in magnitudinibus asymetriam, hoc est incommensurabilitatem ineſſe. si enim exposita magnitudine minorem assumere licet, & rursus hac minorem, & semper minorem, magnitudines in infinitum

finitum secantur, & non in minimam mensuram determinatam, vt in numeris est vnitas. si igitur non est determinata magnitudo minima, erunt quædam magnitudines incommensurabiles, quas communis aliqua magnitudo, cum indeterminata sit, non metietur.

F. C. COMMETARIVS

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint] *auferatur enim ab ipsa AB dimidium BH, & ab ipsa AH dimidium HK, idq; semper fiat. quo ad diuisiones AB æquales sint diuisionib. ipsius DE, & quoniam DE maior est quàm AB, & ab ipsa quidem DE ablatum est minus quàm dimidium, ab ipsa vero AB ablatam est dimidiũ erit reliquum GD maius reliquo HA. rursus quoniam GD maior est quã HA: & ab ipsa GD ablatum est dimidium GF; ab ipsa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquo KA maius erit. quæ deinceps sunt similiter demonstrabuntur.*

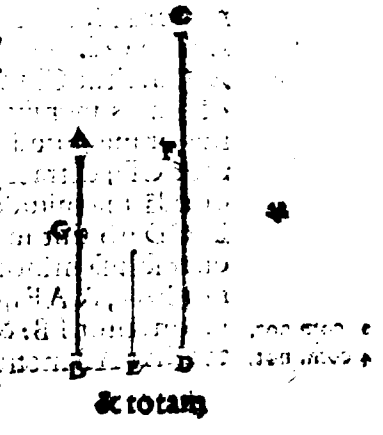


Sed in alia demonstratione. auferatur ab ipsa AB dimidium BE, & ab EA dimidium ED: atq; hoc fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in FA æquales sint diuisionibus, quæ in AB: sint autem BE ED DA. & ipsi DA æqualis sit vnaquæq; ipsarum KL LN NX. & quoniam BE est æqualis ipsi EA, & EA maior quam AD, erit BE quam DA maior. sed ipsi DA est æqualis XN. ergo BE maior est quàm XN, rursus quoniam ED DA sunt æquales ipsis NL LK, tota AB quam tota XK maior erit. reliqua vero similiter demonstrabuntur.

THEOREMA 10 PROPOSITIO. II.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expositis AB CD, quarũ minor sit AB, & detracta semper minore de maiore, reliqua minime metiatur præcedentẽ. Dico magnitudines AB CD incommensurabiles esse. si.n. commensurabiles sint, eas magnitudo quædã metietur. metiatur, si fieri potest, sitq; E: & AB quidem metiens DF relinquat se ipsa minorẽ CF: CF vero metiẽs BG relinquat se ipsa minorẽ AG; & hoc semper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ sit minor ipsa E, itaq; fiat, & relinquatur AG ipsa E minor. Quia igitur E metitur AB, AB vero metitur DF; & E ipsã DF metitur. sed & metitur totã CD. ergo & reliquã CF metietur. at CF metitur BG. quare & E ipsam BG metitur, metitur autem



& totam

& totam AB. & reliquam igitur AG metietur, maior minorem, quod fieri non potest. non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommensurabiles erunt AB CD magnitudines. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur, incommensurabiles magnitudines erunt. Quod oportebat demonstrare.

SCOLIVM.

Magnitudines quasdam longitudine esse incommensurabiles ex hoc theoremate docemur. Etenim aliquas commensurabiles esse perspicue apparet; magnitudinum autem commensurabilium maximam communem mensuram inuenire, non cuius vis est, sed hominis eruditi: cuius quidem maximæ communis mensuræ inuentionem in sequenti theoremate tradit.

ALIVD SCOLIVM.

Cum in antecedenti theoremate causſam explicauerit incommensurabilitatis, in hoc signum incommensurabilium magnitudinum affert, quando scilicet incommensurabiles sunt, in sextodecimo autem theoremate ipsarum proprium expenit, ita vt & causſa, & signum & proprium habeatur. At commensurabilibus magnitudinibus causſam veluti manifestam prætermisit expenit autem, & signum, & proprium.

F. C. COMMENTARIVS.

* Et hoc semper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ sit minor ipsa E. *quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit se ipsa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit se ipsa minorem AG: erit AG minor, quam BG. ergo ex AB ablatum est maius, quam dimidium ipsius, videlicet BG. & ita semper fiet. quod cum ex AB semper auferatur maius, quam dimidium, relinquetur tandem aliqua magnitudo, quæ ipsa E minor erit.*

Ex anteced.

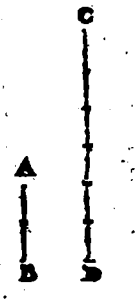
PROBLEMA I. PROPOSITIO III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

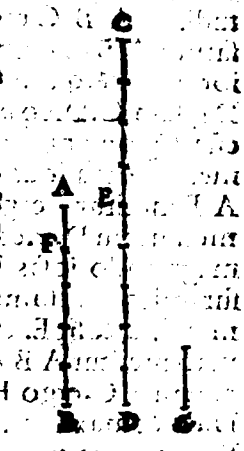
Sint datæ duæ magnitudines cõmensurabiles AB CD, quarũ minor AB. oportet ipsarum AB, CD maximã cõmunem mensurã inuenire. vel igitur AB metitur CD, vel non metitur. & si quidẽ AB metitur CD, metitur autẽ & se ipsam; erit AB ipsarũ AB CD cõmunis mensurã. & perspicuũ est maximã esse; magnitudo enim maior magnitudine AB ipsam AB nõ metietur. si vero AB nõ metitur CD; detracta semper minore de maiore, relinquetur tandem

* quædã magnitudo, quæ præcedentẽ metietur; propterea quòd AB CD nõ sint incõmensurabiles. & AB quidẽ metiens ED relinquat se ipsa minorem EC; EC vero metiẽs FB relinquat se ipsa minorẽ AF; & AF ipsã CE metiatur. Quũ igitur AF metitur CE; sed

2. com. not. CE metitur FB: & AF ipsã FB metitur. metitur aũt & se ipsã. & totã igitur AB metietur. sed AB metitur DE. ergo AF ipsã DE metitur. metitur autem



tem & CE. & totam igitur CD metietur. ergo AF ipsas AB CD metitur; ac propterea ipsarum est communis mensura. Dico & maximam esse. nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo maior ipsa AF, quæ ipsas AB CD metietur. Itaque metiatur, & sit G. & quoniã G metitur AB, AB vero metitur ED; & G ipsam ED metitur. metitur autem & totam CD. ergo & reliquam CE metietur. sed CE metitur FB. quare G ipsam FB metitur metitur autem & totam AB. & reliquam igitur metietur AF, maior minorem, quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipsarum AB CD maxima erit communis mensura. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB CD maxima ipsarum communis mensura inuenta est AF. Quod facere oportebat.



3. com. not.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri. *

SCHOLIVM.

Tamquam manifestum sit, esse magnitudines commensurabiles, aggreditur hoc theorema, & non illud prius ostendit, quemadmodum in iis, quæ in commensurabiles sunt: constat enim magnitudines omnes alicuius multiplices, si comparentur cum ea, cuius sunt multiplices, commensurabiles esse.

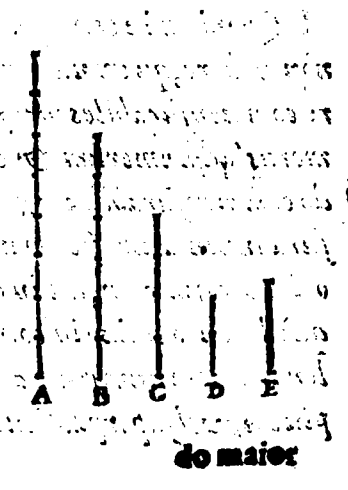
I. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri] *sequitur illud ex vltima parte demonstrationis, vt ad secundam propositionem septimi libri in numeris explicauimus.* *

PROBLEMA II. PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram inuenire.

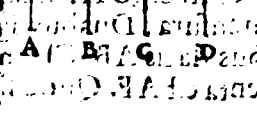
Sint datæ tres magnitudines cõmensurabiles A BC oportet ipsarum ABC maximam cõmunem mensuram inuenire. sumatur. n. duarum AB maxima cõis mensura, quæ sit D; itaq; D ipsam C vel metitur, vel nõ metitur. metiatur primũ. & quoniã D ipsam C metitur, metitur aũt & AB; & ipsas AB C metietur. Quare D ipsarum ABC cõis est mensura: & manifestum est maximam esse. magnitudo enim maior magnitudine D ipsas ABC non metietur. nam si fieri potest metiatur eas magnitu-



ex anteced.

do maior

do maior ipsa D, quæ sit E. quoniam igitur E magnitudines A B C metitur, & ipsas A B metietur & ipsarum A B maximam communē mensuram D, maior minorē, quod fieri non potest. sed non metiatur D ipsam C. Dico primum C D commensurabiles esse. Quoniam enim commensurabiles sunt A B C metitur quæ aliqua magnitudo, quæ scilicet, & ipsas A B metietur, ergo & ipsarum A B maximam cōē mensuram D metietur autē, & ipsam C, quare dicta magnitudo ipsas C D metitur: ideoq; C D commensurabiles sunt, sumatur ipsarum maxima cōmunis mensura; & sit E. Quoniam igitur E metitur D, D vero metitur A B, & E ipsas A B metietur: metitur autem & C. ergo E ipsarum A B C cōis est mensura.



Dico & maximam esse. Si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F maior ipsa E, quę magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam cōem mensuram, quæ est D. ergo F metietur D. metitur autem & C. quare F ipsas C D metitur, & ipsarum C D maximam communem mensuram, hoc est E. ergo F ipsam E metietur, maior minorem, quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa E magnitudines A B C D metietur. ergo E ipsarum A B C maxima erit communis mensura si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur erit ipsa D. tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maxima ipsarum communis mensura inuenta est. Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri. similiter & in plurib⁹ magnitudinibus maxima cōmunis mensura inuenietur, & corollarium procedet.

Quoniam incommensurabiles magnitudines consequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum & eius conuersum, ideo ostendere commensurabiles magnitudines consequi proportionem habere, quā numerus ad numerum, & contra. videlicet antequam ad hoc demonstrandum quotlibet modo commensurabilium magnitudinum duarum vel trium maxima cōis mensura inueniatur. sic & in primo arithmeticorum libro facit. postquam enim ostendit quinam sint incommensurabiles, quos primos appellat, propterea quòd non omnino incommensurabiles sunt, ut magnitudines, ostendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel superparticularem, vel superpartientem, vel multiplicem super-

parti

particularem, vel multiplicem superpartientem, quos ipse brevitatis caussa ex minori nominauit. vel partem, vel partes per partem intelligens submultiplicem, vel subsuperparticularem, vel submultiplicem superparticularem per partes vero subsuparpartientem vel submultiplicem superpartientem. hoc igitur volens ostendere egebat, quo modo commensurabilium maxima communis mensura inueniantur. quod etiam hoc loco obseruauit. Postea in quinto theoremate ostendet commensurabiles magnitudines inter se proportionem habere quam numerus ad numerum immo vero omnem commensurabilem magnitudinem omnis commensurabilis magnitudinis, minor maioris, vel partem esse, vel partes; hoc enim est proportionem habere quam numerus ad numerum; non tamen contra: latius enim patet numerus quam ambrem eo vsus est. Sciendum autem, & ipsas demonstrationes, quae ex arithmeticis petuntur, incommutabiles esse.

ALIVD.

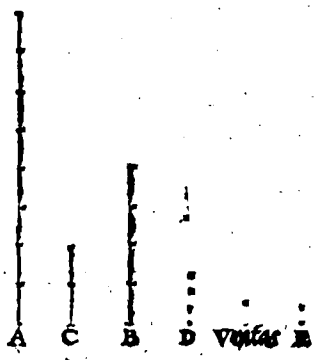
Postquam docuit quae sint magnitudines incommensurabiles, deinceps quid ipsas consequatur ostendet, & insuper quid consequatur commensurabiles in quinto & sexto theoremate, & quoniam indigebat communi mensura earum quae sunt in symmetria videlicet commensurabilium, hoc assumit in tertio, & quarto theoremate, quo pacto inuenienda sint commensurabilium communes mensurae. Septimum autem theorema inquirit quae consequantur incommensurabiles magnitudines non simpliciter, sed secundum speciem vt incommensurabiles longitudine, vel potentia, nam de incommensurabilibus secundum priuationem nihil dixit, vt pote quae non sint ipsis vtiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum quae longitudine, & potentia commensurabiles sunt, vt incommensurabiles. hic enim indiget in nouo theoremate, & sequentibus in quibus iuxta analogiam, & iuxta compositionem, & diuisionem commensurabilitas, & incommensurabilitas inquiruntur vsque ad tertium decimum theorema.

THEOREMA III. PROPOS. V.

Commensurabiles magnitudines inter se proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines AB. Dico magnitudinem A ad B proportionem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B cõmensurabiles sũt, metietur ipsas aliqua magnitudo, metiatur, & sit C, & quoties C ipsã A metitur, tot vnitates sint in D: quoties autem C metitur B, tot vnitates sint in E: quoniam

quoniam igitur C ipſam A metitur per vnitates, quæ ſunt in D, metitur autem & vnitas D per vnitates, quæ in ipſo ſunt; vnitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. ergo vt C ad A, ita eſt vnitas ad D; & conuertendo vt A ad C, ita D ad vnitatẽ. Rurſus quoniam C ipſam B metitur per vnitates, quæ ſunt in E; metiturq; vnitas numerum E per vnitates, quæ in ipſo ſunt: vnitas numerũ E æqualiter metietur, atque C ipſam B. eſt igitur vt C ad B, ita vnitas ad E. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatem. quare ex æquali vt A ad B, ita numerus D ad E numerum. commenſurabiles igitur magnitudines A B inter ſe proportionem habent, quam D numerus ad numerum E. quod oportebat demonſtrare.



SCHOLIVM.

Hoc proprium eſt commenſurabil um magnitudinum, minor maioris vel pars eſt, vel partes ſi quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quã vnitas ad numerum, vel quam numerus ad nomerum; ſi vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim ſubmultiplicem facit proportionem partes vero vnam reliquarum ſubproportionalium. ſi igitur rectæ lineæ ſint, & plana, quæ ab ipſis fiunt, & ſolida proportionem habebunt quam numerus ad numerum. ſi vero plana, & quæ ab ipſis ſolida, nõ item rectæ lineæ, niſi proportio numerorum ſit quadrati ad quadratum, & ſi ſolida non omnino quæ ipſa præcedunt, niſi proportio ſit cubi ad cubum quod ſi ſolida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana, neque rectæ linea habebunt, non enim ſunt commenſurabiles. In hoc autem theoremate, & ſequenti de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus ſimpliciter differit. at in ſeptimo de incommenſurabilibu. longitudine. ex quo manifeſtum eſt & de potentia incommenſurabilibu. In decimo denique orsum tradit commenſurabilium, & incommenſurabilium longitudine & potentia.

COMMENTARIVS.

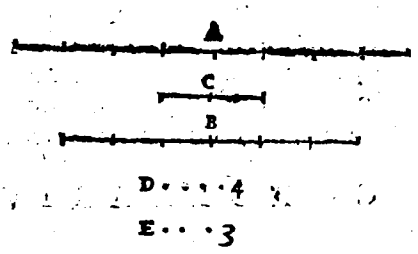
Ex iam demonſtratis poſſumus illud quoque problema abſoluere.

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam inter ſe proportionem habeant in numeris inuenire.

Sint propoſitæ magnitudines commenſurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis menſura, quæ ſit C. & quoties C metitur A, tot vnitates ſint in D: quoties autem metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. habebit igitur A ad B proportionem eã quam habet numerus D ad E numerum. itaq; ſi A B rectæ lineæ ſint; & earum quadrata erunt commenſurabilia, & inter ſe proportionem habebunt, quam

numerus

numerus quadratus ad quadratum numerum. Si vero sint superficie, vel numeri D E sunt quadrati, vel non quadrati; & si non sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non. & si quidem sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectæ lineæ, quę ipsas superficies, vel superficies ipsis æquales possunt. erunt longitudine commensurabiles. si vero numeri non habent proportionem

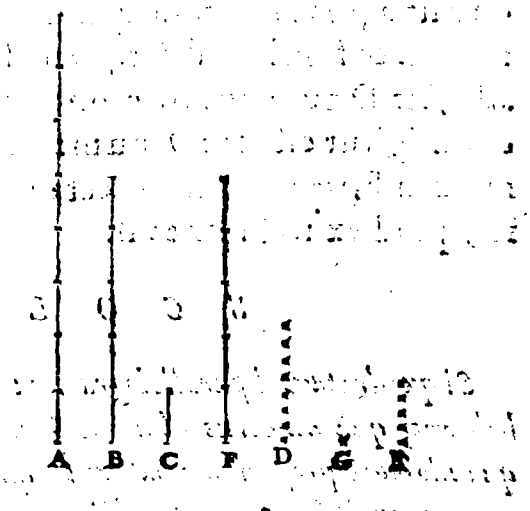


quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommensurabiles, quam-quam potentia cõmensurabiles sint. quæ omnia in nona propositione huius libri demonstrabũtur.

THEOREMA IV. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quàm numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erũt.

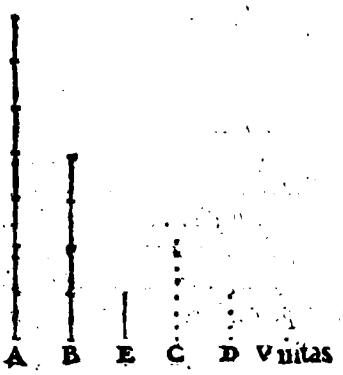
Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quã D numerus ad numerũ E. dico A B magnitudines commẽsurabiles esse. quot .n. vnitates sunt in D, in tot partes æquales diuidatur magnitudo A, & vni ipsarum æqualis sit C: quot autem vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi C componatur magnitudo F. Quoniam igitur quot sunt in D vnitates, tot magnitudines sunt in A, ipsi C æquales; quæ pars est vnitas ipsius D, eadem pars erit, & C ipsius A. vt igitur C ad A, ita est vnitas ad D. metitur autem vnitas ipsum D numerũ. ergo & C ipsam A metietur. & quoniã est vt C ad A, ita vnitas ad D numerum, erit conuertendo vt A ad C. ita D numerus ad vnitatem. rursus quoniam quot vni vnitates sunt in E, tot sunt & in F magnitudines ipsi C æquales; vt C ad F, ita erit vnitas ad E numerum. ostensum autem est & vt A ad C, ita D esse ad vnitatem. ergo ex æquali vt A ad F, ita est D ad E. sed vt D ad E. ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita A ad F. quòd cum A ad vtrãq; ipsarum B F eandẽ habeat proportionẽ, erit B ipsi F æqualis. metitur autẽ C ipsam F. ergo & ipsam B metietur. 9 quinti. sed & metitur A. quare C ipsas A B metitur. commensurabilis igitur est A ipsi B. Quare si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quã numerus ad numerũ, cõmensurabiles magnitudines erunt. Quod oportebat demonstrare.



ALITER.

Duæ .n. magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam numerus C ad numerũ D. dico magnitudines commensurabiles esse. quot .n. vnitates sunt in C, in tot partes æquales A diuidatur, & vni ipsarũ æqualis sit E, est igitur vt vnitas ad C numerũ, ita E ad A. est autẽ & vt C ad D, ita A ad B. ergo ex

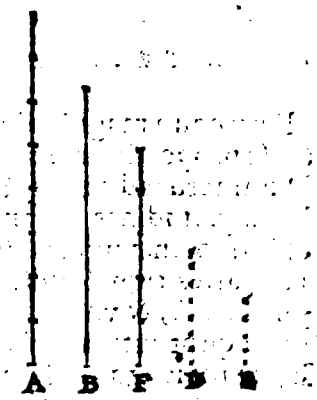
æquali vt vnitas ad D numerum, ita E ad B. sed vnitas metitur D. ergo & E ipsam B metitur. metitur autem & E ipsam A, quoniam & vnitas metitur C. quare E vtramq; ipsarum A B metietur; ideoq; A B commensurabiles sunt; atq; est E cõmunis ipsarum mẽsura.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri, vt D E, & recta linea vt A, fieri posse, vt D numerus ad numerũ E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. si autem ipsarum A F media proportionalis sumatur, vt B, erit vt A ad F, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc est vt prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda similem. & similiter descriptam. sed vt A ad F, ita D numerus ad numerum E. factum igitur est & vt D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.

cor. 20. sexti



SCOLIVM.

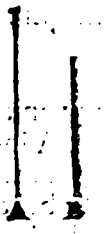
Si quadrata vel parallelogramma, vel quacumq; spacia proportionem habeant; quã numerus ad numerũ commensurabiles erunt magnitudines: quando autẽ proportionẽ habeant, quã numerus quadratũ ad quadratũ merum, & ipsæ commensurabiles sunt; & rectæ lineæ, quæ ipsas possunt, longitudine sunt commensurabiles. vel quando rectæ lineæ inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipsæ commensurabiles sunt longitudine, & quæ ab ipsis fiunt quadrata, vel spacia quadratis ipsarum æqualia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ad plura igitur se extendunt potentia commensurabiles, quàm commensurabiles longitudine; & continentiores sunt, vt ex sequentibus theorematibus fiet manifestum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint

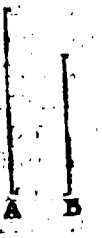
Sint incommensurabiles magnitudines A B, dico A ad B proportionem non habere, quam numerus ad numerum. si. n. A ad B proportionem habet quam numerus ad numerum; cōmensurabilis erit A ipsi B. atqui non est commensurabilis. non igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incōmensurabiles magnitudines inter se proportionē non habent, quam numerus ad numerum. Quod demonstrare oportebat.



THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.

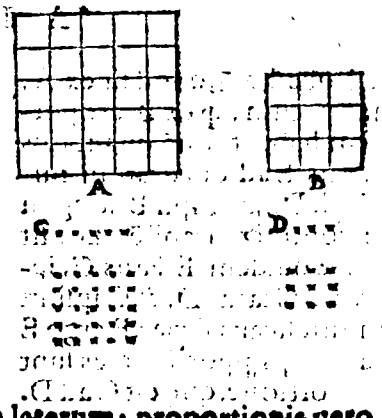
Duę. n. magnitudines A B inter se proportionē non habeant quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommensurabiles esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines. ergo si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. Quod oportebat demonstrare.



THEOREMA VII. PROPO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus sūt quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. quadrata vero quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neq; latera habebunt longitudine commensurabilia. A B

Sint rectæ lineæ A B lōgitudine cōmensurabiles. dico quadratū quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam. n. A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat eam, quam numerus C ad numerū D. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla est proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; similes. n. figuræ in dupla sunt proportione homologorum laterum: proportionis vero, quā habet numerus C ad numerū D dupla est proportio quadrati ipsius C ad ipsius D quadratū; etenim duorū numerorū quadratorū vnus medius proportionalis est numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet ad latus: erit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum,



5. huius.

Corol. 1. 20. sexti

11. octaui.

quod ex B, ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum, qui ex D.

ALITER.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, proportionem habet quam numerus ad numerū. habeat quam C ad D. & C se ipsū quidē multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F: & D se ipsum multiplicans faciat G. itaque qm C se ipsum quidē multiplicās fecit E, multiplicās vero D fecit F; erit vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita E ad F. sed vt A ad B, ita quadratum, quod fit ex A ad rectangulū, q fit ex A B. est igitur vt quadratum, q ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita E ad F. rursus quoniam D se ipsum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita erit F ad G. vt autem A ad B, ita rectangulum, quod fit ex A B ad quadratū, q fit ex B. ergo vt rectangulum, quod ex A B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. sed vt quadratum, q fit ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita erat E ad F. ex æquali igitur vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. est autem vterq; ipsorum E G quadratus. & E quidem est à numero C; G vero ab ipso D, quadratū. igitur, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Sed fit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Quoniam. n. est vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D, sed proportio quidem quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, dupla est proportionis, quam habet A ad B: proportio vero quadrati numeri, qui est à numero C ad quadratū numerū, qui à numero D itidē dupla est proportionis, quā habet C numerus ad numerum D, est igitur vt A ad B, ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet, quam numerus C ad D numerum: ac propterea A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod oportebat demōstrare.

1. sexti.

1. Sexti.

A

&

Coroll. 20. sexti.

11. octani.

6 huius.

ALITER.

Sed quadratū, quod fit ex A, ad quadratum, q ex B proportionem habeat, quā quadratus numerus E ad quadratum numerū G. Dico A ipsi B longitudinē cōmensurabilē esse: fit .n. ipsius quidem E latus G, ipsius vero G latus D; & C ipsum D multiplicans faciat F: ergo E FG deinceps proportionales sunt in proportione, quę est C ad D. Et quoniam quadratorum, quę fiunt ex A B, medū proportionale est rectangulū, quod ex A B numerorum vero quadratorum EG medū proportionale est F, erit vt quadratum,

17. septimi.

17. septimi.

dratum, quod fit ex A, ad rectangulum, quod ex AB, ita E ad F. vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G; sed vt quadratum ex A ad rectangulum ex A B, ita A ad B. ergo A B commensurabiles sunt; proportionem .n. habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est quam C ad D. vt enim C ad D, ita E ad F: nam C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autē D ipsum F fecit. est igitur vt C ad D, ita E ad F. 17. septimi.

Sed incōmensurabilis sit A ipsi B longitudine. Dico quadratū ex A ad quadratum ex B proportionem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. si.n. quadratū ex A ad quadratum ex B proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. non est autem. nō igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem hēt, quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Rursus quadratum ex A ad quadratū ex B proportionē non habeat, quam quadratus numerus ad quadratū numerū. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilē esse. si.n. commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratū ex B proportionē, quā quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commē surabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habēt, quā numerus quadratus ad quadratū numerū, & quæ deinceps sunt. Quod oportebat demōstrare.



COROLLARIVM.

Et manifestum est iam demonstratis rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quę fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, commensurabilia sunt, erunt rectæ lineæ commensurabiles longitudine, non solum longitudine, sed & potentia commensurabiles. C 6. huius.

Rursus quoniam quęcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerū, latera habent longitudine cōmensurabilia, vt ostensum est, quæ etiam potentia commensurabilia sunt, cum eorū quadrata proportionē habeāt q̄ quadratus numerus ad quadratū numerū: quę cunq; quadrata proportionē non hēt, quā quadratus numerus ad quadratū numerū, sed simpliciter q̄ aliquis alius numerus ad aliū numerū, cōmensurabilia sunt, hoc est rectæ lineę à quib. ipsa describūtur, cōmēsurabiles sunt potētia, nō aūt & longitudine. ergo rectæ lineæ longitudine quidē cōmensurabiles, oīno, & potentia cōmensurabiles sunt: potentia vero cōmensurabiles non oīno, & longitudine, nisi earū quadrata proportionē habeant, quā quadratus numerus ad quadratū numerū. Dico & longitudine incōmensurabiles non oīno & potentia incōmensurabiles esse. Qm̄ potentia cōmensurabiles possunt proportionē non habere, q̄ numerus ad numerū, ideoq; cum potentia cōmensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles. ergo non quæ longitudine incommensurabiles sunt, oīno & potentia: sed lōgitudine incōmensurabiles existētes possunt D E F

G sunt potentia & incommensurabiles, & commensurabiles esse, potentia vero in commensurabiles omnino, & longitudine incommensurabiles sunt. si enim longitudine sint commensurabiles, & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur in commensurabiles. Quod est absurdum. potentia igitur in commensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

SCHOLIVM.

Hoc theorema Theateti est inuentum, cuius mentionẽ facit Plato in Theateto. Sed illic quidem particulatim magis exponitur hic autem vniuersè numq; illic quadrata, quæ à quadratis numeris mensurantur, commensurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem est hæc propositio: neq; enim omnia commensurabilia spacia quorum, & latera commensurabilia sunt, comprehẽdit; si quidem quadratorum spaciorum commensurabiliũ, videlicet 18, & 8 latera & si non secundum mensuram numerorum inueniantur, aliter tamen commensurabilia sunt. at ipsa spacia à quadratis numeris minime mensurantur quamquam etiam mensurari possint. merito igitur hoc loco non horum modum diffinit sed quæ (vt inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non frustra quadrati numeri mentio facta est. si enim tantum dixisset, quam numerus ad numerum, redundans esset diffinitio quoniam quadrata, quæ inter se duplam proportionem habent commensurabilia habere latera oporteret. non habent autem est enim maioris lateris ad latus minoris vt quadrati diameter ad eius latus. si igitur ita dixisset, quam numerus ad numerum redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commensurabilia non habent. Si vero dixisset quæ à quadratis numeris mensurantur, diffinitio diminuta esset,

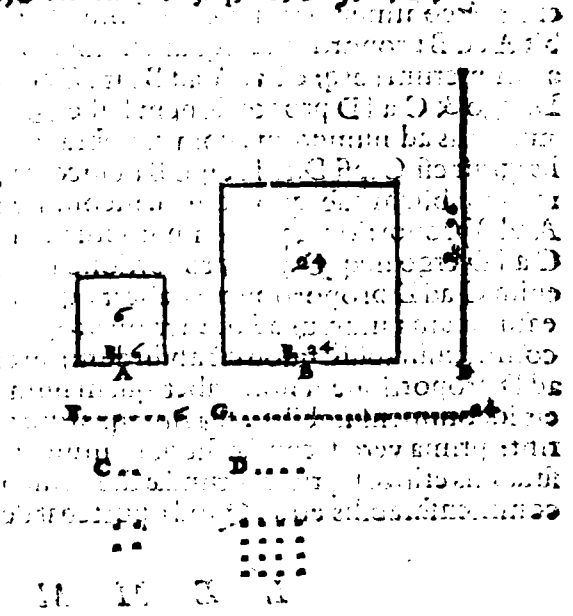
D *non comprehendens ea quæ cum latera commensurabilia habeant a quadratis numeris non mensurantur. & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem rectè appositum est quam numerus quadratus ad quadratum numerum. comprehenduntur enim omnia*

E *spacia, quæ & sua quadratis numeris non mensurantur, tamen cum sint commensurabilia, latera quoq; commensurabilia habent. nam 18, & 8 commensurabilibus existentibus propterea quod a lateribus commensurabilibus describuntur, inuenimus eorum latera cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. vt enim 9 ad 4 ita 18 ad 8. hæc sumentes latera ipsorum 9 & 4 æqualiter secabimus propositorum quadratorum latera, & habebimus commensurabilitatem. namque vt quadratus*

F *ad quadratum, ita sunt latera ad latera.*

Quæ à rectis lineis longitudè commensurabilibus fuerint quadrata] *intelligere rectas lineas longitudine commensurabiles inter se se, nõ expositæ rationali: hoc enim nõ solum in rationalibus continget, sed & irrationalibus, vt deinceps apparebit.* A

Et quadrata inter se proportionem habentia, q̃ quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine cõmensurabilia] *Per quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non solum intelligenda sunt ea, quæ totidem quadratas mensuras continent, quot vnitates sunt in numeris quadratis: sed etiam quę inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. sint enim duo numeri plani similes F G, & recta linea A. sitq; F 6, & G, 24 & fiat ex corollario sextę propositionis huius, vt F ad G ita A ad aliam lineam, quæ sit E. & inter AE sumpta media proportionali B, erit vt prima ad tertiam, videlicet vt A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad quadratum quod ex secunda, hoc est ita quadratum, & ex A ad quadratum, quod ex B. sed vt A ad E, ita erat numerus F ad numerum G, vt igitur numerus F ad G numerum, ita erit quadratum ex A ad quadratum ex B. ideoq; quadratum ex A continebit totidẽ mensuras quadratas, vt exempli gratia totidẽ pedes quadratos, quot vnitates sunt in F, videlicet sex, & quadratũ ex B totidem pedes quadratos continebit, quot vnitates sunt in G, hoc est 24. & quoniam numeri plani similes FG inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebit etiam quadratũ ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat quam quadratus numerus, qui fit ex C ad quadratum numerum, qui fit ex D. similiter demonstrabitur eorum quadratorum latere AB, quamquã certo numero ex primi non possint, tamẽ inter se longitudine commensurabilia esse. & idcirco proportionem habere, quam numerus ad numerum. Iuniores eiusmodi latera radices quadratas vel radices simpliciter appellãt, dicuntur enim A radix 6, & B radix 24. atq; est ℞ 6 ad ℞ 24, vt 1 ad 2. nam cum quadratum ex B quadruplum sit quadrati ex A, erit B ipsius A dupla. similes enim rectilineæ figuræ in duplam sunt proportione homologorum laterum.*



cor. 20. sexti

26. octaui

A

cor. 20. sexti

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine cõmensurabilibus] *Ostendit quomodo prima corollarij pars sequatur ex prima parte theorematis.* C

Rursus quoniam quæcunq; quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum] *Rursus ostendit quomodo idem ex secunda parte theorematis sequatur.* D

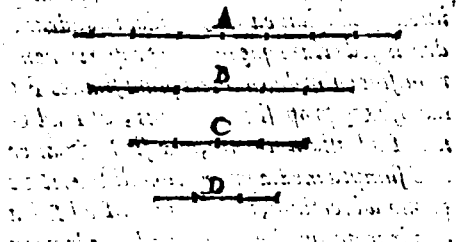
Quæcunq; quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis alius numerus ad aliũ numerum] *Hoc ad secundã partẽ corollarij attinet, & sequitur ex vltima parte theorematis.* E

Dico, & longitudine incommensurabiles] *Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, & ex tertia parte theorematis explicatur.* F

Potentia vero incommensurabiles omnino, & longitudine incommensurabiles sunt] *Hæc est vltima corollarij pars, quæ per deductionem ad id, quod fieri non potest, ex prima parte theorematis demonstratur.* G

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint; prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. & si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.



Sint quattuor magnitudines proportionales. ABCD, sitq; vt A ad B, ita C ad D & sit A ipsi B commensurabilis. Dico & C ipsi D commensurabilem esse. Quoniã enim A commensurabilis est ipsi B, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum; atq; est vt A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D proportionem habet, q̃ numerus ad numerum. commensurabilis igitur est C ipsi D. sed A ipsi B sit incommensurabilis. Dico & C ipsi D incommensurabilem esse. quoniam. n. incommensurabilis est A ipsi B, non habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. est autem vt A ad B, ita C ad D, ergo neq; C ad D proportionẽ habet, quam numerus ad numerum. si enim C ad D proportionem habeat, quam numerus ad numerum; & A ad B eam, quam numerus ad numerum proportionem habebit; atque erit A ipsi B commensurabilis. quod est absurdum; incommensurabilis. n. ponitur. ergo C ad D proportionem non habet, quam numerus ad numerum; ideoq; C ipsi D est incommensurabilis. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint; prima vero secundæ fuerit commensurabilis, & tertia quartæ commensurabilis erit. & si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit. Quod oportebat demonstrare.

5. huius.
6. huius.
7. huius.
8. huius.

LEMMA. I.

Ostensum est in arithmeticis numeros planos similes inter se proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse. & manifestum est ex his, dissimiles planos numeros, hoc est non habentes latera inter se proportionalia proportionem nõ habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. si enim haberẽt similes plani essent. quod non ponitur. ergo dissimiles plani inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

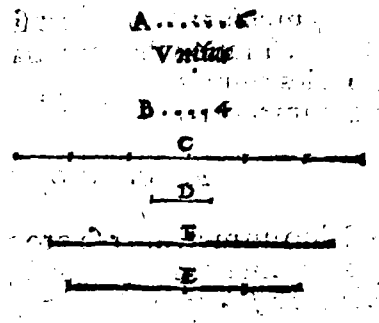
26. octaui.

LEMMA. II.

Datis duobus numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum, ita quadratum rectæ lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum.

Sint dati quidem duo numeri AB; & data recta linea C. oportet inuenire alteram rectam lineam, ita vt quadratum, quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat, quam numerus primus ad secundũ numerum. quot. n. vnitates sunt in A, in tot partes æquales diuidatur C recta linea, &

vni ipsarum æqualis sit D. quot autem vnitates sunt in B, ex tot partibus ipsi D æqualibus componatur recta linea E. est igitur vt vnitas ad A, ita D ad C; & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. est autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B ita recta linea C ad ipsam E. sumatur rectarum linearum C E media proportionalis F. est igitur vt C ad E, ita quadratū, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum; namq; vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex secunda simile, & similiter descriptum. sed vt C ad E, ita est A ad B. & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F, quare C F sunt rectæ lineæ, quas quærebamus. etenim F inuenta est.

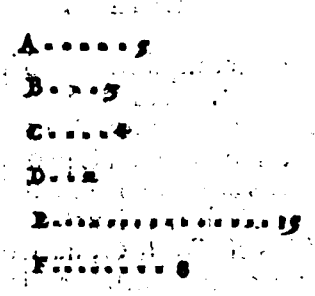


cor. 20. sexti

LEMMA III.

Duos numeros planos dissimiles inuenire, hoc est vt inter se proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Exponātur quattuor uumeri A B C D, ita vt non sit sicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perspicuum est E F numeros planos esse, planos autem dissimiles, quoniam latera proportionalia non sunt. Quod facere oportebat.



PROBLEMA III. PROPOSITIO. XI.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiā potētia

Sit proposita recta linea A. oportet ipsi A inuenire duas rectas lineas, incommensurabiles alterā quidem longitudine tantum, alteram vero etiā potentia. exponatur, n. duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratū numerum. hoc est dissimiles plani; & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. hoc. n. ante traditum est. ergo quadratū ex A cōmēsurabile est quadrato ex D. & quoniā B ad C proportionē non habet, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, neq; quadratū ex A ad quadratū ex D proportionem habebit, quā quadratus numerus ad quadratū numerū incōmensurabilis igitur est A ipsi D longitudine. sumatur ipsarū A D media proportionalis E. est igitur vt A ad D, ita quadratū ex A ad quadratū ex E sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis. ergo & quadratū ex A quadrato ex E incommensurabile erit incommensurabilis



9. huius. Coroll. 20. sexti

rabilis igitur est A ipsi E potentia. ergo proposita recta lineę rationali, à qua dicebamus mensuras sumi, vt ipsi A potentia quidem commensurabilis inuenta est D, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis vero E; irrationales enim vniuersę appellantur, quę rationali & longitudine, & potentia incommensurabiles sunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Et si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse] *Hoc ab Euclide non demonstratur in arithmeticis, sed nos ad vigesimam sextam octaui libri demonstrauimus.*

B Exponantur enim duo numeri BC inter se proportionem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani] *Hoc in promptu est, sed tamen quomodo fiat in textu Scholio antecedentium explicatur.*

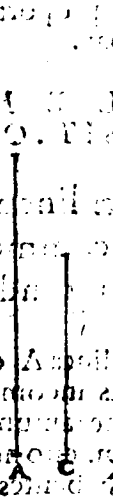
C Et fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc.n. ante traditum est) *In corollario scilicet sexti theorematis, & quamquam hoc ex illo perspicue appareat, tamen secundum lẽma, quod in græcis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus.*

D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit] *ex antecedenti theoremate.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XII.

Quę eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se cõmensurabiles sunt.

Vtraque.n. ipsarum AB ipsi C sit commensurabilis. Dico & A ipsi B commensurabilem esse. Quoniam enim A commensurabilis est ipsi C, habebit A ad C proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam numerus D ad ipsum E. Rursus quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam F ad G. & proportionibus datis quibuscunq; videlicet quam habet D ad E, & quam habet F ad G; sumantur numeri deinceps proportionales in datis proportionibus HKL; sitque vt D ad E, ita H ad K: vt autem F ad G, ita K ad L. Quoniam igitur est vt A ad C, ita D ad E; sed vt D ad E, ita H ad K: erit & vt A ad C, ita H ad K. Rursus quoniam est vt B ad C, ita F ad G, & vt F ad G, ita K ad L; erit & vt B ad C, ita K ad L. est autem, & vt A ad C, ita H ad K. ex æquali igitur vt A ad B, ita H ad L. ergo A ad B proportionem habet. quam numerus H ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis: Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt. Quod oportebat demonstrare.



5. huius.

4. octaui.

21. quinti.

6. huius.

SCHOLIVM.

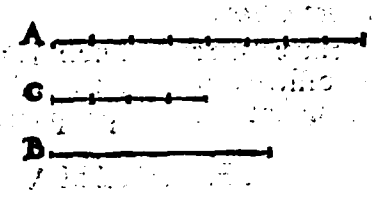
Hoc ab identitate non conuertitur. Non enim quæ inter se sunt commensurabiles, & eidem commensurabiles sunt; quemadmodum neque æquales inter se eidem sunt æquales, sed contra. Nam contingit, & incommensurabiles

mensurabiles esse eidem, & commensurabiles; quod sequens theorema, & eius conuersum ostendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO XIII.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines AB, alia autem sit C; & A quidem ipsi C commensurabilis sit; B vero eidem C incommensurabilis. Dico & A ipsi B incommensurabilem esse. Si enim commensurabilis est A ipsi B, est autem & C commensurabilis ipsi A; erit & C ipsi B commensurabilis. Quod non ponitur.

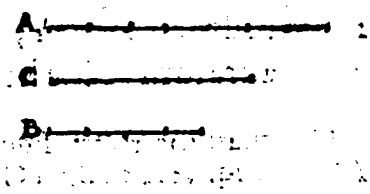


Ex anteced.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIV.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis. Dico & reliquam B ipsi C incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est B ipsi C, est autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi C commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. Quod fieri nō potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines cōmensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidē incommensurabilis erit. Quod oportebat demonstrare.



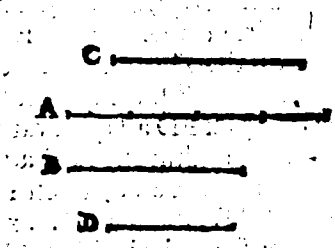
13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quæ proxime demonstrata sunt, licet illud etiam demonstrare.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

Sint duæ magnitudines incommensurabiles AB, sitque C ipsi A commensurabilis, & D commensurabilis ipsi B. Dico C D inter se incommensurabiles esse. Quoniam A C commensurabiles sunt, atque est A ipsi B incommensurabilis, & C ipsi B incommensurabilis erit. Rursus quoniam B D commensurabiles sunt, est autem B incommensurabilis ipsi C; & D ipsi C incommensurabilis erit. Quod oportebat demonstrare.



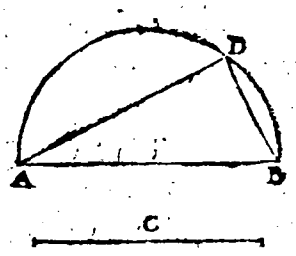
Ex anteced.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

Sint

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales ABC, quarum major sit AB. oportet inuenire id, quo AB plus poteſt, quàm C. Deſcribatur in recta linea AB ſemicirculus ADB, & in eo aptetur recta linea AD, ipſi C æqualis, & DB iungatur. per ſpicuum eſt angulum A D B rectum eſſe, & ipſam AB plus poſſe, quàm AD, hoc eſt quàm C, quantum eſt rectæ lineæ DB quadratum.



1. quarti.
31. tertij.
47. primi

Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt, hoc modo inuenietur.

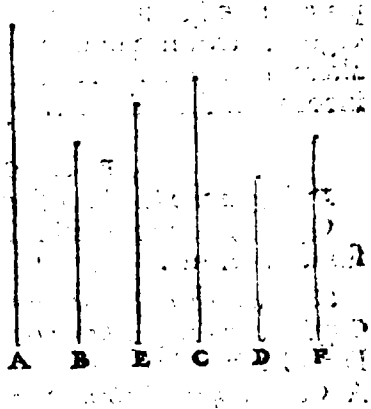
Sint duæ datæ rectæ lineæ AD DB; & oporteat inuenire rectam lineam, quæ ipſas poſſit. exponantur enim AD DB, ita vt rectum angulũ contineant ADB & AB iungatur. rurſus perſpicuum eſt rectam lineam AB ipſas AD DB poſſe.

47. primi

THEOREMA XII. PROPOSITIO XV.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint; prima vero tanto plus poſſit, quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi cõmenſurabilis lõgitudine: & tertia tanto plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis. Quòd ſi prima tanto plus poſsit, quã ſecunda, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & tertia, quàm quarta tanto plus poterit, quantũ eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales ABCD, ſitq; vt A ad B, ita C ad D; & A quidẽ plus poſsit, quàm B, quadrato, quod fit ex E; C vero plus poſsit, quàm D, quadrato ex F. Dico ſi A ipſi E ſit commenſurabilis, & C ipſi F cõmenſurabilẽ eſſe. ſi vero A ipſi E ſit incõmenſurabilis, & C ipſi F incommenſurabilem eſſe. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratũ ex C ad id, quod ex D quadratũ. ſed quadrato quidem, quod fit ex A æqualia ſũt quadrata, quæ ex ipſis E B; quadrato autẽ ex C æqualia ſũt quadrata ex FD. vt igitur quadrata, quæ ex E B ad quadratum ex B, ita quadrata, quę ex FD ad quadratum ex D: & diuidendo vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F ad quadratũ ex D quare vt E ad B, ita eſt F ad D, & conuertendo vt B ad E, ita D ad F. eſt autẽ & vt A ad B, ita C ad D. ex æquali igitur vt A ad E, ita eſt C ad F. ergo ſi A eſt commenſurabilis ipſi E, & C ipſi F erit commenſurabilis; ſi vero incommenſurabilis eſt A ipſi E, & C ipſi F incommenſurabilis erit. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales ſint, & reliqua. quod oportebat demonſtrare.

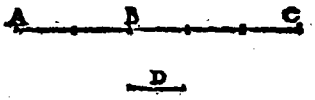


22. Sexti.
Ex hypoth.
22. ſexti.
10. huius.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines commenſurabiles cõponantur, & tota magnitudo

magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. quòd ſi tota magnitudo vni ipſarum ſit commenſurabilis, & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.



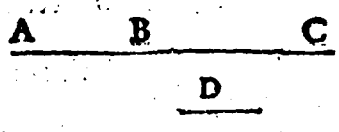
Componantur .n. duæ magnitudines commenſurabiles AB BC. Dico & totam magnitudinem AC vtriq; ipſarum AB BC commenſurabilem eſſe. Quoniam .n. commenſurabiles ſunt AB BC, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; D. & q̃m D metitur ipſas AB BC & totam AC metietur: metitur autem, & AB BC. Ergo D magnitudines AB BC, & ipſam AC metitur. commenſurabilis igitur eſt AC vtriq; ipſarum AB BC. Sed AC vni ipſarum AB BC ſit commenſurabilis, videlicet ipſi AB. Dico & AB BC commenſurabiles eſſe. Quoniam .n. commenſurabiles ſunt CA AB metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit D. Itaq; quoniam D metitur ipſas CA AB, & reliquam BC metietur. metitur autem & AB. ergo D. ipſas A B BC metitur: ac propterea AB BC commenſurabiles ſunt. Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarũ commenſurabilis erit, & reliqua. Quod oportebat demonſtrare.

1.diffi. 4.com.not.

3.com. not.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtriq; ipſarum incommenſurabilis erit. quod ſi tota magnitudo vni ipſarum ſit incommenſurabilis, & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.



Componantur .n. duæ magnitudines incõmenſurabiles AB BC. Dico & totam magnitudinem AC, vtriq; ipſarum AB BC incommenſurabilem eſſe. ſi enim non ſunt incommenſurabiles CA AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; D, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur D metitur ipſas CA AB, & reliquam BC metietur. metitur autem & BA. ergo D ipſas AB BC metitur; ac propterea commenſurabiles ſunt AB BC. ponuntur aũt & incommenſurabiles. quod fieri non poteſt. non igitur ipſas CA AB metietur aliqua magnitudo. quare CA AB incommenſurabiles ſunt. ſimiliter & AC CB incõmenſurabiles eſſe demonſtrabimus. ergo AC vtriq; ipſarum AB BC eſt incõmenſurabilis. ſed AC vni ipſarum AB BC incommenſurabilis ſit; & primum ipſi AB. Dico & AB BC incommenſurabiles eſſe. ſi enim ſunt commenſurabiles, eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & ſit D. quoniam igitur D metitur ipſas AB BC, & totam AC metietur. metitur autem & A B. ergo D ipſas CA AB metitur: ideoq; CA AB commenſurabiles ſunt. ponuntur autem, & incommenſurabiles. quod fieri non poteſt. non igitur ipſas AB BC metietur aliqua magnitudo. quare AB BC incommenſurabiles erunt. ſimiliter demonſtrabimus AC, & reliquæ BC eſſe incommenſurabilem. Si igitur duæ magnitudines incõmenſurabiles cõponãtur, & reliqua. Quod oportebat demonſtrare.

4.com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis illud etiam conſtat.

Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus compoſita vni componentiũ ſit incommenſurabilis, & reliquæ incommenſurabilis erit.

Sit enim tota magnitudo AC incommensurabilis magnitudini AB. Dico AC etiam reliquæ BC incommensurabilem esse. Quoniam.n. CA est incommensurabilis ipsi AB, erunt AB, BC incommensurabiles. & quoniam AB BC incommensurabiles sunt, & AC utrique ipsarum incommensurabilis erit. quod demonstrare oportebat.

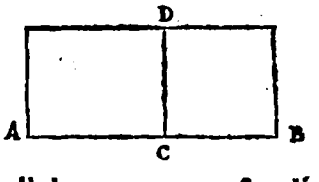


ex demonstratus.

LEMMA I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

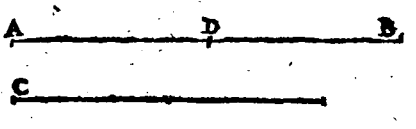
Ad aliquam enim rectam AB applicetur AD parallelogrammum, deficiens figura quadrata DB. dico parallelogrammum AD rectangulo ACB æquale esse; quod quidem per se patet. quoniam enim quadratum est DB, erit DC ipsi CB æqualis, atq; est parallelogrammum AD, quod AG CB continetur. si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua. Quod oportebat demonstrare.



LEMMA II.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadratæ, quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.

Si enim fieri potest, sint duæ rectæ lineæ inæquales AB C: quarta autẽ pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; quæ scilicet, fit à DB ipsius AB dimidia, erit ex præceden ti lemmate id, quod applicatum est æquale ei, quod partibus AD DB continetur, hoc est æquale quadrato ex D B. etenim AB bifariam in puncto D secatur. quod igitur quater fit à DB æquale est quadruplo eius, quod applicatum est. sed quod quater fit à DB est ipsius AB quadratum; nam longitudine duplæ potentia quadruplæ sunt, quadruplum vero eius, quod applicatur est quadratum ipsius C. ergo quadratum, quod fit ex AB est æquale quadrato ex C. hoc est quadratum maioris æquale quadrato minoris. quod fieri nõ potest. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad A B per bipartitã sectionẽ trãsit.



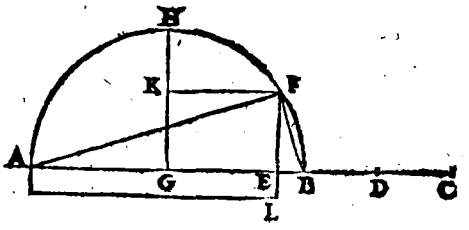
LEMMA III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare ita ut deficiat figura quadrata.

Sint datæ duę rectæ lineæ inæquales AB CD; sitque maior AB. & oporteat facere quod propositum est. secetur CD bifariã in E. manifestum est quartam partẽ quadrati, & fit à CD esse quadratũ ex CE. & describatur in recta linea AB semicirculus, secetur q; AB bifariã in F: & à pũcto F ipsi AB ad rectos angulos

ducatur

ducatur FG. Quoniam igitur AB maior est, quam CD, erit & ipsius AB dimidia maior, quàm dimidia ipsius CD, hoc est maior quàm CE. ponatur FH æqualis CE, & per H ipsi AB parallela ducatur HK, atque à pũcto K ad AB perpendiculari ducta KL, iungantur AK KB. rectangulum igitur est triangulum AKB, & ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est KL. ergo rectangulum ALB est æquale quadrato, quod fit ex KL. producatur KL, & ponatur ipsi LB æqualis LM, & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex KL, hoc est quod ex FH est æquale parallelogrammo AM. sed quod fit ex FH est æquale quadrato ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD: estq; AM deficiens figura quadrata. quod ipsum facere oportebat.

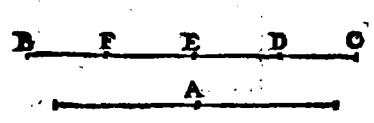


8.17.sexti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tãto plus possit, quàm minor, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur. deficiens figura quadrata, in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarum maior BC; quartæ autem parti quadrati quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A, æquale parallelogrammũ ad BC applicetur, deficiens figura quadrata, & sit φ continetur BD DC, sitq́, BD ipsi DC cõmensurabilis longitudine. Dico BC plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis. secetur enim BC bifariam in puncto E, & ipsi DE æqualis ponatur EF. reliqua igitur DC est æqualis BF. & quoniam recta linea BC secatur in partes quidem æquales ad E punctũ, in partes vero inæquales ad punctum D, erit BDC rectangulum vnà cum quadrato ex ED æquale ei, quod fit ex EC quadrato, & eorum quadrupla φ igitur quater BD DC continetur vnà cum quadrato, φ fit ex ED quater æquale est quadrato φ quater fit ex EC. Sed ei quidem, φ quater BD DC continetur æquale est quadratum ex A: ei vero φ quater fit ex DE æquale est quadratum, quod ex DF; etenim DF ipsius DE est dupla: & ei φ quater fit ex EC æquale est quadratum φ ex BC; rursus. n. BC dupla est ipsius EC. ergo quadrata, quæ fiunt ex A DF æqualia sunt ei, quod fit ex BC quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex BC maius est, quàm quadratũ quod ex A, quadrato, φ ex DF. recta igitur linea BC tanto plus potest, quàm A, quantum est ipsius DF quadratum. ostendendum est & BC ipsi DF commensurabilem esse. Quoniam. n. BD commensurabilis est ipsi DC longitudine, erit & BC ipsi CD longitudine cõmensurabilis. sed DC ipsis CD BF est cõmensurabilis longitudine. æqualis enim



5.secundi.

5.quinti.

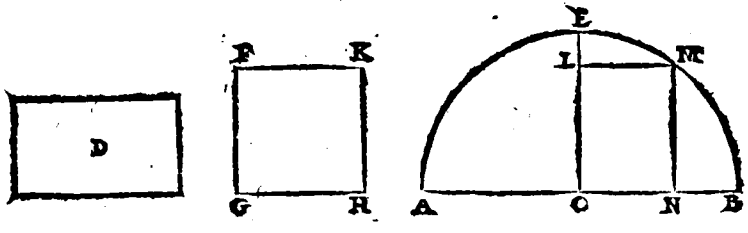
D lis enim est CD ipsi BF. quare & BG ipsis BF CD longitudine est commensura
E bilis,& reliquæ igitur FD longitudine commensurabilis erit. ergo BC plus potest,quàm A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sed BC plus possit quàm A,quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartę autem parti quadrati,quod fit ex A æquale parallelogrammũ ad BC applicetur,deficiens figura quadrata;& sit quod continetur BD DC. ostendendũ est B D ipsi DC longitudine commensurabilem esse. Iisdem.n.constructis similiter demonstrabimus BC plus posse,quàm A,quadrato rectæ lineæ FD. sed B
F C plus potest,quam A,quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis ergo BC commensurabilis est ipsi FD longitudine,& reliquę igitur, vtriq; scilicet BF DC longitudine est commensurabilis, sed vtraq; BF DC ipsi DC com-
G mensurabilis est longitudine;etenim BF est æqualis DC.ergo & BC ipsi CD lõ-
H gitudine est commensurabilis. ex quibus constat BD ipsi DC longitudine cõmensurabilem esse. Si igitur duæ rectę lineę inæquales sint, & reliqua. Quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quartę autem parti quadrati, ꝙ fit à minori A, hoc est ei, ꝙ fit à dimidia ipsius A æquale parallelogrammum ad BC applicetur, deficies figura quadrata] *ex antecedente lemmate. Hoc autem nihil aliud est,nisi rectam lineam maiorem,ita secare,vt rectangulum ipsius portionibus contentum quartæ parti quadrati minoris sit æquale . sed possumus illud idem vniuersalius explicare in hunc modum.*

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum,quod partibus continetur, sit æquale dato rectilineo . oportet autem datum rectilineum minus esse quadrato,quòd à dimidia describitur.

Sit data recta linea AB, *diuisa bifariam in C, datumque rectilineum D. & oporteat facere quod propositum est. Describatur in* AB *semicirculus* AEB,*& à puncto C ipsi* AB *ad rectos an-*
25 sexti. *gulos ducatur* CE: *deinde rectilineo D fiat aequale quadratum* FGHK. *erit eius latus* FG *minus*



ipsa AC,*hoc est ipsa* CE. *quare à recta linea* CE *abscindatur* CL, *quæ sit æqualis* FG: *& per* L *quidem ducatur* LM *parallela ipsi* AB: *per* M *verò ducatur* MN *parallela* CE. *Dico rectam lineam* AB *sectam esse in puncto* N, *vt oportebat,hoc est rectangulum* ANB *rectilineo* D *æquale esse. æquale etenim est quadrato ex* MN. *sed cum* MN *sit æqualis ipsi* CL, *hoc est ipsi* FG, *erit rectangulum* ANB *quadrato* FGHK,*hoc est rectilineo* D *æquale. Quod facere oportebat.*

Similiter & datum numerum in duas partes ita diuidemus, vt qui ex ipsis producitur dato numero sit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis esse debet,quadrato dimidij minorem esse.

Sit datus numerus 20,*quam oporteat ita diuidere,vt qui ex partibus producitur, sit æqualis dato numero* 75. *Accipiatur ipsius* 20 *medietas,quæ est* 10,*& in se multiplicetur,faciet* 100, *à quo detrahemus datum numerum,videlicet* 75,*& relinquetur* 25. *huius igitur latus* 5 *additum ipsi* 10 *constituit* 15;*& detractum ab eodem constituit* 5. *Dico* 20 *in has partes ita diuisum esse, vt oportebat,hoc est eum,qui ex ipsis producitur,æqualem esse dato numero* 75. *Quoniam enim* 20 *diuiditur in duas partes æquales,& in duas partes inæquales,numerus planus,qui fit ex partibus inæqualibus vna cũ quadrato numeri interiecti æqualis est ei , qui fit à dimidio quadrato,quod demonstratum est à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum quæ nos ad* 15 *noni*

apposuimus

appoſuimus. ergo qui ſit ex 15. & 5. vnà cum quadrato ipſius 5. eſt æqualis quadrato dimidij, videlicet 100. & detracto communi quadrato 25. erit qui producitur ex 15. & 5. æqualis dato numero 75. Quod facere oportebat.

Sed ei quidem, quod quater DB BC continetur æquale eſt quadratum ex A.] B
Ponitur enim parallelogrāmum rectangulū D B C æquale quartæ parti quadrati, quod fit ex A.

Erit & BC ipſi CD longitudine cōmēſurabilis.] *Ex prima parte ſextæ decimæ huius.* C

Quare BC ipſis BF CD longitudine eſt commenſurabilis.] *Ex 12. huius.* D

Et reliqua igitur F D longitudine commenſurabilis erit,] *Ex eo, quod nos ad* E
17. huius demonſtrauimus. ſumantur enim BF DC ſimul, ac ſi vna linea eſſet.

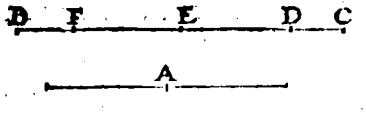
Et reliquæ igitur, vtrique ſcilicet BF DC longitudine eſt commenſurabilis] F
Ex eodem theoremate, quod ad 17. huius appoſuimus.

Ergo & BC ipſi DC longitudine eſt commenſurabilis.] *Ex 12. huius.* G

Ex quibus conſtat BD ipſi DC longitudine commenſurabilem eſſe.] *Ex ſe-* H
cunda parte ſextædecimę huius.

THEOREMA XVI. PROPO. XIX.

Si duæ rectæ lineæ inæquales ſint, quartæ autem parti quadrati, quôd fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorē applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles lōgitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quā minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incōmenſurabilis. Quòd ſi maior tanto plus poſſit, quā minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quòd fit à minori æquale parallelogrammū ad maiorem applicetur, deficiēs figura quadrata; in partes lōgitudine incōmēſurabiles ipsā diuidet.



Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarū maior B C: quartæ autē parti quadrati, quòd fit à minori A, æquale parallelogrammū ad ipſam BC applicetur, deficiens figura quadrata; & ſit quòd continetur BD DC; ſitq; BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis. dico B C plus poſſe, quā A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommēſurabilis. ijſdē .n. quæ ſupra, conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BC plus poſſe quā A, quadrato rectæ lineę D F. oſtendendū igitur eſt B C ipſi D F lōgitudine incōmēſurabilē eſſe. Quoniā .n. incōmenſurabilis eſt B D ipſi D C, erit & BC ipſi CD longitudine incōmēnſurabilis. ſed DC incōmenſurabilis eſt vtriſq; BF DC. ergo & BC ipſis BF DC longitudine eſt incōmenſurabilis. ac propterea reliq; F D incōmenſurabilis eſt longitudine: & BC plus poteſt; quā A. quadrato rectæ lineæ ſibi lōgitudine incōmenſurabilis. Sed BC rurſus plus poſsit, quā A, quadrato rectæ lineę ſibi incōmenſurabilis longitudine. quartæ aūt parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrāmū ad BC applicetur, deficiēs figura quadrata; & ſit quod BD DC cōtinetur. oſtēdēdū eſt BD ipſi DC lōgitudine incōmēſurabilē eſſe. Ijſdē .n. conſtructis, ſimiliter demōſtrabimus BC plus poſſe quā A. quadrato rectæ lineę DF. ergo oſtendendū relinquitur BC plus poſſe, quā A quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incōmenſurabilis incommenſurabilis igitur eſt BC ipſi DF lōgitudine. quare & reliq; videlicet vtriq; BF DC eſt incōmēſurabilis. Sed vtraq; BF DC commenſurabilis eſt longitudine ipſi DC. ergo & BC ipſi CD eſt incōmēſurabilis longitudine ac propterea diuiden-

17. huius. 14. huius. Ex demonſtratis ad 17. huius.

Ex demonſtratis ad 17. huius 14. huius. 17. huius.

do BD ipsi DC longitudine incommensurabilis erit. Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, &c. reliqua. Quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Hactenus tractauit de commensurabilibus, & incõmensurabilibus: nunc ad rationales, & medias transit.

LEMMA. I.

cor. 9. huius. *Quoniam demonstratum est longitudine commensurabiles omnino, & potentia commensurabiles esse. potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine. sed posse. & longitudine commensurabiles esse. & incommensurabiles, manifestum est. si expositæ rationali aliqua commensurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum lõgitudine, sed etiam potentia, longitudine enim commensurabiles omnino, & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ rationali aliqua fuerit potẽtia commensurabilis si quidem, & longitudine, dicetur, & sic rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ rationali rursus aliqua commensurabilis existens potentia longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic rationalis potentia tantum commensurabilis.*

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expositæ rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. sunt autem, & aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ rationali incommensurabiles sunt potentia autem solum commensurabiles, atq. ob id rursus dicuntur rationales, & commensurabiles inter se, quatenus rationales, sed commensurabiles inter se vel longitudine; & potentia, vel potentia, solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudines commensurabiles, vt intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum, inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoq; rationales potentia solum commensurabiles.

Rationales commensurabiles sunt. 12. huius. *At vero rationales commensurabiles esse ex his constat.*

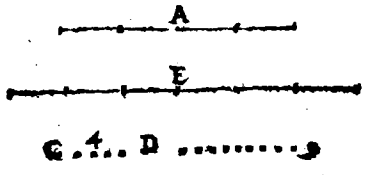
Quoniam enim rationales sunt, quæ expositæ rationali sunt commensurabiles, quę vero eidem commensurabiles etiam inter se commensurabiles sunt: sequitur rationales commensurabiles esse. Quod demõstrare oportebat.

LEMMA. III.

Inuenire duas rationales longitudine commensurabiles.

Exponatur

Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel ſimpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & fiat vt C ad D, ita quadratū ex A ad quadratum ex E: erunt per ea, quę demonſtrata ſunt A E longitudine commenſurabiles.



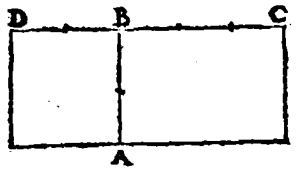
Ex corol. 8. huius.

In 9. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XX.

Quod rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum rationale eſt. A

Rationalibus.n. longitudine commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum A C. dico A C rationale eſſe. deſcribatur ex A B qua dratum AD. ergo A D eſt rationale. & quoniam A B commenſurabilis eſt ipſi B C lōgitudine, atq; eſt A B æqualis BD; erit DB ipſi BC longitudine commenſurabilis. eſt autem & vt DB a BC, ita DA ad AC; & commenſurabilis eſt DB ipſi BC. ergo & DA ipſi AC commenſurabile erit. eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale. quod igitur rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum rationale eſt. Quod demonſtrare oportebat.



B

d 1. ſexti. C D

F. C. COMMENTARIVS.

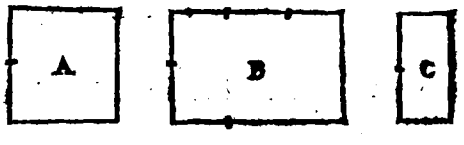
Secundum aliquem prædictorum modorum.] *Rectarum enim linearum AB BC vel vtræq; ſunt expoſitæ rationali longitudine commenſurabiles, vel vtræq; eidem commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe commenſurabiles longitudine. quocumq; autem modo ſe habeant, quod ex ipſis fit rectangulum rationale eſt, & eadem demonſtratio in omnibus congruit.* A

Ergo AD eſt rationale.] *Ex diffinitione 9. ſiue enim longitudine ſint commenſurabiles expoſitæ rationali, ſiue potentia ſolum, earum quadrata rationalia ſunt, quippe quę quadrato expoſitæ rationalis ſint commenſurabilia.* B

Ergo & DA ipſi AC commenſurabilis erit.) *Ex decima huius.* C

Eſtq; rationale DA. quare & AC eſt rationale.) *Rationali namq; commenſurabile, & ipſum rationale eſt. Quod ita demonſtrabitur,* D

Sit expoſitę rationalis quadratum A, & ipſi commenſurabile ſit ſpatium B. erit B rationale ex 9. diffinitione. ſit rurſus aliud ſpacium C ipſi B commenſurabile. dico & C rationale eſſe. Quoniam enim ſpacia A C eidem ſpacio B ſunt commenſurabilia, & inter ſe commenſurabilia ſunt ex 12. huius, Quòd cum C ipſi A ſit commenſurabile, etiam rationale erit ex 9. diffinitione. quod demonſtrare oportebat.



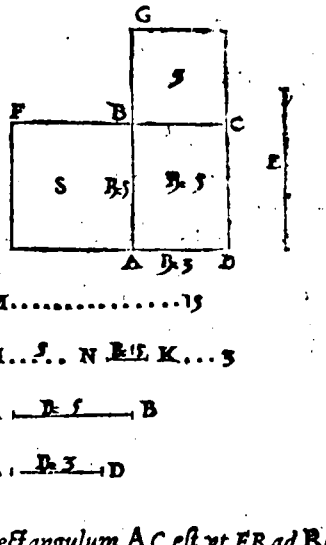
Vt autem ea, quæ hoc loco de rationalibus dicuntur, manifeſtiora ſint, & quaſi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quæ ad ea etiam, quæ ſequuntur, utilia erunt.

THEOREMA I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus cōtinetur rectangulū datū erit.

Duabus enim datis rectis lineis rationalibus AB AD cōtineatur rectangulum AC. dico AC datum

datum esse. Exposita enim rationali E, vel vtraq; AB AD ipsi E longitudine est commensurabilis, vel vtraq; commensurabilis est potentia solum, vel altera quidem longitudine altera potentia solum commensurabilis. & si quidem vtraq; est commensurabilis longitudine, rectangulum, quod ipsis continetur datum erit ex ijs, quæ Ioannes Regiomontanus in primo libro de triangulis propositione 16 demonstrauit; & ex ijs, quæ nos demonstrauimus in commentarijs in 3 propositionē libri Archimedis de circuli dimensione. si vero vtraq; expositæ rationali potentia solum est commensurabilis, nihilominus rectāgulum datum erit. fiant enim ex AB AD quadrata AF CG. & quoniam AB AD potentia sunt cōmensurabiles, eorum quadrata commensurabilia erunt. ideoq; inter se proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. sit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & H ipsum K multiplicans faciat M, cuius radix sit N. erunt igitur tres magnitudines HNK deinceps proportionales; rectangulum enim contentum HK est æquale quadrato ex N, hoc est ipsi M. & quoniam quadratum FA ad rectangulum AC est vt FB ad BC, hoc est vt AB ad BC: vt autem AB ad BG, hoc est ad BC, ita rectangulum AC ad CG quadratum: erunt & tres hæ magnitudines deinceps proportionales. quando autem tres magnitudines deinceps proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit proportionem eius, quam habet ad secundam. quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam proportionem habet eius, quam habet ad rectangulum AC. sed quadratum AF ad quadratum CG est, vt numerus H ad ipsum K. & cum H ad K similiter duplam proportionem habeat eius, quam habet ad N, erit quadratum FA ad rectangulum AC, vt H ad N. sunt autem magnitudines HN datæ; ideoq; data ipsarum proportio: & datum est quadratum FA. quare & rectangulum AC datum erit. Eadem ratione demonstrabimus rectangulum datum esse, si altera datarum linearum sit longitudine commensurabilis, altera vero potentia solum. quod demonstrare oportebat.



5. huius.

17. sexti.

1. sexti
11. quinti
10. diffi. quinti.

1 datorum Euclid
2. datorum Euclid

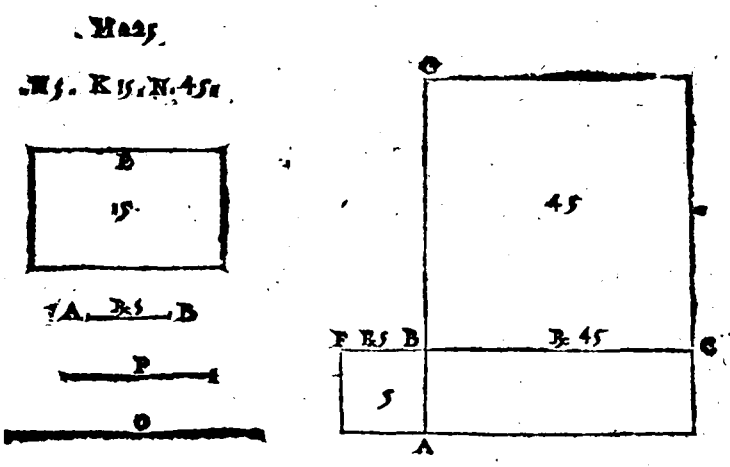
OPERATIO.

Si datę magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipsos inter se multiplicabimus; si vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera est radix, & eius, qui producitur radicem dicemus esse rectāgulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atq; hæc nihil aliud est, nisi multiplicatio, quam dicunt, radicum quadratarum inter se. vt si AB sit radix 5, AD radix 3, multiplicabimus 5, per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex B 5, & B 3 inter se ductis. si vero AB sit 2, AD B 5, multiplicabimus quadratū ipsius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod quæritur.

THEOREMA II.

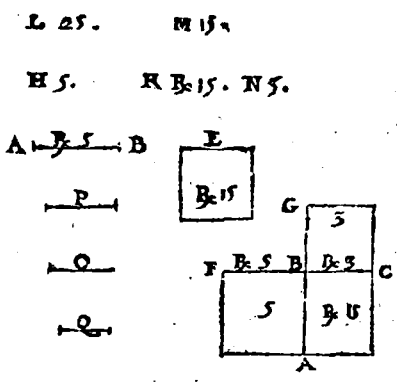
Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spacium datum, & latitudo, quam facit data erit.

Sit data recta linea rationalis AB, & spacium datum E. Dico si ad rectam lineam AB spaciū E applicetur, latitudinem, quam facit, datam esse. vel igitur recta linea AB expositæ rationali commensurabilis est longitudine, vel potentia solum; vel spacium E rationale est, vel irrationale quod medium appellatur. & si quidem recta linea AB longitudine est commensurabilis, & spaciū E rationale, illud manifestum erit ex ijs, quę Regiomontanus demonstrauit in primo libro de triangulis propositione 17. & ex ijs, quę nos eodem in loco, de quo proxime dictum est, demonstrauimus. si vero AB est commensurabilis potentia solum, & spacium E siue rationale, siue irrationale vel AB est longitudine commensurabilis, & spacium E irrationale, latitudo, quam facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E rationale. Quoniam igitur AB rationalis est, & spacium E rationale, erit quadratum ipsius AB spacio E commensu-



E commensurabile; as propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum habeat quam numerus H ad numerum K, fiatq; ex corollario sexte propositionis huius libri vt H ad K; ita recta linea AB ad aliam rectam lineam O: & inter AB; & O sumpta media proportionali P, erit vt numerus H ad numerum K, ita quadratum rectæ lineæ AB ad rectæ lineæ P quadratum. sed & quadratum rectæ lineæ AB ad spacium E erat, vt numerus H ad numerum K. Cum igitur quadratum ex AB ad spacium E eandem proportionem habeat, quam ad quadratum ex ipsa P; erit quadratum ex P spacio E æquale. Itaq; ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum rectangulum AC æquale quadrato ex P, hoc est æquale spacio E: latitudinem faciens BC. & ex AB BC describantur quadrata AF CG. numerus autem K se ipsum multiplicans faciat M, & M per K diuiso exeat N. erunt tres magnitudines HKN deinceps proportionales: rectangulum enim ipsis KN contentum est æquale quadrato ex K. Quoniam igitur quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectangulum AC ad CG quadratum, quod superius ostensum est. quadratum autem FA ad rectangulum AC est, vt numerus H ad numerum K; erit & rectangulum AC ad quadratum CG, vt K ad N. sed datum est quadratum FA, & rectangulum AC; quod numeri KN sint dati. ergo & quadratum CG datum erit, & data ipsius radix BC, videlicet latitudo, quam facit spacium E ad rectam lineam AB applicatum. 9. quinti. 2. datorum Euclid.

Sit rursus recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E irrationale. ergo quadratum rectæ lineæ AB incommensurabile est spacio E. sit autem quadratum rectæ lineæ AB ad spacium E, vt H ad K, hoc est ad radicem numeri M: & H se ipsum multiplicans faciat L. cum igitur LM quadrati sint. & eorum latera HK, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet H ad K. Itaq; fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad rectam lineam Q; & inter AB, & Q sumatur media proportionalis O. habebit igitur AB ad Q duplam proportionem eius, quam habet ad O. atque est vt L ad M, ita AB ad Q. ergo vt H ad K, ita AB ad O. rursus inter AB, & O inueniatur media proportionalis P; erit vt AB ad O, ita quadratum ex AB ad quadratum ex P. vt igitur H ad K, ita est quadratum ex AB ad quadratum ex P. sed erat vt H ad K, ita quadratum ex AB ad spacium E. ergo quadratum ex AB ad quadratum ex P eandem habet proportionem, quam ad spacium E. ideoq; quadratum ex P spacio E æquale erit. Applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC, æquale quadrato ex P, hoc est spacio E æquale, quod faciat latitudinem BC; deinde ex AB BC fiant AF CG quadrata; & rursus ipsarum HK magnitudinum inueniatur tertia proportionalis, nempe ducta K inter se se, & quod producitur diuiso per B, vt proxime dictum est. sit autem tertia proportionalis N. Eadem ra-



5. quinti.

tione

tione demonſtrabitur vt quadratum ex AB ad rectangulum AC. ita eſſe rectangulum AC ad CG quadratum. Quoniam igitur HKN deinceps proportionales ſunt, quadratum autem FA ad rectangulum AC eſt vt H ad K; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, vt K ad N. ſed datum eſt quadratum AF, & rectangulum AC, cum dentur HK. ergo & quadratum CG habitur, & eius radix BD, hoc eſt latitudo, qua fit ſpacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonſtrabitur ſi recta linea AB ſit longitudine commenſurabilis, & ſpacium E irrationale.

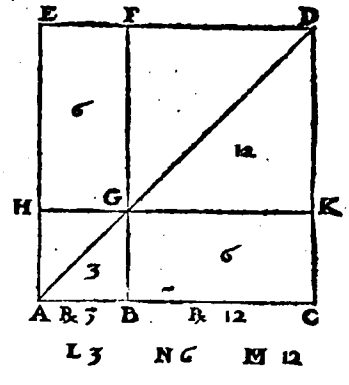
OPERATIO.

Si datæ magnitudines radices numerorum fuerint, numerus, qui ſpacium notum raddit, diuidatur per alterum numerum; ſi vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea eſt radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum cuius eſt radix diuidatur; & eius, quod exibit, radix erit latitudo, quam facit ſpacium ad rectam lineam applicatum. eſt autem hęc diuiſio radicum inter ſe ſe, quam dicunt. vt ſi ℞ 15 diuidenda ſit per ℞ 5, diuidemus 15 per 5, & exibit 3, cuius radix eſt quod ſit ℞ 15 per ℞ 5 diuiſa: ſi vero ℞ 20 dividere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipſius 2, videlicet per 4, & exibit 5, cuius radix eſt id, quod quæritur.

THEOREMA. III.

Quæ ex duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.

Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commẽ ſurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam eſſe. vel igitur datæ rectę lineæ expoſitæ rationali longitudine commenſurabiles ſunt, vel commenſurabiles potentia ſolum, ſed inter ſe longitudine commenſurabiles. Et ſi quidem expoſitæ rationali ſint commenſurabiles longitudine, quę ex ipſis componitur recta linea data erit, ex demonſtratis à Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propoſitione tertia, & ex ijs, quę nos eodem in loco demonſtrauimus. ſi vero expoſitæ rationali



9. huius. *ſint commenſurabilis potentia ſolum, ſed inter ſe longitudine commenſurabiles, earum quadrata proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. Itaq; habeat rectae lineæ AB quadratum ad quadratum rectæ lineæ BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM ſimiles plani ſi enim quadrati ſint, rectæ lineæ AB AC longitudine*

18. octaui *erunt commenſurabiles. quod non ponitur. ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis. cadat, & ſit N. deſcribaturq; ex recta linea AC quadratum ACDE; & iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipſarum AE CD parallela BGF: per G vero ducatur HGK alteruti ipſarũ AC ED parallela. ſimiliter vt ſupra demonſtrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita eſſe vt rectangulum GC ad GD quadratum. ſed quadratum AG ad quadratum GD eſt vt numerus L ad numerum M. ergo quadratum AG ad rectangulum GC eſt vt numerus L ad ipſum N; & rectangulum GC ad quadratum GD, vt N ad M. eſt autem rectangulum EG, quod eſt alterum ſupplementorum; æquale reliquo GC. quadratum igitur AG ad gnomonem EKB eſt vt L ad M vna cum duplo ipſius N: & conuertendo gnomon FKB ad quadratum AG, vt M vna cum duplo ipſius N ad ipſum L. ergo componendo, rurſuſq; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratũ, vt L ad compoſitum ex L, & M vna cum duplo ipſius N, ſed compoſitum hoc eſt datum, quippe cum dati ſint numeri ipſum componentes. ergo & totum quadratum AD datum erit, & datæ eius radix, qua ex duabus datis rectis lineis conſtat. atq; illud eſt, quod demonſtrandum proponebatur.*

OPERATIO.

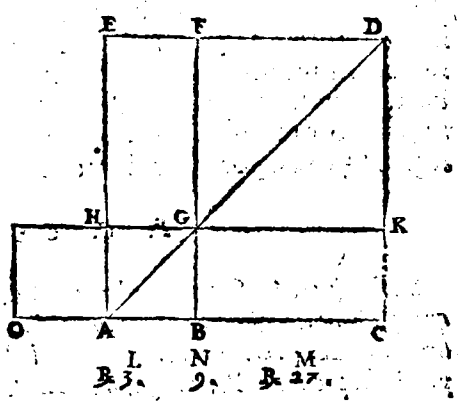
Numeros reſpondentes quadratis datarum linearum ſimul coacernabimus vna cum duplo alterius

teris quadrati eius, qui ex eorum inter se multiplicatione producitur, hoc est vna cum duplo numeri proportionalis, qui inter ipsos medius interijcitur, & huius compositi radix erit recta linea, quæ ex duabus datis rectis lineis constat. atq; hæc est radicum inter se additio, quam dicunt vt si radix 3 addenda sit radici 12, primum iungemus 3 cum 12, deinde multiplicantes 12 per 3, eius, qui producitur, videlicet 36 latus, quod est 6 duplabimus: & omnibus simul coaceruatis fient 27, cuius radix est recta linea, quam quærimus: Quemadmodum autem ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, si inter se componantur, vna recta linea fit, sic ex duobus spacijs medijs commensurabilibus, si itidem inter se componantur vnum fiet medium. Quod si duæ rationales longitudine incommensurabiles inter se addendæ sint, vt R 3. R 5, dicemus R 3 vna cum R 5, vel R 3 addita R 5, vel vtemur hac voce plus, quod est in communi vsu, hoc modo R 3 plus R 5, & 3 plus R 8, & ita fiet etiam si plures sint, quam duæ, vt 2 plus R 3 plus R 5. Quod si duæ sint, dicentur ex binis nominibus, seu binomia, vt Campanus, & recentiores. si vero tres dicentur ex tribus nominibus vel trinomia. & eodem modo in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum rationalium, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duæ datæ rationales inæquales, & longitudine commensurabiles rectæ lineæ AB AC, quarum differentia sit BC. dico BC datam esse. si enim AB AC sint expositæ rationali longitudine commensurabiles, earum differentia data erit ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in libro primo de triangulis propositione 4, & ex ijs, quæ à nobis eodem in loco demonstrata sunt. si vero expositæ rationali commensurabiles sint potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. huius. habeat igitur rectæ lineæ AB quadratum ad quadratum rectæ lineæ AC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM similes plani; ideoq; inter eos cadat vnus medius proportionalis. cadat, sitq; N: & ex recta linea AC describatur quadratum ACDE, & figura compleatur, quemadmodum superius. producta vero CA vsq; ad O, ita vt AO, sit æqualis AB, quadratum OH describatur, quod quidem quadrato rectæ lineæ AB, hoc est ipsi AG æquale erit. atq; est quadratum quidem OH ad rectangulum HC, vt OA ad AC: rectangulum vero HC ad quadratum CE, vt CK ad CD, hoc est vt OA ad AC. vt igitur quadratum OH ad rectangulum HC ita est rectangulum HC ad CE quadratum. sed & numeri LNM deinceps proportionales sunt, & quadratum OH ad quadratum CE est vt L numerus ad numerum M. ergo quadratum OH ad rectangulum HC erit vt L ad N; & rectangulum HC ad quadratum CE, vt N ad M. quod cum rectangulum EG sit æquale rectangulo GC, supplementa etenim sunt, addito vtriq; æquali quadrato, erit rectangulum HC æquale rectangulo FH vnà cum quadrato HO. si igitur à duobus quadratis OH, AD auferatur duplum rectanguli HC, quod quidem rectis lineis CA AB continetur, reliquum erit quadratum FK; cuius latus GK rectæ lineæ BC est æquale. quod etiam in septima proportione secundi libri demonstratum est, & quoniã numeri LNM sunt dati, & quadrata GH CE data erunt, & rectangulum HC, atq; eius duplum. ergo & quadratum FK, & eius latus BC dabitur. quod demonstrare oportebat:



18. octaui.

OPERATIO.

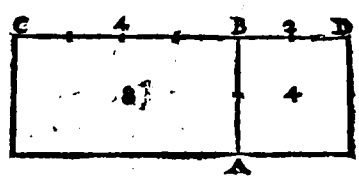
Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul inuenies, & ab ea, qui factus est, auferemus duplum numeri, qui inter ipsos medius proportionalis interijcitur. relinquetur enim quadratum

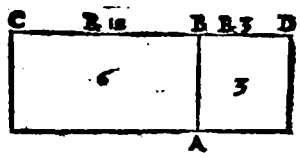
quadratum, cuius radix erit recta linea, quam quærimus. atque hęc est radicum quadratarum subtractio, quam dicunt. Vt si à radice 27 auferenda sit radix 3; iungemus 27 cum 3 fient 30, à quo auferemus duplum numeri medij proportionalis inter 3. & 27. qui est 9. videlicet 18 & relinquentur 12. cuius radix est ea, quam quærimus. eodem modo & spaciorum mediorum inequalium, quæ commensurabilia sint. differentia inuenietur. si verò ab aliqua rationali auferenda sit alia minor, quæ ipsi longitudine sit incommensurabilis. vt si à R. 5. auferre velimus R. 3. dicemus R. 5. dempta R. 3. vel vtemur hac voce minus, vt nunc solent, hoc modo R. 5. minus R. 3 & R. 6. minus R. 4. quas Euclides appellat apotomas. Cãpanus & recẽtiores residua, seu recisa.

Si igitur recta linea AB sit R. 3. *& recta BC* R. 12 *erit ex ante demonstratis in primo antecedentium theorematum rectangulum AC* R. 36. *hoc est & rursus si AB sit* R. 8. *& BC* R. 18. *erit AC rectangulum* R. 144. *hoc est* 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationalẽ ad rationalẽ applicetur, latitudinem efficit rationalẽ, & ei, ad quam applicatũ est, longitudine cõmensurabilẽ.





45. primi.

exlemma. 2 ad 10. huius 10. huius.

6. diffi.

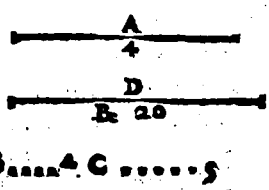
Rationale enim AC ad rationalẽ secundum aliquem rursus dictorum modorum applicetur, latitudinẽ faciens BC. dico BC rationalem esse, & ipsi ab longitudine cõmensurabilem. describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est: sed & rationale est AC. ergo AD ipsi AC est commensurabile. atq; est vt DA ad AC, ita DB ad BC. commensurabilis igitur est DB ipsi BC. est autem DB æqualis BA. quare AB ipsi BC commensurabilis est. sed AB est rationalis. rationalis igitur est & BC, & ipsi BA longitudine commensurabilis. si igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. Quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit spacium AC 6. *& recta linea AB* R. 3. *erit ex* 2. *theoremate præmissorum CB* R. 12 *quæ ipsi* R. 3. *longitudine est commensurabilis. est enim ipsius dupla. rursus sit AC* 12. *& recta linea AB* R. 8. *erit CB* R. 18. *vtq; est* R. 18. *ad* R. 8. *vt* 3. *ad* 2. *nam si* R. 18. *dividatur per* R. 8. *proveniet* R. 2. $\frac{1}{4}$. *videlicet* R. $\frac{4}{6}$. *quę est* $\frac{3}{2}$.

LEMMA. I.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles.



Exponatur rationalis A, & duo numeri B C non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quæ ostensa sunt A D potentia solum commensurabiles.

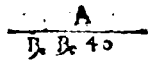
Corell. 6. huius.

LEMMA. II.

Recta linea, quæ potest irrationale spacium, irrationalis est.

Possit

Possit enim recta linea A spaciū irrationale, hoc est quadratum, quod fit ab A irrationali spacio sit æquale. Dico A irrationalem esse. si enim sit rationalis, erit quod ab ipsa fit quadratum rationale; sic enim in diffinitionibus ponitur, atqui rationale non est. ergo A irrationalis sit necesse est. Quod demonstrare oportebat.

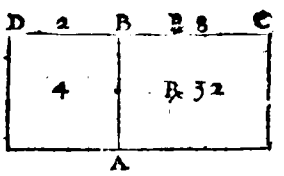


Diffi. 8.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXII.

Quod rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est: & recta linea ipsum potens est irrationalis. vocetur autem media.

Rationalibus .n. potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectāgulum AC. Dico rectam lineam, quæ ipsum potest, irrarionalem esse. vocetur aūt media, seu medialis. describatur.n. ex AB quadratum A D. ergo AD rationale est. Et quoniā AB incommensurabilis est ipsi BC longitudine, potentia.n. solū ponuntur commensurabiles. atque est AB æqualis BD. incommensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. est autem vt DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipsi AC est incommensurabile. Sed DA rationale est. irrationale igitur est AC. quare & recta linea, quæ ipsum AC potest, videlicet quæ potest quadratū ipsi æquale est irrationalis, vocetur autem media; propterea quòd ipsius quadratum est æquale rectangulo, quod AB BC continetur, & ipsarum AB BC media fit proportionalis. quod demonstrare oportebat.



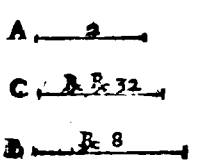
Diffi. 10.

Diffi. 11

SCOLIVM I.

Media est irrationalis, quæ potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus.

Rationalibus enim potentia solum commensurabilib. rectis lineis AB spacium contineatur. ostendendū est huiusmodi spacium irrationale esse. sumatur enim ipsarum AB media proportionalis C, ergo quod fit ex AB est æquale quadrato ex C; ac propterea C potest rectangulum, ꝙ ipsis AB continetur. est igitur vt A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam vt prima ad tertiam, ita quadratum, ꝙ fit ex prima ad quadratum ex secunda, quod demonstratum est in corollario 20, sexti elementorum. incommensurabilis aūt est A ipsi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C est incommensurabile. sed quadratum ex A rationale est: irrationale igitur est quadratū ex C, hoc est rectangulum, ꝙ rectis lineis A B cōtinetur. ergo C est irrationalis. media aūt idcirco vocatur, quòd irrationalis existens ipsarū A B media est proportionalis.



Diffi. 11.

SCHOLIVM II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quæ una est irrationalium, in geometrica analogia considerari, media enim est proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia solum commensurabiles,

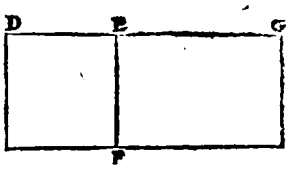
27.sexti. *& recta linea ipsum potens est media. si enim quod extremis continetur aquale est quadrato, quod fit à media, tres rectæ lineæ proportionales sunt.*

F. C. COMMENTARIVS.

Siendum est spacium illud irrationale, quod potest media linea, medium appellari
Sit recta linea AB 2; & recta BC R. 8. erit rectangulum AC R 32, quod irrationale est, & medium dicetur. recta autem linea ipsum potens est R R 32, quę media appellatur.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratũ, quod fit á prima ad rectangulum quod duabus rectis lineis continetur.



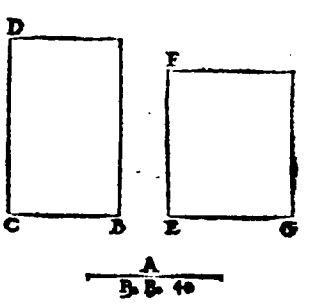
Sint duæ rectæ lineæ FE EG. Dico vt FE ad EG, ita esse quadratum ex FE ad FEG rectangulum. describatur ex FE quadratum DF, & GF compleatur. Quoniam igitur est vt FE ad EG, ita DF ad FG, atque est DF quidem quadratum ex FE; FG vero, quod DE EG continetur, hoc est rectangulum FEG: erit vt FE ad EG, ita quadratum ex FE ad FEG rectangulum. similiter autem & vt rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc est vt GF ad FD, ita est GE ad EF.

1.sexti.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIII.

Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

45.primi. Sit media quidem A, rationalis aũt CB, & ad CB ei, quod fit ex A æquale spacium applicetur BD, latitudinem faciens CD. Dico CD rationalem esse, & ipsi BC longitudine incõmensurabilem. Quoniam.n. media est A, potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabiiibus. possit GF: sed potest & BD. æquale igitur est BD ipsi GF. atque est æquiangulum. æqualium autem, & æquiangulorum parallelogramorũ latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. ergo vt BC ad EG, ita est EF ad CD. est igitur & vt quadratum ex BC ad quadratum ex EG, ita quadratum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. sed quadratum ex BC commensurabile est quadrato ex EG; vtraque.n. ipsarum est rationalis. commensurabile igitur est & quadratum ex EF quadrato ex CD. est aũt quadratũ ex EF rationale. ergo & rationale est quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD est rõnalis. itaq; quoniã FE incommensurabilis est ipsi EG longitudine; potentia.n. solum cõmensurabiles sunt; vt autem FE ad EG, ita quadratum ex EF ad FEG rectãgulũ: erit quadratũ ex EF incommensurabile rectãgulo FEG. sed quadrato quidẽ ex EF commeusurabile est quadratum ex CD, rationales.n. sunt potentia, vt ostensum est. ergo quadratum ex CD rectãgulo FEG est incõmensurabile. rectãgulo aũt FEG commensurabile est, quod DC CB continetur; sunt.n. quadrato ex A



22.sexti.

1. pars 10. huius.

Ex antecedenti.

14.sexti.

Ex anteced lemmate.

*

ex A æqualia.incommensurabile igitur est,& quadratum ex CD rectangulo D CB. sed vt quadratum ex CD ad DCB rectangulum,ita est DC ad CB.ergo DC ipsi CB incommensurabilis est longitudine.& ob id DC est rationalis,& ipsi C B longitudine incommensurabilis. quod oportebat demonstrare. 13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

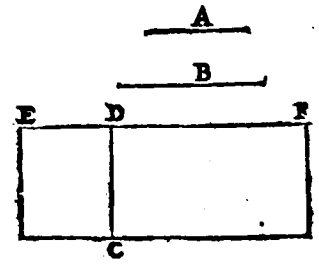
Rationales enim sunt potentia] *hoc est potentia cõmensurabiles. rationales enim commensurabiles sunt, vt in Scholio ante vigesimam huius demonstratur.& quamquam hę voces lõgitudine,& potentia magna ex parte referantur ad commensurabilitatem,& incommensurabilitatem,tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perspicuum est. Quod nonnulli negarunt.* *

Sit quadratum ex A ℞ 40,CB vero sit 2.si igitur ad CB applicetur ℞ 40, latitudinem faciet ℞ 10.rursus si CB sit ℞ 5.& ad ipsam applicetur ℞ 40,erit latitudo,quam facit ℞ 8 ex 2.theoremate præmissorum.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIV.

Mediæ commensurabilis,media est.

Sit media A, & ipsi A commensurabilis sit B.Dico & B mediam esse.Exponatur.n.rationalis CD, & quadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CE, latitudinem efficiens ED.rationalis igitur est ED, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex B æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CF, latitudinem efficiens D F. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. Sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum E C; quadrato autem ex B æquale CF. cõmensurabile igitur est rectangulum EC rectangulo CF.atque est vt EC ad CF,ita ED ad DF.ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. est autem ED rationalis,& incõmensurabilis ipsi DC longitudine. Ergo & DF rõnalis est,& ipsi DC longitudine incommensurabilis,rationales igitur sunt C D DF potentia solũ commensurabiles ꝙ aũt rationalibus potentia solũ commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulũ irrationale est;& recta linea ipsũ pòtens est irrationalis:vocetur aũt media.ergo recta linea,quæ potest rectãgulum CDF est media. Sed B potest rectangulum CDF. quare B media erit.



45.primi. Ex antecedente. cor.9.huiusꝫ 1;.huius, 21.huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile,medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ,quæ sunt potentia commensurabiles,quarum altera media est. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est,ita & in mediis dicemus,rectam lineam mediæ longitudine cõmensurabilem dici mediam,& ipsi commensurabilem non solum lõgitudine,sed & potentia; vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt,etiam potentia sunt commensurabiles.si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, si- *

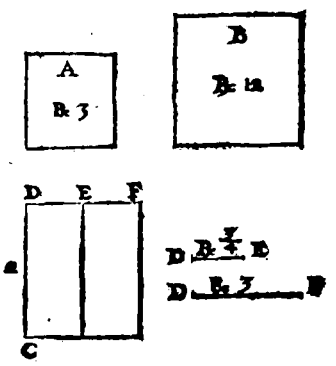
quidem etiam longitudine, dicuntur: & sic mediæ, & longitudine, & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicũtur mediæ potentia solum commensurabiles.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio cõmensurabile medium esse.

Sit spacium medium A, & ipsi commensurabile sit alterum spacium B. Dico B medium esse. Expenatur enim rationalis CD; & ad ipsam applicetur spacium rectangulum CE spacio A æquale, quod latitudinem faciat ED, erit ED rationalis & ipsi CD longitudine incommensurabilis. Rursus ad eandem CD applicetur aliud spacium rectangulum CF, æquale spacio B, latidemque faciens DF. quoniam igitur spacium A est commensurabile spacio B; estque spacio quidem A æquale rectangulum CE; spacio autem B æquale rectangulum CF: rectangulum CE rectangulo CF commensurabile erit. Vt autem EC ad CF, ita est ED ad DF. ergo & ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. sed ED rationalis est, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. ergo & DF rationalis, & ipsi CD longitudine est incommẽsurabilis. sunt igitur CD DF rationales, & potentia solum commẽ surabiles. ergo rectangulum CF, quod ipsis continetur, irrationale est, & medium: ac propterea spacium B ipsi æquale, medium sit necesse est. quod oportebat demonstrare.

23. huius.



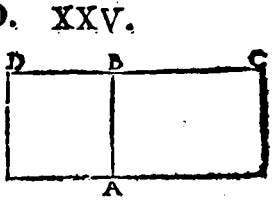
22. huius.

SCOLIVM.

Media duplex est, videlicet potens quod rationalibus potentia solum cõmensurabilibus continetur, & quæ mediæ est commensurabilis. postquam autem ostendisset mediam esse, quæ potest id quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, indigebat hoc theoremate ad ea, quæ sequuntur. oportet enim primum ostendere aliquas esse commensurabiles medias, deinde inquirere quale spacium illud sit quod ipsis comprehenditur.

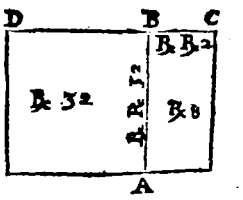
THEOREMA XXII. PROPO. XXV.

Quod medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum medium est.



Medijs enim longitudine commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico AC medium esse. describatur. n. ex AB quadratũ AD. ergo AD medium est. & quoniam commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, æqualis autẽ AB ipsi BD; erit DB ipsi BC longitudine commensurabilis. quare DA commẽsurabile est ipsi AC. sed AD est medium. ergo & AC medium erit. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedẽte corol.



F. C.

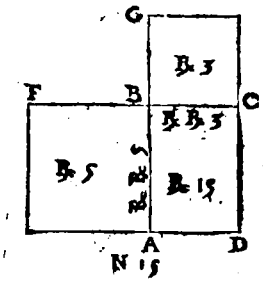
F. C. COMMENTARIVS.

Quę de rationalibus ſupra demonſtrata ſunt, eadem & de mediis demonſtrabuntur.

THEOREMA. I.

Quod datis duabus mediis, vel media, & rationali continetur rectangulum datum erit.

Datis enim duabus mediis, vel data media, & rationali AB AD contineatur rectangulum AC. dico AC datum eſſe. ſint primum AB AD mediæ, & fiant ex ipſis quadrata AF CG. erunt ea irrationalia, quę media appellantur. habeant autem inter ſe proportionem, quam H ad K. & H quidem ſe ipſam multiplicans faciat L, K vero ſe ipſam multiplicãs faciat M, & L multiplicans M ipſum N faciat, cuius N radix ſit O; & rurſus ipſius O ſit radix P. Quoniam igitur tres magnitudines LOM deinceps ſunt proportionales, ſuntq; earum radices HPK, & HPK deinceps proportionales erunt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC eſt vt rectangulum AC ad CG quadratum. quod ſuperius demonſtratum eſt. quadratum autem FA ad quadratum CG eſt vt H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, vt H ad P. & ſunt HP data, & datum FA quadratum. rectangulum igitur AC datum ſit neceſſe eſt. ſed ſit AB media, & AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media, & ex ipſis rurſus fiant quadrata AF CG quorum alterum medium erit, alterum rationale. & ijſdem conſtructis ſimiliter demonſtrabitur rectangulum AC datum eſſe. Quod demonſtrare oportebat.



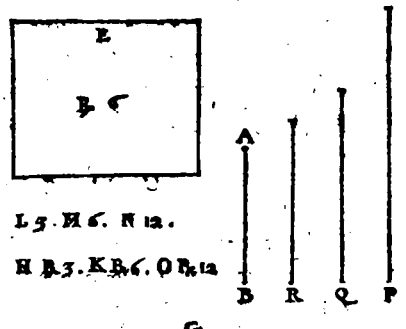
L 5. O R 15. M 5.
H R 5. P R R 15. K R 3.

2. datorum, vel id

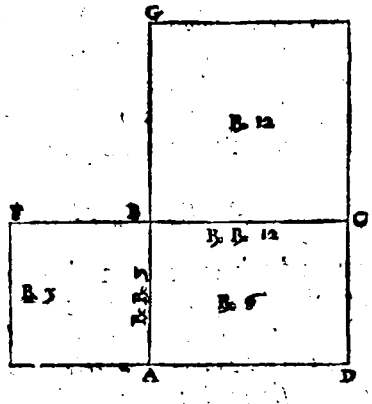
OPERATIO.

Numeros ad quadratos quadratorum redactos inter ſe multiplicabimus, & eius qui producitur radix radicis erit rectangulum, quod datis rectis lineis continetur: atque hęc eſt multiplicatio radicum radicum inter ſe, quam dicunt. Vt ſi AB ſit R R 5 AD R R 3, multiplicabimus 5 per 3 fient 15, & R R 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter ſe ductis producitur. ſi vero AB ſit R R 5, AD 2, quadratum quadrati ipſius 2, videlicet 16 per 5 multiplicabimus, fient 80, & R 80. erit ea, quę ex eorum multiplicatione oritur. deniq; ſi AB ſit R 2, & AD R R 5, multiplicabimus quadratum ipſius 2, hoc eſt 4 per 5, & producti accipiemus radicem radicis, erit R R 20 ea, quam inquirimus.

A R R 3 R



L 3. H 6. N 12.
H R 3. K R 6. O R 12

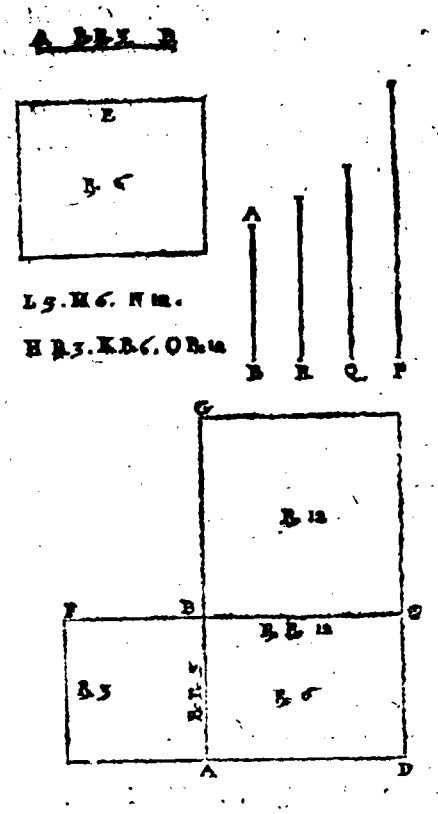


THEOREMA II.

Si ad datum mediam applicetur ſpacium datum, latitudo, quam facit, data erit.

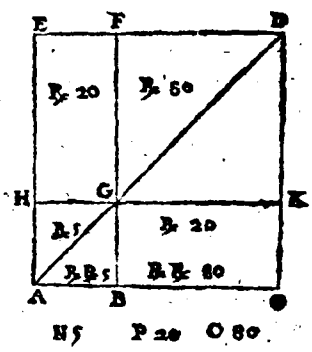
Sit data media AB, & ſpacium datum E. quod ad ipſam AB applicatum latitudinem faciat BC. Dico BC datam eſſe. vel igitur ſpacium E rationale eſt, vel irrationale, quod

medium appellatur. ſit primum irrationale ac medium, habeatq; quadratum ipſius AB ad ſpacium E proportionem eam, quam habet H ad K; & H quidem ſe ipſum multiplicans faciat L; K vero ſe ipſum multiplicans faciat M, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc eſt H ad K. itaq; fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad aliam rectam P: & inter AB, & P ſumpta media proportionali, Q habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q. ergo AB ad Q ita erit, vt H ad K. rurſus inter AB, & Q ſumatur media proportionalis R. quare vt AB ad Q, ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R. quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R eſt vt H ad K. ſed vt H ad K, ita erat quadratum ex AB ad ſpacium E. ergo quadratum ex R ſpacio E eſt æquale. applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC æquale quadrato ex R quod, & ſpacio E æquale erit. & ex AB AD. fiant AF, CG quadrata, numerorum autem LM inueniatur tertius proportionalis N, cuius radix ſit O. Quoniam igitur numeri LMN deinceps ſunt proportionales, & HKO deinceps proportionales erunt. atq; eſt vt quadratū FA ad rectangulum AC, ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare ſimiliter ac ſuperius demonſtrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita eſſe, vt K ad O. ergo & quadratum CG & eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam quærimus. non alia ratione demonſtrabimus, ſi ſpacium E rationale fuerit, latitudinem BC datam eſſe. quod oportebat demonſtrare.



OPERATIO.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum à quo ſpacium denominatur, diuidemus per alterum numerum; & eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit ſpacium ad rectam lineam applicatum; & hęc eſt radicum inter ſe diuiſio, quam dicunt, vt ſi diuidenda ſit R. 6 per R R. 3, multiplicabimus 6 in ſe ipſum fient 36, & diuidemus 36 per 3, exibunt 12, & R R 12 erit, quę ex earum diuiſione oritur. ſi vero diuidere oporteat 3 per R R. 3, reducemus 3 ad quadratum quadrati, & fient 81, diuiſiſq; 81 per 3 exibunt 27, cuius radicis radix eſt ea, quam quærimus.



THEOREMA III.

Quæ ex duabus datis medijs lõgitudine cõmẽſu rabilib' eõponitur recta linea, data erit.

Ex duabus enim datis medijs longitudine commenſurabilibus AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam eſſe. ſit quadratum rectę lineę AB ad quadratum ipſius BC. vt L ad M, & L quidem ſe ipſum multiplicans faciat N, M vero ſe ipſum multiplicans faciat O. & quoniam AB BC longitudine commenſurabiles

ſunt,

sint, earum quadrata LM, & rursus quadratorum quadrata NO inter se proportionem habebunt, 9. huius
quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo inter ipsos NO cadet vnus medius proportionalis numerus. cadat, sitq; P, cuius radix Q. & ex AC descripto quadrato ACDE, & reliqua figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC esse, vt L ad Q, & rectangulum GE ad quadratum GD, vt Q ad M; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L, & M vnà cum duplo ipsius Q. quòd cum dati sint LQM; & compositum ex ipsis dabitur. ergo & AD quadratum, & eius radix AC data erit. Quod oportebat demonstrare.

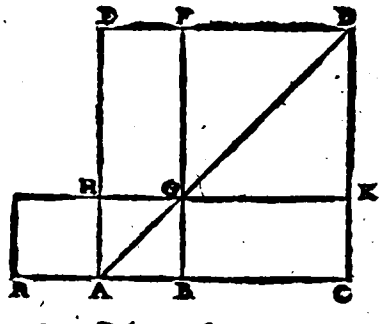
OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul coaceruabimus vnà cum duplo mediæ proportionalis, & huius compositi radix erit recta linea, quæ ex duabus datis constat; atq; hæc est R R. *inter se additio, quam vocant, vt si* R.R. 5 *addenda sit* R. R. 80, *iungemus ex ante demonstratis* R.5 *cum* R.80, *& cum duplo* R.20, *quæ faciunt* R,405, *cuius radix, videlicet* R R.405 *est recta linea, quæ ex earum additione producitur. Quòd si duæ, vel plures mediæ longitudine incommensurabiles sibi ipsis addendæ sint, vel etiam rationales, & mediæ vtemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum est, hoc modo* R R.5. *plus* R R.3, *vel* R R. 2. *plus* R R.3, *plus* R R 5, *vel* R 2 *plus* R R.6, *vel* 3 *plus* R.5 *plus* R.R.6. *& sic in alijs.*

THEOREMA IIII.

Duarum datarum mediarum, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duæ datæ mediæ inæquales, & longitudine commensurabiles AB AC, *quarum differentia sit* BC. *Dico* BC *datam esse. sit quadratum rectæ lineæ* AB *ad quadratum ipsius* AC, *vt* L *ad* M. *& sit rursus ipsius* L *quadratum* N, *& ipsius* M *quadratum sit* O. *habebunt* NO *inter se proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit* P, *cuius radix* Q. *& ex* AB AC *descriptis quadratis* RH AD, *& figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabimus quadratum* RH *ad rectangulum* HC *esse, vt* L *ad* Q; *& rectangulum* HC *ad quadratum* CE, *vt* Q *ad* M. *& præterea duo quadrata* RH AD *æqualia esse duplo rectanguli* HC *& quadrato* FK, *ergo si ab ipsis* LN *auferatur duplum ipsius* Q, *reliquum erit id, quod quadrato* FK *respondet. data autem sint* L Q M *magnitudines. ergo & quadratum* FK, *atque eius radix* BC *dabitur. quod demonstrare oportebat.*



N 5. P 45. O 405.

L B 5. Q B 45. M B 405.

A B B 5 B. A B B 405 C.

OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul iungemus, & ab ea, quæ facta est, auferemus duplam mediæ proportionalis, quæ inter ipsas interijcitur: relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam quærimus, atque hæc est R R. *subtractio, quam appellant vt si à* R R.405. *auferenda sit* R.R 5, *iungemus ex ante demonstratis* R.5 *cum* R 405, *fient* R.500, *à qua auferemus duplum* R.45, *hoc est* R.180, *relinquetur* R.80. *ergo BC erit* R. R.80. *At si ab aliqua media auferenda sit alia minor, quæ longitudine sit ipsi incommensurabilis, vel à media rationalis, vel contra à rationali media, vtemur eadem voce minus, vt in rationa-*

libus

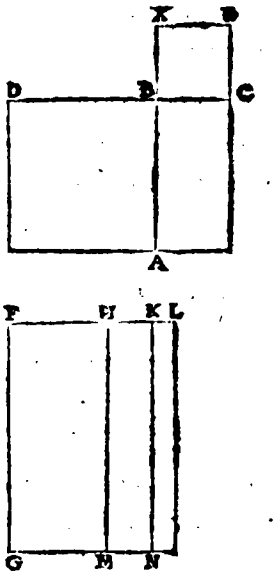
libus dictum eſt hoc modo ℞℞ 5 *minus* ℞℞ 3, *vel* ℞ 12 *minus* ℞ 3, *vel* ℞℞ 20 *minus* 2, *vel* ℞ 6 *minus* ℞℞ 30, *vel* 3 *minus* ℞ 40. *& ita in reliquis.*

Itaque ſi mediæ longitudine commenſurabiles ſint AB BC videlicet ℞℞ 32, *&* ℞℞ 2. *erit ex primo antecedentium rectangulum quod ipſis continetur* ℞ 64, *hoc eſt* ℞ 8; *ſunt enim* ℞℞ 32 *&* ℞℞ 2 *longitudine commenſurabiles, videlicet vt 2 ad 1. nam ſi* ℞℞ 32 *diuidatur per* ℞℞ 2 *prouenit* ℞ 16, *hoc eſt* 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

Quod medijs potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale eſt, vel medium.

Medijs.n. potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulũ AC. Dico AC vel rationala eſſe, vel medium. deſcribãtur.n.ex AB BC quadrata AD BE. vtrumq; igitur ipſorum AD BE medium eſt. exponatur ratio
22.huius 45 prim. nalis FG, & ipſi quidem AD æquale ad FG applicetur parallelogrãmum rectangulum GH, latitudinem faciens FH, ipſi vero AC æquale ad HM applicetur rectangulũ MK, latitudinem faciens HK,
14.primi. & inſuper ipſi BE æquale ſimiliter ad KN applicetur NL, latitudinem faciens KL. In recta igitur linea ſunt FH HK KL. Quoniã igitur mediũ eſt vtrumq; ipſorum AD BE; atq; eſt AD quidẽ æquale ipſi GH, BE vero ipſi NL, erit & vtrumq; ipſo-
23.huius. rũ GH NL medium, & ad rõnalem FG applicata ſunt. ergo & vtraq; ipſarũ FH KL eſt rationalis, & ipſi FG longitudine incõmenſurabilis. & quoniã
1.ſexti. 10.huius. cõmenſurabile eſt AD ipſi BE, erit & GH ipſi NL commenſurabile. eſt igitur & vt GH ad NL, ita FH ad KL. ergo FH ipſi KL eſt commenſurabilis longitudine; ac propterea FH KL rationales ſunt longitudine commenſurabiles. rationale igitur eſt rectangulũ, cp FH KL continetur. & quoniã BD quidẽ ipſi BA eſt æqualis, XB vero ipſi BC, erit vt DB ad BC,
1.ſexti. conuertendo. ita AB ad BX. ſed vt DB ad BC, ita DA quadratum ad rectangulũ AC: vt autẽ AB ad BX, ita AC rectangulũ ad quadratũ CX. eſt igitur vt XC ad CA, ita CA
17.ſexti. ad AD: æquale autem eſt AD ipſi GH, & AC ipſi MK, & CX ipſi NL. quare vt GH ad MK, ita MK ad NL. & vt igitur FH ad HK, ita HK ad KL: ideoque cp FH KL continetur eſt æquale quadrato, quod fit ex HK. eſt autem quod cõtinetur FH KL rationale. ergo & rationale eſt quadratum ex HK; ac propterea recta
20.huius. linea HK rationalis. & ſi quidem HK commenſurabilis eſt ipſi HM, hoc eſt ipſi
21.huius. FG longitudine, erit rectangulum NH rationale; ſi vero HK eſt incommenſurabilis ipſi FG longitudine, KH HM rationales erunt potentia ſolum commẽ ſurabiles; & ob id rectangulum HN medium erit. ergo HN vel rationale eſt, vel medium. ſed HN eſt æquale ipſi AC. quare AC vel rationale, vel medium eſt. Quod igitur medijs potẽtia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale eſt, vel medium. quod oportebat demonſtrare.



SCHOLIVM.

Admiratione dignum eſt triadis vel ternarii vim, ac facultatem ita potentem eſſe, vt etiam irrationalium poteſtatem definiat, & ad illorum vſque extrema permeet. præterea & illud mirum eſt vnamquamque

irratio-

irrationalitatis ſpaciem ab aliqua madietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Muſica. Porro anima ipſa proxime accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in ſe habet, rationis facultate videtur, & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non ſunt, & ipſam analogiæ infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum, & illud eſt, nomen commune mediæ in ea, quæ magis eſt particularis, natura poſitum eſſe. Nam & quæ poteſt ſpacium contentum rationalibus longitudine commenſurabilibus, media omnino eſt rationalium illarum; & quæ poteſt ſpacium rationali, & irrationali contentum. Attamen neutram harum appellat mediam, ſed quæ poteſt ante dictum ſpacium. Illud quoque animaduertendum eſt, Euclidem vbique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias verſatur, ſimilem facere rationalibus. Etenim has vel longitudine, vel potentia ſolum commenſurabiles, quemadmodum illas eſſe dicit. Et ſpacium quidem quod mediis longitudine commenſurabilibus continetur, medium eſſe, quemadmodum illic ſpacium rationalibus contentum rationale. Spaciũ vero contentum mediis potentia ſolum commenſurabilibus quandoque rationale, quandoque medium: & quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus continetur, medium eſſe. Quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit. Et videtur ea quæ inter medias longitudine commenſurabiles proportionalis interiicitur, & quæ inter rationales potentia ſolum commenſurabiles omnino media eſſe: quæ vero inter medias potentia ſolum commenſurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media, ideoque & incommenſurabilis, potentia interdum rationalis interdum media eſt. duæ enim mediæ potentia commenſurabiles eſſe poſſunt quẽadmodum, & duæ rationales potentia commenſurabiles. Exiſtimandum igitur eſt analogiam cauſſam eſſe ortus contentorum ſpaciorum: vt poteq; inter extrema hoc eſt vel inter duas rationales mediam vel inter duas medias rationalem conſtituit; & totum nexum quandoque ſimilem facit extremis, quandoque ipſis diſſimilem interiicit.

Media.

potentiar de nominatiue à potẽtibus appellat Euclides.

cõtẽplatio quæ circa medias ſimilis eſt ei. quæ circa rationales verſatur

Medium tripliciter, rationale vero dupliciter continget

F. C. COMMENTARIVS.

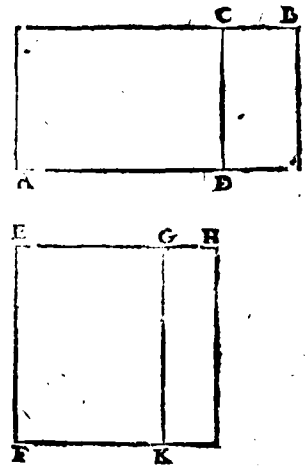
Sint mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB BC, & ſit AB R.R. 54, & BC R.R. 24, erit rectangulum ipſis contentum R.R. 1296, videlicet 6, quod eſt rationale. Rurſus ſint mediæ potentia ſolum cõmenſurabiles R.R. 128, & R.R. 72, rectangulum, quod ipſis continetur, erit R.R. 9216, videlicet R. 96, quod eſt medium. At vero R.R. 54, & R.R. 24 itemq; R.R. 128, & R.R. 72 eſſe potentia ſolum cõmenſurabiles patet tum ex 28, & 29. huius. tũ ex eo, ſi R.R. 54 p R.R. 24 dividatur, prouenit R.R. $\frac{9}{4}$, hoc eſt R. $\frac{3}{2}$. erit igitur R.R. 54 ad R.R. 24, vt

24. *vt* R 3. *ad* R 2. *Rursus si* RR 128 *diuidatur per* RR 72, *proueniet* RR $\frac{8}{9}$. *quare* RR 128 *ad* RR 72 *erit vt* R 4 *ad* R 3.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXVII.

Medium non superat medium rationali.

Si enim fieri potest, medium AB superet medium AC rationali DB. & exponatur rationalis EF, atq; ipsi quidem AB æquale ad EF applicetur parallelogrammum rectangulum FH, latitudinem faciens EH: ipsi vero AC æquale auferatur FG. reliquum igitur BD reliquo KH est æquale. rationale autem est BD. ergo & KH rationale. quoniam igitur medium est vtrumque ipsorum AB, AC, estq; AB æquale FH, & AC æquale FG: erit & vtrumq; ipsorū FH FG medium: & ad rationalem EF applicata sunt. rationalis igitur est vtraq; earū HE EG, & ipsi EF lōgitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est DB, & ipsi KH æquale; & KH rationale erit, est autem ad EF applicatum. rationalis igitur est GH, & ipsi EF commensurabilis longitudine. sed & EG est rationalis, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. ergo EG incommē surabilis est ipsi GH longitudine. atq; est vt EG ad GH, ita quadratum ex EG ad rectangulum, cp EG, GH continetur. incommensurabile igitur est quadratum ex EG rectangulo EGH. sed quadrato quidem ex EG commensurabilia sunt ex EG, GH quadrata. vtraque. n sunt rationalia. rectangulo autem EGH commensurabile est quod bis EG GH continetur; est. n. ipsius duplum. ergo quadrata ex EG, GH incommensurabilia sunt ei, quod bis EG, GH continetur & vtraq; igitur, videlicet quadrata ex EG GH, & quod bis continetur EG GH, hoc est quadratum ex EH, incommensurabilia sunt quadratis ex EG GH sunt autē rationalia, quæ ex EG GH quadrata. irrationale igitur est quadratum ex EH: ac propterea EH est irrationalis. sed & rationalis. quod fieri non potest. non igitur medium superat medium rationali. quod oportebat demonstrare.

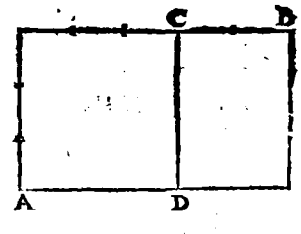


23. huius.
21. huius
Coro. 23 huius.
10 huius
6. huius
14 huius
4. Secundi
17. huius

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem non superare rationale nisi rationali, hoc modo demonstrabitur.

Sint parallelogramma rectangula AB AC rationalia. Dico DB, quo parallelogrammum AB ipsum AC superat, rationale esse. quoniam enim AB AC sunt rationalia, & inter se commensurabilia sunt. atq; est tota magnitudo AB ex magnitudinibus AC DB composita vni ipsarum AC commensurabilis. ergo & reliqua DB commensurabilis erit. sed AB est rationale. quare, & DB rationale sit necesse est. quod nos ad 28 huius demonstrauimus.



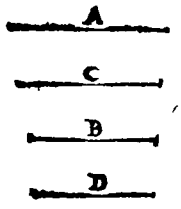
16 huius

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XXVIII.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur

Exponatur duæ rationales potentia ſolum commẽ ſurabiles AB; & ſumatur ipſarum AB media proportionalis C: fiatq; vt A ad B, ita C ad D. quoniam igitur AB rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, erit quod ipſis AB continetur rectangulum, hoc eſt quadratum ex C medium. ergo recta linea C media eſt. & quoniam vt A ad B, ita eſt C ad D; ſuntque AB potentia ſolum commenſurabiles: & CD potentia ſolũ commenſurabiles erunt. eſt autẽ recta linea C media. media igitur eſt & D. quare CD mediæ ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles. Dico etiam ipſas rationale continere. quoniam. n. eſt vt A ad B, ita C ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D. ſed vt A ad C, ita C ad B. ergo, & vt C ad B, ita B ad D. quod igitur ipſis C D continetur quadrato ex B eſt æquale. rationale autem eſt quadratum ex B. ergo & quod continetur CD rationale erit. Inuentæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. atque illud eſt. Quod facere oportebat.



12. ſexti.
*
22. huius.
10. huius.
24. huius.
17. ſexti.

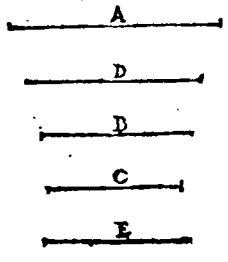
F. C. COMMENTARIVS.

Fiatq; vt A ad B, ita C ad D] *Sit* A 3, *&* B ℞ 6, *erit rectangulum, quod ipſis continetur* ℞ 54, *& recta linea* C *inter ipſas* AB *media proportionalis, quæ ipſum poteſt* ℞℞ 54. *itaq; fiat vt* A *ad* B, *hoc eſt vt* ℞℞ 81 *ad* ℞℞ 36, *ita* C *videlicet* ℞ 54 *ad aliam, quæ ſit* D, *hoc modo. multiplicetur* 54 *per* 36. *fiet* 1944. *ergo* ℞ 1944 *eſt rectangulum, quod continetur* ℞℞ 36, *&* ℞℞ 54 *ex primo antecedentium, quod quidem applicatum ad* ℞ 81 *latitudinem faciet* ℞℞ 24 *ex ſecundo eorumdem. quare rectangulum contentum* ℞℞ 81, *&* RR 24 *eſt æquale ei, quod continetur* RR 36, *&* RR. 54 *eſt igitur vt* RR. 81 *ad* RR. 36, *ita* RR 54 *ad* RR. 24. 16. ſexti.

PROBLEMA V. PROPOSITIO. XXIX.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentia ſolum cõmenſurabiles ABC, ſumaturq; ipſarum AB media proportionalis D: & fiat vt B ad C, ita D ad E. Quoniam igitur AB rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, erit quod AB continetur rectangulum, hoc eſt quadratum ex D medium. ergo D media eſt. & quoniam BC ſunt rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt vt B ad C, ita D ad E; rectæ lineæ DE potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem D media. ergo & E media eſt; ac propterea DE mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Dico ipſas etiam medium continere. Quoniam enim eſt vt B ad C, ita D ad E, erit permutando vt B ad D, ita C ad E. vt autem B ad D, ita eſt D ad A. ergo & vt D ad A, ita C ad E. quod igitur AC continetur rectangulum eſt æquale contento DE. eſt autem quod continetur AC medium. ergo & quod continetur DE medium erit. Inuentæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent, vt facere oportebat.



22. huius.
10. huius.
24. huius.
16. ſexti.
22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

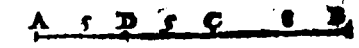
Et fiat vt B ad C, ita D ad E] *Sit* A 4, B R. 8, *&* C R 6, *erit rectangulum, quod* AB *continetur*

tinetur ▯ 128, *& recta linea D inter ipſas AB media proportionalis* ▯▯ 128. *fiat igitur vt* B *ad C, hoc eſt vt* ▯ 64 *ad* ▯▯ 36, *ita D videlicet* ▯▯ 128 *ad aliam, quæ ſit E. eodem modo, quo ſupra, multiplicetur* 128 *per* 36, *fit* 4608, *& 4608 diuidatur per* 64, *exeunt* 72. *ergo* ▯▯ 72 *erit quarta proportionalis A, quam quærebamus.*

LEMMA. I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipſis componitur etiam quadratus ſit.

A Exponantur duo numeri AB BC, qui vel pares ſint, vel impares. & quoniam ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; erit AC numerus par. ſecetur AC bifariam in D. ſint autem AB BC vel ſimiles



B plani, vel quadrati, qui & ipſi ſimiles plani ſunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cũ quadrato ex CD eſt æqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atq; eſt quadratus, qui

C fit ex AB BC; oſtenſum enim eſt ſi duo ſimiles plani ſe ſe multiplicantes aliquẽ faciant, factum quadratum eſſe. Inuenti igitur ſunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ex AB BC, & qui fit ex CD, qui quidem inter ſe compoſiti quadratum numerum faciũt, nempe eum, qui fit ex BD. Quod ipſũ facere oportebat.

COROLLARIVM.

Et manifeſtum eſt rurſus inuentos eſſe duos numeros quadratos, & quĩ fit ex BD, & qui ex CD, ita vt ipſorum exceſſus, videlicet qui fit ex AB BC, ſit quadratus. quando AB BC ſimiles plani ſint. Quando autem non ſint ſimiles plani, inuenti ſunt duo quadrati, & qui fit ex BD, & qui ex CD. quorum exceſſus, qui ex AB BC non eſt quadratus.

D

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar reliquus par eſt] *ex 24, & 26. noni libri.*

B Ergo qui fit ex AB BC vnà cũ quadrato ex CD eſt æqualis ei; qui fit ex BD quadrato] *Hoc demonſtratur à Barlaam Monacho in theoremate 6 eorum, quæ nos ad 15. noni libri apposuimus.*

C Oſtenſum eſt enim ſi duo ſimiles plani ſe ſe multiplicantes aliquem faciant, factum planum eſſe] *in prima propoſitione noni libri.*

D Quando autem non ſint ſimiles plani inuenti ſunt] *Sint enim duo numeri AB BC, qui non ſint ſimiles plani, & AC bifariam ſecetur in D. rurſus qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD eſt æqualis ei, qui ex BD ex 6 Barlaam Monachi iam dicto. ſed qui fit ex AB BD nõ eſt quadratus. ſi enim quadratus ſit, erunt numeri AB BD ſimiles plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri ſunt, qui ſiunt ex BD, & DC, quorum exceſſus, qui fit ex AB BC non eſt quadratus.*

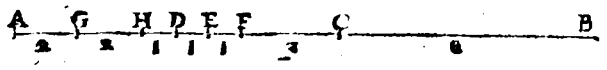


LEMMA. II.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipſis componitur non ſit quadratus.

Sit

Sit enim qui ex A B BC quadratus, vt dictum est, & par numerus CA; secetur-



que CA bifariam in D. perspicuũ est quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CD aequalẽ esse ei, qui fit ex BD quadrato. auferatur vnitas DE. ergo quadratus ex AB BC vnà cũ quadrato ex CE minor est quadrato ex BD. dico igitur quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CF, quadratum non esse. si.n. est quadratus vel aequalis est quadrato ex BE, vel eo minor, non aũt maior, vt ne vnitas secetur; neuè qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CD, qui est aequalis quadrato ex BD æqualis sit quadrato ex AB. BC vnà cum quadrato ex CE. sit primum, si fieri potest, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE aequalis quadrato ex BE; & sit GA duplus ipsius DE vnitatis. Quoniam igitur totus AC totius CD est duplus, quorũ AG est duplus DE, erit & reliquus CG ipsius GE duplus. ergo GC in puncto E bifariam secatur; ac propterea qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE ęqualis est ei, qui fit ex BE quadrato. sed & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis ponitur quadrato ex BE. ergo qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE est æqualis ei, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE; & communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est quadrato ex BE. dico neq; quadrato ex BE minorem esse. si.n. fieri potest, sit quadrato ex BF ęqualis, & ipsius DF duplus ponatur HA. concludetur rursus HC duplus CF, ita vt & HC in F bifariam diuidatur; ac propterea qui ex HB BC vnà cum quadrato ex CF aequalis sit quadrato ex BF. ponitur autem & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE aequalis quadrato ex FB. ergo sequitur qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE aequalem esse ei, qui ex HB BC vnà cum quadrato ex CF. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC vnà cũ quadrato ex CE est æqualis minori, quàm sit quadratus ex BE. ostensum est autem neq; ipsi quadrato ex BE, neq; maiori eo aequalem esse. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CE non est quadratus. & cum fieri possit, vt idem pluribus modis ostendatur, vnus qui proxime dictus est nobis sufficiat ne longam tractationem longius producamus.

A B C D E F

F. C. COMMENTARIVS.

A Perspicuum est quadratum ex AB BC vna cum quadrato ex CD æqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato] *Ex 6. Barlaam Monachi.*

B Non autem maior, vt ne vnitas secetur) *si enim fieri potest sit maior, vel igitur eius latus est BD, vel minus quam BD. & si quidem BD, erit totum parti ęquale. quod fieri non potest. si vero minus quam BD, cum sit maius quam BE, vnitas secabitur. quod itidem fieri non potest.*

C Erit & reliquus CG ipsius GE duplus) *Ex 7 vel 11 septimi libri.*

D Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB ęqualis) *Relinquetur enim qui ex AB BC ęqualis ei qui ex GB B(. sed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC est vt AB ad BG, ex 17 septimi. ergo AB ipsi BG est equalis. quod est absurdum.*

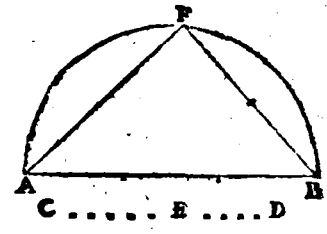
E Concludetur rursus HC duplus CF.) *Quoniam enim AC ipsius (D est duplus, quorũ AH ponitur duplus ipsius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.*

F Quod est absurdum) *Est enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quod AB sit maior quam BH. & similiter quadratus ex CE maior quadrato ex (F; quoniam AC quam CF est maior.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis.

Exponatur.n. quædam rationalis AB, & duo quadrati numeri CD DE, ita vt ipſorum exceſſus CE non ſit quadratus. deſcribatur aũt in recta linea AB ſemicirculus AFB: fiatq; vt DC ad CE, ita ex AB quadratum ad quadratum ex AF; & FB iungatur. Quoniam igitur eſt, vt quadratum ex BA ad quadratum ex AF, ita DC ad CE, habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem eam, q̃ numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF eſt commenſurabile. ſed rationale eſt quadratum ex AB. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF eſt rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neq; quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt recta linea BA ipſi AF longitudine. ergo AB AF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quod cum ſit vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF, erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo & quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id recta linea AB ipſi BF longitudine eſt commenſurabilis. atq; eſt quadratum ex AB æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus poteſt, quam AF quadrato rectæ lineæ BF ſibi commenſurabilis longitudine. Inuentæ igitur ſunt duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles BA AF, ita vt maior BA plus poſſit, quam minor AF, quadrato ipſius FB, ſibi longitudine commenſurabilis. quod facere oportebat.



Ex corollar. primi lẽma. antecedẽtiũ. Per Coroll. 6. huius.

6. huius.

Dif 9. huius.

9 huius.

Ex 47. primi vel ex coroll. ante 15. huius.

9. huius. 47. primi.

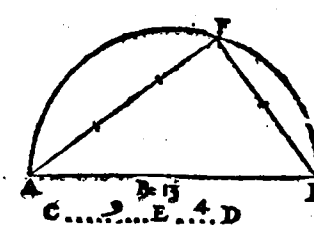
SCOLIVM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primã earum, quæ per compoſitionem fiunt; præmittit autem theoremata hæc, vtpote ex quibus eiuſmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita vt maior plus poſſit, quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur rationalis AB, & duo numeri quadrati CE ED, ita vt qui ex ipſis cõponitur nõ ſit quadratus. atq; in recta linea AB ſemicirculus AFB deſcribatur. & fiat vt DC ad CE, ita quadratũ ex AB ad quadratũ ex AF. & iuncta FB, ſimiliter oſtẽdemus, vt in antecedente, BA AF rationales eſſe potẽtia ſolum commenſurabiles. Et q̃m eſt vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad id quod ex AF quadratum; erit per conuerſionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. ſed CD ad DE proportionem nõ habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. nõ igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quã quadratus numerus ad quadratũ numerum

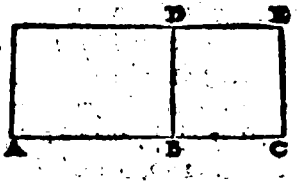


merum. ergo AB ipsi BF longitudine est incommensurabilis. & BA plus potest, quàm AF quadrato rectę lineę BF sibi incommensurabilis longitudine. quare AB BF rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AB plus potest, quàm AF quadrato rectę lineæ FB sibi longitudine incommensurabilis.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentũ ad quadratum minoris.

Sint duae rectae lineae AB BC in proportione aliqua. dico vt AB ad B C, ita esse rectangulum ex AB BC ad quadratum ex B C. describatur enim ex BC quadratum BDEC, & complea tur AD parallelogrammum. manifestum est vt AB ad BC, ita esse AD parallelogrammum ad parallelogrammum BE. atq; est AD quidem, quod AB BC continetur; est enim B C ipsi BD aequalis. BE vero est quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex AB BC ad id, quod ex BC quadratum. Quod demonstrare oportebat.

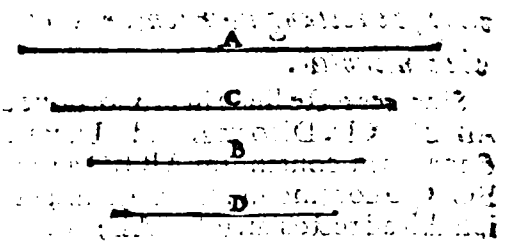


1. sexti.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXXII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponãtur enim duae rationales potentia solum commensurabiles AB, ita vt A maior plus possit, quã B minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine cõmensurabilis. & sit rectangulo ex AB aequale quadratũ, quod fit à recta linea C. medium autem est quòd ex AB. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipsa C media. at quadrato quod fit ex B aequale sit rectangulum ex CD. rationale autem quod ex B. ergo & rectangulum ex CD est rationale. & quoniam est vt A ad B, ita rectangulum ex AB ad id, quod ex B quadratum; sed rectangulo quidem ex AB æquale est quadratum ex C; quadrato autem ex B æquale rectangulum ex CD: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex CD rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex CD, ita recta linea C ad ipsam D. vt igitur A ad B ita C ad D. cõmensurabilis autẽ est A ipsi B potentia. solũ. ergo & C ipsi D potentia solũ est commensurabilis. atq; est C media, media igitur & D. & quoniam est vt A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quã B quadrato rectæ lineae sibi cõmensurabilis lõgitudine; & C plus poterit, quã D quadrato rectae lineae sibi lõgitudine cõmensurabilis. inuentae igitur sunt duae mediae potentia solũ cõmensurabiles CD, quae rationale cõtinẽt, & C plus potest quã D quadrato rectae linae sibi cõmẽsurabilis longitudine. similiter autẽ ostẽdetur inueniri posse duas medias potentia solũ cõmensurabiles, & continentes rationale, ita vt maior plus possit, quã minor quadrato rectae lineae sibi incõmẽsurabilis lõgitudine, quando A plus possit, quã B quadrato rectae lineae sibi lõgitudine incõmẽsurabilis.



30. huius.

22. huius.

Ex antecedenti lémate.

1. sexti.
10. huius.
14. huius.
15. huius.

*

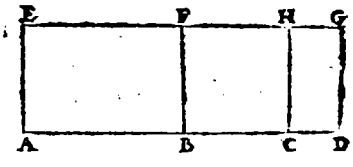
F. C. COMMENTARIVS.

Similite rautem oſtendetur inueniri poſſe duas medias potentia ſolum cõmenſurabiles] *Maneant eadem quæ ſupra. & A plus poſſit, quam B quadrato rectę lineę ſibi longitudine incommenſurabilis. ſimiliter vt ante demonſtrabitur, rectam lineam D mediam eſſe. Et quoniam vt A ad B, ita C ad D, & A plus poteſt, quàm B quadrato rectę lineę ſibi incommenſurabilis longitudine, & C plus poterit, quam D quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. ergo rurſus inuentę ſunt duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles C D; rationale continentes, & C plus poteſt quam D quadrato rectę lineę ſibi longitudine incommenſurabilis.*

Sit A 8, B R. 28. *erit rectangulum, quod ipſis continetur* R. 1792, *& rectæ linea C* R.R. 1792, *quæ media eſt. fiat vt* 8 *ad* R. 28, *ita* R.R. 1792 *ad aliam, quę ſit D. erit ea* R.R. 343. *ergo* R.R. 1792, *&* R.R. 343 *duę mediæ ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, quę rationale continent, videlicet* 28. *& maior plus poteſt, quam minor quadrato rectæ lineę ſibi longitudine cõmenſurabilis. nam ſi à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à* R. 1792 *auferatur* R. 343, *relinquetur* R. 567. *& ſunt duę mediæ* R.R. 1792 R.R. 567 *inter ſe longitudine commenſurabiles, videlicet vt* 4 *ad* 3. *ſi enim* R.R. 1792 *diuidatur per* R.R. 567, *prouenit* R.R. $3\frac{1}{8}\frac{3}{1}$, *quę eſt* $1\frac{1}{3}$, *hoc eſt* $\frac{4}{3}$. *Rurſus ſit A* 8. *B* R. 20, *erit rectangulum ipſis contentum* R. 1280, *& rectæ linea C* R.R. 1280. *fiat vt* 8 *ad* R. 20, *ita* R.R. 1280 *ad aliam, quę ſit D. erit ea* R.R. 125. *ſunt igitur* R.R. 1280, *&* R.R. 125 *duę mediæ, quæ rationale cõtinent, videlicet* 20, *& maior plus poteſt, quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. ſed ſit A* 3 *B* R. 6, *rectangulum ipſis contẽtum erit* R. 54, *& recta linea C* R.R. 54. *Rurſus fiat vt* 3 *ad* R. 6, *ita* R.R. 54 *ad aliam, erit ea* R.R. 24. *quare* R.R. 54, *&* R.R. 24 *ſunt duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent; videlicet* 6; *& maior plus poteſt, quam minor quadrato rectę lineę ſibi longitudine incommenſurabilis.*

LEMMA.

Si fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continetur.



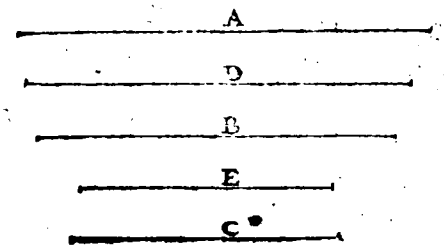
Sint tres rectę lineę in proportione aliqua AB BC CD. Dico vt AB ad CD, ita eſſe rectangulum contentum AB BC ad id quod BC CD continetur. Ducatur .n. à pũcto A ipſi AB ad rectos angulos AE; ponaturquè AE ipſi BC æqualis; & per E quidẽ ipſi AD parallela ducatur EG; per BCD verò ducantur BF CH DG parallelæ ipſi AE quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita AF parallelogrammũ ad parallelogrãmũ BH; vt autem BC ad CD, ita parallelogrammũ BH ad ipſum CG: erit ex æquali vt AB ad CD, ita AF parallelogrammũ ad parallelogrammum CG. & eſt parallelogrammũ quidem AF, quod AB BC continetur; namq; AE eſt æqualis BC; parallelogrammum verò CG eſt, quod continetur BC CD; etenim BC ipſi CH eſt æqualis. Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continetur prima, & media ad rectangulum media & tertia contentum. quod oportebat demonſtrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXXIII.

Inuenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis.

Exponantur

Exponantur tres rationales ABC, potentia ſolum commẽſurabiles, ita vt A plus poſsit, quàm C quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & ſit rectangulo ex ipſis A B æquale quadratum φ fit ex D. medium autem eſt rectangulum ex A B. ergo & quadratum ex D medium erit; & recta linea D media. rectangulo autem ex BC æquale ſit rectangulum ex DE. Quoniam igitur eſt vt rectangulum ex AB ad rectangulũ ex BC, ita recta linea A ad ipſam C; ſed rectangulo quidem ex A B æquale eſt qd fit ex D quadratum; rectangulo autem ex BC æquale rectangulum ex DE; erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex DE rectangulum. ſed vt quadratum ex D ad rectangulum ex DE, ita D ad E. & vt igitur A ad C, ita D ad E. cõmenſurabilis autem eſt A ipſi C potentia ſolum. ergo & D ipſi E potentia ſolum eſt commenſurabilis. atque eſt D media. media igitur & E. itaq; quoniam eſt vt A ad C, ita D ad E; & A plus poteſt, quàm C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis: & D plus poterit, quã E quadrato rectæ lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine. Dico præterea rectangulum ex DE mediũ eſſe. quoniam. n. rectangulo ex B C æquale eſt, φ ex DE rectangulum; medium aũt eſt φ ex B C. ergo & quod ex DE medium erit. Inuentæ igitur ſunt duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles DE, quæ mediũ continẽt, ita vt maior plus poſſit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis. Rurſus ſimiliter inuenientur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles. & mediũ continentes, ita vt maior plus poſſit, q̃ minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; quando ſcilicet A plus poſſit, quàm C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. quod facere oportebat.



22. huius.

Ex anteced lemmate.

lem. 23. huius.

24. huius.

15. huius.

22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

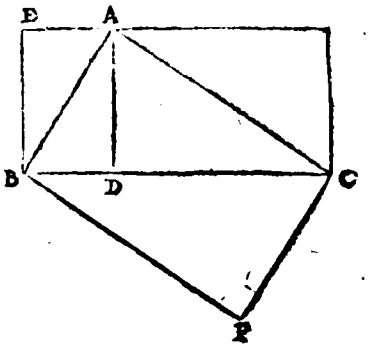
Sit A 8 B R. 48, C R. 28, rectangulum quod ipſis AB continetur, erit R. 3072. & recta linea D R. R. 3072, quæ eſt media fiat vt A ad C, ita D ad aliam, quę ſit E. erit E R. R. 588. ergo R. R. 3072, & R. R. 588 duæ mediæ ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles, quæ medium continent, & maior plus poteſt quàm minor quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis. ſi. n. à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc eſt ſi à R. 3072 auferatur R 588, reliqua erit R. 972. ſuntq; R. R. 3072, & R R. 972. duæ mediæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt 4 ad 3. nam ſi R. R. 3072 diuidatur per R. R. 972, exibit R R. 3. $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{1}$ quæ eſt 1. $\frac{1}{2}$ hoc eſt $\frac{4}{3}$. rurſus ſit A 8, B R. 48, C R. 20, erit D eadem, quę ſupra, videlicet R R. 3072. fiat vt A ad C ita D ad aliam, quæ ſit E. erit E R. R 300. ſunt igitur R. R. 3072, & R. R. 300 duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quę medium continent, & maior plus poteſt. quã minor quadrato rectę lineę ſibi longitudine incommenſurabilis. ſed ſit A v. 6, B R. 3, C R. 2, erit D R R. 18. fiatq; vt A ad C, ita R. R. 18. ad aliam, quę ſit E, erit E R. R. 2. ergo R. R. 18, & R. R 2 ſunt duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles, & medium continentes, quarum maior plus poteſt, quam minor, quadrato rectę lineę ſibi incommenſurabilis longitudine.

LEMMA I.

Sit triangulum orthogonium A B C, rectum habens angulum B A C, & ducatur A D perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum C B B D æquale eſſe quadrato, quod fit ex B A, contentum vero B C C D æquale quadrato ex C A, & contentum B D. D C æquale quadrato ex

DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, AC continetur, æquale esse.

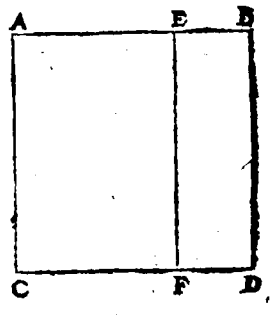
Quoniam enim in triangulo orthogonio abāgulo recto ad basi perpendicularis ducta
8. sexti. est AD, triangula ABD ADC similia sunt, &
toti triangulo ABC, & inter se se. & quoniam
4. sexti. simile est ABC triagulum triāgulo ABD, erit
vt CB ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulū,
17. sexti. quod CB BD continetur quadrato ex AB est
æquale. eadem ratione & rectangulum con-
tentum BC CD æquale est quadrato ex AC.
rursus quoniam in triangulo orthogonio ab
angulo recto adbasim perpēdicularis ducitur
ducta basis partium media proportionalis est
4. sexti. quare vt BD ad DA, ita AD ad DC; ac propte
16. sexti. rea rectangulum, quod BD DC continetur est æquale quadrato ex AD. dico
& rectangulum contentum BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale esse. Quoniam enim, vt diximus, triangulum ABC triangulo ACD est simile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. si autem quattuor rectę lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est æquali ei. quod medijs continetur. ergo rectāgulum contentum BC AD contento BA AC æquale erit. Dico præterea si describamus parallelogrammū rectangulum EC, & ipsum AF compleamus, rectangulū E C ipsi A F æquale esse. vtrumq; enim ipsorum duplum est trianguli ABC. atq; est rectangulum quidem EC id, quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. at rectangulū, quod continetur BC AD rectangulo BA AC contento est æquale.



LEMMA. II.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit vt maior pars ad minorem ita rectangulum contentum tota, & maiori parte ad rectangulum, quod tota, & minori continetur:

Recta enim quædam linea AB secetur in partes inæquales ad E. dico vt AE ad EB, ita esse rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. describatur enim ex AB quadratū ACDB; & per E quidem alterutri ipsarum AC DB parallela ducatur EF. perspicuum est vt AE ad EB, ita esse AF parallelogrammum ad parallelogrammum FB. atq; est AF quidem parallelogrammum quod BA AE continetur; etenim CA ipsi AB est æqualis: parallelogrammum vero FB est quod continetur AB BE; æqualis. n. est DB ipsi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulū contentum BA AE ad id, quod AB BE continetur. Quod oportebat demonstrare.

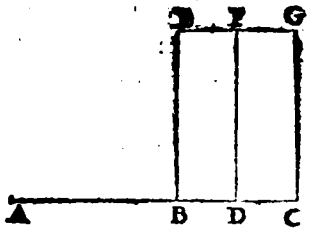


LEMMA. III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum est eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

Sint

Sint duæ rectæ lineę inęquales AB BC, quarum maior AB: & secetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum esse eius, quod AB BD continetur. ducatur. n. à puncto B ipsi B C ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipsi BA æqualis, & figura describatur. Quoniam igitur est vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DG parallelogrammum; erit componendo vt BC ad CD, ita parallelogrammum BG ad ipsum GD. est autem BC dupla ipsius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi GD est duplum. atque est BG quidem, quod AB BC continetur, etenim AB est æqualis BE: DG vero est quod continetur AB BD: nam BD ipsi DC, & AB ipsi DF est æqualis. Quod oportebat demonstrare.

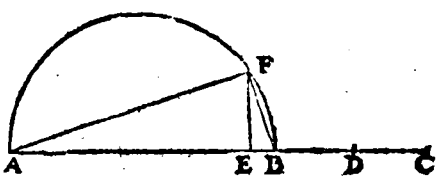


1. sexti

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quę faciãt compositũ quidem ex ipsarum quadratis rationale: rectãgulum vero, quod ipsis continetur, medium.

Exponantur duę rationales potentia solum commensurabiles AB BC, ita vt maior AB plus possit, q̃ minor BC quadrato rectae lineę sibi longitudine incommensurabilis. & secta BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipsarũ BD DC ęquale parallelogrammum ad rectam lineam AB applicetur, deficiẽs figura quadrata: & sit quod continetur AE EB. describatur in recta linea AB semicirculus AFB; ducaturq; ipsi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. quoniam igitur duę rectæ lineae AB BC inaequales sunt, & AB plus potest, q̃ BC quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori BC, hoc est quadrato dimidiæ ipsius ęquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur. erit AE ipsi EB incommensurabilis. atq; est vt AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE quadrato ex AF est æquale; & rectangulum ABE æquale quadrato ex BF. quadratũ igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB: ideoq; rectę lineæ AF FB potentia sunt incommensurabiles. & q̃m AB rationalis est, & quadratum, cp fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AF FB. rursus q̃m rectangulum AEB est æquale quadrato ex EF: ponitur aũt rectangulum AEB quadrato etiam ex BD æquale. ergo FE est æqualis BD; ac propterea BC ipsius EF est dupla. rectangulum igitur AB C duplum est rectanguli, cp AB EF continetur. sed rectangulum AB C est medium. ergo & medium cp continetur AB EF. est aũt cp AB EF continetur ęquale contento AF FB. contentum igitur AF FB medium est. sed & ostensum est rationale. cp componitur ex ipsarum AF FB quadratis. Inuentæ igitur sunt duæ rectę lineę potentia incommensurabiles AF FB, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, cp ipsis continetur, mediũ. quod facere oportebat.



31. huius.

Per lemma ante 19 huius vel per 18. sexti.

19. huius.
Per 2. lemma ex antecedentibus.
Per 5. lemma Per 9. diffinit.

Per 3. lẽma 22. huius. Coroll. 24. huius.
Per 1. lẽma

SCOLIVM.

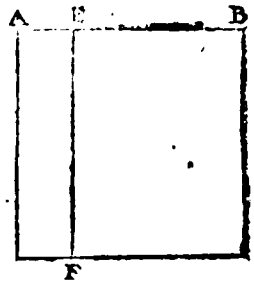
At vero ex duobus spaciis irrationalibus inter se compositũ totum fieri rationale, ex hoc cognoscemus.

Exponatur

Exponatur rationalis AB, & duo numeri CD non habentes proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex AB ad id quod ex BE quadratum: & descripto quadrato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela EF. Quoniam igitur est vt C ad D, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit AB ipsi BE longitudine incommensurabilis. ergo & BA reliquæ AE incommensurabilis est longitudine. vt autē AB est ad vtramq; ipsarum AE EB, ita quadratum ex AB ad vtrumque parallelogrammorum. quadratum igitur ipsis parallelogrammis incommensurabile erit. sed quadratum est rationale. irrationalia igitur sunt parallelogramma, quæ rationalis sunt partes, & ipsum rationale complent.

corol. 10. huius.

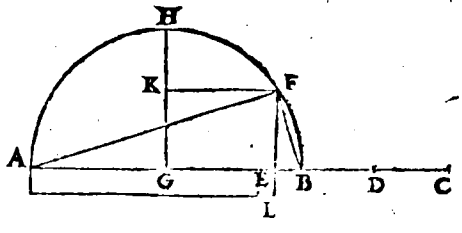
9. huius. Ex demonstratis ad 17 huius. 1. sexti.



C . . 5 . . D . . 3

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 8, B(Ry *20. erit BD, vel D(* Ry *5: & quadrato ipsius BD, quod est 5 æquale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figura quadrata. illud autem facile assequemur, si quę tradita sunt in lemmate ante 18. huius repetantur, Itaque in recta linea AB describo semicirculo AFB; & secta AB bifariā in G, ipsi rectos angulos ducatur GH; ponatur que GK æqualis BD. est enim GH maior, quam BD. nam cum AB sit maior, quam BC, erit etiam ipsius AB dimidia maior, quam dimidia BC. deinde per K ipsi AB parallela ducatur KF: atque à puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quæ protendatur in L, ita vt EL sit æqualis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE EB continetur, & æquale quadrato ipsius FE, hoc est quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum est parallelogrammum AL quadrato ipsius BD æquale, & deficiens figura quadrata. & quoniam recta linea AB secatur in partes æquales ad G, & in partes inæquales ad E, erit rectangulum contentum AE EB vna cum quadrato ipsius GE æquale quadrato dimidiæ AB, hoc est ipsius AG: quadratum autem AG est 16, & rectangulum AEB 5; est enim FE* Ry *5, & eius quadratum 5, quod quidem rectangulo AEB est æquale. reliquum igitur quadratum ipsius GE est 11, & recta linea GE* Ry *11. ergo AE constans ex AG GE est 4 vna cum* Ry *11, vel 4 plus* Ry *11. & EB 4 dempta* Ry *11, vel 4 minus* Ry *11. vt autem sciamus, quę sint AF FB, necesse erit prius inuenire quadrata ipsarum AE EB. quare non inutile visum est theoremata nonnulla hic apponere, attinentia ad eas, quę ex binis, vel pluribus nominibus constant, & ad apotomas.*



6. secundi.

THEOREMA I.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit,

Sit AB ex binis nominibus AC CB: sitq; AC 4, CB Ry *11. Dico quadratum eius datum esse. Quoniam enim AB vtcumq; secatur in puncto C, erit ex quarta propositione secundi libri, quadratū totius æquale quadratis partium, & rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaq; quadratum A(* est *16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB est* Ry *176, cuius duplum* Ry *704. ergo quadratum AB est 27 plus* Ry *704.*

A 4 C Ry 11 B

Sit

Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD: sitq; AB 6, B(R. 10, & CD R. 3. Dico & quadratum ipsius dari. 

nam cum AD secetur in duobus punctis BC, erit quadratũ totius æquale rectangulis, quę singulis partibus ad singulas applicatis continentur, ex ijs, quæ à nobis demonstrata sunt ad secundam propositionem secundi libri. quadratum igitur AB est 36, & rectangulum contentum AB BC est R. 360: contentum vero AB CD est R. 108. & rursus contentum AB BC est R. 360, & quadratum B(est 10. præterea rectangulum, quod continetur BC CD est R. 30, & quod rursus continetur AB (D R. 108; & quod continetur BC CD R. 30. & deniq; quadratum CD est 3. sed duplum R. 360 est R. 1440, & duplum R. 108. est R. 432; duplum vero R. 30 est R. 120. quare summa totius erit 49. plus R. 1440. plus R. 432 plus R. 120, quod est ipsius AD quadratum. Et eodem modo in alijs faciemus quotcunque nomina habeant.

THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constent, & rectangulum ipsis contentum datum erit.

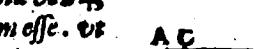
Sint rectæ lineæ AB CD; constetque AB ex binis nominibus AE EB; & sit AE 5, EB R. 12; CD vero constet ex (F FD, & sit CF 4. FD R. 7. Dico rectangulum, quod ipsis cõtinetur, datum esse. Quoniam enim duæ rectę lineæ ABCD vtcunque secantur in punctis EF, rectangulum ipsis contentum est æquale rectangulis, quæ vnaquaq; partes vnius ad vnamquamq; partem alterius applicata, continentur, ex ijsq; nos demonstrauimus ad primam propositionem secundi libri theoremate primo. rectangulum igitur contentum 4 & 5 est 20, & contentum 4, & R. 12 est R. 192. quod autem continetur R. 7, & 5 est R. 175, & quod continetur R. 7, & R. 12 est R. 84. totius ergo summa est 20. plus R. 192. plus R. 175. plus R. 84. quod est rectangulũ ipsis AB CD contentũ. non aliter inuenietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quæ ex pluribus nominibus constent.



THEOREMA III.

Datæ apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC, & rectæ lineæ ipsi congruens sit (B; sitque tota AB 4, BC R. 11. erit AC 4 minus R. 11. Dico & quadratum ipsius datum esse. vt autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propositione secundi libri, vt ante sed septima eiusdem. non enim 4, & R. 11. sint partes dictæ lineæ sed 4 est tota linea, & R. 11. est pars, quæ ab ea aufertur. Itaque quoniam AB secatur vtcunque in puncto C, erit quadratum totius AB vnà cum quadrato vnius partis B(æquale ei, quod bis continetur tota AB, & BC vnà cum alterius partis A(quadrato. est igitur quadratum ipsius AB 16, & quadratum BC 11. rectangulum autem, quod tota AB, & BC continetur est R. 176, cuius duplum R. 704. ergo R. 704. vnà cum quadrato ex AC est æquale 27, ac propterea quadratum ex AC est 27. minus R. 704. qui vero ex quarta propositione secundi id quadratum sibi inueniendum proponunt, coguntur dicere si minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum nõ esse primus animaduertit Hieronymus Cardanus non solum mathematicus, sed & Philosophus, ac medicus præstantissimus, vt apparet in libro de regula aliza, quem nuper edidit. Verum quoniam ex eorum operatione error non sequitur, hoc ipsis condonandum est.

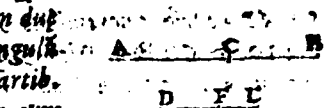


THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulũ, quod ipsis continetur, datum erit.

Sint duę apotomæ datę AC DF: & ipsi quidem AC congruat CB; ipsi vero DF congruat FE sitq; tota AB 8, BC R. 12, et sit DE 4 EF R. 3. erit AC 8 minus R. 12, et DF 4 minus R. 3. Dico & re-

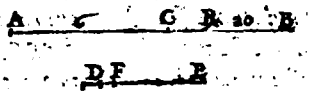
& rectangulum, quod ipſis continetur, datum eſſe. quoniam enim duæ
rectæ lineæ AB DE vtcunque ſecantur in punctis CF, erit rectangulũ
quod continetur totis AB DE vna cum rectangulo contento partib.
CB FE æquale rectangulo contento tota AB, & parte FE vna cum
contento tota DE & parte CB, & eo, quod reliquis partibus AC DF
continetur, ex ijs, quæ demonſtrata ſunt à nobis ad primã propoſitionem ſecundi libri theoremate
ſecundo. itaque rectangulum contentum AB DE eſt 32, & contentum CB FE eſt Bꝛ 36. hoc eſt
6; rectangulum vero, quod continetur AB FE, eſt Bꝛ 192, & quod continetur DE CB eſt Bꝛ 192,
quæ duæ radices inter ſe iunctæ faciunt Bꝛ 768. quare 38 eſt æqualis Bꝛ 768 vna cum eo, quod
AC DF continetur. ex quibus ſequitur rectangulum contentum AC DF eſſe 38 minus Bꝛ 768
at recentiores ad hoc inueniendum vtuntur 1 theoremate; & ob id aſſerunt ſi minus per minus
multiplicetur produci plus, ſed non recte, cum vtendum ſit theoremate ſecundo; neque enim 8, &
Bꝛ 12 ſunt partes vnius rectæ lineæ; immo vero 8 eſt tota linea, & eius pars Bꝛ 12, & ſimiliter di-
cendum de 4. minus Bꝛ 3. ex ipſorum tamen operatione nullus ſequitur error.



THEOREMA.

Data recta linea, quæ ſit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma rectangulum, quod ipſis continetur, datum erit.

Sit data quidem recta linea AB, quæ conſtet ex bi-
nis nominibus AC CB, vt ſit AC 6, CB Bꝛ 20. data
autem apotome ſit DF, & ipſi congruens FE, vt tota
DE ſit 4, & EF Bꝛ 12. erit DF 4 minus Bꝛ 12. Dico re-
ctangulum, quod ipſis AB DF continetur datum eſſe.



Quoniam enim duæ rectæ lineæ AB DE vtcunque ſe-
cantur in punctis CF, erit ex ſecundo theoremate iam dicto rectangulum, quod ipſis AB DE conti-
netur, æquale rectangulis, quæ fiunt vnoquoq; parte vnius ad vnamquamque partem alterius ap-
plicata; videlicet rectangulo contento DF AC, & contento DF CB, & præterea rectangulo, quod
continetur FE AC, & quod continetur FE CB. rectangulum autẽ contentum DE AC vnà cum
contento DE CB eſt æquale rectangulo quod totis AB DE continetur, ex prima ſecundi libri. Ita-
que rectangulum contentum DE AC eſt 24, & contentum DE CB eſt Bꝛ 320. rectãgulum vero, q
cõtinetur FE AC eſt Bꝛ 432, & quod continetur FE CB Bꝛ 240. ergo rectangula, quæ continẽtur
DF AC, & DF CB, hoc eſt rectangulũ contentũ DF AB eſt 24 plus Bꝛ 320, minus Bꝛ 432, &
minus Bꝛ 240. Eodẽ modo procedemus, ſi rectæ lineæ AB DE ex pluribus nominibus conſtent.

Ex quibus apparet ſi plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, pro-
duci minus.

His ita demonſtratis conſtat, quadratum ipſius AE eſſe 27 plus Bꝛ 704, & quadratum EB eſ-
ſe 27 minus Bꝛ 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod eſt 5, erit quadratum
ex AF 32 plus Bꝛ 704, & quadratum ex FB 32 minus Bꝛ 704, rectaque linea AF radix huius
ſummæ 32 plus Bꝛ 704, quam radicem vniuerſalem appellant, & ita notant, videlicet Bꝛ V. 32
plus Bꝛ 704. & ſimiliter BF Bꝛ V. 32 minus Bꝛ 704, quarum quidem quadrata inter ſe iuncta vi-
delicet 32 plus Bꝛ 704, & 32 minus R. 704 faciunt 64, quod eſt ipſius AB quadratum. præterea
quoniam rectangulum quod continetur rectis lineis AF FB eſt æquale contento ipſis AB EF, vt
demonſtratum iam fuit in primo lemmate; contentum autem AB EF eſt R. 320: erit etiam re-
ctangulum, quod his lineis R. V. 32 plus Bꝛ 704, & R. V. 32 minus Bꝛ 704 continetur Bꝛ 320
Hoc autem ita eſſe ex earum quoq; inter ſe multiplicatione manifeſto apparere poteſt. diſpoſitis
enim his radicibus videlicet Bꝛ V. 32 plus Bꝛ 704, & Bꝛ V. 32 minus Bꝛ 704, vt quid ex earũ
multiplicatione proueniat cognoſcamus, operandum eſt, quemadmodum in ſimplicibus radicibus;
nimirũ multiplicando earũ quadrata inter ſe, & eius quod producitur radix erit id quod quæritur.
cũ autẽ quadrata vtriuſq; cõſtẽt ex duabus partibus, erit rectãgulũ, quod totis cõtinetur, ac ſi lineæ
eſſent, æquale rectãgulis, quæ fiunt ſingulis partibus vnius ad ſingulas alterius applicatis, vt dẽmõ
ſtratũ eſt. ſi igitur 32 in ſe multiplicentur fiũt 1024; rurſus ſi 32, hoc eſt Bꝛ. 1024 multiplices Bꝛ
704 ſit Bꝛ. 720896. & ita ſi 32 multiplicat minus Bꝛ. 704 fit minus Bꝛ. 720896. poſtremo ſi mul
tiplicetur Bꝛ. 704 per minus Bꝛ. 704 fiunt minus 704. totiẽ igitur ex his cõpoſitum eſt 1024 plus

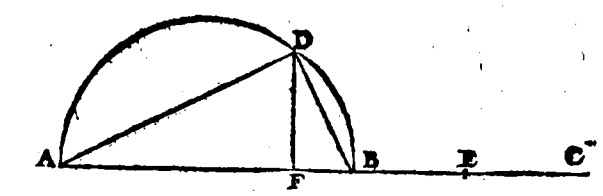
Bꝛ. 720896

R 720896. *minus* R 720896. *minus* R 704. *hoc est* 1024. *minus* 704. *itaq; detractis* 704. *de* 1024. *relinquentur* 320, *& eius radix erit id quod quæritur. ergo si multiplicemus* R *V.* 32 *plus* R 704. *per* R *V.* 32 *minus* R 704. *producetur* R 320. *Quatenus vero ad scholium pertinet, sit* AB 10 *& numeri* CD 5, 3. *& fiat vt* 5 *ad* 3. *ita quadratũ ex* AB, *hoc est* 100. *ad quadratum ex* BE, *erit ad* 60. *ergo ipsa* BE *est* R 60. *&* AE 10. *minus* R 60. *rectangulum autem* BF *est* R 6000, *& rectangulum* AF 100 *minus* R 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XXXV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero quod ipsis continetur rationale.

Exponantur duæ mediæ potentia solum cõmensurabiles AB BC, quæ rationale continent, ita vt AB plus possit quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis. & in ipsa AB describatur semicirculus DB: sectaq; BC bifariam in E, applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur AF FB. incommensurabilis igitur est AF ipsi FB longitudine. à puncto autẽ F ipsi AB ad rectos angulos ducatur FD; & AD DB iungantur. itaq; quoniã AF est incommensurabilis FB; erit & BAF rectangulum rectangulo ABF incommensurabile. est aũt rectangulum quidem BAF quadrato ipsius AD æquale; rectangulum vero ABF æquale quadrato ipsius DB incommensurabile igitur est quadratũ AD ipsius DB quadrato; ac propterea rectæ lineæ ad AD DB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam medium est quadratum ipsius AB, erit & compositum ex quadratis ipsarum AD DB medium. quod cum dupla sit BC ipsius DF, & rectangulũ ABC rectanguli ex AB DF duplum erit. quare & commensurabile. rationale autem est rectangulum ABC, ita.n. ponitur. ergo & rectangulum ex AB FD est rationale. sed rectangulo ex AB FD æquale est rectangulum ADB quare & ipsum ADB rectangulum rationale erit. Inuentę igitur sunt duæ rectæ lineę potentia incommensurabiles AD DB, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero, quod ipsis continetur rationale.



a. huius

Lemma ad 19. huius.

19. huius.

Lemma 2.

Lemma 2.

Lemma 3

Lẽmat. ante 34. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

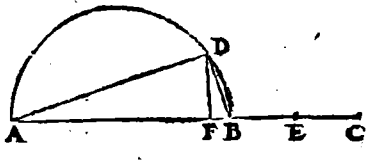
Sit recta linea AB RR 54, *BC* RR 24. *& diuisa* RR 24. *bifariam, erit eius dimidia BE* R R 1 $\frac{1}{2}$. *applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, hoc est æquale* R 1 $\frac{1}{2}$, *deficiens figura quadrata. quod similiter, atque supra fiet. diuisa enim rursus AB. hoc est* RR 54 *bifariam, erit eius dimidia* RR 3 $\frac{3}{8}$. *& si ab ipsius quadrato, videlicet à* R 3 $\frac{3}{8}$. *auferatur* R 1 $\frac{1}{2}$, *reliqua erit* R $\frac{3}{8}$. *ergo recta linea AF est,* RR 3 $\frac{3}{8}$ *plus* RR $\frac{3}{8}$, *& FB* RR 1 $\frac{3}{8}$. *minus* RR $\frac{3}{8}$. *quadratum autẽ ipsius AF eodẽ modo inuenietur esse* R 6 *plus* R 4 $\frac{1}{2}$. *& quadratum ex FB* R 6 *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *quibus addito cõi quadrato ipsius FD, videlicet* R 1 $\frac{1}{2}$, *erit quadratum ex AD* R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$, *& quadratum ex DB* R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$. *ideoque recta linea AD* R *V.* R 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R 4 $\frac{1}{2}$, *& DB* R *V.* R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R 4 $\frac{1}{2}$, *quarum quadrata simul iuncta faciunt* R 54, *videlicet rectę lineæ AB quadratum. quod est medium. At rectangulum, quod AD DB continetur est æquale contento AB DF. contentum vero AB DF, hoc est* RR 54, *&* RR. 1 $\frac{1}{2}$ *est* RR. 81, *hoc est* 3. *ergo quod continetur AD DB est* 3. *sed & idẽ aliter conflat multiplicando* R. *V.* 13 $\frac{1}{2}$ *plus* R. 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R. *V.* R 13 $\frac{1}{2}$ *minus* R. 4 $\frac{1}{2}$; *sit enim* R. 9.

quæ

quę est 3. sunt igitur hæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex earum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, vt oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quę faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.



Exponantur duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quę medium contineant, ita vt AB plus possit, quàm BC quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, quemadmodum in ijs, quę superius dicta sunt. Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommēsurabilis. & quoniam medium est quod fit ex AB, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quod cum rectangulum AFB æquale sit quadrato alterutrius ipsarū BE DF, erit DF aequalis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulū igitur ABC duplū est eius, cp AB FD continetur. medium aūt est rectangulū ABC. ergo, & cp cōtinetur AB FD est medium, atq; est aequale contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; cōmensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE longitudine incōmensurabilis. ergo & quadratum ex AB incōmensurabile est rectangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB aequalia sunt quae ex AD DB quadrata: rectangulo aūt ABE est aequale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositū igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurabile. ergo inuentae sunt duae rectae lineae potentia incommensurabiles, quae faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile.

82. huius.

Corolla. 24. huius.
1. lemma ad 34. huius.
13. huius;

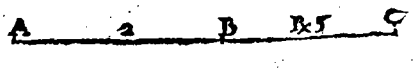
F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB RR 18, *& BC* RR 2. *dinidaturq; BC bifariam in E, erit BE* RR $\frac{1}{8}$. *& si ad AB applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, hoc est* R $\frac{1}{8}$ *deficiens figura quadrata, erit recta linea AF* RR 1 $\frac{1}{8}$ *plus* RR $\frac{1}{2}$ *& FB* RR 1 $\frac{1}{8}$ *minus* RR $\frac{1}{2}$; *quadratū autem ipsius AF* R 3 $\frac{1}{2}$ *plus* R 3, *& quadratum FB* R 3 $\frac{1}{8}$ *minus* R 3. *& addito vtriq; quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD* R 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R 3. *& quadratum ex DB* R 4 $\frac{1}{2}$ *minus* R 3, *ergo recta linea AD est* R *V.* R 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R 3, *& DB* R *V* R 4 $\frac{1}{2}$ *minus* R 3, *quarū quadrata simul iuncta faciunt* R 18, *quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est* R 1 $\frac{1}{2}$. *quod est medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componā tur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.

Componantur .n. duae rationales potentia solum commensurabiles AB BC. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim incommēsurabilis est AB ipsi BC lōgitudine, potētia enim solū



commen-

commensurabiles sunt, & vt AB ad BC, ita rectangulũ ABC ad id quod fit ex BC quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incõmensurabile. Sed rectãgulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC continetur incommensurabile est quadratis ex AB BC. & cõponẽdo quod bis AB BC continetur vnà cũ quadratis ex AB BC, hoc est quadratũ ex AC incõmensurabile est composito ex ipsarũ AB BC quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 1.sexti. 10.huius. 6.huius 13.huius 4.Secundi 20.diffi. 11.diffi.

SCHOLIVM.

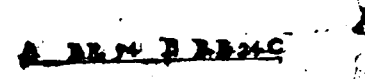
Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neq; vtraq; est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 2. & BC R. 3. erit AC 2. plus R. 3. & eius quadratum 7. plus R. 48. est enim quadratum ipsius AB 4. & quadratum BC 3. rectangulum verò, quod AB BC continetur R. 12. cuius duplum est R. 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur quę rationale contineant, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis medijs prima.



Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quę rationale contineant. dico totam AC irrationalẽ esse. Quoniam .n. incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed ABC rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem, ex binis medijs prima.

F. C. COMMENTARIVS.

Componantur enim duæ mediæ potẽtia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant.] *Quomodo hæ inueniantur docuit in 28. huius. sit autem AB* R R. 54. *BC* R R. 24. *erit tota AC* R R. 54. *plus* R R. 24. A

Et quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur.] *Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13. huius bis repetita.* B

Quod est ipsius AC quadratum.] *Ex 4. secundi.* C

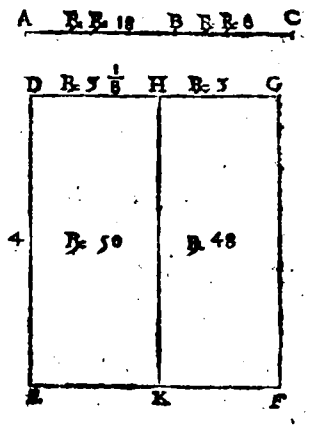
Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis.] *Ex 10. & 11. diffinitione huius.* D

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ mediæ potentia solum commẽsurabiles cõponantur.

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medij secunda.

A Componantur.n.duæ mediæ potentia solũ commensurabiles, AB BC, quæ medium cõtineant. Dico AC irrationalem esse, exponatur rationalis DE: & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum DF ad ipsã DE applicetur, quod latitudinem faciat DG.



C itaq; quoniam quadratum ex AC æquale est
4. secundi. quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis
D AB BC continetur. applicetur ad ipsam DE
quadratis ex AB BC æquale parallelogram-
E mum rectangulum EH. reliquum igitur FH
æquale est ei, quod bis AB BC continetur. &
F quoniam media est vtraque ipsarum AB BC, erunt & quadrata ex AB BC media. medium autẽ ponitur & quod bis continetur AB BC. atque est quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum EH. rectangulo aũt bis
G AB BC contento æquale est ipsum HF. medium igitur est vtrumque ipsorum EH HF, & ad rationalem applicantur. ergo vtraq; recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis
H est AB ipsi BC longitudine; atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad
K ABC rectangulum: erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommensurabile. sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadra-
L tis ipsarum AB BC, rectangulo autem ABC est commensurabile, quòd bis A
M B BC continetur. ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC. sed quadratis ex AB BC æquale est paral-
N lelogrammum EH, & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF paral
O lelogramum. quare EH ipsi HF est incommensurabile; & ob id recta linea DH
P ipsi HG incommensurabilis longitudine. ostensæ autem sunt rationales. ergo
Q DH HG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est irrationalis; rationalis autem DE, & quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est, spacium igitur DF est irrationale, & quæ ipsum potest irrationalis. potest autem ipsum DF recta linea AC. ergo AC irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

SCHOLIVM.

Vocauit illam ex binis medii secundam, quoniam medium est non rationale, quod ipsis AB BC continetur: medium enim rationali posterius est. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse perspicue constat.

21. huius. Nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; sed & irrationalis. quod est absurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur est irrationale. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ medium contineant] *Quomodo autem hæ inueniantur docet in 29 huius. sit AB* ▭▭ 18 *& BC* ▭▭ 8 *erit AC* ▭▭ 18 *plus* ▭▭ 8 *cuius quadratum* ▭ 50 *plus* ▭ 48.

B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammũ rectã-

gulum

gulum DF ad ipſam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE 4, ad quam ſi applicetur illud medium* R 50, *latitudinem faciet* R 3 $\frac{1}{8}$, *quæ ſit DH: & ſi ad eandem applicetur* R 48, *faciet latitudinem* R 3, *quę ſit HG: ergo tota latitudo DG erit* R 3 $\frac{1}{8}$ *plus* R 3.

Itaque quoniam quadratum ex AC æquale eſt quadratis) *Ex quarta ſecundi, vel 4. Barlaam monachi.* C

Applicetur ad ipſum DE quadratis ex A B BC æquale parallelogrammum rectangulum EH) *Quadratum ipſius AB eſt* R 18, *& quadratum BC* R 8, *quæ inter ſe iunctæ faciunt* R 50. *ergo parallelogrammum EH eſt* R 50, *& recta linea DH* R 3 $\frac{1}{8}$. D

Reliquum igitur FH eſt æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc eſt* R 48, *& recta linea HG* R 3, *vt dictum eſt.* E

Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur) *Medium ponitur, quod AB BC continetur. & quoniam illud, quod bis AB BC continetur eſt ei commenſurabile, videlicet duplum, ex 6. huius, & ipſum medium erit ex corollario 24. huius.* F

Ergo vtraque recta linea DH HG eſt rationalis, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis] *Ex 23. huius.* G

Atque eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemmate ad 23. huius appoſito, vel ex 1. ſexti.* H

Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommenſurabile] *Ex 10. huius.* K

Sed quadrato quidem ex AB commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AB BC) *Ponuntur enim AB BC potentia commẽſurabiles. ergo & earum quadrata commenſurabilia erunt, & compoſitum ex ipſis commenſurabile vtriq; quadrato ex 16. huius.* L

Ergo compoſitum ex quadratis AB BC incommenſurabile erit ei, quod bis continetur AB BC) *Ex 14. huius.* M

Et ob id recta linea DH ipſi HG incommenſurabilis longitudine) *Ex 1. ſexti, & 10. huius.* N

Ac propterea DG eſt irrationalis) *Ex 37. huius.* O

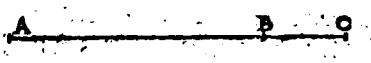
Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale eſt) *Quomodo hoc ſequatur in antecedenti ſcholio dictum fuit.* P

Et quæ ipſum poteſt irrationalis) *Ex 11. diffinitione.* Q

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ipſis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem maior.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt. Dico AC irrationalem eſſe. Quoniam enim id, quod AB BC continetur, medium eſt, & quod bis continetur AB BC medium erit. compoſitum autem ex ipſarum AB BC quadratis eſt rationale. ergo quod bis AB BC continetur incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis ipſarum AB BC. & ob id quadrata ex AB BC vna cum eo, quod bis AB BC continetur, quod eſt quadratum ex AC, incommenſurabile eſt quadratis ex AB BC. rationale autem eſt compoſitum ex quadratis AB BC. ergo & quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem maior.



A

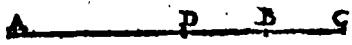
B

C

SCHOLIUM

Vocatur autem ipſam maiorem, propterea quod rationalia ex AB

BC maiora ſint medio, quod bis AB BC continetur, oporteatq; à ratio-nalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex AB BC ma iora eſſe eo quod bis AB BC continetur, ſic oſtendemus.



Manifeſtum igitur eſt AB BC inter ſe in-æquales eſſe. ſi enim ſint æquales, & quæ fiunt ex AB BC æqualia erunt ei, quod bis AB BC continetur, & rectangulum ABC rationale erit quod non ponitur. inæquales igitur ſunt AB BC. ponatur maior
7. ſecundi. AB, & ipſi BC æqualis BD. ergo quadrata ex AB BD æqualia ſunt ei, quod bis AB BD continetur vnà cum quadrato ex DA. æqualis autem eſt DB ipſi BC. quadrata igitur ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis AB BC continetur, vnà cum quadrato ex AD. ideoque quadrata ex AB BC maiora ſunt quam id, quod bis AB, BC continetur, quadrato ipſius DA.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt.] *Inueniuntur autem hæ ex 34. huius ſit AB* R. *V* 34. *plus* R. 704. *& BC* R. *V* 32. *minus* R. 704. *erit tota AC* R. *V* 32. *plus* R. 704. *plus* R. *V*
B 32. *minus* R. 704.

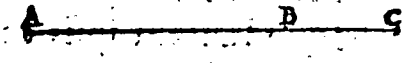
C Et quod bis AB BC continetur medium erit.] *Ex corollario 24. huius.*

Et ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC cõtinetur, quod eſt quadratum ex AC incommenſurabile eſt quadratis ex AB BC.] *Ex 17. huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur, rationale; tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem rationale, ac medium potens.

A Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea, quæ propoſita ſunt. dico



B AC irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis medium eſt; quod autem bis AB BC continetur rationale: erit compoſitum ex ipſarum AB BC quadratis incõmenſurabile ei, quod bis AB BC continetur. quare cõponendo quadratum ex AC eſt incommenſurabile ei, quod bis continetur AB BC. eſt autem rationale, quod bis AB BC continetur, quadratũ igitur ex AC irrationale eſt, ideoq; recta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem, rationale, ac medium potens.

SCHOLIVM.

Rationale autem, ac medium potentem ipſam idcirco appellatæ, quòd poſſit bina ſpacia, vnum quidem rationale, alterum vero medium. & quoniam rationale præcedit irrationale, ipſius rationalis prius mentionem fecit.

F. C. COMMENTARIVS.

Cõponãtur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB BC, facientes ea quæ propoſita ſunt.] *Hæ autem inueniuntur ex 35. huius ſit AB* R. *V.* R. 13 [illegible]. *plus*
R. 4.

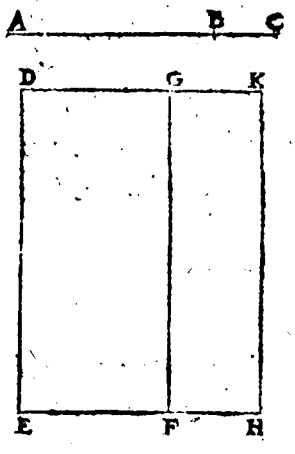
$4\frac{1}{2}$. B(R V. R $13\frac{1}{2}$ *minus* R $4\frac{1}{2}$, *vt tota AC sit* R V. R $13\frac{1}{2}$ *plus* R $4\frac{1}{2}$ *plus* R V. R $13\frac{1}{2}$ *minus* R $4\frac{1}{2}$.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] *Sequitur hoc ex corollario 24 huius ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.* B

2. Quare componendo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC] *Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compositum ex quadratis AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, hoc est quadratum ex AC incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC.* C

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XLII.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod ipsis continetur medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.



Componantur.n. duæ rectæ lineæ potentia incõmensurabiles AB BC, quæ faciant compositum quidem, ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & adhũc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Dico AC irrationalem esse. Exponatur.n. rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. totum igitur DH quadrato ipsius AC est æquale. & quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum AB BC, & æquale parallelogrammo DF; erit ipsum quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatum est. rationalis igitur est DG, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. ob eandem causam & GK est rationalis, & incommensurabilis longitudine ipsi FG, hoc est ipsi DE. & q̃m compositum ex quadratis ipsarum AB BC incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur; erit & parallelogrammum DF ipsi GH incommensurabile. ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK; & sunt rationales. quare DG GK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DK est irrationalis, quę ex binis nominibus appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale est, & ipsum potens irrationalis. sed ipsum DH potest recta linea AC. quare AC irrationalis est, vocetur autẽ bina media potens. A B C D E F G

SCHOLIVM.

Vocauit ipsam bina media potentem, propterea quod potest bina spacia media, videlicet compositum ex ipsarum AB BC quadratis, & illud, quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Cõponantur.n. duæ rectæ lineæ potẽtia incõmẽsurabiles AB BC, quæ faciãt A

compoſitum quidem ex ipſarum AB BC quadratis medium, quod autem ipſis continetur medium] *Qua vtro ratione hæc inueniri poſsint, tradit in 36. huius. Sit AB* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *plus* ℞ 3, *& BC* ℞ *V.* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *minus* ℞ 3. *erunt earum quadrata ſimul iuncta* ℞ 18, *& rectangulum ipſis contentum* ℞ 1 $\frac{1}{2}$, *cuius duplum eſt* ℞ 6.

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum DF æquale quadratis ipſarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE* 3, *ad quam ſi applicetur parallelogrammum DF, æquale compoſito ex ipſarum AB BC quadratis, videlicet* ℞ 18, *latitudinem faciet* ℞ 2, *quæ ſit DG; & ſi ad eandem applicetur parallelogramuum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet* ℞ 6, *latitudinem faciet* ℞ $\frac{2}{3}$, *quę ſit GK. tota igitur latitudo D K erit* ℞ 2 *plus* ℞ $\frac{2}{3}$, *quę eſt irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit æquale quadrato ipſius AC, ex 4 ſecundi.*

C Rationalis igitur eſt DG ipſi DE longitudine incommenſurabilis] *Ex 23. huius*

D Ergo & recta linea DG incommenſurabilis eſt ipſi GK] *Ex 10. huius, eſt enim vt D F ad GH, ita DG ad GK, ex 1. ſexti.*

E Ac propterea DK eſt irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale eſt] *Nam quod rationali, & irrationali continetur eſt irrationale, vt in ſcholio 39. huius demonſtratum fuit.*

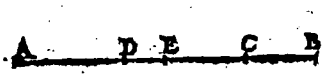
G Et ipſum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

SCOLIVM.

At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quæ propoſitas ſpecies conſtituunt, mox demonſtrabimus, ſi prius lemma quoddam expoſuerimus, quod huiuſmodi eſt.

LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & ſecetur tota in partes inæquales ad vtrũque punctorum C D: ponatur autem AC quam DB maior. Dico quadrata ipſarum AC CB quadratis AD DB maiora eſſe.



Secetur enim AB bifariam in E. & quoniã maior eſt AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB eſt autem AE ipſi EB æqualis. ergo D E, quàm EC eſt minor: & puncta CD non æqualiter diſtant à bipartita ſectione. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectæ lineæ CE eſt æquale quadrato ipſius EB; ſed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectæ lineæ DE eſt æquale ipſius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipſius E C æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipſis DE. Quorum quadratum ipſius D E eſt minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus eſt rectangulo ADB. quare & quod bis AC CB continetur minus eſt eo, quod bis continetur AD DB. ſed compoſitum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, eſt æquale compoſito ex quadratis ipſarum AD DB vnà cum eo, quod bis continetur AD DB. eſt enim vtrumque eorum quadrato ipſius AB æquale. & reliquum igitur compoſitum ex quadratis AC CB maius erit compoſito ex quadratis AD DB. Quod demonſtrare oportebat.

5. ſecundi.

4. ſecundi.

ALITER

ALITER

Exponatur quædam recta linea AB, diuisa in partes quidem æquales ad punctum D, in partes vero inæquales ad C. Dico quadrata ex AC CB maiora esse quadratis ex AB DB.



Quoniam.n. quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, quod demonstratũ est in nono theoremate 2. libri elementorum; & sunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD; propterea quòd AB in D bifariam secatur; quod autem bis fit ex DC duplum est quadrati ex DC: erũt quadrata ex AC CB æqualia quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis fit ex DC. quadrata igitur ex AC CB maiora sunt quàm quadrata ex AD DB, eo q̃ bis fit ex DC Non secetur autẽ AB bifariam, sed vtcunq; in punctis CD, ita vt AD sit maior, quàm CB. similiter demonstrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse. Quoniam.n recta linea AB vtcũq; secatur in C, quadratum ex AB est æquale quadratis ex AC CB vnà cum eo, quod bis cõtinetur AC CB. Eadem rõne, & quadratum ex AB est æquale quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis AD DB continetur. Quorũ quod bis continetur AD DB maius est eo quod bis AC CB continetur. est .n. rectangulũ ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora sunt. Quod demonstrare oportebat.



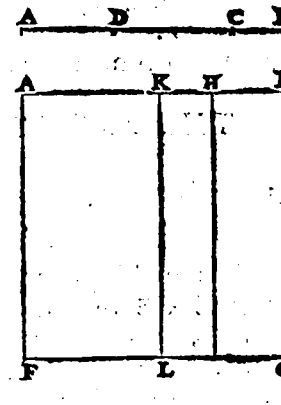
4. secundi.

Ex proxime demõstratis

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis perspicue apparet excessum, quo compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB superat compositum ex quadratis ipsarum AD DB æqualem, vel potius eundem esse excessui quo rectangulum bis contentũ AD DB superat rectangulum, quod bis AC CB continetur.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipsam AF applicetur parallelogrammum FH æquale composito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG æquale rectangulo bis contento AC CB. Rursus ad eandẽ AF applicetur parallelogrammum FK æquale composito ex quadratis AD DB. reliquum igitur parallelogrammum KG est æquale ei, quod bis AD DB continetur. Itaq; quoniam parallelogrammum quidem FH. est æquale composito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK est æquale composito ex quadratis AD DB: erit parallelogrãmum LH excessus, quo alterum alterum superat. Sed idem LH est excessus, quo rectangulum bis contentum AD DB superat id, quod bis AC CB continetur. constat igitur verum esse. quod nos demonstrandum proposuimus.



4. secundi.

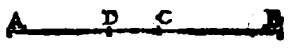
THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB diuisa in nomina ad punctũ C. ergo AC CB rõnales sunt potentia solum cõmensurabiles. Dico AB ad aliud punctum nõ diuidi in duas rõnales potentia solum commensurabiles. si.n. fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB rõnales sint potẽtia solũ cõmẽsurabiles. Itaq; manifestũ est AC non esse eandẽ, quæ DB. si enim fieri potest, sit eadem. erit igitur & AD eadem

A
B
C

dem, quæ CB: atque erit vt AC ad CB, ita BD ad DA; & AB in D similiter diuisa erit, atque in punD cto C. quod non ponitur. ergo AC non est eadē E quæ DB. simili ratione & puncta CD non æquali F ter distant à bipartita sectione. quo igitur differūt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis continetur G AC CB, & quadrata ipsarum AD DB vnà cum eo, quod bis AD DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius AB. sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque sunt. ergo & quod bis A D DB H continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ipsa media sint. atqui medium non superat medium rationali. non igitur quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. quare ad vnum dumtaxat diuiditur in nomina. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabilis) *Ex 37 huius.*

B Itaq; manifestum est AC non esse eandem, quæ DB] *Hoc est AC non esse æqualem ipsi DB; sumitur enim hoc loco idem pro æquali.*

C Erit igitur, & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC sit æqualis ipsi DB, dempta B vtriq; communi, erit reliqua AD reliquæ CB æqualis.*

D Quod non ponitur] *Ponitur enim recta linea AB in puncto D aliter diuisa, atq; in ipso C.*

E Simili ratione & puncta CD non æqualiter distant à bipartita sectione) *Nam si AD CB inter se æquales non sint, neque puncta CD æqualiter destabunt ab eo puncto, quod rectam lineam AD bifariam diuidit.*

F Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB) *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum est.*

G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque sunt) *Nam rationale non superat rationale, nisi rationali. Quod nos demonstrauimus ad 27 huius.*

H Atqui medium non superat medium rationali) *Ex 27. huius.*

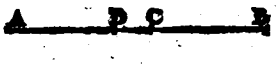
THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLIV.

Quæ ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis medijs prima AB diuisa in pūcto C, ita vt AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur etiam in D, ita vt AD DB sint mediæ potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis AD DB ab eo, quod bis A B CB continetur, hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum AD DB a b eo, quod bis AC CB continetur, vtraque enim sunt rationalia: sequitur vt etiam quadrata ipsarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB, quæ vtraque media sunt. illud autem fieri non potest. non igitur quæ ex binis medijs prima in alio, atque alio puncto diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur necesse est.

Ex demonstratis ad 21 huius.

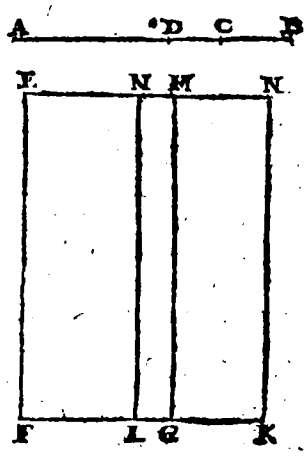
27. huius.



THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLV.

Quæ ex binis medijs secunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit ex binis medijs secunda AB diuisa in C, ita vt AC CB mediæ sint potentia solum commẽsurabiles, quæ medium contineant, manifestum est punctum C non esse in bipartita sectione, qm non sunt longitudine cõmensurabiles. Dico ipsam AB in alio puncto non diuidi. si.n. fieri potest, diuidatur in D, ita vt AC non sit eadem, quę DB. sed maior AC positione. Itaq; constat quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse, vt supra ostẽdimus, & AD DB medias esse potentia solum commensurabiles, quæ mediũ cõtineant. Exponatur rõnalis EF: & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrãmum EK ad ipsam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æquale auferatur EG. reliquum igitur HK æquale est ei, φ bis AC CB continetur. rursus quadratis ex AD DB, quæ minora sunt quadratis ex AC CB, vt ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur EL. ergo reliquum MK est æquale ei, quod bis continetur AD DB. & quoniã media sunt quæ ex AC CB quadrata, erit EG mediũ, & ad rationalem EF applicatũ est. quare EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommẽsurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. Quòd cũ AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, erit AC ipsi CB incommensurabilis longitudine, vt aũt AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, φ AC CB continetur. quadratum igitur ex AC incommensurabile est ei, φ continetur A C C B. Sed quadrato quidem ex AC cõmensurabilia sunt quadrata ex AC CB, etenim AC CB potentia sunt commensurabiles; ei vero, φ continetur AC CB, commensurabile est illud, quod bis AC CB continetur. ergo & quadrata ex AC CB incommensurabilia sunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis aũt ex AC CB æquale est parallelogrãmum EG, & ei quod bis cõtinetur AC CB est æquale HK. ergo EG ipsi HK est incommensurabile; & ob id recta linea EH ipsi HN incommensurabilis longitudine; suntq; rationales. ergo EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem duæ rationales potentia solũ commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. quare EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. eadem ratione & EM MN ostendentur rationales potentia solum commensurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, videlicet ad H, & ad M. & non est EH eadem, quę MN: quoniam quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB sunt maiora; quadrata autem ex AD DB maiora sunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc est parallelogrammũ EG multo maius est eo, quod bis continetur AD DB, hoc est parallelogrammo MK. quare & EH, quàm MN est maior. non igitur EH eadem est, quæ MN. Quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARII.

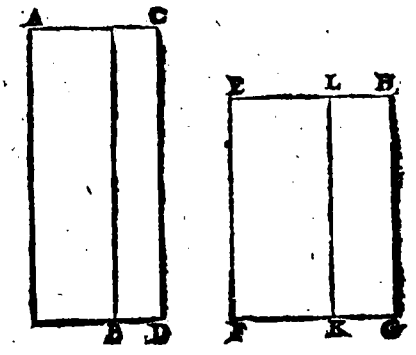
Sed maior AC positione] *Hoc est ponatur nunc AC maior, quam DB.* A
Vt supra ostendimus] *In lemmate, quod positum est ante 43. huius.* B
Reliquũ igitur HK æquale est ei, quod bis AC CB continetur.] *Ex 4. secundi libri.* C
Et quoniã media sunt, quæ ex AG GF quadrata, erit EG mediũ.] *Rectæ ra-* D

tione

neq; AC CB ponuntur media potentia solum commensurabiles, quare & media erunt ipsarum quadrata, atq; inter se commensurabilia; & si componantur vnum fiet medium; quemadmodum ex duabus rationalibus, si longitudine commensurabiles sint, vna sit rationalis.

At vero spacium ex medijs compositum irrationale esse sic demõstrabimus)

Componantur duo media spacia AB BC. dico totum AD esse irrationale. sit enim rationale, si fieri potest; expõnaturq; rationalis quadam recta linea EF; & ad ipsam applicetur parallelogrãmum EG ipsi AD aequale, latitudinem faciens EH: à parallelogrammo autem EG auferatur EK aequale ipsi AB, quod latitudinem faciat EL. reliquum igitur LG reliquo BC est aequale. & quoniam medium est vtrumq; ipsorum AB BC; atq; est EK quidem ipsi AB aquale; LG vero ipsi BC: erit & vtrumq; ipsorum EK LG medium; & ad rationalem EF applicata sunt. rationalis igitur est vtraq; ipsarum EL LH, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. Rursus quoniam AD rationale ponitur, estq; ipsi EG aequale, & applicatur ad rationalem EF; recta linea EH rationali: erit, & ipsi EF longitudine commensurabilis. est autem EL eidem EF incommensurabilis longitudine. ergo EH ipsi EL longitudine incommensurabilis erit. sed vt EH ad EL, ita & quadratum ex EH ad rectangulum, quod HE EL continetur. quadratum autem ex EH commensurabile est quadratis ex HE EL; vtrumq; enim ipsorum est rationale. & rectangulum contentum HE EL est commensurabile ei, quod bis HE EL continetur. ergo ex his, quae ad 14. huius demonstrauimus, quadrata ex HE EL incommensurabilia sunt ei, quod bis continetur HE EL. sed quadratis ex HE EL aquale est id quod bis HE EL cõtinetur vna cum quadrato ipsius LH, ex 7 secundi libri. si autem magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliqua incommensurabilis erit. quod à nobis demonstratum est ad 17. huius. quadrata igitur ex HE EL incommensurabilia sunt quadrato ex LH. rationalia autem sunt quadrata ex HE EL. ergo quadratum ex LH irrationale est & ob id recta linea LH est irrationalis; sed & rationalis, vt demonstratum fuit; quod fieri non potest. non igitur spacium AD est rationale. quare irrationale sit necesse est. quod demonstrare oportebat.



23. huius.

21. huius.

23. huius.

E Quare EH rationalis est, & ipsi EF lõgitudine incõmensurabilis.) *Ex 23. huius.*

F Ergo EC ipsi HK est incommensurabile) *Ex demonstratis ad 14. huius.*

G Tota irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur) *Ex 37. huius.*

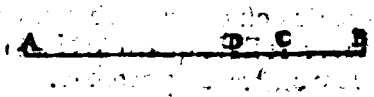
H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, videlicet ad H, & ad M) *Quod fieri non posse in 42. huius demonstratum est. non igitur quę ex binis medijs secunda ad aliud, atque aliud punctum diuiditur in nomina. ergo ad vnum dumtaxat diuidi necessarium est.*

K Et non est EH eadem, quae MN.) *Ostendit EH ipsi MN non esse aequalem.*

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit maior AB diuisa in C, ita vt AC CB potentia incõmensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarũ AC CB quadratis rationale; rectangulũ vero, quod ipsis continetur, medium. Dico AB in alio puncto non diuidi. si.n. fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB potentia incõmensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis cõtinetur, medium. & quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB, hoc differt & id, quod bis cõtinetur AD DB ab eo, quod bis AC CB cõtinetur.

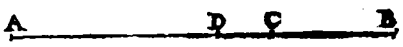


sed

sed quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali; etenim vtraq; rationalia sunt. ergo quod bis cõtinetur AD BD rationali superat id, quod bis AC CB continetur, cũ media sint. ꝙ est absurdum. non igitur maior ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur necesse est. Ex dẽnõstratis ad 27. huius. Ex 27. huius

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

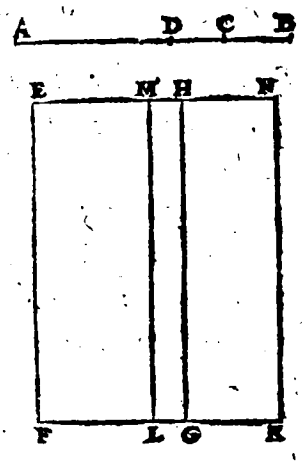
Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit rationale, ac medium potẽs AB, diuisa in C; ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint; faciantq; compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; ꝙ autem ipsis cõtinetur, rõnale. Dico AB in alio puncto non diuidi. Si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt etiam AD DB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: ꝙ autem ipsis continetur, rationale. Quoniã igitur quo differt rectangulũ bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB. rectangulum autem bis contentum AD DB rationali superat id, quod bis AC CB cõtinetur. ergo & quadrata ex AC CB superãt quadrata ex AD DB rõnali cum media sint. ꝙ est absurdum. non igitur rationale; ac mediũ potens diuiditur ad aliud, atq; aliud punctum. quare ad vnũ dumtaxat punctum diuidetur.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit bina media potens AB, diuisa in C, ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes etiã compositum ex ipsarũ AC CB quadratis medium; & quod ipsis continetur, medium, incommensurabileq; cõposito ex quadratis ipsarũ AC CB. Dico AB ad aliud punctum nõ diuidi, ita vt faciat quę proposita sunt. Si .n. fieri potest, diuidatur in D, ita vt rursus AC non sit eadẽ, quæ DB, sed sit AC positione maior; exponaturq; rõnalis EF, & ad ipsam quadratis quidẽ ex AC CB æquale parallelogrammũ EG applicetur, rectangulo aũt bis contẽto AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK est æquale ei, quod fit ex AB, quadrato. Rursus ad EF applicetur parallelogrammũ EL, æquale quadratis ex AD DB. ergo reliquum, quod bis AD DB cõtinetur, reliquo MK est æquale, & quoniã compositum ex quadratis ipsarũ AC CB mediũ ponitur, erit & parallelogrãmũ EG medium: & ad rationalem EF applicatum est. rationalis igitur est HE, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, ipsiq; EF incommensurabilis longitudine, & quoniam compositum ex quadratis ipsarũ AC CB incõmensurabile est ei, quod bis AC CB cõtinetur, erit & parallelogrãmũ EG ipsi HK incõmensurabile. ergo & recta linea EH est incõmensurabilis rectæ HN. & sũt rõnales. quare EH HN rõnales sunt potẽtia solũ cõmensurabiles 4. secundi. 23. huius.

biles. & ob id EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. similiter ostendemus ipsam EN in puncto quoq; M diuidi: & non est FH eadem quę MN. ergo quæ ex binis nominibus ad aliud, atq; aliud punctum diuiditur, quod est absurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atq; aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

Ex 43. huius.

DIFFINITIONES SECVNDÆ.

1 Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2 Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3 Quòd si neutrum ipsorum nominũ sit longitudine cõmensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4 Rursus si maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, siquidẽ maius nomen expositæ rationali sit comensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5 Si vero minus, dicatur quinta.

6 Quòd si neutrum, dicatur sexta.

SCHOLIVM

Cum igitur sex rectæ lineæ ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas vero tres reliquas, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, propterea quòd commensurabile antecedit incõmensurabile, & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commensurabili est expositæ rationali; secundam, in qua minus nomen, quoniam rursus maius antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam vero in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

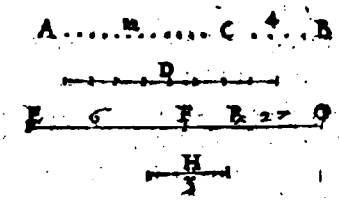
PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XXXXIX.

Inuenire ex binis nominibus primam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis, videlicet AB ad ipsum quidẽ BC proportionẽ habeat, quã quadratus numerus ad quadratũ num erum;

A

numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum .n. numerum. & exponatur quædã rationalis D; & ipsi D lõgitudine cõmensurãbilis sit EF. ergo EF est rationalis. fiat autẽ vt BA numerus ad numerũ AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratum FG. sed BA ad AC proportionẽ habet, quã numerus ad numerum. ergo & quadratum ipsius EF ad quadratum FG proportionem habebit, quam numerus ad numerum. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG atq; est EF rationalis. ergo & rationalis FG. & quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum neq; quadratum ex EF ad quadratũ ex FG proportionẽ habebit, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine. & ob id EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles. ex binis igitur nominibus est EG. dico & primam esse. Quoniam enim est vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad id quod ex FG quadratum. maior autem est BA, quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H. quoniam igitur est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratũ ex EF ad quadratũ ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igitur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare EF ipsi H longitudine est commensurabilis. ideoq; EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. sunt autem EF FG rationales, & EF ipsi D longitudine est cõmensurabilis. ergo EG ex binis nominibus est prima.



D E F G H

F. C. COMMENTARIVS.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat.] *Inuenitur autem hi ex corollario primi lematis ante 30. huius.* A

Ergo EF est rationalis.] *Ex 6. diffinitione.* B

Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratum FG.] *Ex corollario 6. huius.* C

Commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG.] *Ex sexta huius.* D

Ergo & rationalis FG.] *Ex 6. diffinitione.* E

Ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine.] *Ex 9. huius.* F

Ex binis igitur nominibus est EG.] *Ex 37. huius.* G

Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H.] *Inuenietur quadratum ipsius H ex lemmate ante 15. huius.* H

Quare EF ipsi H longitudine est commensurabilis.] *Ex 9. huius.* K

Ergo EG ex binis nominibus est prima.] *Ex prima secundarum diffinitionum.* L

Sit AC numerus 12. CB 4. & EF 6. fiat igitur vt 16. ad 12. ita 36. ad alium, qui est 27. ergo 6. plus R. 27. est ex binis nominibus prima.

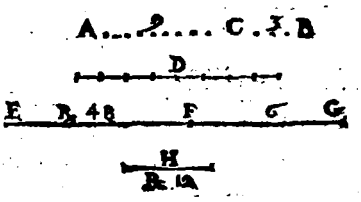
PROBLEMA XIV. PROPOSITIO. L.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad ipsum BC quidẽ proportionem habeat, quã numerus quadratus ad quadratũ numerũ: ad AC vero proportionẽ non habeat, quam numerus quadratus ad quadratũ

numerum: & exponatur rationalis D: & sit FG ipsi D longitudine commensurabilis. ergo FG rationalis est. Fiatq; vt CA numerus ad numerum AB, ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE. commensurabile igitur est quadratum ex GF quadrato ex FE. ergo & EF est rationalis. & quoniam CA numerus ad ipsum AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neq; quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionem habebit, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est GF ipsi FE longitudine. quare EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea ex binis nominibus est EG. Ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim conuertendo est vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG: maior autem est BA, quàm AC. ergo & quadratū ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. est igitur per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex EF ad quadratū ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id EF ipsi H longitudine est commensurabilis. quare EF plus potest, quam FG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabiles longitudine. suntque rationales EF FG potentia solum commensurabiles: & FG minus nomen longitudine cōmēsurabile est ipsi D expositæ rōnali. ergo EG ex binis nominibus est secūda.

6.diffi. Corol.6.huius, 6.huius. 6.diffi. 9.huius. 9.huius. 2.diffi.secundarum



F. C. COMMENTARIVS.

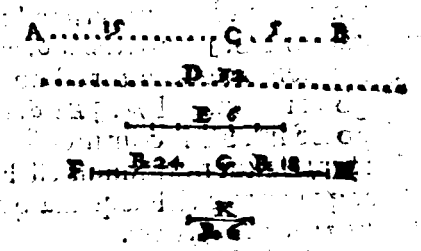
Sit AC 9 CB 3. & FG 6. fiat autem vt 9 ad 12, ita 36 ad alium erit ad 48. quare 48 plus. 6 est ex binis nominibus secunda.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Exponātur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad AC vero proportionem nō habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumq; ipsorum BA AC proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. deniq; exponatur rōnalis quædam recta linea E; fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. quadratum igitur ex E quadrato ex FG est cōmensurabile, rōnalis autem est E. ergo & FG est rōnalis, & quoniam D ad AB proportionē non habet, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, neq; quadratum ex E ad quadratū ex FG proportionē habebit, quā quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi FG longitudine. Rursus fiat vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. ergo quadratū ex FG quadrato ex GH est commensurabile: rationalis aūt est FG. quare, & GH est rōnalis, & quoniā BA ad AC proportionē non habet, quā quadratus numerus ad quadratū numerū, neq; quadratū ex FG ad quadratum

Corol.6.huius. 6.huius. diffi.6. 9.huius. 6.huius.



tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incõmensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus est. Dico & tertiam esse. Quoniam. n. est vt D numerus ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG; vt autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratũ ex GH: erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine. Et quoniam vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuersionem igitur rationis est vt AB ad BC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. sed AB ad BC proportionem habet, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratũ ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & ob id FG plus potest, quàm GH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmẽsurabilis. sunt q; FG GH, rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. ergo FH ex binis nominibus est tertia.

9.huius. 9.huius. 9.huius. 3 diffi.secundarum.

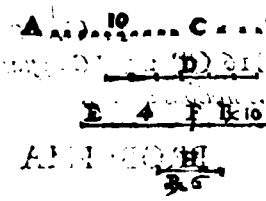
F. C. COMMENTARIVS.

Sit numerus AC 15, CB 5; & D 30. rationalis autem E sit 6, fiatq; vt 30 ad 20, ita 36 ad aliũ erit ad 24. rursus fiat vt 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc est ad 18. ergo R 24 plus R 18 est ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

Exponãtur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionẽ non habeat, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. exponaturq; rationalis D: & ipsi D cõmẽsurabilis sit EF longitudine. ergo EF est rationalis. fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG: ideoq; recta linea FG est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipsi FG longitudine incommensurabilis. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id EG ex binis nominibus est. Dico eam & quartam esse. Quoniam. n. est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; maior autem est BA, quàm AC: erit quadratũ ex EF quadrato ex FC maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo FF ipsi H longitudine est incommensurabilis, ac propterea EF plus potest, quã FG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sunt q; EF FG rationales potentia solum commensurabiles; & EF ipsi D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quarta.



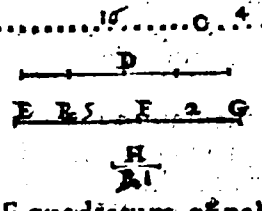
diffi.6. 6.huius. 9.huius. 37.huius. 9.huius. 4.diffi.secundarum

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC numerus 10, CB 6, rationalis autem D sit 6, & EF 4; fiatq; vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10, erit 4 plus R 10 ex binis nominibus quarta.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIO LIII.

Inuenire ex binis nominibus quintam.



Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionē non habeat, quam numerus quadratus ad quadratū numerum. exponaturq; recta linea quædam rationalis D; & ipsi D longitudine commensurabilis sit FG. ergo FG est rationalis: & fiat vt 6.diffi. CA ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod fit ex FE quadratum. rōnalis igitur est FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem non habet, quā numerus quadratus ad quadratum numerum; neq; quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF FG rōnales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id 37 huius. 5.diffi.secun datum EG ex binis nominibus est: itaq; dico & quintam esse. Quoniam n. est vt CA ad AB, ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æuqalia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quā quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo neq; quadratum ex EF ad quadratum ex H propottionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea EF ipsi H longitudine est incommensurabilis. quare EF plus potest, quàm FG, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sunt igitur EF FG rationales potentia solum commensurabiles. & FG minus nomen expositæ rationali D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quinta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20, ita 4 ad alium, videlicet ad 5, erit R 5 plus 2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIII.

Inuenire ex binis nominibus sextam.

Exponātur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumq; ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratū numerum. sit etiam alius numerus D nō quadratus qui ad vtrumq; ipsorum BA AC proportionem non habeat, quā numerus quadratus ad quadratum numerū. & exponatur rationalis quædam recta linea E. fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratū ex FG cōmensurabilis igitur est E ipsi FG potētia, atq; est rōnalis, quare & rationalis est FG. Et quoniam D ad AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neq; quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi FG lōgitudine est incommēsurabilis. itaq; rursus fiat vt BA ad AC, sic quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH est cōmensurabile. rationale autem est quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH est rōnale: ob idq; recta linea GH est rōnalis. Et quoniam BA ad AC proportionem nō habet,

bet,

bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neq; quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & ideo FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nominibus est FH. ostendendum est & sextam esse. Quoniam enim vt D ad AB, ita est quadratum ex E ad quadratum ex EG; est autem & vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH: ex æquali vt D ad AC, ita quadratũ ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo neq; quadratum ex E ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi GH longitudine. ostensum autem est & ipsi FG incommensurabilem esse. quare vtraq; ipsarum FG GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam est vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratũ ex FG quadrato ex GH maius. sit quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K ergo per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita est quadratum ex FG ad quadratum ex K. Sed AB ad BC proportionem nõ habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neq; ioitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipsi K longitudine est incommensurabilis. ergo FG plus potest quam GH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; FG GH rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E. quare FH ex binis nominibus est sexta.

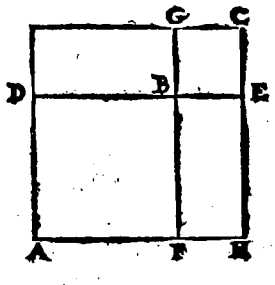
9. huius.
37. huius.
9. huius.
6. diff. secundarum

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 10. CB 6. & D 20. rationalis autem E sit 5. & fiat vt 20. ad 16. ita 25. ad alium, nempe ad 20. rursus fiat vt 16. ad 10. ita 20. ad alium, erit ad 12 1/2. ergo R 20. plus R 12 1/2. est ex binis nominibus sexta.

LEMMA.

Sint duo quadrata AB BC, & ponãtur ita, vt DB sit in directum ipsi BE. ergo & EB ipsi BG in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. dico AC quadratum esse, & quadratorũ AB BC rectangulum DG medium esse proportionale, itemque ipsorum AC CB medium proportionale esse DC.



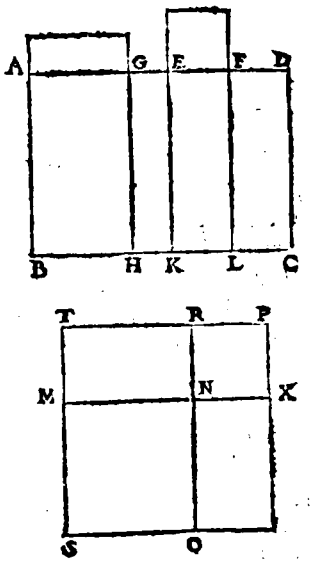
Quoniam enim DB quidem est æqualis BF, EB vero ipsi BG; erit tota DE toti FG æqualis. sed DE æqualis est vtriq; ipsarum AK HC. ergo & vtraq; AH KC vtriq; AK HC est æqualis. æquilaterum igitur, est AC parallelogrãmum: est autem & rectangulum. ergo quadratum est AC. & quoniam est vt FB ad BG, ita DB ad BE: vt autem FB ad BG, ita AB ad DG: & vt DB ad BE, ita DG ad BC. vt igitur AB DG, ita est DG ad BC: ideoq; ipsorũ AB BC mediũ proportionale est DG. dico præterea ipsorũ AC CB medium proportionale esse DC. nã cũ sit vt AD ad DK, ita KG ad GC. est n. vtraq; vtriq; æqualis: & cõponẽdo erit vt AK ad KD, ita KC ad CG. sed vt AK ad KD, ita KD AC ad CD: & vt KC ad CG, ita DC ad CB. & vt igitur AC ad CD, ita est DC ad CB. ac propterea ipsorũ AC CB mediũ proportionale est CD. Quod ostendendũ proponebatur.

34. primi
1. sexti.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. LV.

Si spacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima,

recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.



Spacium .n. ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium AC irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur quoniã enim AD ex binis nominibus prima, diuidatur in nomina ad punctũ E; & ſit AE maius nomen, manifeſtum eſt AE ED rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles, & AE plus poſſe, quàm ED quadrato rectę lineę ſibi commenſurabilis longitudine: & præterea AE expoſitæ rationali AB longitudine commenſurabilem eſſe. Secetur ED bifariam in F. quoniã igitur AE plus poteſt quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi commẽſurabilis longitudine, ſi quartæ parti quadrati, quod fit à minori, hoc eſt quadrato ex EF æquale qarallelogrammum ad maiorem AE applicetur, deficiens figura quadrata, in partes cõmenſurabiles ipſam diuidet. itaq; applicetur, & ſit AGE. ergo AG ipſi GE longitudine eſt commenſurabilis. deinde per puncta G E F alterutri ipſarum AB DC parallelæ ducantur GH EK FL: & parallelogrammo quidẽ AH æquale quadratum conſtituatur SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP; & ponatur ita, vt MN ſit in directũ ipſi NX. ergo RN ipſi NO in directũ erit: & parallelogrammum SP compleatur. quadratũ igitur eſt SP. & quoniã rectangulum AGE eſt æquale quadrato ex EF, erit vt AG ad EF, ita FE ad EG. quare & vt AH ad EL, ita eſt EL ad KG: ac propterea parallelogrãmorũ AH KG medium proportionale eſt EL. ſed parallelogrammo AH æquale eſt quadratum SN, & parallelogrammo GK æquale quadratũ NP. ergo quadratorũ SN NP mediũ proportionale eſt EL. ſed & eorumdem SN NP mediũ proportionale eſt & MR. æquale igitur eſt MR ipſi EL. ſed MR eſt æquale OX, & EL ipſi FG. ergo totum EC ipſis MR OX eſt æquale. ſunt autem & AH GK æqualia ipſis SN NP. totũ igitur AC eſt æquale toti SP, hoc eſt quadrato ex MX; ideoq; ipſa MX poteſt parallelogrammum AC. dico MX ex binis nominibus eſſe quoniam .n. AG commenſurabilis eſt ipſi GE erit AE vtriq; ipſarũ AG GE commenſurabilis; ponitur autem & AE commenſurabilis ipſi AB lõgitudine. ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles; ſunt; atq; eſt AB rationalis. rationalis igitur & vtraq; ipſarum AG GE: & ob id rationale vtrumq; ipſorum AH GK: & AH ipſi GK eſt commenſurabile. ſed AH eſt æqualis ipſi SN, & GH ipſi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia ſunt, & commenſurabilia. & quoniam incommẽſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine, & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi EF: erit & AG ipſi FF lõgitudine incommenſurabilis. ergo & AH eſt incõmenſurabile ipſi EL. ſed AH eſt æquale SN, & EL ipſi MR. quare SN eſt incommenſurabile ipſi MR: vt autem SN ad MR, ita ON ad NR. incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR: eſt autem ON æqualis MN, & NR ipſi NX. ergo MN ipſi NX eſt incommenſurabilis. atq; eſt quadratum ex MN cõmẽſurabile quadrato ex NX. & vtrũq; rationale. quare MN NX rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ideoq; MX ex binis nominibus eſt, & poteſt parallelogrammum AC. Quod demonſtrare oportebat.

1. ſecundarum diffin.

A
B

14. ſecundi

Ex antecedente lemmate.

C

1. ſexti.

43. primi.

D
E
F
G
K
L
M
N

37. huius.

FACILE COMMENTARIVS.

A In partes cõmenſurabiles ipſam diuidet.] *Ex 2. parte 18. huius.*

Itaque

Itaque applicetur, & sit AGE] *Ex 3. lemmate ante 18 huius.* B
Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] *Ex 14. sexti.* C
Erit AE vtriq; ipsarum AG GE commensurabilis] *Ex 16. huius.* D
Ergo & AG GE ipsi AP commensurabiles sunt] *Ex 12. huius.* E
Et ob id rationale vtrumq; ipsorum AH GK] *Ex 20. huius.* F
Et AH ipsi GK est commensurabile] *Est enim ex 1. sexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogramum GK. ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipsi GK est commensurabile.* G
Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine] *Ponitur enim AD esse ex binis nominibus prima, quæ constat ex duabus rationalibus potentia solum commensurabilibus.* H
Erit & AG ipsi EF longitudine incommensurabilis] *Ex ijs, quę ad 14 huius demõstrauimus.* K
Ergo & AH est incommensurabile ipsi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipsum EL. quare ex 10. huius propositum concludetur.* L
Incommensurabilis igitur est ON ipsi NR] *Ex 10. huius. vt dictum iam est.* M
Atq; est quadratum ex MN commensurabile quadrato ex NX, & vtrumq; rationale.] *Hoc enim supra demonstratum est.* N

Sit AB 5, & AD 4 plus R 12. *erit EF, vel FD* R 3. *& si ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonstratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammũ AH est 15, GK 5, & EL vel FC* R 75: *ideoque totum AC parallelogrammum erit 20 plus* R 300. *Huiusmodi vero spacia iuniores etiam binomialia, seu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex ijs, quæ tradita sunt, facile inuenire licebit in hunc modum.*

Binomialis spacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

Sit Binomiale spacium 20 plus R 300. *cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur maius nomen, videlicet 20. in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit æquale quartæ parti quadrati minoris nominis, hoc est æquale 75. erit ex ijs, quæ nos tradidimus ad 18 huius. maior pars 15, & minor 4. dico* R 15. *plus* R 5 *esse latus quadratum eius spacij 20. plus* R 300. *Quoniam enim recta linea, quæ ex binis nominibus constat, videlicet* R 13. *plus* R 5, *diuiditur in duas partes, erit quadratum totius æquale quadratis partium vnà cum rectangulo, quod bis dictis partibus continetur. itaq; quadratum* R 15 *est* 15; *& quadratum* R 5 *est* 5: *rectangulum autem, quod continetur* R 15 *&* R 5. *est* R 75, *& eius duplum est* R 300. *quæ omnia si componantur facient 20 plus* R 300, *& idem erit quadratum, quod fit ex recta linea* R 15 *plus* R 5. *ergo* R. 15. *plus* R 5 *est latus quadratum, vel radix huius spacij binomialis 20. plus* R 300. *Eodem modo & aliorum paciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.*

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

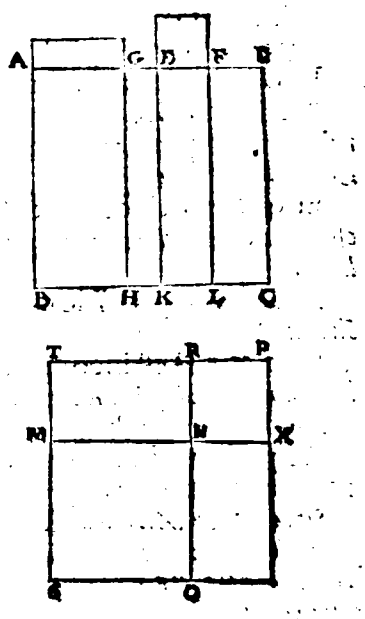
Si spacium contineatur rationali, & ex binis nomiuibus secũda recta linea spacium potens irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AC põt, ex binis medijs primã esse. Quoniam.n. AD est ex binis nominibus secunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. ergo AE Ed rõnales sunt potentia solũ cõmensurabiles; & AE plus potest q̃ ED quadrato rectæ lineae sibi longitudine cõmensurabilis: & minus nomen ED cõmẽsurabile est ipsi AB longitudine. secetur ED bifariam in F; & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad rectã lineã AE applicetur, deficiens figura quadrata, q̃ sit AGE. cõmensurabilis igitur est AG ipsi GE longitudine, & per pũcta GEF ipsis AB DC parallelæ ducãtur GH EK FL. parallelogrãmo aũt AH æquale quadratũ SN cõstituatur & parallelogrãmo GK æquale quadratũ NP, & ponatur ita vt MN sit i directũ ipsi

s. diffi. secundarum.

18. huius.

ipſi NX. ergo & RN ipſi NO in directum erit, & compleatur SP quadratum. manifeſtum iã eſt ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, parallelogrammũ MR medium eſſe proportionale quadratorum SN NP: & parallelogrammo EL æquale. & præterea rectam lineam MX poſſe ſpacium AC. oſtendendum igitur eſt ipſam MX ex binis medijs primam eſſe. Quoniam. n. incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine, commenſurabilis autẽ ED ipſi AB; erit AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis. Et quoniam AG commenſurabilis eſt longitudine ipſi GE, erit AE vtriq; ipſarum AG GE longitudine commenſurabilis. atq; eſt AE rõnalis. rõnalis igitur, & vtraque AG GE. Quòd cũ AE ſit incommenſurabilis quidem ipſi AB longitudine, commenſurabilis autem vtriq; ipſarum AG GE. erunt AG GE ipſi AB longitudine incommenſurabiles. Quare BA, AG, GE rõnales ſunt potentia ſolũ commenſurabiles. medium igitur eſt vtrumq; parallelogrammorum AH GK. & ob id vtrumque quadratorum SN NP eſt medium. ergo rectæ lineæ MN NX mediæ ſunt. rurſus quoniam commenſurabilis eſt AG ipſi GE longitudine, erit parallelogrammum AH parallelogrammo GK commenſurabile, hoc eſt quadratum SN ipſi NP, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia commenſurabiles ſunt. & quoniam incommẽſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine: & AE quidẽ eſt commenſurabilis ipſi AG ED vero ipſi EF: erit AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis. quare & parallelogrammũ AH in commenſurabile parallelogrammo EL, hoc eſt SN ipſi MR, hoc eſt ON ipſi NR, hoc eſt MN ipſi NX incommenſurabilis eſt longitudine. oſtenſæ autem ſunt MN NX & mediæ, & potentia commenſurabiles. ergo MN NX mediæ ſunt, potentia ſolum commenſurabiles. Dico & rationale continere. Quoniam. n. DE ponitur commenſurabilis vtriq; ipſarum AB EF. erit FE ipſi EK longitudine commenſurabilis: atq; eſt rõnalis vtraq; ipſarum, rõnale igitur eſt parallelogrammum EL, hoc eſt MR. eſtq; MR, quod MN NX continetur. ſi autem duæ mediæ potentia ſolũ commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur. ergo MX ex binis medijs eſt prima. Quod demonſtrare oportebat.



In antecedẽ tis ſummate.

Ex demõſtratis in antecedente.

37. huius.

14. huius.

16. huius.

6. diffi.

14. huius.

22. huius.

Ex demõſtratis ad 14. huius.

2. huius.

20. huius.

38. huiusl

F. C. COMMENTARIVS.

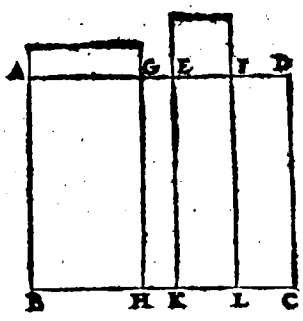
Sit AB 6, AD R 12 plus 3. erit EF vel FD 1 1/2: & ſi ad AE applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata; erit AG R 6 3/4 CE R 3/4. parallelogrammum igitur AH eſt R 243, GK R 27, & EL 9: & totum AC parallelogrammum R 432 plus 18. vt autem inueniatur eius radix, dimidemus R 432 in binas partes, ita, vt quod ex ipſis producitur ſit æquale quartæ parti quadrati 18, hoc eſt æquale 81. erit ex iam dictis maior pars R 108 plus R 27; quæ duæ radices ſi inter ſe componantur facient R 243. minor autem pars erit R 108 minus R 27. & detracta R 27 à R 108 relinquitur R 27. maior igitur pars eſt R 243, & minor R 27. quare ſpacij binomialis R 432 plus 18 radix erit RR 243 plus RR 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. LVII.

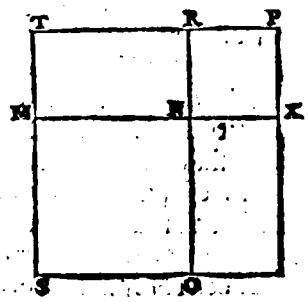
Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia recta linea, ſpacium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis medijs ſecunda.

Spacium

Spacium .n. ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius sit AE. dico rectam lineam, quę potest spaciũ AC irrationalem esse, quæ ex binis medijs secunda appellatur. construantur enim eadem, quæ supra & quoniam AD ex binis nominibus tertia est erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles, & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine: neutraq; ipsarum AE, ED ipsi AB longitudine erit commensurabilis. similiter ostendemus MX eam esse, quæ spacium AC potest, & MN NX ex binis esse medijs. itaq; ostendendum est, & secundam esse. Quoniam enim DE incommensurabilis est lõgitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; atq; est DE commensurabilis EF: erit EF ipsi EK longitudine incommensurabilis. & sunt rationales. ergo FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EL, hoc est MR medium est, quod MN NX continetur. quare MX ex binis medijs est secũda.



diffi. 3. secũdarum.



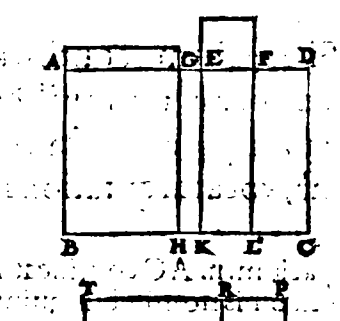
F. C. COMMENTARIVS.

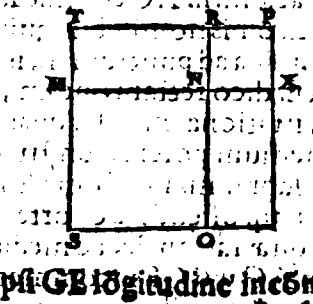
Sit AB 6. AD R 18. plus R 10. erit EF R 2 $\frac{1}{2}$. & si ad AE applicetur parallelogrammum AGF æquale quadrato ipsius EF. deficiens figura quadrata, erit e AG R 12 $\frac{1}{2}$ GE $\frac{1}{2}$. quare parallelogrammum AH est R 450. GK R 18. & EL R 90. & totum parallelogrammum AC est 648. plus R 360. diuidatur R 648 in duas partes, ita vt quod ipsis continetur sit æquale quartæ parti quadrati R 360. hoc est 90. erit maior pars R 450. & minor R 18. spacij igitur binomialis R 648. plus R. 360. radix est R R 450. plus R R. 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, tecta linea spacium potes irrationalis est quæ vocatur maior.

Spacium .n. AC contineatur rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuisa in nomina ad punctum E, quorum AE sit maius. dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, irrationalem esse, quæ maior appellatur. Quoniam .n. AD ex binis nominibus est quarta, erũt AE, ED rationales potentia solum commensurabiles: & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & AE ipsi AB commensurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariã in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrãmũ ad AE applicetur deficiens figura quadrata, & sit AGE. erit igitur AG ipsi GE lõgitudine incõmensurabilis

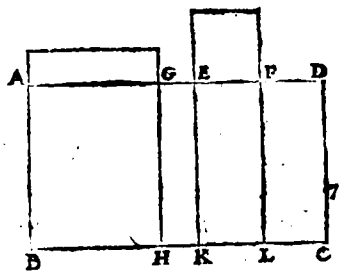


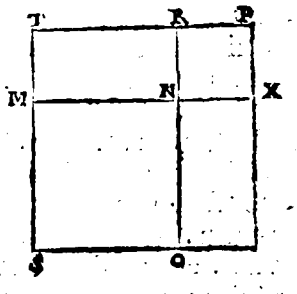


diffi. 4. secũdarum.

29. huius.

ſurabilis ducantur ipſi AB parallelæ GH EK FL. & eadem fiant, quæ ſupra. conſtat igitur MX poſſe ſpacium AC. itaq; oſtendendū eſt MX irrationalem eſſe, quæ vocatur maior. Quoniam enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt longitudine, erit & AH parallelogrāmum ipſi GK incommēſurabile, hoc eſt SN ipſi NP. ergo MN NX potentia incommenſurabiles. ſunt. & quoniam AE ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammū AK rationale eſt atq; eſt æquale quadratis ipſarum MN NX. ergo compoſitum ex quadratis MN NX eſt rationale, quòd cum DE ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; ſit autem commenſurabilis ipſi EF: erit EF ipſi EK incommenſurabilis longitudine. quare KE EF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id medium eſt parallelogrammum EL, hoc eſt MR, & MN NX continetur: eſtq; compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX rationale. & MN ipſi NX potentia incommenſurabilis. ſi autem duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium; tota irrationalis erit. vocetur autem maior. ergo MX irrationalis eſt, quæ maior appellatur, & poteſt ſpacium AC. Quod demonſtrare oportebat.





20. huius.

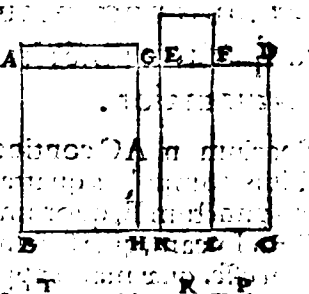
40. huius.

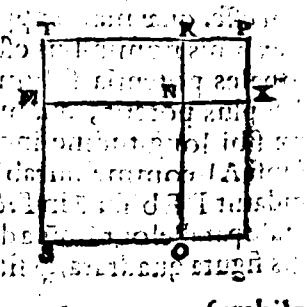
E. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6. AD 6. plus R 24. erit EF R 6. ſi autem ad AE applicetur parallelogrammum AGE æquale quadrato ipſius EF. & deficies figura quadrata, erit AG 3. plus R 3. & GE 3. minus R 3. ergo AH parallelogrāmū eſt 18. plus R 108. GK 18. minus R 108. & EL vel FC R 216. totumq; parallelogramm ū AC. 36. plus R 864. itaq; ſi diuidamus 36. in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit æquale 216. erit maior pars 18. plus R 108. & minor 18. minus R 108. quare ſpacij binomialis 36. plus R 864. radix eſt R V. 18. plus R 108 plus. R V. 18. minus R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt, vocaturq; rationale, & medium potens.





Spacium enim AC contineatur rationali AB, & AD ex binis nominibus quinta, quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt maius nomen ſit AE. dico rectam lineam, quę poteſt ſpaciū AC, irrationalem eſſe, quæ vocatur rationale, ac medium potens. conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. manifeſtum eſt MX poſſe ſpacium AC. itaq; oſtendere oportet MX irrationalem eſſe, quæ rationale, ac medium poteſt. quoniā enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt longitudine, & parallelogrammum AH eſt incom-

19. huius.

menſurabile

mensurabile parallelogrammo HE, hoc est quadratum ex MN quadrato ex N X. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt. Quòd cùm AD sit ex binis nominibus quinta; sitq; minor ipsius portio ED; erit ED ipsi AB commensurabilis longitudine sed AE ipsi ED est incommensurabilis. ergo & AB incōmensurabilis est longitudine ipsi AE; ac propterea BA AE rationales sunt potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositū ex quadratis ipsarum MN NX. & quoniam DE commensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK, estq; DE commensurabilis ipsi EF; erit & FE ipsi EK cōmensurabilis. rationalis autem est EK. ergo & FE est rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc est MR, hoc est quòd MN NX continetur, quare MN NX potentia incōmensurabiles sunt facientes cōpositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quòd autem ipsis continetur, rationale. ergo MX potēs est rationale ac medium, & potest spacium AC. quod demōstrare oportebat.

ni. 5 secundarum.

22. huius.

11. huius.

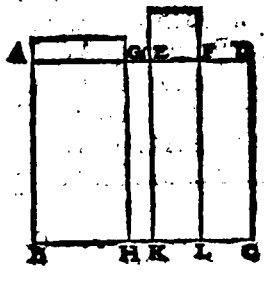
20. huius.

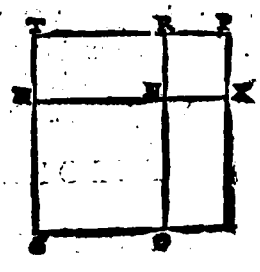
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6. *AD* R 24. *plus* 4. *erit EF* 2. *applicetur ad AE parallelogrammum AGE equale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata; erit AG* R 6. *plus* R 2. *GE* R 6. *minus* R 2. *parallelogrammūq; AH* R 216. *plus* R 72. *GK* R 216. *minus* R 72. *EL* 12. *& totū AC parallelogrāmū* R 864. *plus* 24. *si igitur diuidamus* R 864. *in duas partes, vt id quod ex ipsis producitur, sit æquale* 144. *erit maior pars* R 216. *plus* R 72. *et minor* R 216. *minus* R 72. *quare spacij binomialis* R 864. *plus* 24. *radix est* R *V*. R 216. *plus* R 72. *plus* R *V*. R 216. *minus* R 72.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO LX.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus sexta, quæ spacium potest recta linea irrationalis est: vocaturq; bina media potens.





22. huius.

A

B

C

D

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD; quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. dico rectam lineam, quæ potest spacium AC, irrationalem esse quæ vocatur bina media potens. construātur .n. eadem, quę supra manifestum est MX posse spacium AC: & MN ipsi NX potentia incommensurabilem esse. & quoniam EA ipsi AB incōmensurabilis est longitudine, erūt EA AB rationales potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK. hoc est compositum ex quadratis ipsarum MN NX. rursus quoniam incommensurabilis est ED ipsi AB longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis. ergo & FE EK rationales sunt potentia solū commensurabiles; ac propterea medium est EL, hoc est MR hoc est quod MN NX continetur. Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF, & parallelogrammum AK parallelogrāmo EL incommensurabile erit. Sed AK quidem est compositum ex quadratis ipsarum MN NX EL vero est quod MN, NX ei, quod MN NX continetur. incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN NX continetur, atq; est vtrumq; ipsorum medium; & MN NX potentia sunt incōmensurabiles. ergo MX est bina media potens, & potest spacium AC. Quod demonstrare oportebat.

F. C.

X. COMMENTARIVS.

A Rursus quoniam incommensurabilis est ED ipsi ab longitudine erit, & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis) *Quoniam enim ED ipsi AB incommensurabilis est longitudine; atque est FE commensurabilis ED; erit ex 13. huius etiam FE ipsi AB, hoc est ipsi EK longitudine incommensurabilis.*

B Quod cum AE sit incommensurabilis ipsi EF.) *Ex 13 huius. est enim AE ipsi ED incommensurabilis, & EF commensurabilis ipsi ED.*

C Et MN NX potentia sunt incommensurabiles) *Nam cum AG sit incommensurabilis ipsi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc est quadratum ex MN quadrato ex NX incommensurabile. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt.*

C Ergo MK est bina media potens) *Ex 42 huius.*

D *Sit AB 5, AD ℞ 10 plus ℞ 8. erit EF ℞ 2. sitigitur ad AE applicetur parallelogrammum AG E, æquale quadrato ipsius EF, quod deficiat figura quadrata, erit AG ℞ 2 ½ plus ℞ ½, GE ℞ 2 ½ minus ℞ ½, & parallelogrammum AH ℞ 62 ½ plus ℞ 12 ½, GK ℞ 62 ½ minus ℞ 12 ½, & EL ℞ 50: totumq; AC parallelogrammum ℞ 250 plus ℞ 200. diuidatur ℞ 250 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit æquale 50; erit maior pars ℞ 62 ½ plus ℞ 12 ½, & minor ℞ 62 ½ minus ℞ 12 ½. Eius igitur spacij binomialis ℞ 250 plus ℞ 200 radix est V. ℞ 62 ½ plus ℞ 12 ½ plus ℞ 62 ½ minus ℞ 12 ½.*

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.

Sit recta linea AB, & secetur in puncto C, ita vt AC sit maior, quàm CB. Dico quadrata ex AC CB maiora esse rectangulo, ꝙ bis AC CB continetur. secetur. n. AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidē æquales secatur ad D, in partes vero inæquales ad C; rectangulum ꝙ AC CB continetur vnà cum quadrato ipsius CD est æquale ei, ꝙ fit ex AD quadrato, ergo rectangulū ACB quadrato ex AD est minus. ꝙ igitur bis continetur AC CB minus est quàm duplum quadrati ex AD. sed quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, ꝙ bis AC CB cōtinetur. Quod demōstrare oportebat.

A D C B

5. secundi.

*

X. COMMENTARIVS.

* Ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur) *quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC erunt quadrata ex AC CB maiora, quam dupla quadrati ex AD. sed quod bis continetur AC CB minus est, quam duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur.*

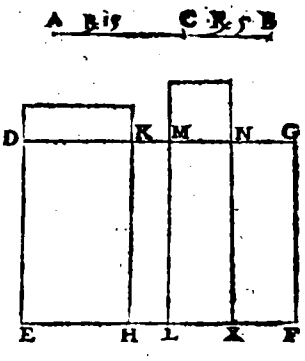
THEOREMA XLIII. PROPOS. LXI.

Quadratum eius, quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominib. AB, diuisa in nomina ad punctū C, ita vt AC sit maius nomen: exponatur q; rōnalis DE; & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsa rectā DE applicetur parallelogrammū DEFG, latitudinem faciens DG. dico DG ex binis nominibus primā esse. Applicetur n. ad rationalem DE quadrato quidē ipsius AC æquale parallelogrammū DH; quadrato aūt ipsius BC æquale KL

reliquum

reliquum igitur, quod bis AC CB cõtinetur eſt æquale parallelogrammo MF. ſecetur MG bifariam in N: & alterutri ipſarum ML GF parallela ducatur NX. vtrumq; igitur parallelogrammorum MX NF eſt æquale ei, quod ſemel AC CB continetur. Et quoniã ex binis nominibus eſt AB, diuiſa in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales potentia ſolum commenſurabiles. ergo quadrata ex AC CB rationalia sũt & commenſurabilia inter ſe ſe: & ob id compoſitum ex quadratis ipſarum AC CB commenſurabile eſt earumdem AC CB quadratis. rationale igitur eſt cõpoſitum ex quadratis AC CB, atq; eſt æquale parallelogrãmo DL. ergo & DL eſt rationale, & ad rationalem DE applicatum eſt. rationalis igitur eſt DM, & ipſi DE commenſurabilis longitudine. Rurſus quoniam AC CB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, medium eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt MF, & ad rationalem ML applicatum eſt rationalis igitur eſt MG, & ipſi ML hoc eſt ipſi ED longitudine incommenſurabilis. eſt autem & MD rationalis, & ipſi DE commenſurabilis longitudine Ergo DM ipſi MG longitudine eſt incommenſurabilis. ſuntq; rationales. ergo DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, ac propterea DG eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & primam eſſe. Quoniam n. quadratorum ex AC CB medium proportionale eſt, quod AC CB continetur; erit etiã parallelogrãmorum DH KL medium proportionale MX. eſt igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc eſt vt recta linea DK ad MN, ita MN ad MK ergo rectãgulum DKM quadrato ex MN eſt æquale. Et quoniam quadratum ex AC cõmẽſurabile eſt quadrato ex CB, erit & parallelogrãmum DH parallelogrammo KL cõmenſurabile. ergo & DK ipſi KM lõgitudine eſt cõmenſurabilis. & cum quadrata ex AC CB maiora ſint eo, & bis AC CB cõtinetur; erit & parallelogrãmũ DL maius parallelogrãmo MF: ideoq; recta linea DM ipſa MG eſt maior. atq; eſt rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc eſt quartæ parti quadrati ex MG: & DK ipſi KM longitudine eſt commẽſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes commenſurabiles ipſam diuidat, maior plus poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſuntq; rationales DM MG, & DM, quæ eſt maius nomen expoſitę rationali DE longitudine eſt commenſurabilis. ergo DG eſt ex binis nominibus prima. Quod demonſtrare oportebat.



4. ſecundi.
37. huius.
16. huius. 6. diffi.
23. huius.
13. huius.
Ex lemmate ad 55. huius 1. ſexti. 17 ſexti.
1. ſexi. 10. huius. Ex anteced. 1. ſexti. 14 quinti.
19. huius.
1. diffi. ſecundarum

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R 15 plus R 5, & DE 5. erit DH 15 KL 5, & MX R 75, & NF R 75. quare ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK 3: & ſi applicetur KL faciet KM 1. Quod ſi ad eandẽ applicetur MX videlicet R 75 faciet latitudinem MN R 3 ex 2 theorematę eorum, quæ ad 20 huius cõſcripſimus. & ſimiliter NG erit R 3. ergo tota DG eſt 4 plus R 12, quæ eſt ex binis nominibus prima.

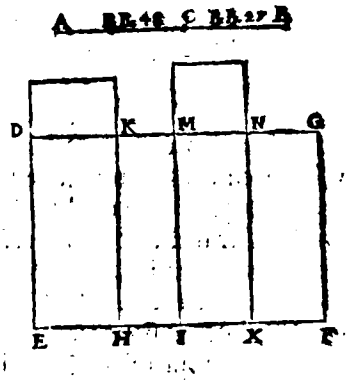
THEOREMA XLIV. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius quæ eſt ex binis mediis prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

Sit ex binis mediis prima AB, diuiſa in medias ad punctũ C, quarũ AC ſit maior: exponaturq; rationalis DE; & ad ipſam applicetur parallelogrãmũ æquale

quadrato ipſius AB, quod ſit DF, latitudinem faciens DG. dico DG ex binis nominibus ſecundam eſſe. Conſtruantur. n. eadem, quę ſupra. & quoniam AB ex binis medijs eſt prima, diuiſa ad punctum C, erunt AC CB mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rõnalem continent. quare & quę fiunt ex AC CB media ſunt; ideoq; DL eſt medium, quod ad rationalem applicatũ eſt. rationalis igitur eſt MD, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis Rurſus quoniam rationale eſt quod bis AC CB continetur, erit & MF rationale, & ad rationalem ML applicatum eſt. ergo & MG eſt rationalis; & ipſi ML, hoc eſt ipſi DE commenſurabilis longitudine. incommenſurabilis igitur eſt DM ipſi MG, & ſunt rõnales. quarę DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. Quoniam. n. quadrata ex AC CB maiora ſunt eo, quod bis AC CB cõtinetur, erit & DL parallelogrãmũ parallelogrãmo MF maius. ergo & recta linea DM maior eſt ipſa MG. Quod cum quadratum ex AC quadrato ex CB ſit commenſurabile, & DH parallelogrammum parallelogrammo KL commenſurabile erit. quare & DK commenſurabilis ipſi KM: atq; eſt quod DK KM continetur quadrato ipſius MN æquale. ergo DM plus poteſt, quàm MG quadrato rectę lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. eſtque MG commenſurabilis lõgitudine ipſi DE. quare DG ex binis nominibus eſt ſecunda.

38. huius.
23. huius.
21. huius.
13. huius.
37. huius.
Ex lemmate ad 16. huius.
1. ſexti.
14 quinta.
19. huius.
2. diffin. ſecundarum.



F. C. COMMENTARIVS.

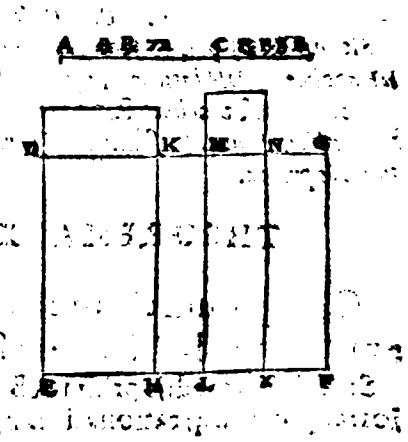
Sit AB a R 48 plus RR 27, *& DE 4: erit DH* R 48, *KL* R 27, *MX, & NF 6. ergo ſi ad DE applicetur DH, faciet DK* R 3 *ex 2 theoremate iam dicto, & eadem ratione ſi ad eandẽ applicetur KL, erit KM* R 1 $\frac{1}{1}\frac{3}{6}$ *& ſi applicetur MK vel NF, erit MN, vel NG 2.* $\frac{1}{2}$ *& quoniam Dk KM hoc eſt 3* R 3 $\frac{1}{1}\frac{3}{6}$ *longitudine commenſurabiles ſunt, ſi inter ſe componantur, erit ex tertio theoremate eorum, quæ nos ad 20 huius appoſuimus, DM* R 9 $\frac{1}{1}\frac{3}{6}$ *ergo tota DG eſt* R 9 $\frac{1}{1}\frac{3}{6}$ *plus 3 videlicet ex binis nominibus ſecunda.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO. LXVIII.

Quadratum eius, quæ eſt ex binis medijs ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

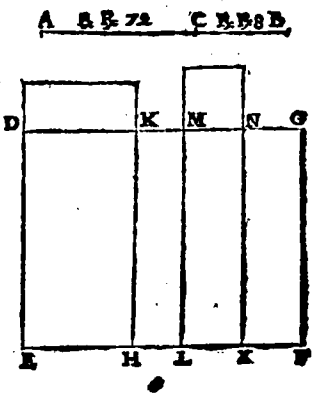
Sit ex binis medijs ſecunda AB, diuiſa in medias ad C, ita vt AC ſit maior portio. rõnalis autẽ ſit DE, & ad ipſam DE quadrato ex AB æquale parallelogrãmũ DF applicetur, latitudinem faciens DG. dico DG ex binis nominibus tertiam eſſe. Cõſtruantur. n. eadem, quę ſupra. & quoniã AB eſt ex binis medijs ſecunda, diuiſa ad pũctũ C, erunt AC CB mediæ potentia ſolum cõmenſurabiles, quæ mediũ continent. ergo & cõpoſitũ ex ipſarum AC CB quadratis mediũ eſt, & ipſi DL æquale. medium igitur eſt DL, & ad rõnalẽ DE applicatur. ergo rationalis eſt MD & ipſi DE longitudine incõmenſurabilis. Eadẽ rõne, & MG eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi ML, hoc eſt ipſi DE. vtraq; igitur ipſarũ

39 huius.
A
23. huius.



DM

DM MG rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est AC ipsi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommensurabile. ergo & compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; hoc est DL incommensurabile ipsi MF. & ob id recta linea DM ipsi MG est incommensurabilis: sunq; rationales. ergo DG est ex binis nominibus. ostendendum est, & tertiã esse. similiter enim concludemus DM ipsa MG maiorem esse, & DK ipsi KM commensurabilẽ. atq; est rectangulum DKM quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest, quàm MG, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; & neutra ipsarum DM MG est longitudine commensurabilis ipsi DE. quare DG est ex binis nominibus tertia.



1. sexti, vel ex lemma ad 23. huius B

1. sexti & 10 huius.

27. huius.

19. huius.

4 diffi. secundarum

F. C. COMMENTARIVS. A

Ergo & compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est.] *Ex duobus enim medijs cõmensurabilibus, si inter se componantur, vnum fit medium. vt in 45 huius diximus.* B

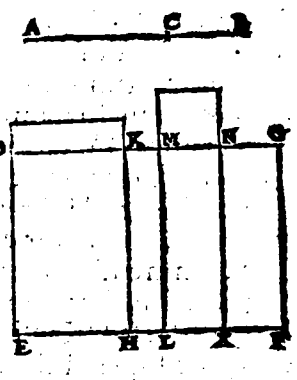
Ergo & compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.] *Nam cum quadrata ex AC CB commensurabilia sint, si inter se componantur, erit compositum commensurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectangulo ACB est incommensurabile, vt pote eius duplum. ergo ex ijs, quæ nos ad 14 huius demonstrauimus, compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur,*

Sit AB R 72 *plus* R 8, *& DE* 4 *erit DH* R 72, *KL* R 8, *MX, vel NF* R 24. *quare si ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK* R 4 $\frac{1}{2}$: *si vero applicetur KL faciet KM* R $\frac{1}{2}$. *& si MX, vel NF faciet MN, vel NG* R 1 $\frac{1}{2}$. *At si DK KM componantur, hoc est* R 4 $\frac{1}{2}$, *&* R $\frac{1}{2}$ *fiet DM* R 8 *tota igitur DG est* R 8 *plus* R 6, *quæ est ex binis nominibus tertia.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIV.

Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit maior AB diuisa in puncto C, ita vt AC maior sit quã CB. rationalis aũt quædam sit DE: & quadrato ex AB æquale ad ipsã DE applicetur parallelogrãmũ DF, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG ex binis nominibus quartam esse. Constituatur. n. eadem, quę supra. Et q*m* maior est AB, diuisa in C, erunt AC CB potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, q*p* aũt ipsis cõtinetur mediũ. itaq; quoniam rõnale est compositum ex quadratis ipsarum AC CB, erit & parallelogrammũ DL rationale. ergo & rationalis est recta linea DM, ipsiq; DG longitudine commensurabilis. Rursus q*m* medium est quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rõnalẽ ML est applicatum; erit & MG rõnalis, & ipsi DE incommensurabilis longitudine. ergo & DM ipsi MG lõgitudine incõmẽsurabilis est; ac propterea DM MG



40. huius.

21. huius.

23. huius.

37.huius. rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quare ex duobus nominib. eſt DG, oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter .n. ſuperioribus concludemus DM maiorem eſſe, quàm MG: & rectangulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incommenſurabile eſt quadrato ex CB, erit & DH parallelogrammum incommenſurabile parallelogrammo KL. & ob id recta linea DK ipſi KM incommenſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammū ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, quod in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior plus poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ergo DM plus poteſt, quā MG, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque DM MG rationales potentia ſolum commenſurabiles: atq; eſt DM commenſurabilis expoſitæ rationali DE. quare DG eſt ex binis nominibus quarta.

1.ſexti, & 10. huius.

19.huius.

4 diffi.ſecundarum

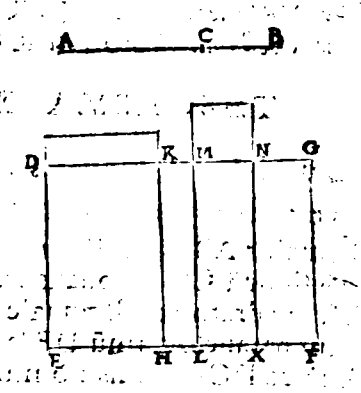
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. 10 plus R 37 ½ plus R V. 10 minus R 37 ½: & DE ſit 5. erit DH 10 plus R 37 ½: KL 10 minus R 37 ½: MX, vel NF R 62 ½. itaq; ſi ad DE applicetur DH latitudinē faciens DK, erit DK 2 plus R 1 ½; ſi vero applicetur KL faciens KM, erit ea 2 minus R 1 ½: & ſi applicetur MX, vel NF, erit MN vel NG R 2 ½. Quod ſi componantur DK KM, hoc eſt 2 plus R 1 ½, & 2 minus R 1 ½, fiet DM 4. ergo tota DG eſt 4 plus R 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

Sit rationale, ac medium potens AB, diuiſa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC ſit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipſius AB æquale parallelogrammum DF ad ipſam DE applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quintam eſſe. Conſtruātur .n. eadem, quę ſupra. Et quoniam rationale, ac medium potens eſt AB, diuiſa ad C punctum, erunt AC CB potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidē ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarū AC CB quadratis, erit & parallelogrammum DL, mediū: ideoq; recta linea DM rationalis eſt, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis Rurſus quoniam rationale eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt parallelogrammum MF, erit MG rationalis, & ipſi DE longitudine commenſurabilis: incommenſurabilis igitur eſt DM ipſi MG. quare DM MG rōnales ſunt potētia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demoſtrabitur, rectangulum DKM quadrato ex MN eſſe æquale; & DK ipſi KM longitudine eſſe incommenſurabilem. quare DM plus poteſt, quā MG quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſunt autem DM MG rationales, potentia ſolum commenſurabiles; & minor MG commenſurabilis eſt ipſi DE longitudine. ergo DG eſt ex binis nominibus quinta.



41. huius.

23. huius.

11. huius.

13. huius.

5. diffi. ſecundarum.

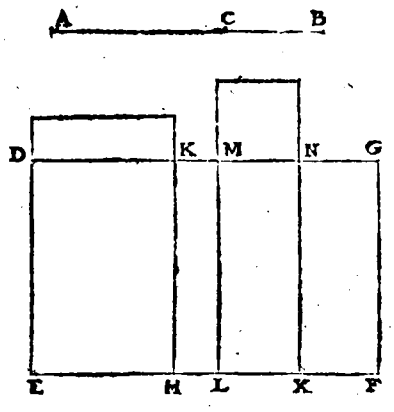
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB Ɍ V. R 125 plus 5, plus Ɍ V. Ɍ 125 minus 5, & DE sit 5. erit parallelogrãmũ DH Ɍ 125 plus 5, KL R 125 minus 5; MX vel NF 10: & si ad DE applicetur parallelogrammum DH latitudinem faciens DK, erit DK R 5 plus 1. si vero applicetur KL latitudinem faciens KM, erit KM R 5 minus 1. & si applicetur MX vel NF, erit MN, vel NG 2. quod si componantur DK KM videlicet Ɍ 5 plus 1, Ɍ 5 minus 1, fiet DM Ɍ 20. tota igitur DG est Ɍ 20 plus 4. nimirum ex binis nominibus quinta.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens AB, diuisa ad punctum C: rationalis autem sit DE: & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammũ DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus sextam esse. Construãtur. n. eadem quæ supra. Et quoniã bina media potens est AB diuisa ad C, erũt AC CB potentia incommensurabiles, faciẽtes & compositum ex ipsarum quadratis medium: & quod ipsis cõtinetur medium; & adhuc incommensurabile cõposito ex quadratis ipsarum. ergo ex iã demonstratis medium est vtrumq; parallelogrammorum DL MF: & ad rationalem DE applicata sunt. rationalis igitur est & vtraq; DM MG, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex ipsarum AC CB quadratis incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; erit & DL parallelogrammũ parallelogrammo MF incommensurabile: & idcirco DM incommensurabilis MG. quare DM MG rationales sunt potentia solum commẽ surabiles, & ex binis nominibus est DG. Dico & sextam esse: similiter. n. præ dictis rursus ostendemus rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale, & DK ipsi KM longitudine incommensurabilem esse. ergo DM plus potest, quàm MG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & neutra ipsarum DM MG longitudine commensurabilis est expositæ rationali DE. quare DG ex binis nominibus est sexta.



32. huius

23. huius.

19. huius.

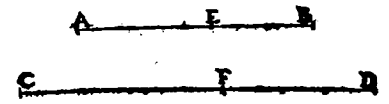
6. diffi. secundarum

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. R 252 plus R 72. plus R V. Ɍ 252 minus R 72: & DE sit 6. erit DH R 252 plus Ɍ 72: KL R 252 minus Ɍ 72 r MX, vel NF R 180. applicetur ad DE parallelogrammum DH latitudinem faciens DK. erit DK Ɍ 7 plus R 2. Rursus aplicetur KL faciens latitudinem KM. erit KM Ɍ 7 minus Ɍ 2. deniq; applicetur MX, vel NF. erit MN, vel NG R 5. Ergo tota DG est R 28. plus R 20. ex binis nominibus sexta.

THEOREMA XLIX. PROPOS. LXVII.

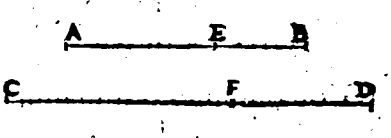
Ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.



Sit ex binis nominibus AB, & ipſi AB longitudine commenſurabilis ſit CD. Dico CD ex binis nominibus eſſe, & ordine eandem ipſi AB. quoniam. n. ex binis nominibus eſt AB, diuidatur in nomi-
11. ſexti. na ad punctum E, & ſit AE maius nomen. ergo AE EB rationales ſunt poten-
19. quinta. tia ſolum commenſurabiles. fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF: & reliqua igitur
10. huius. EB ad reliquam FD eſt, vt AB ad CD. commenſurabilis aũt eſt AB ipſi CD lon-
8 diffi. gitudine. ergo & AE ipſi CF, & EB ipſi FD longitudine eſt commenſurabilis.
10. huius. Suntq; rationales AE EB. rationales igitur ſunt & CF FD. & quoniã eſt vt AE ad CF, ita EB ad FD, erit permutando vt AE ad EB, ita CF ad FD; ſunt autẽ AE
15. huius. EB potentia ſolum commenſurabiles. ergo & CF FD potentia ſolum cõmenſurabiles erunt. & ſunt rationales. ex binis igitur nominibus eſt CD. dico & ipſi
12. huius. AB ordine eandẽ eſſe. vel enim AE plus poteſt, quàm EB quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. ſi quidem commẽſurabilis, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quòd ſi AE ſit commenſurabilis expoſitæ rationali, & CF eidem commenſurabilis erit. & ob id vtraq; ipſarum AB CD ex binis nominibus eſt prima; hoc eſt ordine eadem. Si vero EB ſit commenſurabilis expoſitæ
15. huius. rationali, & FD eidem erit commenſurabilis. ob eamque cauſſam CD ipſi AB ordine eadem eſt; vtraque enim eſt ex binis nominibus ſecunda. Quòd ſi neutra ipſarum AE EB ſit expoſitæ rationali commenſurabilis, & neutra CF FD eidem commenſurabilis erit, & eſt vtraq; tertia. At ſi AE plus poſſit, quàm EB quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & ſi AE ſit commenſurabilis expoſitæ rationali, & CF eidem commẽſurabilis erit, & eſt vtraq; quarta. Quod ſi EB, & ipſa FD, & eſt vtraq; quinta. ſi vero neutra ipſarum AE EB, & neutra GF FD expoſitæ rationali erit commenſurabilis, & eſt vtraq; ſexta. ergo ei, quæ eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, & ordine eadem.

THEOREMA L. PROPOSITIO LXVIII.

Ei quæ eſt ex binis medijs longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis medijs eſt, atque ordine eadem.



Sit ex binis medijs AB, & ipſi AB cõ-
18 huius. menſurabilis longitudine ſit CD. dico
21. ſexti. CD ex binis medijs eſſe, & ipſi AB or-
19. quinti. dine eandẽ. quoniam. n. AB ex binis
10. huius. medijs eſt, diuiſa in medias ad punctũ
24. huius. E, erunt AE EB mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Itaq; fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF. ergo & reliqua EB ad reliquam FD eſt vt AB ad CD cõmẽſurabilis aũt eſt AB ipſi CD longitudine. quare & AE ipſi CF longitudine cõmẽ-
* ſurabilis erit, & EB ipſi FD. ſuntq; mediæ AE EB. mediæ igitur & CF FD. Et quoniã eſt vt AE ad EB, ita CF ad FD, & ſunt AE EB cõmenſurabiles potẽtia ſolum; erunt & CF FD potentia ſolũ cõmẽſurabiles. oſtẽſæ aũt ſunt & mediæ. ergo CD eſt ex binis medijs. dico & ipſi AB ordine eandẽ eſſe. Quoniã. n. eſt vt AE ad EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratũ ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratũ ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex AE ad quadratũ ex CF, ita rectangulum AEB ad CFD rectangulum. commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectãgulũ AEB rectãgulo CFD eſt cõmenſurabile. ſi igitur rationale eſt rectangulũ AEB, & rectangulũ CFD rationale erit, atq; eſt ex binis medijs prima, ſi vero medium eſt rectangulum

AEB

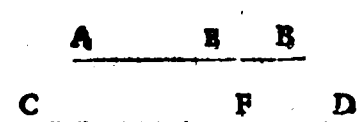
AEB,& ipſum CFD erit medium:& eſt vtraq; ex binis medijs ſecunda. ergo C D ipſi AB ordine eadem eſt. quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam enim eſt vt AE ad EB,ſic CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB,ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD) *Nam cum ſit vt AE ad EB,ita CF ad FD;vt autem AE ad EB,ita quadratum ex AE ad AEB rectangulum ex 1 ſexti,vel ex lemmate ante 23 huius:erit vt quadratum ex AE ad AEB rectangulum,ita CF ad FD.ſed vt CF ad FD,ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE ad AEB rectangulum ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD.* * 11.quinti.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.
Maiori commenſurabilis,& ipſa maior eſt.

Sit maior AB:& ipſi AB commenſurabilis ſit CD.dico CD maiorem eſſe. diuidatur AB in E. ergo AE EB potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarũ quadratis rationale,quod autem ipſis cõtinetur, medium. & fiant eadem,quæ ſupra. quoniam igitur eſt vt AB ad CD,ita AE ad CF & EB ad FD;erit vt AE ad CF,ita EB ad FD.commenſurabilis autẽ eſt AB ipſi CD.ergo & vtraq; ipſarum AE EB vtriq; CF FD eſt commenſurabilis.& quoniam eſt vt AE ad CF,ita EB ad FD:permutandoq; vt AE ad EB,ita CF ad FD: & cõponendo vt AB ad BE,ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex AB ad quadratum a x BE ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ſimiliter demonſtrabimus,& vt quadratũ ex AB ad quadratũ ex AE,ita eſſe quadratũ ex CD ad ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB ita quadratũ ex CD quadratũ ad quadrata ex CF FD:permutãdo igitur vt quadratũ ex AB ad quadratũ ex CD,ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD. cõmẽſurabile autẽ eſt quadratũ ex AB quadrato ex CD.ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD ſunt cõmenſurabilia. atq;eſt cõpoſitum ex quadratis ipſarum AE EB rõnale. ergo & rationale erit compoſitum ex quadratis CF FD. ſimiliter aũt, & q bis continetur AE EB commenſurabile eſt ei,quod bis CF FD continetur. atq; eſt medium,quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD cõtinetur.ergo CF FD potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis rationale,quod autem ipſis continetur medium. tota igitur CD irrationalis eſt,quæ vocatur maior.ergo maiori commenſurabilis & ipſa maior eſt. Quod demonſtrare oportebat.



40.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE,ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF] *Ex 22. ſexti libri.* A

Similiter demonſtrabimus,& vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE,ita eſſe quadratum ex CD ad quadratum ex CF] B

Quoniam enim eſt vt AB ad BE,ita CD ad DF,erit per converſionem rationis vt BA ad AE ita DC ad CF.ergo vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE,ita quadratum ex CD ad quadratum ex CF. 22.ſexti.

Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB,ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD) *Eſt enim vt AE ad EB,ita CF ad FD,quare vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB,ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD:& componendo vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB,ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD:conuertendoq; vt quadratum ex EB ad quadrata ex AE EB,ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD.erat aũ* C

vt quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex æquali vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD.

D Similiter autem, & quod bis continetur AE EB cõmẽsurabile est ei, quod bis CF FD continetur] *Nam ex 4 secundi quadratum ex AB est æquale quadratis ex AE EB vna cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD est æquale quadratis ex CF FD vnà cum eo, quod bis CF FD continetur. cum igitur sit vt totum, ad totum, ita ablatum ad ablatum, videlicet vt quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD; erit & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum; hoc est quod bis cõtinetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, vt quadratum ex AB ad quadratum ex CD. sed quadratum ex AB commensurabile est quadrato ex CD. ergo ex 10 huius, & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur.*

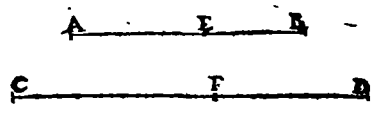
E Medium igitur & quod bis CF FD continetur.) *Ex corollario 24. huius. quare & medium est, quod semel continetur CF FD.*

F Ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles] *Vt enim AE ad EB, ita est CF ad FD. sed AE est potentia incommensurabilis ipsi EB. ergo & CF ipsi FD potentia incommensurabilis erit. sunt igitur CF FD potentia incommensurabiles.*

10. huius.

THEOREMA LII. PROPOSITIO LXX.

Rationale, ac medium potenti commensurabilis, & ipsa rationale, ac medium potens est.

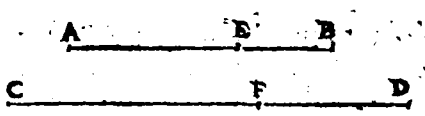


Sit rationale, ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD, ostendendum est & CD rationale, ac medium potentem esse. diuidatur AB in rectas lineas ad punctum E. ergo AEEB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur rationale. & eadem, quæ prius cõstruantur. Similiter demonstrabimus CF FD potentia esse incommensurabiles: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD. Quod autem continetur AE EB commensurabile est ei, quod CF FD continetur. ergo & compositum ex quadratis ipsarum CF FD est medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens est CD. quod ostendere oportebat.

40. huius.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO LXXI.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa bina media potens est.



Sit bina media potens Ax, & ipsi Ax commensurabilis CD. ostendendũ est CD bina media potentẽ esse. Quoniã enim bina media potens est Ax, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare AE Ex potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositũ ex ipsarũ quadratis medium, quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; compositio ex quadratis ipsarum. & construantur eadem, quæ supra. similiter demonstrabimus CF FD potentia incommensurabiles esse: & compositũ ex quadratis ipsarum AE EB commẽsurabile composito ex quadratis CF FD. Quod autem AE EB continetur commensurabile est ei, quod continetur CF FD. quare & compositum ex quadratis ipsarum CF FD medium est: itemq; medium quod CF FD continetur; & adhuc incommensurabile composito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens est CD. quod ostendendũ fuit.

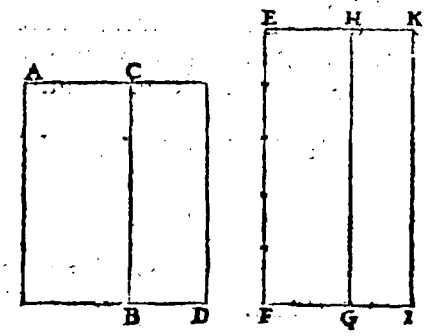
42. huius.

THEO-

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO LXXII.

Si rationale, & medium componantur, quatuor irrationales fiunt, vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem ſpaciũ AB, medium autem CD. Dico eã, quæ poteſt ſpacium AD, vel eſſe ex binis nominibus, vel ex binis medijs primam, vel maiorem, vel rationale ac medium potentẽ. etenim AB vel maius eſt, q̃ CD, vel minus. ſit primum maius, exponaturq; rõnalis EF: & ad ipſam applicetur parallelogrãmũ EG ipſi AB ęquale, q̃ latitudinem faciat EH: ipſi vero CD ęquale ad EF, hoc eſt ad HG applicetur HI latitudinem faciens HK: & quoniam rationale eſt AB, & ipſi eſt æquale EG, erit & EG rõnale; & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EH. ergo EH eſt rõnalis, & ipſi EF longitudine commenſurabilis. Rurſus quoniam mediũ eſt CD, & ipſi eſt ęquale HI, erit & HI medium: & ad rationalẽ EF, hoc eſt HG applicatũ eſt, latitudinem faciens HK. quare HK eſt rõnalis, & incõmenſurabilis ipſi EF lõgitudine. quòd cũ medium ſit CD, rationale aũt AB; erit AB ipſi CD incommẽſurabile. ergo & EG incõmenſurabile eſt ipſi HI. vt aũt EG ad HI, ita eſt recta linea EH ad HK. ergo EH ipſi HK lõgitudine eſt incõmenſurabilis. & ſunt vtrę q; rationales. quare EH HK rationales ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles; & ob id ex binis nominibus eſt EK, diuiſa ad punctum H. & q̃ maius eſt AB, quam CD, æquale aũt AB ipſi EG, & CD ipſi HI; erit & EG quàm HI maius. ergo, & EH maior eſt quam HK. vel igitur EH plus poteſt, q̃ HK quadrato rectę lineæ ſibi commenſurabilis lõgitudine, vel incõmenſurabilis. poſſit primum quadratum rectæ lineæ ſibi cõmenſurabilis longitudine, & ſit maior HE expoſitæ rationali EF cõmenſurabilis. ergo EK ex binis nominib' eſt prima, atq; eſt EF rationalis. Si aũt ſpacium contineatur rationali & ex binis nominib' prima, recta linea ſpacium potens ex binis nominibus eſt. ergo quae poteſt ſpacium EI eſt ex binis nominibus. quare & ea quae poteſt ſpacium AD. Sed EH plus poſſit, quã HK, quadrato rectæ lineae ſibi longitudine ſuã cõmenſurabilis: & ſit maior EH expoſitae rationali EF commenſurabilis longitudine. ergo EK ex binis nominib. eſt quarta, & eſt EF rationalis. ſi aũtem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quae maior appellatur. potẽs igitur ſpacium EI maior eſt. ergo & potens ſpacium AD maior. ſit deinde ſpacium AB minus, quàm CD. erit & EG quàm HI minus; & ob id recta linea EH minor, quam recta HK. vel igitur KH plus poteſt, quàm HE quadrato rectae linae ſibi longitudine commẽſurabilis, vel incommenſurabilis. poſſit primũ quadrato rectae lineae cõmenſurabilis longitudine, & ſit minor EH commenſurabilis expoſitae rationali EF longitudine. ergo EK ex binis nominibus eſt ſecunda: rõnalis autẽ EF. q̃ ſi ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecũda, recta linea ſpacium potens eſt ex binis medijs primam:



12.huius.

23.huius.

1.ſexti.

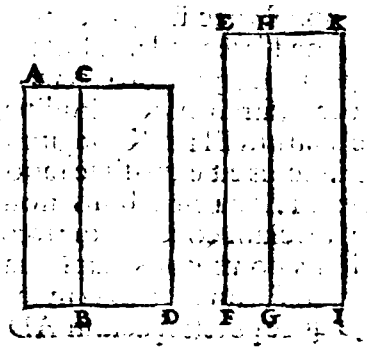
10.huius.

1.diffi.ſecundarum

55.huius.

4.diffi

58.huius.

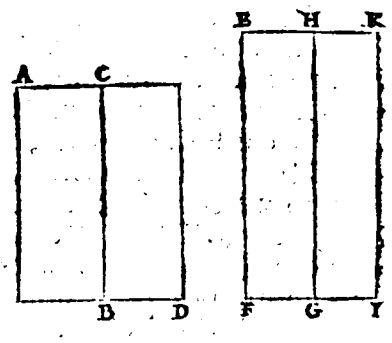


56.huius.

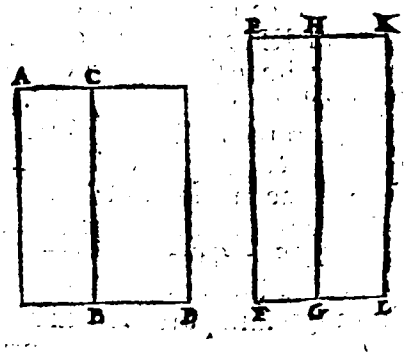
prima, potens igitur ſpacium EI prima eſt ex binis medijs. ergo & potẽs ſpaciũ D. Sed KH plus poſsit, quàm HE quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; minor EH expoſitæ rationali EF commenſurabilis longitudine. quare EK ex binis nominibus eſt quinta; atque eſt rationalis EF. ſi autem
19.huius. ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quę ſpacium poteſt recta linea rationale ac medium potens eſt. quæ igitur poteſt ſpacium EI rationale, & medium potens eſt; ideoq; rationale, & medium potens eſt quæ poteſt ſpacium AD. Si igitur rationale, & medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale, ac medium potens. Quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA LV. PROPOS. LXXIII.

Si duo media interſe commenſurabilia componantur duæ reliquæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs ſecunda, vel bina media potens.



Componantur. n. duo media incommenſurabilia inter ſe AB CD. Dico rectam lineam, quæ ſpaciũ AD poteſt vel ex binis medijs ſecundam eſſe, vel bina media potentem. ſpaciũ. n. AB vel maius eſt, quàm CD, vel minus. ſit primũ maius; exponaturq; rationalis EF: & ad EF ſpacio quidem AB æquale applicetur ΔG, latitudinem faciens EH, ipſi vero CD æquale applicetur HI latitudinem faciens HK. & quoniam medium eſt vtrumq; ipſorum AB CD, erit & vtrumq; EG HI medium, & ad rationa
23.huius. lẽ EF applicata ſunt, quæ latitudinẽ faciũt EH HK. ergo vtraq; EH HK rõnalis eſt, & ipſi EF longitudine incõmenſurabilis. & cum AB incommenſurabile ſit ipſi CD; ſitq; AB quidẽ æquale EG;
1.ſexti. CD verò ipſi HI: erit & EG ipſi HI incõmẽſurabile, ſed vt EG ad HI, ita eſt EH
10.huius; ad HK. incommenſurabilis igitur eſt EH ipſi HK longitudine: ideoq; EH HK
37.huius. rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare ex binis nominibus eſt EK. Itaq; vel EH plus poteſt, quam HK quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudi ne vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine; & neutra ipſarum EH HK longitudine commenſurabilis eſt ex poſitę rationali EF. ergo EK ex binis nominibus eſt
57.huius. tertia, & eſt FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea ſpaciũ potens eſt ex binis medijs ſecunda. ergo quæ poteſt ſpaciũ EI, hoc eſt AD eſt ex binis medijs ſecunda. ſed EH plus poſ ſit quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis longitudine; & vtraque ipſarum EH HK longitudine incõ mẽſurabilis eſt expoſitæ rationali EF. quare EK ſexta eſt ex binis nominibus. At ſi ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſexta, quae ſpaciũ
60.huius. poteſt recta linea eſt bina media potẽs. ergo quae poteſt ſpacium AD bina me



dia

dia potẽs est. Similiter demonstrabimus & si AB sit minus, quàm CD, rectam lineam, quae spacium potest AD, vel ex binis medijs secundam esse, vel rationale, ac medium potentem. si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur reliquae duae irrationales fiunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens. Quod demonstrandum fuit.

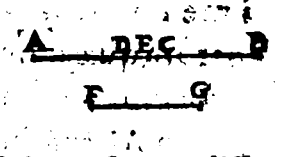
Quae ex binis nominibus & quae post ipsam sunt irrationales neq; mediae, neq; inter se eaedem sunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem, quòd autem fit ab ea, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus primam. quod ab ea, quae est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundam. Quod ab ea, quae est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum latitudinẽ efficit ex binis nominibus quartam. Quod ab ea, quę rationale, ac medium potest ad rationalem applicatum latitutidem efficit ex binis nominibus quintam. Quod ab ea, quae bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus sextã. Quoniam igitur dictae latitudines differunt & à prima & inter se: à prima quidem, quòd rationalis sit; inter se vero, quòd ordine non sint eaedem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

31.huius. 61.huius. 62.huius. 63.huius. 64.huius. 65.huius. 66.huius.

SCHOLIVM.

Septem sunt senarii, de quibus hactenus dictum est. eorum primus quidem ostendit ortum linearum irrationalium; secundus autem diuisionem, nempe quòd ad vnum duntaxat punctum diuidantur. tertius earum, quae ex binis nominibus inuentionem, videlicet primae, secundae, tertiae, quartae, quintae, & sextae. deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hae lineae inter se differant. namq; vsus iii quae ex binis nominibus, ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum, & sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum quae ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorum spaciorum. In sexto autem quomodo irrationalibus commensurabiles eiusdem speciei sint. Rursus in septimo manifeste ostendit differentiam ipsarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmenica analogia: & quae media sumitur proportionalis inter portiones cuiusq; lineae irrationalis iuxta arithmeticam analogiam, & ipsa eiusdem speciei cum iis, inter quarum portiones media interiicitur. itaq; primum arithmeticam medietatem in his esse, sic apparet.

Ponatur .n. exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifestum est AC maiorem esse, quàm CB. auferatur à recta linea AC ipsi BC æqualis AD, & CD bifariam in E secetur, constat igitur AE ipsi EB æqualem esse. ponatur alterutri ipsarum æqualis FG. manifestum est quo differt AC ab ipsa FG, eo differre EB ab ipsa BC; etenim AC ab ipsa FG differt magnitudine EC: & eadem magnitudine differt FG ab ipsa BC, quod est arithmeticae analogiae proprium. cõmensurabilis autẽ est FG ipsi AB est enim eius dimidia æqualis. ergo FG ex binis nominibus est. similiter ostendetur, & in alijs.



9.huius.

PRIN-

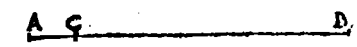
PRINCIPIVM SENARIORVM PER APHAERESIM HOC EST

Per detractionem.

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIV.

Si à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, reliqua irrationalis eſt. vocetur aũt apotome.

A rationali.n. AB rationalis auferatur BC, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. Dico reliquã AC irrationalem eſſe, quae vocatur apotome. Quoniã. n. incommẽſurabilis eſt AB ipſi BC longitudine; atq; eſt vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id cõ continetur AB BC: erit quadratũ ex AB incommenſurabile ei, quod AB BC continetur. Sed quadrato quidẽ ex AB commenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC: ei vero, quod continetur AB BC, commenſurabile eſt quod bis AB BC continetur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſurabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incõmenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC; qm̃ quadrata ex AB BC aequalia ſunt ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC. rationalia autem ſunt quadrata ex AB BC. ergo recta linea AC eſt irrationalis. vocetur autem apotome.



A
B
C
D
E

F. C. COMMENTARIVS.

A Atq; eſt vt AB ad BC, ita quadrãtum ex AB ad id, quod continetur AB BC] *Ex 1. ſexti. vel ex lemmate, quod 23. huius inſerxit.*

B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC ſunt incommenſurabilia] *Ex demonſtratis à nobis ad 14. huius.*

C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommenſurabilia ſunt quadrata ex AB BC] *Ex demonſtratis ad 17. huius.*

D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia ſunt ei, quod bis A B BC continetur, vnà cum quadrato ex AC) *Ex ſeptima ſecundi libri..*

E Ergo recta linea AC eſt irrationalis) *Quoniam enim quadrata ex AB BC incommẽſurabilia ſunt quadrato ex AC, & ſunt quadrata ex AB BC rationalia, ſequitur quadratum ex AC irrationale eſſe, ideoq; ex 11. diffinitione rectam lineam AC eſſe irrationalem.*

Sit recta linea AB 2, BC ℞ 3. erit AC 2. minus ℞ 3. reſpondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quę eſt ex binis nomibus, de qua in 37 huius agitur; & BC reſpondet minori. atque eſt AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO. LXXV.

Si à media media auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cũm tota rationale contineat; reliqua irrationalis eſt. vocetur autem mediæ apotome prima.

A media.n. AB auferatur media BC, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi AB, & cum ea rationale faciẽs, videlicet quod AB BC continetur: dico reliquam AC irrationalẽ eſſe. vocetur autem mediæ apotome prima. Quoniam.n. AB BC mediae ſunt, & erunt & quę ex AB BC quadrata media. rationale aũt eſt quod bis continetur



A

AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est B
id, quod bis AB BC continetur, quoniam si tota magnitudo vni componentiū C
sit incommensurabilis, & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. Irrationalis igitur est AC. vocetur; mediæ apotome prima. D

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem est, quod bis continetur AB BC] *Ponitur enim rationale, quod semel AB BC continetur.* A

Ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis AB BC continetur.] *Namque ex 7. secundi quadrata ex AB BC sunt æqualia ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex AC.* B

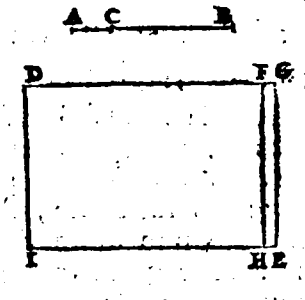
Quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis] *Ex 17. huius.* C

Irrationalis igitur est AC] *Nam cum id, quod bis AB BC continetur sit rationale, & incommensurabile quadrato ex AC, erit quadratum ex AC irrationale: idcircoq; recta linea AC irrationalis ex 11. diffinitione.* D

Sit recta linea AB RR 54, *BC* RR 24. *erit AC* RR 54 *minus* RR 24. *respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quæ est ex binis mediis prima, de qua in 38 huius, & BC minori, est igitur AC reliqua portio maioris nominis, minori ex eo detracto.*

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia solum cōmensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat: & reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome secunda.



A media. n. AB auferatur media BC potentia solum commensurabilis existens toti AB, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur AB BC, dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem mediæ apotome secunda. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG; ei vero quod bis AB BC continetur æquale parallelogrammum DH ad eandem DI applicetur, latitudinem faciens DF. reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC. & quoniā media sunt, quæ ex AB BC quadrata; erit & parallelogrammum DE medium. & ad rationalem DI applicatum est, latitudinem faciens DG. ergo DG est rationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam medium est quod AB BC continetur, erit & quod bis continetur AB BC medium. atq; est æquale parallelogrammo DH. ergo & DH est medium, & ad rationalem DI applicatum est latitudinē faciens DF. rationalis igitur est DF, & ipsi DI longitudine incommensurabilis, & quoniam AB BC potentia solum commensurabiles sunt, erit AB ipsi BC incommensurabilis longitudine. ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata; ei vero, quod AB BC continetur commensurabile est id, quod bis continetur AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. parallelogrammum autem DE est æquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale est ei, quod bis continetur AB BC. ergo DE ipsi DH est incommensurabile. sed vt DE ad DH, A B C D E Coroll. 24. huius. F

1. sexti. 10 huius. ita recta linea GD ad DF. incommensurabilis igitur est GD ipsi DF longitudine, & sunt vtraq; rationales. quare GD DF rationales sunt, potentia solum commensurabiles. ergo FG apotome est; & DI est rationalis, quod autem
G rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est, & ipsum po-
H tens est irrationalis. sed recta linea AC potest FE parallelogrammum. ergo AC
K est irrationalis. vocetur autem mediæ apotome secunda.

F. C. COMMENTARIVS.

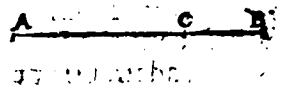
Reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC.] *Ex 7. secundi libri.*
A Ergo DG est irrationalis, & ipsi DI lõgitudine incõmẽsurabilis.]*Ex 23. huius.*
B Erit & quod bis continetur AB BC medium.] *Ex corolario 24. huius.*
C Ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, qud AB BC continetur.]
D *Est enim vt AB ad BC. ita quadratum ex AB ad rectangulum ABC. & cum AB ipsi BC lon-*
Lemma ad 3. huius. *gitudine sit incommensurabilis, erit & quadratum ex AB incõmensurabile ei quod AB BC continetur: ex 10. huius.*

Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata.] *Nam rectę lineæ AB BC potentia commensurabiles ponuntur.*
E Quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC cõ
F tinetur.] *Ex demonstratis ad 17 huius.*
Ergo FG apotome est,] *Ex 74. huius.*
G Quod autem rationali, & irrationali coninetur rectangulum irrationale est.]
H *Ex Scholio ad 39. huius apposito, quare sequitur parallelogrammum FE irrationale esse.*
Ergo AC est irrationalis.] *Ex 11. diffinitione.*
K *Sit AB* R♋ *18. BC* R♋ *8. erit AC* R♋ *18. minus* R♋ *8. respondet autem ipsa AB maiori nomini eius quæ est ex binis mediis secunda; & BC respondet minori. de qua in 39. huius.*

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium: reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

A recta linea AB auferatur recta BC potentia incommensurabilis existens toti, facienſq; cum tota AB compositum quidem ex ipsarũ AB BC quadratis rationale, quod autem bis AB BC continetur medium. dico reliquam AC irrationalem esse, quæ vocatur minor. Quoniam enim



compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis rationale est; quod autem bis AB BC continetur medium, erunt AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis continetur AB BC. ergo per conuersionem rationis quadrata ex
A AB BC quadrato ex AC sunt incõmẽsurabilia. sed quadrata ex AB BC rationa
B lia sunt. irrationale igitur est quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC est irra-
C tionalis. vocetur autem minor.

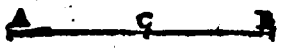
F. C. COMMENTARIVS.

Ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt
A incommensurabilia.]*Ex demonstratis ad 17. huius*
Irrationale igitur est quadratum ex AC.] *Ex 10. diffinitione*
B Ideoq; recta linea AC est irrationalis.] *Ex vndecima diffinitione.*
C *Sit AB* R *V. 32. plus* R 704. *BC* R *V. 32. minus* R. 704. *erit AC* R *V. 32 plus* R. 704. *minus* R *V. 32. minus* R 704. *respondet autem AB maiori nomini eius, quæ dicitur maior, & BC respondet minori nomini eiusdem; de qua in 40. huius.*

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium quod autem ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis, est; vocetur q; cum rationali medium totum efficiens.



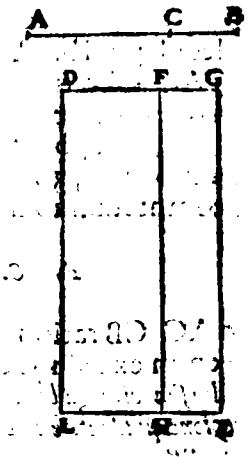
A recta .n. linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositũ quidem ex ipsarũ AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. dico reliquam AC irrationalem esse: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Quoniam enim compositũ ex ipsarum AB BC quadratis medium est: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur quadratum ex AC incõmensurabile est ei quod bis continetur AB BC. atq; est quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratũ ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC irrationalis. vocetur autẽ cũ rationali medium totum efficiens. 17.huius. 20. diff.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. 13 ½ plus R 4 ½ BC R V. R 13 ½ minus R 4 ½. erit AC R V. R 13 ½ plus R 4 ½ minus R V. R 13 ½ minus R 4 ½ respondetq; AB maiori nomini eius, qua vocatur rationale, ac medium potens, & BC respondet minori. de qua in 41. huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens cõpositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis cõtinetur mediũ, incõmensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiens.



A recta .n. linea AB, recta linea BC auferatur, potentia incõmensurabilis existens toti AB, faciensq; compositũ quidem ex ipsarũ AB BC quadratis medium quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens DF. ergo reliquum FE est æquale quadrato ex AC. & ob id recta linea AC ipsum FE potest. itaq; quoniam compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est, & parallelogrammo DE æquale, erit ipsum DE medium: & ad rationalem DI applicatum est, latitudinem faciens DG. quare DG est rationalis & ipsi DI longitudine incommensurabilis. Rursus quoniã id quod bis AB BC continetur mediũ est, & æquale parallelogrãmo DH, erit DH mediũ, & ad rationalẽ DI applicatũ est, 23. huius.

23.huius. est, latitudinem faciens DF. ergo DF est rationalis, ipsiq; DI incommensurabilis longitudine. Quòd cum quadrata ex AB BC incommensurabilia sint ei,
1.sexti. quod bis AB BC continetur, & parallelogrammum DE ipsi DH est incommen-
10.huius. surabile. vt autem DE ad DH, ita est recta linea DG ad ipsam DF. incommensurabilis igitur est DG ipsi DF, & sunt vtræq; rationales ergo. GD DF ra-
A tionales sunt potentia solum cõmensurabiles. apotome igitur est FG: & FH est
B rationalis, quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irratio-
C nale est, ipsumq; potens est irrationalis. sed AC potest parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis est. vocetur autẽ cum media medium totum efficiens.

F. C. COMMENTARIVS.

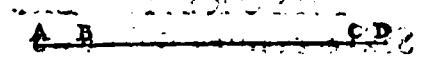
A Apotome igitur est FG.] *Ex 74. huius*

B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulũ irrationale est.] *Etenim in Scholio ad 39. huius appositò demonstratur, quod rationali & irrationali continetur irrationale esse.*

C Ipsumq; potens est irrationalis.] *Ex 11. diffinitione.*
Sit AB $\sqrt{.13\frac{1}{2}}$ *plus* $3.\sqrt{B}\sqrt{.13\frac{1}{2}}$ *minus* $3.erit\ A\sqrt{.B}\sqrt{13\frac{1}{2}}$ *plus* $3.minus\ \sqrt{.B}\sqrt{13\frac{1}{2}}$ *minus* $3.$ *& respondet AB maiori nomini eius, quæ vocatur bina media potens; & BC respondet minori, de qua in 42. huius.*

THEOREMA LXII. PROPOSITIO. LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea potentia solum commensurabilis existens toti.



Sit apotome AB: congruens autẽ ipsi
A sit BC. ergo AC CB rationales sunt potẽtia solum commensurabiles. dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quæ potentia solũ sit cõmensurabilis toti. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id quod bis continetur AD DB, eo & quæ
B drata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtraq; enim excedunt
C eodem quadradrato, quod fit ex AB. & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id quod bis AC CB continetur. sed quadrata ex AD DB excedũt quadrata ex AC CB rationali; etenim vtraq; rectarum linearũ rationalis est. quod
D igitur bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationa-
E li. quod fieri non potest; vtraq; enim media sunt. medium autem medium non
F superat rationali. ergo rectæ lineæ AB altera non congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. vna igitur tantum ipsi congruit.

F. C. COMMENTARIVS.

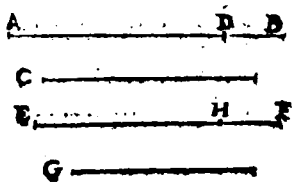
A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles.] *Ex 74. huius.*

B Vtraq; enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB.) *Quadrata enim ex AD, DB æqualia sunt ei, quod bis AD DB continetur vna cum quadrato ex AB, ex 7. secundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB sunt æqualia ei, quod bis continetur AC, CB vna cum quadrato ex AB.*

C Et permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB.] *Hoc sequenti lemmate demonstrabimus.*

LEMMA.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipſam C eodem exceſſu, quo EF excedit G. dico & permutando AB eodem exceſſu excedere ipſam EF, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.



Sit enim DB exceſſus, quo AB excedit C: & HF exceſſus quo EF excedit G. erunt DB HF æquales; itemq; æquales inter ſe AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem exceſſu, quo C ipſam G. & additis vtrinq; æqualibus DB HF, excedet AB ipſam EF, vel ab ea excedetur eodem exceſſu, quo AD ipſam EH, hoc eſt quo C ipſa G. atq; illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali] *rationale enim non ſuperat rationale, niſi rationali, quod nos ad 27 huius demonſtrauimus.* D

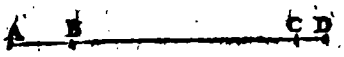
Vtraq; enim media ſunt] *Nam quod rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus cõtinetur rectangulum irrationale eſt, quod medium appellatur, ex 22. huius. medium igitur eſt id, quod continetur AD DB: & ideo medium quod bis continetur AD DB, vtpote eius duplum ex corollario 24. huius: eadem ratione & medium eſt, quod bis AC CB continetur.* E

Medium autem medium non ſuperat rationali] *Ex 27. huius.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO LXXXI.

Mediæ apotomæ primiæ vna tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, & ipſi AB cõgruat BG. ergo AC CB mediæ ſũt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. Dico ipſi AB alteram nõ congruere mediam, quę potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodem & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AG GB continetur; eodem enim rurſus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AG GB continetur. ſed quod bis cõtinetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: vtraq; enim rationalia ſunt. ergo, & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AG GB rationali. quod fieri non poteſt; vtraque enim ſunt media. medium autem medium non ſuperat rationali: quare mediæ apotomę primæ vna tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolũ totũ ſit commenſurabilis, & cum tota rationale contineat.



75. huius

7. ſecundi.

Ex antecedẽti lemmate.

Ex demonſtratis ad 17 huius.

27. huius.

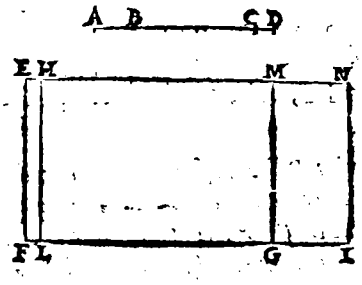
THEOREMA LXIV. PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome ſecunda AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles, medium q; cõtinẽtes AC CB. Dico ipſi AB

76. huius.

alteram non congruere mediam quę potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi .n. fieri poteſt, congruat BD. quare AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commmenſurabiles, quæ medium ADB cõtinẽt: & exponatur rationalis EF: quadratiſq; ex AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EM, & ei, quod bis continetur AC CB æquale auferatur parallelogrammum HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur EL eſt æquale ei, quod fit ex AB quadrato. ergo AB ipſum EL poteſt. Rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & EL æquale quadrato ex AB. reliquum igitur HI eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. & quoniam mediæ ſunt AC CB, erunt, & quadrata ex AC CB media, ſuntq; æqualia parallelogrammo EG. quare EG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum eſt. latitudinem faciens EM. ergo EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. rurſus quoniam medium eſt quod continetur AC CB, & quod bis AC CB continetur medium erit. atque eſt aequale parallelogrammo HG. ergo & HG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciẽs HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. & quoniã AC CB potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit AC in commenſurabilis ipſi CB longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id quod continetur AC CB. incommẽſurabile igitur eſt & quadratum ex AC ei, quod AC CB continetur. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex AC CB: ei vero, quod continetur AC CB commenſurabile eſt quod bis AC CB continetur. ergo quadrata ex AC CB incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur. atq; eſt quadratis ex AC CB aequale parallelogrammum EG; ei vero, quod bis AC CB continetur æquale ipſum HG. ergo EG ipſi GH eſt incommenſurabile. ſed vt EG ad GH, ita eſt recta linea EM ad ipſam MH. quare EM ipſi MH eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt vtræq; rationales, ergo EM MH rationáles ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, ac propterea apotome eſt EH; & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus, & HN ipſi congruere. apotomæ igitur alia, atq; alia congruit recta linea, potentia ſolũ commenſurabilis exiſtens toti. quod fieri non poteſt. ergo mediæ apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea media quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.



23. huius.

23 huius.

x lemma ad 13. huius.

ex demonſtratis in 14. huius.

1. ſexti. 10 huius. 74. huius.

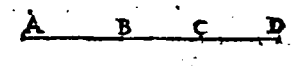
Ex 80. huius

THEOREMA LXV. PROPOSITIO LXXXIII.

Minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod aũt bis ipſis cõtinetur mediũ.

77. huius.

Sit minor AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem bis ipſis continetur mediũ.



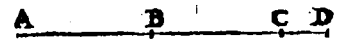
Dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat. ſi .n. fieri poteſt, congruat BD. ergo AD DB potentia ſunt incõmenſurabiles, faciẽtes cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: q̃ autem bis ipſis continetur medium, & qñ quo exceſſu quadrata ex AD DB excedũt quadrata ex AC CB, eo-

ex lemmate ad 80. huius

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit, id quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraq; enim rationalia sunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet. Quod fieri nō potest. etenim vtraq; sunt media. ergo minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod vero bis ipsis continetur medium. 27.huius.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIV.

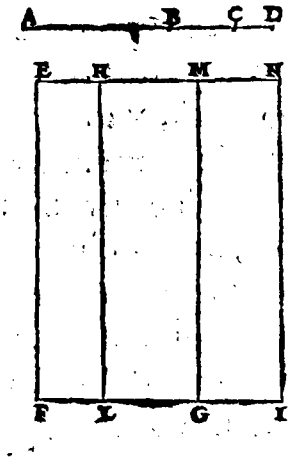
Ei, quæ cum rationali medium totū facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur rationale.



Sit cum rationali mediū totū faciens AB congruens autem ipsi BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositū quidem ex ipsarū AC CB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. dico ipsi AB alterā non congruere eadem facientem. si .n. fieri potest, congruat BD. ergo AD DB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositū quidem ex ipsarū AD DB quadratis mediū, quod autem bis ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo ex excessu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodē ꝙ bis cōtinetur AD DB excedit id, ꝙ bis AC CB continetur: quod autem bis cōtinetur AD DB excedit id ꝙ bis AC CB continetur rationali; etenim vtraq; rationalia sunt: & quadrata ex AD DB rationali excedent quadrata ex AC CB. quod fieri non potest, cum vtraq; sint media. non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidē ex ipsarū quadratis medium; quod autē bis ipsis continetur rationale. quare ei quæ cū rationali mediū totū facit, vna tantum cōgruet recta linea. 78.huius.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

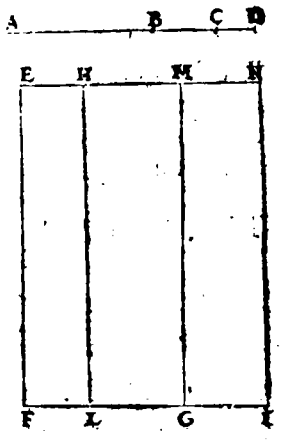
Ei quæ cum medio medium totum facit, vna tantū congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur, medium, & adhuc incommensurabile compositō ex quadratis ipsarum.



Sit cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BC. ergo AC CB potentia sunt incōmēsurabiles, facientes cōpositum quidem ex ipsarū quadratis mediū; quod autē bis ipsis cōtinetur medium, & adhuc incōmensurabile compositō ex quadratis ipsarum. dico ipsi AB alteram non congruere potentia incōmensurabilem toti, & cum tota facientem eā, quæ proposita sunt. si enim fieri potest, congruat BD, ita vt AD DB potentia incommēsu- 79.huius.

rabiles

rabiles sint, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autē ipsis continetur medium, & incommensurabile cōpositoex quadratis ipsarum, & exponatur rationalis EF; & quadratis ipsarum AC CB æquale parallelogrāmum EG ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EM: ei vero, quod bis continetur AC CB æquale parallelogrammum auferatur HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur quadratum ex AB est æquale parallelogrammo EL. ergo AB ipsum EL potest. rursus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EN. est autē & quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL. ergo reliquum, quod bis AD DB cōtinetur ipsi HI est æquale. & quoniam compositum ex quadratis AC CB medium est, & æquale parallelogrāmo EG, erit & E G medium. quod ad rationalem EF applicatum est, latitudinē faciēs EM, quare EM est rationalis; & ipsi EF lōgitudine incōmensurabilis. rursus, quoniā quod bis AC CB continetur est mediū, & æquale ipsi HG, erit & HG medium, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens HM. rationalis igitur est HM, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. quòd cum quadrata ex AC CB incommensurabilia sint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EC incommensurabile ipsi GH; ideoq; recta linea EM rectę MH longitudine est incommensurabilis. & sunt vtræq; rationales. cum igitur EM MH rationales sint, potentia solum commensurabiles, recta linea EH apotome est, & ipsi congruens HM. similiter demōstrabimus EH rursus apotomen esse, ipsiq; congruentem HN. ergo apotomæ alia, atq; alia congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. quod fieri non posse ostensum est. non igitur ipsi A B altera congruet recta linea. quare vnā tantum congruet, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens cōpositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur mediū, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.



2 3. huius.

10. huius.

74. huius.

80. huius.

DIFFINITIONES TERTIÆ.

1 Exposita rationali, & apotoma, si quidē, tota plus possit, quā congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, sitq; tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vocetur apotome prima.

2 Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi cōmensurabilis lōgitudine, vocetur apotome secūda.

3 Quòd si neutra sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit, quā cōgruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, dicatur apotome tertia.

4 Rursus si tota plus possit, quā cōgruens quadrato rectæ lineæ sibi incōmensurabilis longitudine, si quidē tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, vocetur apotome quarta.

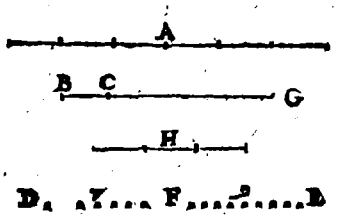
Si

Si vero congruens expositæ rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quinta. 5

Quòd si neutra, dicatur apotome sexta. 6

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI

Inuenire primam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo & BG est rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE EF, quorum excessus DE non sit quadratus. neq; igitur ED ad DF proportionē habebit, quā numerus quadratus ad quadratūū numerū. & fiat vt ED ad DF, ita quadratū ex BG ad quadratū ex GC. cōmensurabile igitur est quadratū ex BG quadrato ex G C; rationale autē est quadratū ex BC. ergo & quadratum ex G C est rationale; ideoq; recta linea GC rationalis est. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neq; quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræq; rationales. ergo BG GG rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, & ob id BC apotome est. dico & primam esse. sit enim quadratū ex H id, quo quadratū ex BG plus potest, quā quadratū ex GC. & quoniam est vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex G C, erit per conuersionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed DE ad EF proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratū numerum; vterq; enim quadratus est. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratū numerum. commensurabilis igitur est BG ipsi H longitudine. & BG plus potest quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus poterit, quàm GC quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis. atq; est tota BG. expositæ rationali A commensurabilis longitudine. ergo BG apotome est prima. Inuenta igitur est prima apotome. Quod facere oportebat.

6. diffi.

Coroll. 1. lem. ad 30. huiust

9. huius.

74. huius.

9. huius.

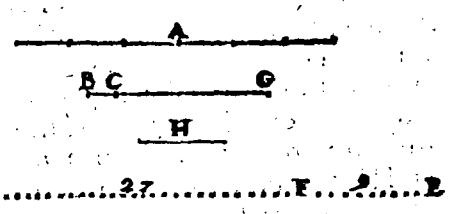
3. diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6. BG 4. numerus autem DE sit 16. EF 9. erit DF 7. si igitur fiat vt 16. ad 7. ita quadratum ex BG, videlicet 16. ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7. & recta linea G C R 7. ergo BC est 4. minus R 7. quę est apotome prima.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

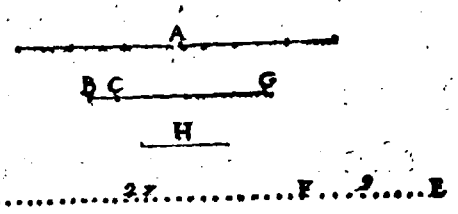
Inuenire secundam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponātur duo numeri quadrati DE EF, quorū excessus D F, non sit quadratus fiatq; vt FD ad DE, ita quadratum ex CG ad quadratū ex GB commensurabile igitur est quadratū ex CG quadrato ex G B. sed quadratum ex

6. Diffi. 6. Corol. 1. lemma ad 30. huius;

CG est



CG est rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB; ac propterea ipsa GB est rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionē non habet, quam numerus quadratus ad quadratū numerum, erit CG ipsi GB incommensurabilis longitudine. & vtraq; sunt tationales. ergo CG GB rationales sunt, potentia solum commensurabiles, & ob id BC est apotome. dico & secundam esse. quo enim quadratum ex BG excedit quadratum ex GC, sit ex H quadratum. Quoniam igitur est vt quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conuersionem rationis, vt quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atq; est vterq; ipsorum DE EF quadratus. quadratum igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem habet, quàm numerus quadratus ad quadrarum numerum; ideóq; BG ipsi H longitudine est commensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex. H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis. atq; est congruens CG expositæ rationali A commensurabilis longitudine. ergo BC apotome est secunda. inuenta igitur est secunda apotome BC. Quod facere oportebat.

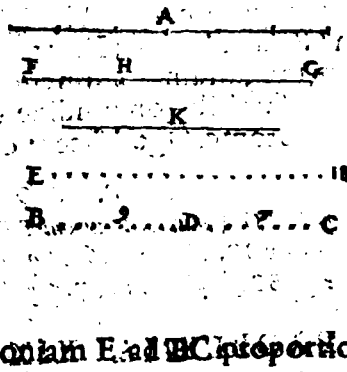
9. huius.
74 huius.
7. huius.
23 diffi.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6. CG 3. numerus autem DE sit 36. & EF 9. erit DF 27. itaque fiat vt 27. ad 36. ita 9. ad aliud, erit ad 12. ergo GB est R 12. & BC R 12. minus 3. quæ est apotome secunda.

PROBLEMA XX. PROPOSITIO. LXXXVIII.

Inuenire tertia apotomen



Exponatur rationalis A, & exponantur tres numeri E BC CD non habentes inter se proportionem, quàm numerus quadratus habet ad quadratum numerū; BC vero ad BD proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. commensurabile igitur est quadratum ex A quadrato ex FG. atq; est quadratum ex A rationale. ergo & rationale est quadratum ex FG; ac propterea recta linea FG est rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quā numerus quadratus ad quadratū numerum, neq; quadratū ex A ad quadratum ex FG proportionē habebit, quā numerus quadratus ad quadratū numerū. incommensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus quoniam est vt BC ad CD, ita quadratū ex FG ad quadratū ex GH; erit quadratū ex FG quadrato ex GH cōmensurabile. rationale autē est quadratū ex FG, ergo & quadratū ex GH est rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quoniam BC ad CD proportionē nō habeat, quā numerus quadratus ad quadratū numerū, neq; quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. & sunt vtrq; rationales. ergo FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est FH. dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt E quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum

Corrol. 6. huius.
6. huius.
9. huius.
6. huius.
7. huius.
9. huius.
70. huius.

dratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadraium ex FG ad quadratum ex GH erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad GD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neq; igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo A ipsi GH lõgitudine est incommensurabilis. neutra igitur ipsarum FG GH expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex F G plus potest, quàm quadratum ex GH, sit ex K quadratum. Quoniam igitur est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex G H; erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at CB ad BD proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & plus potest FG, quam GH quadrato ex K. ergo FG plus potest, quam GH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum FG GH longitudine commensurabilis est expositę rationali A. quare FH apotome est tertia. Inuenta igitur est tertia apotome FH. quod facere oportebat.

6. huius.

9. huius.

33. diffi.

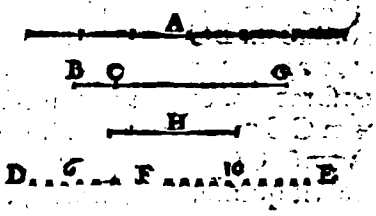
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, numerus E 18, BC 16, & CD 7. erit BD 9. fiat vt 18 ad 16, ita 36 ad alium, erit ad 32. ergo FG est R 32. rursus fiat vt 16 ad 7, ita 32 ad alium. erit ad 14 quare GH est R 14, & FH R 32 minus R 14, quæ est apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.

Exponatur rationali A: & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo BG est rationalis. exponantur præterea duo numeri DF FE, ita vt totus DE ad vtrumq; ipsorũ DF FE proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: & fiat vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC. est autem quadratum ex BG rationale. quare & rationale est quadratũ ex GC, ideoq; recta linea GC est rationalis. & quoniam DE ad EF proportionem non habet, q̃ numerus quadratus ad quadratum numerum neq; quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine, & sunt vtræq; rationales: ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est BC. dico & quartam esse. Quo igitur plus potest BG. quàm GC, fiat quadratum ex H. & quoniam est vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadtatum ex BG ad quadratũ ex H. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerũ. neq; igitur quadratũ ex BG ad quadratũ ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratũ numerũ. incõmensurabilis igitur est BG ipsi H lõgitudine: & plus potest BG quã GC quadrato ex H. ergo BG plus potest quàm GC quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incõmensurabilis. atq; est tota BG cõmensurabilis expositę rationali A. ergo BC apotome est quarta. Inuenta igitur est quarta apotome BC. q̃ facere oportebat.



9. huius.

9. huius.

74. huius.

4. diffi. tertiarum.

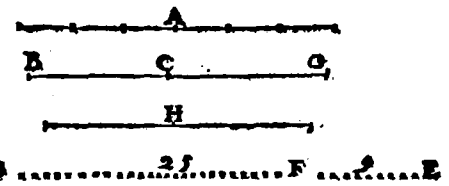
F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 16. BG 4. numerus autem DF 6. & FE 10. itaq; si fiat vt 16. ad 10. ita 16. ad alium, erit GC R 10. & BC 4. minus R 10. quæ est apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO. XC.

Inuenire quintam apotomen.



Exponatur rationalis A, & ipsi A commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis, & exponantur duo numeri DF FE, ita vt DE ad vtrũq, ipsorum DF FE proportionem rursus non habeat, quã numerus quadratus ad quadratum numerum; fiatq; vt FE ad ED, ita quadratum ex CG ad quadratũ ex GB. ergo quadratũ ex CG cõmensurabile est quadrato ex GB est aũt quadratũ ex CG rationale. ergo & rationale est quadratũ ex GB: & idcirco recta linea GB est rationalis. & quoniã vt DE ad EF, ita est quadrat ex BG ad quadratũ ex GC: & DE ad EF proportionẽ non habet, quã numerus quadratus ad quadratũ numerũ; neq; quadratũ ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræq; rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles; & BC apotome est. dico & quintam esse. Quo enim plus potest quadratum ex BG quàm quadratum ex GC, sit quadratum ex H. Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est vt DE ad EF, erit per conuersionem rationis vt ED ad DF. ita quadratum ex BG ad id, quod fit ex H quadratum. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ. neq; igitur quadratũ ex BG ad quadratum ex H proporrionẽ habebit, quã numerus quadratus ad quadratũ numerũ; ideoq. recta linea BG ipsi H longitudine est incõmensurabilis. & plus potest BG quã GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. atq; est congruẽs CG expositæ rationali A lõgitudine cõmensurabilis. quare BC apotome est quinta. Inuẽta est igitur quinta apotome BC. Quod facere oportebat.

6. huius.

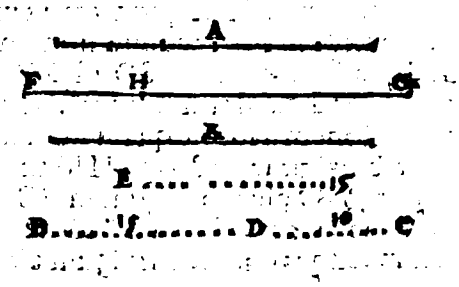
9. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6. CG 3. numerus autem DF sit 25. FE 9. & fiat vt 9. ad 34. ita quadratum ex CG, quod est 9. ad alium, erit BG R 34. & BC R 34. minus 3 quæ est apotome quinta.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO XCI.

Inuenire sextam apotomen.



Exponatur rationalis A, & tres numeri E BC CD proportionẽ nõ habẽtes inter se quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quoniam igitur est vt E ad BC ita, quadratum ex A ad quadratum ex FG; erit quadratum ex A quadrato ex FG commen-

6. huius.

surabi-

surabile. rationale autẽ est quadratum ex A. ergo & quadratũ ex FG rationale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neq; quadratũ ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incõmensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus quoniam est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratum ex cõmensurabili quadrato ex GH. est autem quadratum ex FG rationale. rationale igitur est & quadratum ex GH; & ipsa GH rationalis. quòd cũ BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neq; quadratũ ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo FG ipsi GH longitudine est incommensurabilis: & sunt vtraq; rationales. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles; & FH apotome est. Dico & sextam esse. Quoniam enim est vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. erit ex aequali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad CD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neq; igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis: & neutra ipsarum FG GH, expositae rationali A commensurabilis est longitudine. quo igitur plus potest quadratum ex FG, quàm quadratum ex GH, sit quadratum ex K. & quoniam est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at CB ad BD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neq; igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo incommensurabilis est FG ipsi K longitudine. & FG plus potest, quã GH quadrato ex K. plus igitur potest FG, quàm GH quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. & neutra ipsarum FG GH est commensurabilis longitudine expositae rationali A. ergo FH apotome est sexta. Inuenta est igitur sexta apotome FH. sed & expeditius ex dictarum linearum inuentionem ostendere licet.

9 huius. 6 huius. 9 huius. 74 huius. 9 huius. 6 tertiarum diffi.

Si enim oporteat inuenire primam apotomen, exponatur ex binis nominibus prima AC, cuius maius nomen sit AB, & ponatur BD ipsi BC aequalis. ergo AB BC, hoc est AB BD rationales sunt, potentia solum commensurabiles: & AB plus potest, quàm BC, hoc est quàm BD quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis longitudine expositae rationali. apotome igitur prima est AD. similiter & reliquas apotomas inuenietis, eas, quae ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

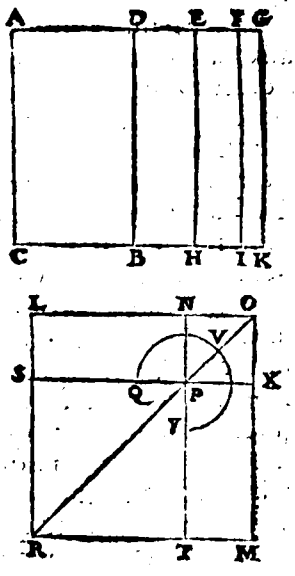


Sit A 6, numerus autem E sit 45, & BC 25, & CD 10. sitq; vt 15 ad 25, ita 36 ad aliquem primum 60. Rursus fiat vt 25 ad 10, ita 60 ad aliud, erit hic 24. ergo FH est R 60, & GH R 24, propterea FH est R 60 minus R 24, quae est apotome sexta.

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

Contineatur.n. ſpacium AB rationali AC, & apotoma prima AD. dico rectam lineã, quę poteſt ſpacium AB apotomen eſſe. Qm̃ enim AD prima apotome eſt, ſit ipſi congruẽs DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles, & tota AG longitudine cõmenſurabilis eſt expoſitę rationali AC. & præterea AG plus poteſt, quàm GD quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſi igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex DG, æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes longitudine cõmenſurabiles ipſam diuidet. ſecetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale parallelogrammum ad ipſam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. commenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine: & per E F G puncta ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. & quoniam AF ipſi FG longitudine eſt commenſurabilis, erit & tota AG vtrique ipſarum AF FG commenſurabilis longitudine. ſed AG commenſurabilis eſt ipſi AC. vtraq; igitur AF FG ipſi AC longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt AC rationalis. ergo & rationalis vtraq; AF FG; ac propterea vtrumq; parallelogrammorũ AI FK eſt rationale. & quoniam DE ipſi EG longitudine eſt cõmenſurabilis, erit & DG vtriq; DE EG commenſurabilis longitudine: eſtque rationalis DG, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis. ergo & vtraque DE EG rationalis eſt, & incommenſurabilis ipſi AC longitudine: & ob id vtrumq; parallelogrammorum DH EK medium eſt. ponatur ipſi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipſi angulum habens LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. itaq; quoniã rectangulum AFG eſt æquale quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF; ſed vt AF ad EG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK & vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipſum KF. parallelogrammorum igitur AI KF medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX mediũ proportionale MN, vt ſuperius oſtenſum eſt. parallelogrammũq; AI eſt æquale quadrato LM; & parallelogrammum KF quadrato NX æquale. ergo & parallelogrammum MN eſt æquale ipſi EK. ſed parallelogrammum quidem EK eſt æquale parallelogrammo DH, parallelogrammũ vero MN ipſi LX parallelogrãmũ igitur DX eſt æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. eſt aũt & parallelogrãmũ AK quadratis LM NX æquale. ergo & reliquũ AB eſt æquale quadrato ST. at quadrati ST eſt id, cui fit ex LN. quadratũ igitur ex LN eſt æquale parallelogrãmo AB; ideoq; recta linea LN ipſum AB poteſt. Dico LN apotomen eſſe. Quoniã.n. rationale eſt vtrumq; parallelogrammorũ AI FK & ſunt æqualia quadratis LM NX, erit & vtrumq; LM NX rationale; hoc eſt vtrumq; ipſorum, quae fiunt ex LO ON; & vtraq; igitur LO ON rõnalis eſt. Rurſus qm̃ mediũ eſt parallelogrãmum DH, atq; eſt æquale ipſi LX; erit & LX mediũ. cũ igitur LX quidem mediũ ſit, NX vero rationale, incommenſurabile eſt LX ipſi NX; vtq; LX ad XN, ita eſt recta linea LO ad ON. ergo LO ipſi ON longitudine eſt incõmenſurabilis. & ſunt vtraeq; rõnales. quare LO ON rationales ſunt potentiã ſolũ cõmenſurabiles. ideirco apotome eſt LN; & ſpacium AB poteſt. quae igitur poteſt ſpacium AB, eſt apotome. ergo ſi ſpacium contineatur rationali, & apotoma prima, recta linea ſpacium potens apotome eſt.



1. diffin. tertiarum.
18. huius.
16. huius.
20. huius.
16. huius.
14. huius.
21. huius.
16. ſexti
17. ſexti.
10. huius.
74. huius

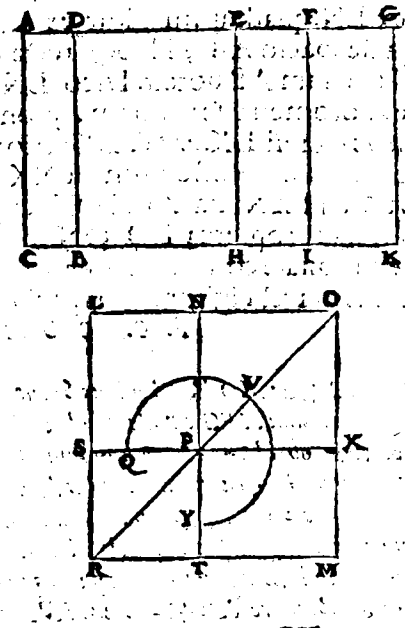
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD 7 minus R 13. erit DG R 13, & DE, vel EG R 3 ½. quod si ad rectam lineã AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiens figura quadrata erit ex demonstratis ad 18 huius AF 6 ½ FG ½, ergo parallelogrammum AI est 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42, parallelogrammum vero DK est R 468. DH, vel EK R 117, EI R 117. minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB est 42 minus R 468. Huiusmodi autem spacium iuniores etiam apotomen primam, vel residuum primum appellare consueuerunt, cuius latus quadratum, vel radicem inuenientes; quemadmodum ad 55. huius dictum est in spacijs binomialibus, praterquam quòd loco vocis plus, vtemur minus. Diuidatur enim 42. in duas partes; ita vt quod ex ipsis producitur, sit æquale quartæ parti 468, hoc est 117. erit maior pars 39, minor 3, ideoq; R 39 minus R 3 erit latus quadratum, vel radix huius spacij residui 42 minus R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIO XCIII.

Si spacium contineatur rationali, & aporoma secunda, recta linea spacium potens mediæ est apotome prima.

Spacium.n. AB contineatur rationali AC, & apotoma secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spaciũ AB potest mediæ apotomen esse primã. sit.n. ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & congruẽs D G cõmensurabilis est expositæ rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm G D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus potest, quàm GD quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ipsius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaq; secetur DG bifariã in E. & quadrato ipsius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo commensurabilis est AF ipsi FG longitudine; & per puncta EFG ipsi AC parallelæ ducantur EH FI GK. quoniam igitur AF ipsi FG longitudine est commensurabilis, erit AG vtriq; ipsarum AF FG commensurabilis longitudine. rationalis autem est AG, & ipsi AC longitudine incommensurabilis. ergo & vtraq; AF FG est rationalis, ipsiq; AC incommensurabilis longitudine; & ob id vtrumq; parallelogrammorum AI FK medium est. Rursus quoniam DE commensurabilis est ipsi EG, erit & DG vtriq; DE EG commensurabilis. Sed DG commensurabilis est ipsi AC longitudine. ergo & vtraq; DE EG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis: ac propterea vtrumq; parallelogrammorum DH EK est rationale. constituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum sunt quadrata LM NX. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media sint, & sibi ipsis commensurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineę LO ON mediæ sunt, potentia solum commẽsurabiles. & quoniam rectangulũ AFG est æquale quadrato*



1. differentiarum.

18. huius.

16. huius.

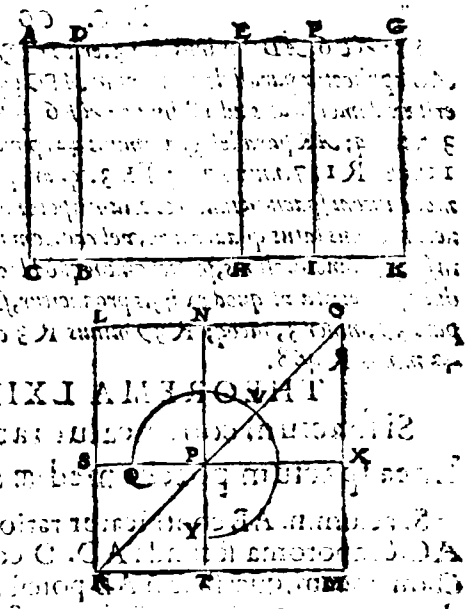
21. huius.

16. huius.

20. huius.

26. sexti.

14.sexti. drato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF; sed vt AF ad EG, ita est parallelogrā mum AC ad ipsum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrāmum EK ad KF: parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem, & quadratorum LM NX medium proportionale MN: & parallelogrammum AI quidem est æquale quadrato LM: parallelogrammum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipsi EK est æquale. sed DH est æquale EK, & LX ipsi MN. totū igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX æquale erit. itaque quoniam totum AK æquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ, & quadrato NX; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc est ei, quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN est æquale spacio AB; ideoq; recta linea LN spacium AB potest. Dico LN mediæ apotomen esse primam, quoniam enim rationale est EK, & æquale ipsi MN, hoc est ipsi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. Medium autem ostensum est NK. quare LX est incommensurabile ipsi XN. & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine sunt incommensu-
75.huius. rabiles; ac propterea LO ON mediæ sunt cōmensurabiles potentia solum quæ rationale continent. quare LN mediæ apotome prima est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens mediæ est apotome primæ.



F. C. COMMENTARIVS.

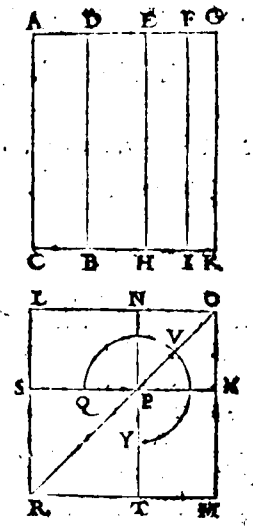
Sit AC 4, & AD R 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3, & si ad AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata: erit AF R 27,
FG R 3. & ob id parallelogrammum AI R 432, FK R 48, & totum AK parallelogrammum R 768; parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus R 48. ergo AB est R 768 minus 24, quod spacium etiam apotomen secundam, vel residuum secundum vocant. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur R 768 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit æquale quartæ parti quadrati 24, hoc est æquale 144, erit maior pars R 432, minor R 48. quare R 432 minus R 48 est latus quadratum, seu radix eius spacij residui R 768 minus 24.

THEOREMA. LXX. PROPOSITIO XCIV.

Si spacium contineatur rationali, & apotome tertia, recta linea spacium potens mediæ est apotome secunda.

Spacium .n. AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD, dico rectā lineam, quæ potest spaciū AB, mediæ esse apotomen secundam. sit .n. ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt, potētia solum cōmensurabiles & neutra ipsarum AG GD longitudine cōmensurabilis est expositæ rationali AC, totaq; AG plus potest, quam congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi cōmensurabiles lōgitudine. si igitur quartæ parti quadrati ipsius DG æquale parallelogrāmū ad AG applicetur, deficiēs figura quadrata, in partes cōmensurabiles
18.huius. ipsā diuidet. Itaq; secetur DG bifariā in E, & quadrato ipsius EG æquale ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG: & per puncta EFG ipsi

ipſi AC parallelæ ducantur EH FI GK. ergo AF FG commenſurabiles ſunt: atq; ob id parallelogrãmũ AI parallelogrammo FK eſt commẽſurabile. & quoniã AF FG commenſurabiles ſunt longitudine, erit & AG vtriq; ipſarũ AF FG longitudine cõmenſurabilis. eſt aũt rationalis AG. & ipſi AC incõmenſurabilis longitudine. & vtraq; igitur AF FG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine incommenſurabilis; ac propterea vtrumq; parallelogrammorũ AI FK eſt medium. Rurſus quoniã DE commenſurabilis eſt ipſi EG longitudine, erit & DG vtriq; DE EG cõmenſurabilis. ſed DG rationalis eſt, & ipſi AC incõmenſurabilis longitudine. rationalis igitur eſt & vtraq; DE EG, & ipſi AC longitudine incõmenſurabilis. ergo vtrumq; parallelogrãmorũ DH EK medium eſt. Quoniam igitur rectangulum AFG eſt æquale quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF; vt autem AF ad EG, ita parallelogrammũ AI ad EK parallelogrammũ; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo & vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN, & parallelogrãmum AI quidem æquale eſt quadrato LM; FK vero ipſi NX. ergo & EK eſt æquale MN. ſed MN æquale eſt LX, & EK ipſi DH. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. eſt autem & parallelogrãmum AK æquale quadratis LM NX. ergo reliquum AB eſt æquale ipſi ST, hoc eſt quadrato ex LN. & ob id recta linea LN ipſum AB ſpacium poteſt. Dico LN mediæ apotomen eſſe ſecundam. Oſtenſum enim eſt media oſtenſa ſunt parallelogrãma AI FK, & ſunt æqualia quadrantis ex LO ON, erit & vtrumq; quadratorum ex LO ON medium; & idcirco vtraq; LO ON media eſt. & quoniam commenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON commenſurabile. Rurſus quoniam oſtenſum eſt AI incommenſurabile ipſi EK, & LM ipſi MN incommenſurabile erit, hoc eſt quadratum ex LO rectangulo LON, quare & recta linea LO ipſi ON longitudine eſt incommenſurabilis. ſunt igitur LO ON mediæ commenſurabiles potentia ſolum. Dico eas etiam medium continere. Oſtenſum enim eſt medium contineri EK, atq; eſt rectangulo LON æquale, erit & LON medium. ergo LO ON mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea LN mediæ apotome ſecũda eſt, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens mediæ apotome eſt ſecũda.



16. huius.

22. huius.

6. huius.

22. huius.

ex demonſtratis ad 14 huius.

26. ſexti.

14. ſexti

Lem. ad 23 huius.

76. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, & AD R 27 minus R 15. erit DG R 15, & DE, vel EG R 3 3/4. quod ſi ad AG applicetur parallelogrammum æquale quadrato ex EG, deficiensque figura quadrata, quod ſit AF G, erit AF R 18 3/4, FG R 3 3/4. ideoque parallelogrammum AI eſt R 675, FK R 27, & totum AK parallelogrammum R 972, parallelogrammum autem DK R 540, EK R 135, & EI R 135 minus R 27 AB igitur AB R 972 minus R 540. quod ſpacium eſt apotome tertia. vel potius octaua, ſequenti diuiditur R 972 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit æquale

B 135. erit maior pars B 675, & minor R 27. ergo B B 675 minus B B 27 est latus quadratum. vel radix spacij illius residui B 972 minus B 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea spacium potens minor est.

Spacium enim AB contineatur rationali A C, & apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ spacium AB potest, minorem esse

4. diffi. tertiarum. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG G D rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AG commensurabilis est expositæ rationali AC longitudine, totaque AG plus potest, quàm GD, quadrato rectæ lineae sibi longitudine incommensurabilis. si igitur quartae parti quadrati ex DG aequale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura

16. huius. quadrata in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur D G bifariam in E, & quadrato ex EG aequale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata; quod sit AF G. ergo AF ipsi FG longitudine est incommensurabilis. Ducantur per puncta EFG ipsis AC BD parallelae EH FI GK. Quoniam igitur A G rationalis est, & ipsi AC longitudine com-

20. huius. mensurabilis, erit totum parallelogrammum AK rationale. Rursus quoniam incommensurabilis est D G ipsi A C longitudine, & sunt

22. huius. vtraeque rationales, erit parallelogrammum DK medium. Quòd cum AF ipsi FG longitudine sit incommensurabilis, erit & parallelogrammum AI incommensurabile parallelogrammo FK. constituatur parallelogrammo quidem AI aequale quadratum LM; parallelogrammo autem FK aequale quadratum

26. sext. NX auferatur, angulum habens eundem quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter O R, &

24. sexti. figura describatur. itaque quoniam rectangulum AFG est aequale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. sed vt AF quidem ad EG, ita est parallelogrammum AI ad ipsum EK: vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque est parallelogrammum AI aequale quadrato LM, & parallelogrammum FK aequale NX. ergo & FK aequale est MN. sed EK quidem est aequale parallelogrammo DH; MN vero ipsi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ, & quadrato NX est aequale. & quoniam totum AK aequale est quadratis LM NX, quorum DK est aequale gnomoni Y VQ, & NX quadrato; erit reliquum AB aequale quadrato ST, hoc est quadrato ex LN. ergo LN spacium AB potest. Dico LN irrationalem esse, quae minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale est, & aequale quadratis ipsorum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON rationale. Rursus quoniam parallelogrammum DK medium est, atq; est aequale ei quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON continetur

77. huius medium: ostensum autem est parallelogrammum AI incommensurabile ipsi FK. ergo & quadratum ex LO incommensurabile est quadrato ex ON; ac propterea LO ON potentia sunt incommensurabiles, quae faciunt compositum

qui

quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. Quare LN irrationalis est, quæ minor appellatur, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens minor est.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6. AD 7 minus R 14. *erit DG* R 14, *& DE, vel EG* ℞ 3 $\frac{1}{2}$. *Si vero ad AG applicetur parallelogrāmum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata, erit AF* 2 $\frac{1}{2}$ *plus* R 8 $\frac{3}{4}$; *FG* 3 $\frac{1}{2}$ *minus* R 8 $\frac{3}{4}$, *& parallelogrammum AI est* R 21 *plus* ℞ 315, *FK* 21 *minus* ℞ 315, *& totum AK* 42. *parallelogrammum vero DK est* ℞ 504, *CK* R 126. *& AB* 42 *minus* R 504. *quod spacium est apotome quarta, vel residuum quartum. si igitur* 42 *diuidatur in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit æquale quartæ parti* R 504, *hoc est* R 126, *erit maior pars* 22 *plus* R 126, *& minor* 21 *minus* ℞ 126. *ergo* ℞ *V.* 21 *plus* R 126 *minus* ℞ *V.* 21 *minus* R 126 *est latus quadratum, seu radix spacij residui* 42 *minus* ℞ 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO XCVI.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spaciū potens est, quæ cum rationali medium totum efficit,

Spaciū.n. AB. vt sit figura præcedente contineatur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectā lineam, quæ spacium AB potest, esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles; & congruens DG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC; totaq; AG plus potest, quā GD quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaq; secetur DG bifariam in puncto E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF incommensurabilis est ipsi FG longitudine. Ducantur per puncta EFG ipsi AC parallelæ EH FI GK. & quoniam AG incommensurabilis est ipsi AC longitudine, & sunt vtreq; rationales; erit parallelogrammum AK medium. Rursus quoniam rationalis est DG, & ipsi AC longitudine commensurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. Constituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratū LM; ipsi vero FK æquale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem; quē LM, videlicet LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum OR, & figura describatur. Similiter ostendemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quae cum rationali mediū totum efficit. Quoniam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atq; est æquale quadratis ipsarum LO ON: erit & compositum ex quadratis ipsarum LO ON medium. Rursus quoniam DK rationale est, & æquale ei, quod bis continetur LO ON; erit & quod bis LO ON continetur rationale. est autem AI incommensurabile ipsi FK. incommensurabile igitur est quadratum ex LO quadrato ex NO; ideoq; LO ON potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsorum quadratis medium; quod autem ipsis bis continetur rationale. ergo reliqua LN irrationalis est, quae vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens est, quaecum rationali medium totum efficit.

18. huius.

21. huius.

20. huius.

26. huius.

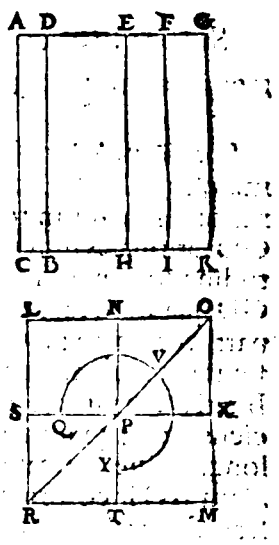
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD Ɍ 56 minus 4, erit DG 4, & DE vel EG 2: quod ſi ad AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ex CG, deficiensque figura quadrata, erit AF Ɍ 14 plus R 10; FG K 14 minus R 10. & parallelogrammum AI eſt Ɍ 504 plus R 360, FK Ɍ 504 minus R 360: totumque AK R 2016. At vero DK eſt 24, EK 12, & AB Ɍ 2016 minus 24. quod ſpacium eſt apotome quinta, vel reſiduum quintum. Diuidatur Ɍ 2016 in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit æquale 144, erit maior pars Ɍ 504 plus Ɍ 360, & minor Ɍ 504 minus R 360. quare R V. R 504 plus R 360 minus Ɍ V. R 504 minus R 360 eſt latus quadratum dicti ſpacij reſidui R 2016 minus 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma ſexta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cum medio medium totum efficit.

Spacium enim AB cõtineatur rationali AC, & apotoma ſexta AD| Dico rectam lineam, quæ ſpacium AB poteſt, eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. ſit. n. ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolũ commenſurabiles; & neutra ipſarum commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AC longitudine. totaq; AG plus poteſt, quàm congruẽs DG quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ſi igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommẽſurabiles ipſam diuidet. Itaq; ſecetur DG bifariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, & ſit AFG. incõmenſurabilis igitur eſt AF ipſi FG longitudine. vt autem AF ad FG, ita eſt parallelogrãmum AI ad ipſum FK. ergo AI ipſi FK eſt incõmenſurabile. & q̃m AG AC rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit parallelogrãmum AK medium. ſunt autem AC DG rõnales, & incommenſurabiles longitudine. mediũ igitur eſt & DK. quod cũ AG GD potentia ſolum commenſurabiles ſint, erit AG ipſi GD longitudine incommenſurabilis. ſed vt AG ad GD, ita eſt AK ad KD. incommenſurabile igitur eſt AK ipſi KD. itaq; conſtituatur parallelogrammo AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FH æquale auferatur quadratum NX, angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit eorum diameter OR, & figura deſcribatur. ſimiliter vt ſupra, oſtendemus rectam lineam LN ſpacium AB poſſe. Dico LN eſſe eam, quae cum medio mediũ totum efficit. Q̃m enim medium oſtenſum eſt AK, atq; eſt aequale quadratis ipſarum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON mediũ. Rurſus q̃m medium oſtenſum eſt DK, & eſt aequale ei, quod bis continetur LO ON, & quod bis LO ON continetur medium erit. Incõmenſurabile autem oſtenſum eſt AK ipſi KD. ergo & quadrata ex LO ON incommenſurabilia ſunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniã incommenſurabile eſt AI ipſi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommẽſurabile. ergo LO ON potentia ſolum commenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium. quod autem ipſis bis continetur medium, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. ergo LN irrationalis eſt, quae vocatur, cum medio medium totum efficiens, & poteſt AB ſpacium. recta igitur linea ſpacium AB potens eſt, quae cum medio medium totum efficit



6. diffin. tertiarum.

19. huius.

10. huius.

21. huius.

10. huius.

21. huius.

79 huius.

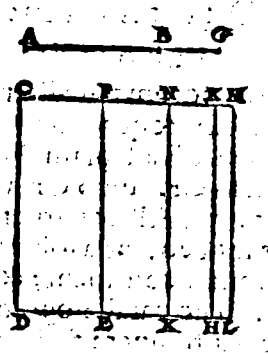
F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, AD ℞ 32 minus ℞ 20 erit DG ℞ 20 & DE, vel EG ℞ 5 si autem ad AG applicetur parallelogrammũ AFG æquale quadrato ex EG, & deficiẽs figura quadrata a, erit AF ℞ 8 plus ℞ 3 FG ℞ 8 minus ℞ 3: & idcirco parallelogrammũ AI ℞ 288 plus ℞ 108, FK ℞ 288 minus ℞ 108, & totum parallelogrammũ AK R 1152 parallelogrammum vero DK est ℞ 720 DH, ℞ 18 & AB ℞ 1152. minus ℞ 720 quod spaciũ est apotome sexta, vel sextũ residuũ & eius latus quadratũ, vel radix inuenietur esse R V. R 288 plus R 108 minus R V. 288 minus R 108.

THEOREMA LXXIV. PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatũ latitudinem facit apotomen primam:



Sit apotome AB irrationalis autẽ CD, & quadrato ex AB æquale parallelogrãmũ CE ad ipsam CD applicetur latitudinẽ faciens CF. dico CF apotomen esse primã. sit. n. ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quadrato quidẽ ex AG æquale ad ipsam CD applicetur CH: quadrato autem ex BG æquale applicetur KL. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. quorũ parallelogrammũ CE æquale est quadrato ex AB. ergo reliquum FL ei, quod bis AG GB cõtinetur est æquale. secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela dũcatur NX: vtrumq; igitur ipsorum FX LN est æquale ei quod AG GB continetur. & quoniã quadrata ex AG GB rationalia sunt, atq; est quadratis ex AG GB æquale parallelogrãmum DM; erit ipsum DM rationale; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. rursus quoniam medium est, quod bis continetur AG. GB, est q; ei, quod bis AG GB continetur, æquale parallelogrammum LF, erit ipsum LF mediũ, & applicatum est ad rationalẽ CD, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, ipsiq; CD longitudine incommensurabilis. & sunt quadrata quidem ex AG GB rationalia: quod autem bis continetur AG GB mediũ. quadrata igitur ex AG GB incommensurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur. sed quadratis ex AG GB aequale est parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est aequale FL. ergo CL ipsi LF est incõmensurabile. vt autẽ CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. incommensurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine: & sunt vtraeq; rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solũ commensurabiles; ac propterea CF est apotome. dico & primã esse. Quoniam. n. quadratorum ex AG GB medium proportionale est quod AG GB continetur; atq; est quadrato quidem ex AG aequale parallelogrammum CH; ei vero, quod AG GB cõtinetur aequale NL, & quadrato ex GB aequale KL. erit ipsorũ CH KL mediũ proportionale NL. vt igitur CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM. vt autẽ NL ad LK ita recta linea NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita est NM ad MK. & ob id rectangulũ CKM est æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. & quoniam quadratũ ex AG cõmensurabile est quadrato ex GB, erit & parallelogrãmũ CH parallelogrãmo KL cõmensurabile. sed vt CH ad KL ita est recta linea CK ad ipsã KM. cõmẽsurabilis igitur est CK ipsi KM. itaq; cũ duæ rectæ lineæ inæquales sint CM MF, & quartæ parti quadrati ex FM æquale parallelogrãmũ ad ipsã CM applicatũ sit, deficiẽs figura quadrata scilicet

74. huius.

7. secundi.

21. huius.

23. huius.

1. sexti.

74. huius. Lemma ad 55. huius

21. quinti. 17. sexti.

18.huius. ſcilicet CK KM continetur; ſitq; CK commenſurabilis ipſi KM: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt CM commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali CD. ergo CF eſt prima apotome. quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

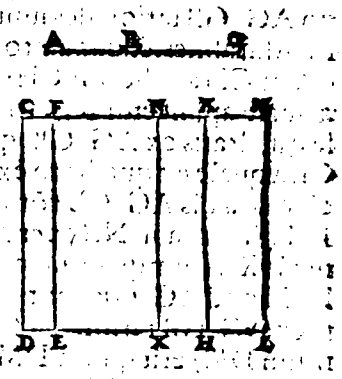
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R 33 *minus* R 3. *BG* R 3. *rationalis autem CD ſit* 6; *& ſi ad ipſam CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, quod eſt* 33, *latitudinem faciens CK, erit CK* 5 $\frac{1}{2}$. *& ſi ad eandem applicetur KL æquale quadrato ex GB, quod eſt* 3, *latitudinem faciens KM, erit KM* $\frac{1}{2}$, *& tota CM* 6. *Rurſus ſi ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod eſt* R 99, *latitudinem faciens FN, erit FN* R 2 $\frac{3}{4}$, *& eadem ratione NM eſt* R 2 $\frac{1}{4}$, *& tota FM* R 11. *ergo CF eſt* 6. *minus* R 11, *quæ eſt apotome prima.*

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO XCIX.

Quadratum mediæ apotomes primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam.

Sit apotome mediæ prima AB; rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammũ CE ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens CF. dico CF apotomẽ eſſe ſecundam.



15.huius. ſit n. ipſi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent; & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammũ CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL eſt æquale quadratis ex AG GB mediis exiſtẽtibus. quare & CL eſt medium; & ad rationalem CD applicatum eſt, latitudinem faciens CM. rationalis

75.huius. igitur eſt CM, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis, itaq; quoniã CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB æquale eſt parallelo-

2.ſecundi & 71.huius. grammo CE, erit reliquum, quod bis continetur AG GB æquale ipſi FL. eſt autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur eſt & FL; & ad rationalem FE applicatum eſt, latitudinem faciens FM, quare FM eſt rõnalis, & ipſi CD commenſurabilis longitudine. & qm quadrata quidem ex AG GB,

1.ſexti. hoc eſt parallelogrammũ CL medium eſt; quod autem bis continetur AG GB

10.huius. videlicet FL eſt rationale: erit CL incõmẽſurabile ipſi LF. vtaũt CL ad LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM ipſi MF longitudine eſt incõmenſurabilis. & ſunt vtræq; rõnales. ſunt igitur CM MF rationales potentia ſolũ cõmenſurabiles. ideoq; CF apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. ſecetur. n. FM bifariam in

74.huius. punctο N. & per N ipſi CD parallela ducatur NX. vtrumq; igitur parallelogrãmorum FX, NL eſt æquale ei, quod continetur AG GB. & qm quadratorũ ex

Lem.ad 55 huius. AG GB medium proportionale eſt, quod AG GB cõtinetur; eſtq; quadratũ ex AG æquale parallelogrãmo CH; quod aũt continetur AG GB æquale parallelogrammo NL, & quadratum ex GB æquale ipſi KL: erit parallelogrammorũ CH KL mediũ proportionale NL. eſt igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. Sed

11.quinti & 27.ſexti. vt CH ad NL, ita eſt recta linea CK ad ipſam NM; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita eſt NM ad MK; ac ꝓpterea rectãgulũ CKM eſt æquale quadrato ex NM, hoc eſt quartæ parti quadrati ex FM. & qm quadratũ ex AG cõmenſurabile eſt quadrato ex CB, erit & CH parallelogrãmũ parallelogrãmo KL cõmenſurabile, hoc eſt recta linea CK cõmẽſurabilis ipſi KM. ꝙ cum

duę

duæ rectæ lineæ inæquales sint CM MF; quartæ autem parti quadrati ex MF æqualeparallelogrãmũ CKM ad maiorẽ CM applicatũ sit, deficiens figura quadrata, & in partes cõmẽsurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quã MF quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: atq; est congruõs FM expositę rationali CD commensurabilis. quare CF est apotome secunda. quadratum igitur mediæ apotomę primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. 18 huius. 2. diffin. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

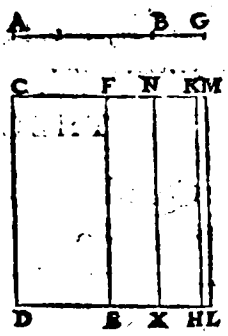
Ex iam demonstratis perspicuum fit, vt apotomæ quadratum inueniamus, nos vti septima propositione 2 libri, non autem quarta, vt ad 34 huius dictum est.

Sit AB R. 972 minus RR 108, BG RR 108, rationalis autem CD sit 6. & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, quod est R. 972, latitudinem faciens CK; erit CK R 27: & si ad eandem applicetur KL æquale quadrato ex GB quod est R 108 latitudinem faciens KM; erit KM R 3. & tota CM R 48. Rursus si ad CD applicetur parallelogrammum FX æquale rectangulo AGB, quod est 18, latitudinem faciens FN; erit FN 3, itemq; NM 3, & tota FM 6. ergo CF est R 48 minus 6, quæ apotome secunda.

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit appotomen tertiam;

Sit mediæ apotome secũda AB; rationalis autẽ CD & quadrato ex AB æquale parallelogrãmũ CE ad ipsam CD applicetur, latitudinẽ faciẽs CF. Dico CF apotomen esse tertiam. sit enim ipsi AB congruens BC. ergo AG GB mediae sunt potentia solum commensurabiles, quae medium continent: & quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciẽs CK. quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totũ igitur CL est æquale quadratis ex AG GB: & sunt quadrata ex AG GB media. ergo & CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB secetur FM bifariã in N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. Vtrumq; igitur parallelogrãmorũ FX NL est æquale ei, ꝙ AG GB continetur. est autem quod continetur AG GB medium. ergo & medium est FL, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. Quare & FM est rationalis; & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & qm̃ AG GB potentia solum commensurabiles sunt erit AG ipsi GB incõmensurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectangulo AGB est incommensurabile. sed quadrato quidẽ ex AG cõmensurabilia sunt ex AG GB quadrata; rectangulo aũt AGB cõmensurabile est ꝙ bis AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, ꝙ bis AG GB continetur, sũt incommensurabilia. at quadratis ex AG GB æquale est parallelogrãmum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. Vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF incõmensurabilis est longitudine; & sunt vtræq; rõnales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commẽsurabilis. & ob id apotome est CF. dico & tertiam esse. Quoniã. n. quadratũ ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit



76. huius. 23. huius. 7. secundi. 73. huius. Lem. ad 23. huius. Ex demonstratis in 24 huius. 1. sexti. 10. huius. 74. huius.

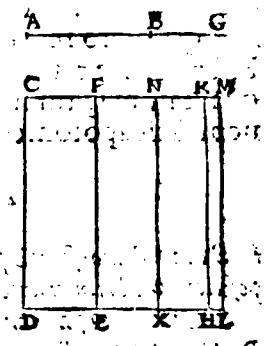
erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL cõmensurabile. ergo & recta linea CK est cõmensurabilis ipi KM. & quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est rectangulum AGB; atq; est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL, erit parallelogrammorũ CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK, ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales sunt CM MF; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens figura quadrata, quod in partes cõmensurabiles ipsam diuidit; recta linea CM plus potest, quam MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & neutra ipsarum CM MF longitudine cõmensurabilis est exposite rationali CD. ergo CF tertia est apotome. quadratũ igitur mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen tertiam.

Lem. ad 55 huius.

1. sexti. 11. quinti. 23 sexti.

18. huius.

3. diffi. tertiarum.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 882 minus RR 18, BG RR 18, & rationalis CD sit 6. quod si ad CD, applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK R 24. & si applicetur KL æquale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM R 2. & tota CM R 32. præterea si ad eandem CD applicetur FX æquale rectangulo AGB, quod est R 136, latitudinem faciens FN, erit FN R 34. & tota FM R 14. ergo CF est R 32 minus R 14, quæ est apotome tertia.

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CL.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

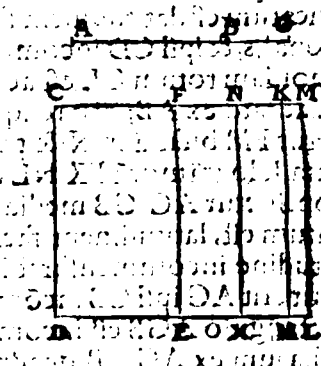
Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quartam. sit enim ipsi AB cõgrues BG. ergo AG GB potẽtia incõmensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG GB quadratis rationale; q̃ autem bis ipsis continetur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autẽ ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totũ igitur CL quadratis ex AG GB est æquale. atq; est compositum ex quadratis AG GB rationale. ergo & rationale est CL; & ad rationalẽ CD applicatum est, latitudinem faciẽs CM. quare CM est rationalis & ipsi CD longitudine cõmensurabilis, & q̃m totũ CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB: erit reliquũ FL æquale ei, q̃ bis AG GB continetur. Itaq; secetur FM bifariam in N & per N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumq; igitur parallelogrãmorum FX NL est æquale ei, quod continetur AG GB, & quoniã q̃ bis continetur AG GB mediũ est, & æquale parallelogrãmo LE. erit & LF me-

dium.

77. huius.

1. huius.

7. secundi.



dium & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. ergo FM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam compositũ ex quadratis ipsarum AG GB est rationale, quod autem bis AG GB cõtinetur medium; erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommensurabilia. quadratis autem ex AG GB æquale est parallelogrammum CL & ei, quod bis AG GB continetur est æquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. sed vt CL ad LF, ita est CM ad MF. quare CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis: & sunt vtraq; rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & eam ob causam apotome est CF: dico & quartam esse. Quoniam enim AG GB potentia sunt incommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale est parallelogrammum GH: quadrato autem ex GB est æquale KL. incommensurabile igitur est GH ipsi KL. sed vt GH ad KL, ita est CK ad KM. ergo CK ipsi KM, est incommensurabilis longitudine. & quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est AGB rectangulum: atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum GH; quadrato autem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL: erit NL medium proportionale parallelogrammorum CH KL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita CK ad MN, & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt CK ad MN ita NM ad MK, ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. itaq; quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt CM ME, & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiẽs figura quadrata, quod est CKM, & in partes incommensurabiles ipsam dividit: recta linea CM plus potest, quam ME quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & est tota CM longitudine commensurabilis expositæ rationali CD. ergo CF quarta est apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

23.huius.
1.sexti.
10.huius.
74.huius.
1.sexti.
10.huius.
Lem.ad 55 huius.
1.sexti.
31.quinti.
17.sexti.
19.huius.
4.diffin.tertiarum.

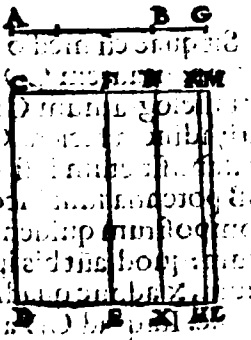
Fiat CO M MN E N F K R L F &

Sit AB R V. 21 plus R 315, minus R V. 21 plus R 315. BG R V. 21 minus R 315; ratio autem ED ad AG. Si ad CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK 3 1/2 plus R 8 3/4: & si applicetur KL æquale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM 3 1/2 minus R 8 3/4: & tota CM 7. Quòd si ad eandem CD applicetur FX æquale rectangulo AGB, videlicet R 126, latitudinem faciens FN, erit FN R 3 1/2 & ipsa FM R 12. est igitur CF 7 minus R 24, quæ est apotome quarta.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

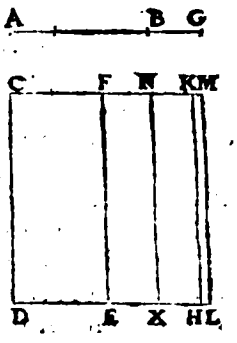
Quadratum eius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quæcum rationali medium totum efficit AB; rationalis autem CD; & quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE latitudinem faciens CF. dico CF apotomen esse quintam. Sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rectæ lineæ potentia sunt incommensurabiles, quæ facientes compositum quidẽ ex quadratis ipsarum medium, quod autem bis ipsis cõtinetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammum CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale applicetur KL latitudinẽ faciẽs KM: totũ igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. sed cõpositum ex quadratis ipsarum AG GB est medium. ergo & medium est parallelogrammum CL, &



38.huius.

ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciēs
23.huius. CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB, erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. Itaq; secetur EM bifariam in puncto N, & ab ipso N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumq; igitur FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quod bis continetur AG GB rationale est, & æquale parallelogrammo FL; erit & FL rationale; & ad rationalem EF applicatū est
21.huius. latitudinem faciens FM. ergo FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. est autem parallelogrammum CL medium, &
1.sexti. FL rationale. incommē
10.huius. surabile igitur est CL ipsi LF. & vt CL ad LF, ita CM ad MF. ergo CM ipsi MF
74.huius. longitudine est incommensurabilis. & sunt vtræq; rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ob idque apotome est CF. Dico & quintam esse. similiter enim demonstrabimus rectangulum CKM esse æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. quòd cum quadratum ex AG incommensurabile sit quadrato ex GB; sitq; quadratum ex AG parallelogrammo CH æquale, quadratum autem ex GB parallelogrammo KL
1.sexti. erit CH ipsi KL incommensurabile. sed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK
10.huius. ipsi KM longitudine est incōmensurabilis. Quoniā igitur duæ rectæ lineę CM
19.huius. MF inæquales sunt, & quartę parti quadrati ex FM æquale adipsam GM applicatū est, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles ipsam diuidit, recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectę lineæ sibi lōgitudine
6.tertiarum diffi. incōmensurabilis, atq; est congruens FM cōmensurabilis lōgitudine expositæ rationali CD. ergo CF quinta apotome est. quadratū igitur eius, quae cū rōnali mediū totū efficit ad rationalē applicatum latitudinē facit apotomē quintam.



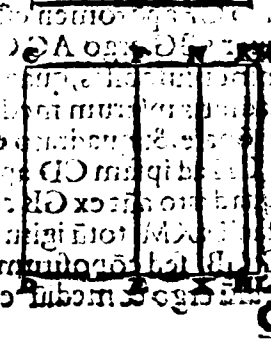
COMMENTARIVS.

Sit AB BV. R 288 plus R 207 minus R V. 288 minus R 207. BG R V. R 288 minus R 207: rationalis autem CD sit 6. quod si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK R 8 plus R 5 3/4. & si applicetur KL aequale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM erit KM R 8 minus R 5 3/4, & tota CM R 32. Rursus si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, latitudinē faciens FN; erit FN R 1/2 & tota FM 3. quare CF est R 32 minus 3 quae est apotomen quintam.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quae cū medio medium totum efficit AB;
rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale
parallelogrāmum CE ad ipsam CD applicetur,
latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse
sextam. sit enim ipsi AB congruēs BG. ergo AG
GB potentia sunt incommensurabiles, facientes
compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod aūt bis ipsis AG GB continetur medium, & adhuc quadratis ipsarum incommensurabile. Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG
æquale parallelogrāmū CH, latitudinem faciēs



CK

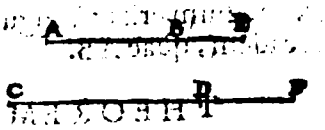
CK: quadrato aũt ex BG æquale applicetur KL, latitudinẽ faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB: ac propterea CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM rationalis est & ipsi CD longitudine incommensurabilis. Quoniam igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. atque est quod bis continetur AG GB medium. ergo & FL est medium & ad rationalem FE applicatum est, latitudinẽ faciens FM. est igitur FM rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommensurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur; atq; est quadratis quidem AG GB æquale parallelogrammum CL, ei vero, quod bis continetur AG GB æquale FL: erit CL ipsi LF incommensurabile. sed vt CL ad LF, ita est CM ad MF. quare CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine. & sunt vtræq; rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id CF est apotome. Dico & sextam esse. Quoniam. n. FL est æquale ei, quod bis continetur AG GB, secetur FM bifariã in puncto N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrumq; igitur parallelogrammorum FX NL est æquale rectangulo AGB. quoniam AG GB potentia sunt incommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex BG. sed quadrato quidem ex AG est æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipsi KL est incommensurabile. vt autem CH ad KL, ita est CK ad KM. incommensurabilis igitur est CK ipsi KM. quòd cum quadratorum ex AG GB medium proportionale sit rectangulum AGB, sitq; quadrato ex AG æquale CH, & quadrato ex GB æquale KL; rectangulo q; AGB æquale NL: erit & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione, CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ipsarum est commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF sexta est apotome. Quadratum igitur eius, quæ cum medio mediam totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V. R 396 plus R 288 minus R V. R 396 minus R 288; BG R V. R 396 minus R 288; & rationalis CD sit 6. si vero ad CD applicetur parallelogrammum CH, latitudinem faciens CK; erit CK R 12 plus R 8, & si applicetur KL æquale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM; erit KM R 12 minus R 8, & tota CM R 44. Rursus si ad CD applicetur FX æquale rectangulo AGB, quod latitudinem faciat FN, erit ea R 3, & tota FM R 12. ergo CF est R 44 minus R 12, quæ est apotome sexta.

THEOREMA LXXX. PROPOSITIO CIV.

Recta linea apotomæ longitudine commensurabilis, & ipsa apotome est atque ordine eadem.



Sit apotome AB, & ipsi AB longitudine cõmensurabilis sit CD. dico CD apotomẽ esse atq; ordine eandẽ, quæ AB. quoniam. n. apotome est AB, sit ipsi congruens BE. ergo AE EB rationales sunt potentia solũ commensurabiles. & fiat proportio BE ad DF eadem, quæ est AB ad CD. quare vt vna ad vnam, ita erunt oẽs ad omnes. est igitur vt AB ad CD, ita AE ad CF. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. ergo & AE ipsi CF longitudine cõmensurabilis erit. & BE ipsi DF. sunt autem AE EB rationales potentia solum cõmensurabiles. ergo & CF FD rationales erunt potẽtia solũ cõmensurabiles; ac propterea CD apotome est. Dico & ordine eãdẽ esse. Quoniã. n. est vt AE ad CF, ita BE ad FD, erit permutando vt AE ad EB, ita CF ad FD. vel igitur AE plus

74. huius

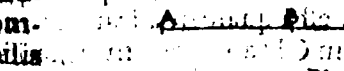
12. quinti

10. huius

A
B

73. huius

potest, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & siquidem commensurabilis est CF plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; & siquidem AE commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & CF expositæ rationali longitudine commensurabilis erit: si vero EB est commensurabilis, & DF commensurabilis erit: & si neutra ipsarum AE EB commensurabilis est expositæ rationali longitudine, & neutra ipsarum CF FD eidem longitudine erit commensurabilis. quòd si AE plus possit, quam EB quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; & CF plus poterit, quã FD quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis: & siquidem AE sit commensurabilis expositae rationali longitudine, & CF eidem longitudine commensurabilis erit: si vero BE, & DF: & si neutra ipsarum AE EB, & neutra ipsarum CF FD erit expositae rationali longitudine commensurabilis. ergo CD apotome est, & ordine eadem, quae AB.



F. COMMENTARIVS.

A Et BE ipsi DF.] *Quoniam enim est vt AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF, vt AE ad CF, hoc est vt AB ad CD. commensurabilis igitur est, & BE ipsi DF longitudine.*

10. huius.

B Ergo & CF FD rationales erunt potentia solum commensurabiles.] *Nam cũ sit vt AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutando vt AE ad EB, ita CF ad FD: sunt autem AE EB rationales potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD rationales potentia solum commensurabiles erunt.*

10. huius.

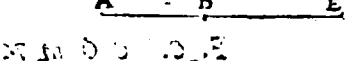
THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO CV.

Recta linea a mediae apotomae commensurabilis, & ipsa mediae apotome est, atque ordine eadem.

Sit mediae apotome AB, & ipsi AB longitudine cõmensurabilis sit CD. Dico CD mediae apotomen esse, & ordine eandem. quoniam enim mediae apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens. ergo AE EB mediae sunt potentia solum cõmensurabiles, & fiat vt AB ad CD, ita BE ad DF. sunt autem AE EB mediae potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD mediae potentia solum commensurabiles erunt; ac propterea mediae apotome est CD. ostendendum est & ordine eandem esse, quae AB. Quoniam enim vt AE ad EB, ita CF ad FD; vt autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad CFD rectangulum: erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. sed quadratum ex AE commensurabile est quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit, si vero rectangulum AEB medium est, & medium erit rectangulum CFD. mediae igitur apotome est CD, atque ordine eadem, quae AB.

75. 76. huius

Lem. ad 25. huius.



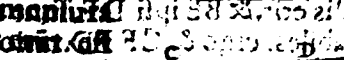
THEOREMA LXXXII. PROPOS. CVI.

Recta linea minori commensurabilis, & ipsa minor est.

Sit minori AB, & ipsi AB commensurabilis sit CD. dico & CD minorem esse. fiant enim eadem prius, & quia AE EB potentia sunt incommensurabiles, & CF FD potentia incommensurabiles erunt. est

77. huius. A

B

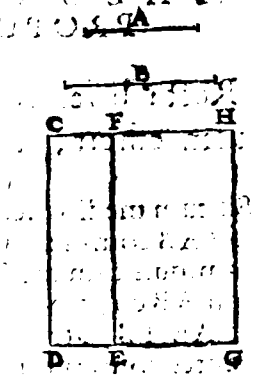


ut AB ad EB, ita CF ad FD. quare & vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex

quadra-

quadratum ex FD: & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando, commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF. ergo & compositum ex quadratis ipsarum AE EB compositio ex quadratis CF FD commensurabile erit. sed compositum ex quadratis AE EB est rationale, ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. rursus quoniam est vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD; & permutando, commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CE: erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commensurabile. sed rectangulum AEB medium est. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium, ergo CD est minor. 77. huius.

ALITER. Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico B minorem esse; Exponatur enim CD rationalis: & quadrato ex A aequale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudine faciens CF. apotome igitur quarta est CF. quadrato autem ex B aequale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A aequale est parallelogrammum CE, quadrato autem ex B aequale FG. ergo CE commensurabile est ipsi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH. commensurabilis igitur est CF ipsi FH longitudine. sed CF est apotome quarta. ergo & FH apotome quarta est; & spacium FG rationali, & apotoma quarta continetur. recta igitur linea spacium potens minor est. potest autem spacium FG ipsa B. ergo B est minor.

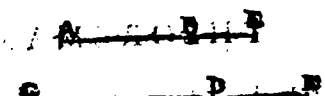


101. huius. 104. huius. 95. huius.

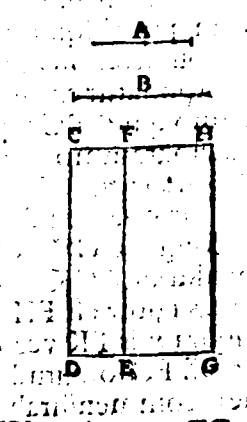
TEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Rectalinea commensurabilis ei, quae cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiēs AB: & ipsi AB commensurabilis sit C D. dico CD esse eam, quae cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes cōpositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur rationale. & eadem construantur. similiter demōstrabitur, vt prius CF FD in eadem esse proportione, in qua AE EB; & cōpositum ex quadratis ipsarum AE EB cōmensurabile esse composito ex quadratis CF FD; rectangulū autem AEB rectangulo CFD commensurabile. quare & CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipsis continetur, rationale. ergo CD est, quae cum rationali medium totum efficit.



79. huius.

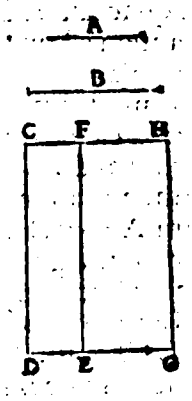


78. huius.

ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiēs A, & ipsi A cōmensurabilis B. dico B esse eam, quae cū rationali medium totū efficit. Exponatur enim rationalis CD: & quadrato quidē ex A aequale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF est apotome quarta. quadrato autem ex B aequale

101. huius.

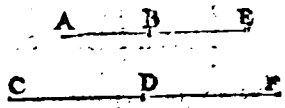
FG ad ipſam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. ſed quadrato ex A æquale eſt parallelogrammũ CE; quadrato autem ex B æquale FG, ergo CE eſt commenſu-
104. huius. rabile ipſi FG; ob idq; recta linea CF ipſi FH longitu-
96. huius. dine eſt commenſurabilis. apotome autem quinta eſt CF. ergo & FH eſt apotome quinta; eſtq; FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea ſpacium potens eſt, quæ cũ rationali medium totum efficit. ſed ipſa B poteſt ſpaciũ FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens eſt.



THEOREMA LXXXIV. PROPOSITIO CVIII.

Recta linea commenſurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.

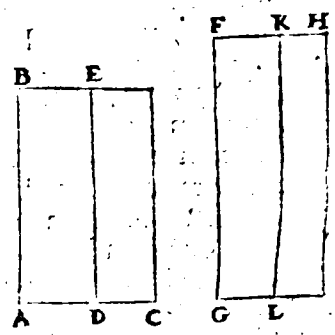
Sit cum medio medium totum efficiens AB:
79. huius. & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. dico CD eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. ſit ipſi AB congruens BE, & eadem conſtruãtur. ergo AE EB potentia incommẽſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium; quod autem ipſis continetur medium incommenſurabileq; cõpoſito ex ipſarum quadratis. & ſunt AE EB cõmenſurabiles ipſis CF FD vt oſtenſum eſt: & compoſitũ ex quadratis AE EB commenſurabile cõpoſito ex quadratis CF FD: rectangulũq; AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incõmenſurabiles ſunt, facientes compoſitũ quidem ex quadratis ipſarum
79. huius. mediũ; quod autem ipſis continetur mediũ, & incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. ergo CD eſt quę cum medio medium totum efficit.



THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO. CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum ſpacium poteſt, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur. dico eam quę reliquum ſpacium EG poteſt, vna fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem. exponatur enim rationalis FG: & parallelogrammo quidẽ BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquũ igitur CE eſt æquale LH. itaque quoniam rationale eſt BC, medium autem BD: atque eſt BC æquale GH, & BD ipſi GK; erit GH rationa-
21. huius. le; mediũ autẽ GK, & ad rõnalẽ FG applicatũ eſt. ra-
23. huius. tionalis igitur eſt FH, & ipſi FG longitudine commenſurabilis FK vero rationalis, & incõmenſura-
13. huius. bilis ipſi FG longitudine. ergo FH ipſi FK longitu-
74. huius. dine incommenſurabilis eſt, & HF FK rationales ſunt, potentia ſolum commenſu-

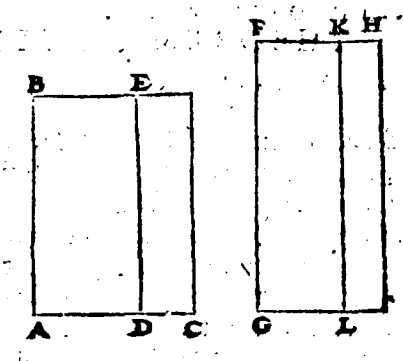


mensurabiles; ac propterea HK est apotome. ipsi vero congruens KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectę lineæ commensurabilis. atq; est tota HF commensurabilis longitudine expositæ rationali FG. ergo HK prima est apotome. recta autem linea quę potest spaciũ rationale, & apotoma primæ contentũ est apotome. ergo quæ potest LH hoc est CE apotome est. quòd si HF plus possit, quàm FK quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine; estq; tota HF expositæ rationali FG longitudine cõmensurabilis; erit HK apotome quarta. & quæ potest spaciũ rationale, & apotomæ quartæ cõtentũ minor est. quae igitur potest spaciũ LH, videlicet EC, est minor. 1. tertiarũ diffi, 94. huius. 4. diffin. tertiarum, 95. huius.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

Rationali de medio detracto aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali mediũ totũ efficiens.

De medio enim BC rationale BD detrahatur. dico rectã lineam, quae reliquum spacium EC potest, vnam duarum irrationalium fieri, vel mediae apotomen primã, vel eam, quae cum rationali medium totum efficit. exponatur enim rationalis FG, & ad ipsam similiter spacia applicẽtur; erit rationalis quidem FH, & ipsi FG longitudine incommensurabilis; rationalis autem FK, & incommensurabilis ipsi FG lõgitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia solum commensurabiles, ac propterea apotome est HK, & ipsi cõgruens KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis; atq; est congruens FK commensurabilis expositæ rationalis FG longitudine: erit HK apotome secunda. est autem FG rationalis. ergo quæ potest spacium LH, hoc est CE, mediæ est apotome prima. quòd si HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; atq; est congruens FK commensurabilis expositæ rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. recta igitur linea potens spacium EC est quæ cum rationali medium totum efficit.

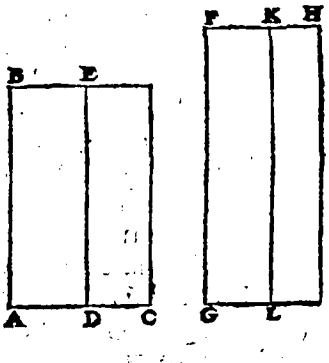


23. huius, 21. huius. 74. huius. 2. diffin. tertiarum. 93. huius. 5. diffi. tertiam. 99. huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO CXI.

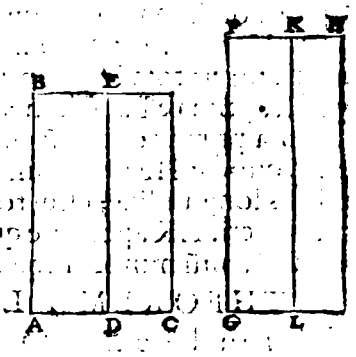
Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliq; duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Detrahatur enim vt in propositis figuris de medio BC mediũ BD, quod sit incõmensurabile toti. dico rectam lineã, quae potest spaciũ CE, vnã esse ex duabus irrationalibus; vel mediae apotomen secundã, vel eã, quae cũ medio mediũ totũ efficit. Quoniã enim mediũ est vtrũq; ipsorũ BC BD, & BC incõmensurabile est ipsi BD, hoc est GH ipsi GK; erit HF ipsi FK incommensurabilis longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia solum cõmensurabiles; & ob id apotome est HK, & ipsi con-



23. huius, 74. huius,

congruens KF, itaq; vel HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & si quidem commensurabilis, & neutra ipsarum HF FK commensurabilis est expositæ rationali FG longitudine; erit HK apotome tertia. rationalis aũt est KL; & rectangulum rationali, & apotoma tertia contentũ irrationale est. ergo recta linea, quæ ipsum potest, est irrationalis, & vocatur mediæ apotome secunda. Si vero HF plus potest, quã FK quadrato rectæ lineæ sibi incõmensurabilis longitudine, & neutra ipsarũ HF FK longitudine commensurabilis est expositæ rationali FG; erit HK apotome sexta. at recta linea potens quod rationali, & apotoma sexta continetur est quę cum medio medium totum efficit. ergo quæ potest spaciũ LH, hoc est EC est cum medio medium totum efficiens.

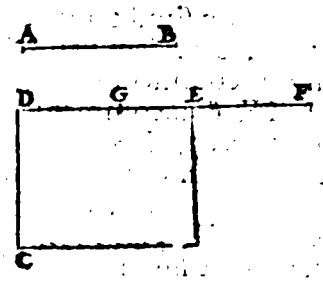


8. diff. tertia huius.
94. huius.
6. diff. tertiarum.
97. huius.

THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO CXII.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB. Dico AB non esse eandem, quę ex binis nominibus. sit.n. si fieri potest; exponaturq; rationalis DC, & quadrato ex AB æquale rectangulũ CE ad ipsã DC applicetur latitudinem faciens DE. Qm igitur apotome est AB, erit DE apotome prima. sit ipsis congruẽs EF. ergo DF FE rationales sunt potentia solũ commẽsurabiles: & DF plus potest, quã FE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commẽsurabilis: atq; est DF cõmẽsurabilis expositæ rationali CD longitudine. rursus qm ex binis nominibus est AB, erit DE ex binis nominib. prima. Diuidatur in nomina ad pũctũ G, sitq; DG maius nomẽ. ergo DG GE rõnales sunt, potẽtia solũ commensurabiles: & DG plus potest, qã GE quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: & maior DG longitudine commensurabilis est expositae rationali DC. quare DF ipsi DG longitudine est commensurabilis. & reliquae igitur FG cõmẽsurabilis erit. Itaq; qm DF commensurabilis est ipsi FG, atq; est rationalis DF; erit & FG rationalis. rursus qm DF commẽsurabilis est ipsi FG longitudine, atq; est DF ipsi FE incõmẽsurabilis longitudine; erit & FG ipsi FE longitudine incommensurabilis: & sunt rationales. ergo GF FE rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est EG. sed & rationalis. Quod fieri non potest. ergo apotome non est eadem, quae ex binis nominibus.



98. huius.
1. diff. tertiarum
61. huius.
37. huius.
12. huius.
Ex. de mon strratis ad 17. huius.
74. huius.

Apotome, & quæ post ipsã sunt irrationales, neq; mediæ, neq; inter se eaedẽ sunt: quadratum.n quod à medię fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem, & ei, ad quã applipcãtur, longitudine incommẽsurabilem. q autem ab apotoma fit ad rationalem applicatũ, latitudinem facit apotomen primam. q fit à mediae apotoma prima ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundã. Quod fit à mediae apotoma secunda ad rationalẽ applicatum latitudinem facit apotomen tertiã. q fit à minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. q ab ea, quae cũ rationali mediũ totũ efficit ad rõnalẽ applicatũ latitudinẽ facit apotomen quintã. q ab ea, quae cum medio mediũ totũ efficit ad rationalem applicatũ latitudinem facit apotomen sextã. Quoniã igitur dictae latitudines differunt tũ à prima, tum inter se: à prima quidem, q rationalis sit, inter se vero, q ordine non sint eaedem; manifestũ est & ipsas irrationales inter se differentes esse, & ostensum est apotomen

98. huius
99. huius
101. huius
102. huius
103. huius

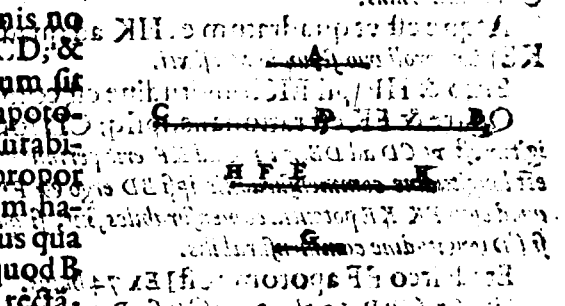
non

non esse eandem, quæ ex binis nominibus: quadrata autem apotomæ, & eatũ quæ sunt post apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiusdem ordinis: cuius & illę sunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quę est ex binis nominibus, & earum, quæ post ipsam sunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis, cuius & illæ sunt. ergo rectae lineae, quae sequuntur apotomen, & quae sequuntur eam, quae ex binis nominibus, inter se differunt, ita vt omnes sint numero tredecim, videlicet.

1 Media.
2 Quæ ex binis nominibus
3 Quæ ex binis mediis prima
4 Quæ ex binis mediis secunda
5 Maior
6 Rationale ac medium potens
7 Bina media potens
8 Apotome
9 Mediæ apotome prima.
10 Mediæ apotome secunda.
11 Minor.
12 Cum rationali medium totum efficiens.
13 Cum medio medium totum efficiens.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione, & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



Sit rationalis A, ea, quæ est ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD, & quadrato ex A æquale rectangulum sit quod BC, EF continetur. dico EF apotomen esse, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis CD, DB, & in eadem proportione, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Fit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD, & G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC, EF est æquale ei, quod BD, G continetur: erit vt CB ad BD, ita G ad EF: maior autem est CB, quam BD. ergo & G quam EF maior erit. sit ipsi G æqualis EH. est igitur vt CB ad BD, ita HE ad EF. & dividendo vt CD ad DB, ita HF ad FE. fiat vt HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & vtra HK ad totam KF est vt FK ad KE. vt enim vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. sed vt FK ad KE, ita CD ad DB. & vt igitur HK ad KF, ita CD ad DB, commensurabile autem est quadratũ ex CD quadrato ex DB, ergo & quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile.

ſurabile, atq; eſt vt quadratũ ex HK ad quadratũ ex KF, ita recta linea HK ad KE, q̃m tres rectae lineae HK KF KE deinceps proportionales ſunt, cõmẽſurabilis igitur
G eſt HK ipſi KE longitudine. ergo & HE ipſi EK longitudine eſt cõmenſurabilis. & quoniam quadratum ex A eſt aequale ei, quod
11. huius. HE BD continetur; rationale autẽ eſt quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum eſt rationalis igitur eſt HE, & ipſi BD longitudine commenſurabilis; ideoque & EK, quae eſt incommenſurabilis ipſi HE rationalis erit, & ipſi BD commenſurabilis longitudine. Q̃m igitur eſt vt CD ad DB, ita FK ad KE; ſunt autẽ CD DB potentia ſolum commenſurabiles: & FK KE potentia ſolum commenſurabiles
H erunt. rationalis autem eſt KE, & ipſi BD cõmenſurabilis lõgitudine. quare & FK eſt rationalis, ipſiq; CD longitudine commenſurabilis. ſunt igitur FK KE rationales, & potentia ſolum commenſurabiles: & idcirco EF apotome eſt
11. huius. Itaq; vel CD plus poteſt, quàm DB quadrato rectae lineae ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. & ſi quidem commenſurabilis, etiam FK plus poterit, quam KE quadrato rectae lineae ſibi longitudine cõmenſurabilis. & ſi CD commenſurabilis eſt expoſitae rationali longitudine, & FK eidem commenſurabilis erit; ſi autem BD, & KE. & ſi neutra ipſarum CD DB, & neutra ipſarum FK KE. Quod ſi CD plus poteſt, quàm DB quadrato rectæ lineae ſibi incommenſurabilis longitudine, & FK plus poterit, quam KE quadrato rectæ lineae ſibi longitudine incommẽſurabilis, & ſi BD, & KE. & ſi neutra ipſarum CD DB, & nautram ipſarum FK KE. ergo EF apotome eſt, cuius nomina FK KE cõmenſurabilia ſunt nominibus CD DB eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14. ſexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex his quæ à nobis demonſtrata ſunt ad 16. quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF eſt vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commenſurabile autem eſt quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim (B ea, quæ ex binis nominibus.*

E Ergo & quadratum ex HK quadrato ex KF eſt commenſurabile] *Ex 22 ſexti & decima huius.*

F Atque eſt vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario ſecundo 20. ſexti.*

G Ergo & HE ipſi EK longitudine eſt commenſurabilis] *Ex 16 huius.*

H Quare & FK eſt rationalis, ipſiq; CD longitudine commenſurabilis] *Quoniã igitur eſt vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. ſed KE eſt longitudine commenſurabilis ipſi BD. ergo & FK ipſi CD commenſurabilis erit longitudine. quod cum FK KE potentia comenſurabiles ſint, ſitque rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipſi CD longitudine commenſurabilis.*

K Et idcirco EF apotome eſt] *Ex 74 huius.*

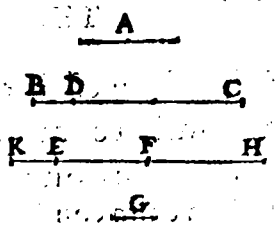
Sit A 2, CB R 12 plus 3, vt CD ſit R 12, DB 3. & ſi quadratum ex A, quod eſt 4, applicetur ad DB latitudinem faciens G, erit G 1 1/3, cui æqualis ſit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE ad EF videlicet vt R 12 plus 3 ad 3, ita 1 1/3 ad alium, multiplicabimus igitur 3 per 1 1/3 producetur 4. & 4 diuidemus per R 12 plus 3, hoc eſt applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidẽ hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per apotomen ipſi reſpondentem, hoc eſt per R 12 minus 3, producetur 3. rurſus multiplicemus 4 per eandem R 12 minus 3. producitur R 192 minus 12. quare ex 17 ſeptimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad R 192 minus 12. ad 3 applicatæ latitudinem faciet eandem, quã 4. ſi applicetur ad R 12 plus

ſed

3. sed R 192 *minus* 12 *applicata ad* 3 *latitudinem facit* R 21 $\frac{1}{3}$ *minu* 4. *quadratum igitur rationalis* 2, *videlicet* 4 *ad eam, quę est ex binis nominibus secunda, hoc est ad* R 12 *plus* 3 *applicatum latitudinem facit* R 21 $\frac{1}{3}$ *minus* 4, *quae est secunda apotome, cuius nominae commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportione.*

PROBLEMA XXIV. PROPOSITIO CXIV.

Quadratum rationalis, ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & ad huc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipsa apotome.



Sit rationalis quidem A, apotome autē BD: & quadrato ex A aequale sit quod BD KH cōtinetur ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina cōmensurabilia sunt nominibus ipsius BD, & in eadem proportione: & KH eundem habere ordinem, quem habet BD. sit. n. ipsi BD congruens DC, ergo BC CD rationales sunt potentia solum commensurabiles: & quadrato ex A aequale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale; & ad rationalem BC applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commensurabilis. itaq; quoniam rectangulum contentum BC G est aequale ei, quod BD KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autē est CB, quam BD. ergo & KH. quam G est maior ponatur ipsi G aequalis KE. commensurabilis igitur est KE ipsi BC lōgitudine. & quoniā est vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per conuersionem rōnis vt BC ad CD, ita KH ad HE. fiat vt KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH est vt KH ad HE, hoc est vt BC ad CD, sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum cōmensurabiles erunt. & cum sit vt KH ad HE, ita KF ad FH; vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & vt KF ad FH, ita HF ad FE. quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratū. cōmensurabile autē est quadratum ex KF quadrato ex FH; sunt. n. KF FH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi BC longitudine commensurabilis. ergo & KF rōnalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & q̄m est vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commensurabilis autē est BC ipsi KF. quare & CD ipsi FH est cōmensurabilis. sunt q; BC CD rōnales potentia solum commensurabiles, ergo & KF FH rōnales potētia solū commensurabiles erunt. ex binis igitur nominibus est KH. & si quidē BC plus potest, quā CD quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis, & KF plus poterit, q̄ FH quadrato rectae lineae sibi cōmensurabilis longitudine. & si BC longitudine cōmensurabilis est expositae rationali, & KF eidē cōmensurabilis erit. si vero CD est cōmensurabilis longitudine expositae rationali, erit & ipsa FH eidē oō mēsurabilis; & si neutra ipsarū BC CD, & neutra ipsarū KF FH, at si BC plus potest q̄ CD quadrato rectae lineae sibi longitudine incōmēsurabilis, & KF plus poterit, q̄ FH quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. & si quidē BC longitudine commensurabilis est expositae rationali, & KF eidē commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH. q̄ & neutra ipsarum BC CD, & neutra

74. huius.

21. huius.

14 sexti. Ex demonratis ad 16. quinti. 19 quinti.

11. quinti. Corr. 2. 201 sexti.

tra

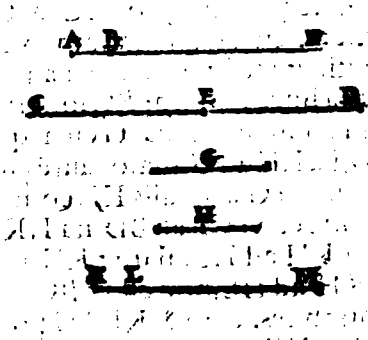
tra ipſarum KF. FH. ex binis igitur nominibus eſt KH, cuius nomina KF FH cõmenſurabilia ſunt nominibus apotomæ BC. CD; & in eadem proportione; & KH eundem tenet ordinem, quem ipſa BC.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 2, BD R 18 minus R 10, & multiplicetur R 18 minus R 10 per eam, quæ ex binis nominibus ipſi reſpondet, videlicet per R 18 plus R 10 producitur 8, rurſus multiplicetur ipſius A rationalis quadratum, quod eſt 4 per eandem, producitur R 288 plus R 160. habebit igitur 8 ad R 288 plus R 160 proportionem eandem, quam R 18 minus R 10 ad 4. ex 17. ſeptimi. quare ſi R 288 plus R 160 applicetur ad 8 latitudinẽ faciet R 4 $\frac{1}{2}$ plus R 2 $\frac{1}{2}$, & eandem latitud. nẽ faciet 4, ſi ad R 18 minus R 10 applicetur. quadratum igitur rationalis 4 applicatum ad tertiã apotomen, videlicet ad R 18 minus R 10 latitudinem facit eam, quę eſt ex binis nominibus tertia, hoc eſt R 4 $\frac{1}{2}$ plus R 2 $\frac{1}{2}$ cuius nomina commenſurabilia ſunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione.

THEOREMA XCI. PROPO. CXV.

Si ſpacium cõtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomæ, & in eadem proportione; recta linea ſpacium potens eſt rationalis.



Spacium enim contineatur AB CD, videlicet aporoma AB, & CD, quæ ſit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus CE ED commenſurabilia nominibus apotomæ AF FB, & in eadem proportione; ſitq; recta linea G potens ſpacium contentum AB CD. dico ipſam G rationalem eſſe. exponatur. n. rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur eſt KL, cuius nomina KM ML commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus CE ED, & in eadem proportione. ſed CE ED commenſurabiles ſunt ipſis AF FB, atque in eadem proportione. eſt igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutãdo vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL eſt vt AF ad KM. commenſurabilis autem eſt AF ipſi KM. ergo & AB ipſi KL eſt commenſurabilis. eſtq; vt AB ad KL, ita rectangulũ contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. ſed rectangulum contentum CD KL eſt æquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H eſt commenſurabile. rectangulũ autẽ quod continetur CD AB eſt æquale quadrato ex G. ergo quadratum ex G cõmenſurabile eſt quadrato ex H. atque eſt quadratum ex H rationale. rationale igitur eſt quadratum ex G. & recta igitur ipſa G eſt rationalis; & poteſt quod CD AB continetur. Si igitur ſpacium contineatur aporoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomæ, & in eadem proportione, recta linea ſpacium potens eſt rationalis.

113. huius.

19. quintiſ
10. huius.
1. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex iis manifeſto conſtat fieri poſſe, vt ſpacium rationale rationalibus rectis lineis contineatur.

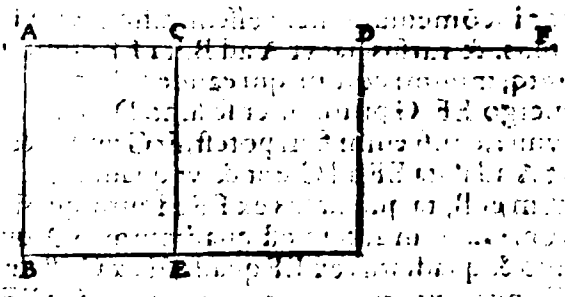
F. C. COMMENTARIVS.

Sit apotome AB R 21 ½ minus 4, ex vero, quę ex binis nominibus CD sit 12 plus 3. & multiplicetur R 21 ½ *minus 4 plus* R 12 *plus 3, fit* R 256, *quę est 16, minus 12, hoc est 4, quod est rationale, & eius radix 2 rationalis.*

THEOREMA XCII. PROPOSITIO CXVI.

A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A. Dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse, exponatur n. rationalis B. & rectangulo contento AB æquale sit quadratum ex C. irrationalis igitur est ipsa C nam q rationali, & irrationali continetur irrationale est, & nulli earum, quæprius est eadem: non n. quadratum alicuius antecedentium ad rationalē applicatum latitudinem efficit mediam. rursus rectangulo, quod BC continetur, æquale sit quadratum ex D. irrationale igitur est, quod fit ex D. & idcirco ipsa D est irrationalis, & nulli antecedentium eadem. neq; enim quadratum alicuius earum, quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam C. Similiter & eodem ordine infinitę protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.



ALITER. Sit media AC. Dico ex ipsa AC infinitas irrationales fieri, & nullā alicui priorū eādem esse. ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB: sitq; AB rationalis, & BC cōpleatur irrationale igitur est BC, & quæ ipsum potest est irrationalis. posit autē ipsum recta linea CD. ergo CD irrationalis ē, & nulli priorum eadem. non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatū latitudinem efficit mediam. rursus compleatur ED; erit ED irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. posit ipsum recta linea DF. ergo DF irrationalis est, & nulli priorum eadem. nullius enim priorum quadratum, si ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ipsam CD. ergo à media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.

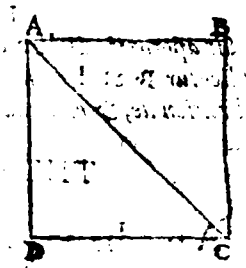
Inscholio ad 19. huius

THEOREMA XCIII. PROPOSITIO CXVII.

Proposītum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrū lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum ABCD, cuius diameter AC. Dico AC ipsi AB longitudine incōmensurabilem esse. si n. fieri potest, fit cōmensurabilis. Dico ex hoc sequi eūdem numerum parem esse, & imparem. itaq; manifestum est quadratū ex AC duplum esse quadrati ex AB. & quoniam AC cōmensurabilis est ipsi AB, habebit AC ad AB proportionem eam, quam habet numerus ad numerū. habeat, q

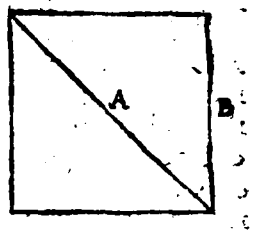
EF ad G: ſintq; EF G numeri minimi eorum, qui eandē habent proportionem. non igitur vnitas eſt EF. ſi enim eſt vnitas, & habet ad G proportionem eam, q̄ AC ad AB, eſtq; AC maior, quā AB: & EF vnitas, quam G numerus maior erit. q̄ eſt abſurdum. ergo EF non eſt vnitas. quare
C numerus ſit neceſſe eſt. & q̄m vt AC ad AB, ita eſt EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplū aūt eſt quadratum ex CA quadrati ex AB. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G eſt duplus: ac propterea quadratus ex EF par eſt, & ipſe EF par. ſi enim eſſet impar,
D & qui fit ab ipſo quadratus impar eſſet, quoniam ſi impares numeri quomodocunq; componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totus impar erit. ergo EF eſt par. ſecetur bifariam in H. & q̄m numeri EF G minimi ſunt eorum, qui eandem habent proportionē
E inter ſe primi ſunt: & eſt EF par. impar igitur eſt G: ſi enim eſſet par, numeros EF G binarius metiretur, omnis enim par dimidiam partem habet. atqui primi inter ſe ſunt. quod fieri non poteſt. non igitur G eſt impar. ergo par. & q̄m FE
F duplus eſt ipſius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus, eſt autē
G quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur eſt quadratus ex G quadra-
H ti ex EH. Ideoq; par eſt qui fit ex G quadratus. & ex iam dictis ipſe G eſt par, ſed
K & impar. quod fieri non poteſt. non igitur AC commenſurabilis eſt ipſi AB longitudine. ergo eſt incommenſurabilis.



F. H. E

G

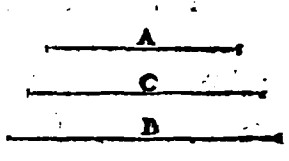
ALITER. Sed & aliter oſtendendum eſt incommenſurabile eſſe quadrati diametrum ipſius lateri. ſit. n. pro diametro quidem A, pro latere aūt B. Dico A ipſi B lōgitudine incōmenſurabilem eſſe. ſi. n. fieri poteſt, ſit cōmenſurabilis. & rurſus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipſū G; ſintq; minimi eorum, qui eandem habent proportio-
a4. ſepti. nem. ergo EF G primi inter ſe ſunt. Dico primū, G non eſſe vnitatem. ſi enim fieri poteſt, ſit G vnitas. & quoniam eſt vt A ad B ita EF ad G, erit & vt quadratū ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplum autem eſt quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G eſt duplus: atq; eſt G vnitas. binarius igitur eſt quadratus ex EF. quod fieri non poteſt. ergo G non eſt vnitas. numerus igitur. & quoniam eſt vt quadratū ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratū ex G. & conuertendo vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. ſed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus metitur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipſum EF latus metitur.
L metitur autem, & ſe ipſum. ergo G numeros EF G metitur, primos inter ſe exiſtentes. quod fieri minime poteſt. non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis. quare incommenſurabilis ſit neceſſe eſt.



E. H. F

G

Itaq; inuentis longitudine incommenſurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur, & aliæ q̄ plurimę magnitudines ex duab' dimēſionibus. nimirum ſuperficies incōmenſurabiles inter ſe ſe. ſi enim ipſarum AB mediam proportionalē
M ſumamus rectā lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C ſimilem, & ſimiliter deſcriptā ſiue *quadrata*, ſi
N ue aliæ rectilineæ ſimilia, ſiue circuli, q̄ circa diametros AC deſcribantur. quādo quidem circuli inter ſe ſunt, vt diametrorū quadrata. Inuenta igitur ſunt ſpacia plana inter ſe incommenſurabilia. oſtenſis autem his oſtendemus eāt ex ſolidorum



rum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia, & incommensurabilia inter se se. nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipsis æqualia sint so O
lida æque alta cõstituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata; erunt ea inter se, vti bases. & si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida cõmensurabilia; si vero incommensurabiles, & ipsa incommensurabilia erũt P
sed & duobus circulis existentibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases, hoc est vt AB circuli. & si quidem circuli commensurabiles sint, cõmensurabilis erunt & coni inter se se, & Cylindri; si vero incommensurabiles, & coni, & Cylindri incommensurabiles erunt. ex quibus perspicuum est non solum in lineis, & superficiebus esse commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, sed & in solidis figuris.

F. C. COMMENTARIVS.

Manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB] *Ex 47 primi.* A
Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerũ] B
Ex 5 huius.
Et quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G; erit & vt quadratum ex AC ad qua C
dratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] *Quoniam.n.est vt AC ad AB, ita EF ad G, erit & vt proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. sed vt proportio quidem AC ad AB duplicata, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario secundo 20. sexti; vt autem proportio EF ad G duplicata, ita est quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octaui. ergo ex 11 quinti vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.*
Quoniam si impares numeri quomodocunq; componantur, multitudo aũt D
ipsorum sit impar, & totum impar erit) *Ex 23 noni. sequitur enim hoc ex 29 eiusdem.*
Inter se primi sunt] *Ex 24 septimi.* E
Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus) *Ex 11. octaui.* F
Duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH] *Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, composita est ex proportione quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportione quadrati ex G ad quadratum ex EH. sed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH est quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratum ex G est dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.* G
Ideoque par est qui fit ex G quadsatus] *Quoniam enim quadratus Ex G duplus est quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par necessario erit.* H
Et ex iam dictis ipse G est par) *Si enim sit impar, & quadratus ex ipso impar est ex 29 noni. sed & par. quod fieri non potest.* K
Et propterea latus G ipsum EF latus metitur] *Ex 14 octaui.* L
Erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter M
descriptam] *Ex corollario secundo vigesimę sexti.*
Quandoquidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata] *Ostenditur id in secunda propositione duodecimi libri. vnde colligi potest hac siue sint Euclidis, siue alterius alieno loco posita esse.* N
Nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipsis æqualia sint, solida æq; O
alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se vti bases] *Ex 32 vndecimi, & ex 5. & 6. duodecimi.*
Sed & duobus circulis existentibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cy- P
lindros constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases) *Ex 11. duodecimi.*

Finis Libri Decimi.

SCHOLIVM.

Antiqui planorum cognitionem à scienctia solidorum distinxerunt etenim illam geometriam appellarunt, vt etiam Plato ostendit in politicis; hanc autem stereometriam. At vero Iunieres cum vtriusque scientiæ communis sit cognitio, quæ circa magnitudines versatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas velut vnam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia vero circularia, & alia mixta, vt helices ita in solidis, alia constant ex planis rectilineis. alia ex sphæricis, alia ex mixtis, vt cylindrus & conus Et sphærica quidem ad terminum & finem pertinent; rectilinea vero vel quæ ex rectilineis sunt ad infinitum: mixta ad id, quod occultum est & si aliquod est corpus, hoc & solidum est, non autem contra, vt in iis, quæ dicta sunt hæc enim imaginabilia sunt solida, non antitypa, hoc est dura, & resistentia.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Vndecimus.

ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II

Solidi terminus est superficies.

III

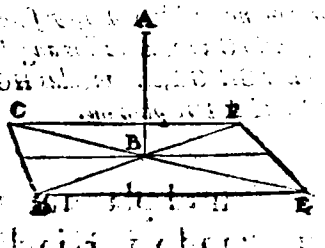
Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIVM.

Si posset planum in rectas lineas resolui, ita dixisset. Quando ad omnes rectas lineas, ex quibus planum constat, rectos facit angulos, tunc & adipsum recta erit. Sed quoniam planum etiam infinitis rectis lineis sectum in ipsas non resolvitur, contentus fuit linearum infinitate prototo plano. contingentes autem addit, vt non parallelæ sint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ad subiectum planum CDEF perpendicularis, siue recta, & à puncto B ducantur quotcumq; rectæ lineæ in eodem plano BC BD BE BF. erunt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quod si anguli CBA DBA EBA FBA recti sint, dicemus rectam lineam AB ad subiectum planum CDEF perpendicularem, siue rectam esse.

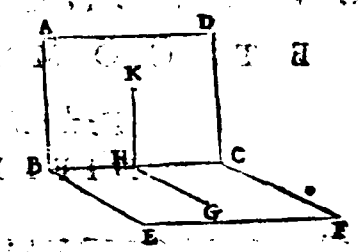


IIII.

Planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos duæ rectæ lineæ in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit planum ABCD ad planum BEFC rectum, sitque eorum communis sectio BC, & in plano BEFC ducatur recta linea GH perpendicularis ad ipsam BC. erit recta linea GH ad planum ABCD perpendicularis, siue recta. At si recta GH, vel planum ABCD perpendicularis sit, siue recta, erit ea ad BC communē duorum planorum sectionem perpendicularis. Et similite, continget, si in alio plano ducatur KH perpendicularis ad ipsam BC. ponatur autem nunc communem duorum planorum sectionem rectam lineam esse. quod in sequentibus demonstrabitur.

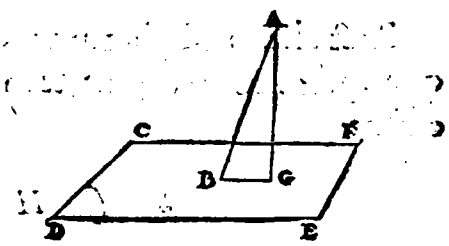


V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino lineæ ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea, & stante continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB inclinata ad subiectum planū CDEF: atq; à puncto sublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG, & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectæ lineæ AB ad planum CDEF inclinatio.

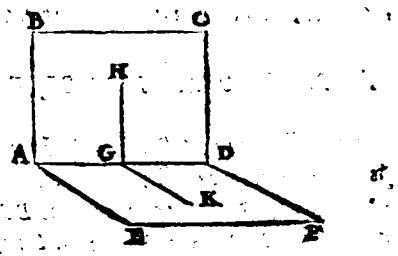


VI

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis cōtentus, quæ ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroq; planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, quorum communis sectio AD, & sumpto in ipsa AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroq; plano ducantur GH GK, erit angulus HGK inclinatio plani ABCD ad EADF planum.



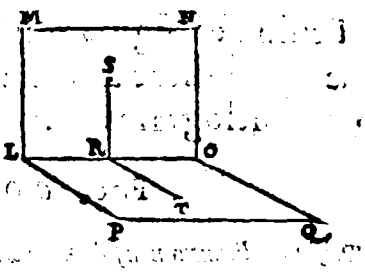
VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterū, quando dicti inclinationū anguli inter se fuerint æquales.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, de quibus proxime dictum est: sintq; alia duo plana inclinata LMNO PLOQ, quorum inclinatio angulus SRT: & sint anguli HGK SRT æquales. dicetur planum ABCD ad planum EADF similiter inclinatum,, atq; planum LMNO ad planum PLOQ.



VIII.

Plana parallela sunt, quæ inter se non conueniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine æqualibus continentur.

X.

Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

XI

Solidus angulus, est plurium, quàm duarum linearum, quæ se se cõtingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis compræhenditur, non existentibus in eodem plano, & ad vnum punctum constitutis.

SCHOLIVM.

Euclides quidẽ in inclinatione angulum vult esse; Stoici vero dicunt inclinationem esse angulum. sed recte Euclides. omnis enim angulus magnitudinum inclinatio est ad vnum punctum. hæc autem diffinitio imperfecta est. angulus enim quartæ partis sphæræ pluribus quidem quàm duabus superficiebus compræhenditur, sed non planis; & dimidius conus ad verticem angulum solidum non efficit. nam si is est angulus: & coni vertex angulus erit. quare & ex duabus superficiebus & ex vna solidus angulus constabit. quod quidem verum est. melius igitur erit solidum angulum diffinire, inclinationem magnitudinis, vel magnitudinum ad vnum punctum.

ἐγκλισις. σὺν. σύνοψις.

σὺνοψιν.

XII.

Pyramis est figura solida planis compræhensa, quæ ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

Prisma

XIII.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponũtur æqualia, & similia & parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIVS.

Prismata dicuntur non solum, quæ bases habent triangulares, vt opinatur Campanus, qui ea corpora seratilia appellat, sed quæcumq; plana, quæ oponuntur, siue triangula, siue quadr. latera, siue pentangona, siue plurilatera, & æqualia & similia habeut, reliqua vero parallelogramma, quod ex ijs, quę tum in hoc libro, tum in sequenti traduntur, manifestissime apparet. Alia autem prismata Campanus improprie columnas lateratas vocat, quemadmodum & conos, pyramides rotundas, & Cylindros columnas rotundas.

XIV.

Sphæra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituatur rursus in eundem locum à quo moueri cœpit.

XV.

Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphætæ est idem, quod & semicirculi centrum.

XVII.

Diameter sphæræ est recta linea quædam per centrum ducta; & ex vtraq; parte à superficie sphæræ terminata.

XVIII.

Conus est comprehensa figura, quadrato orthogonij trianguli manẽte vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertatur, quoad rursus in eundem restituatur locum, à quo moueri cœpit. & si quidẽ manẽs recta linea æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, conus orthogonius erit; si vero minor ambligonius; & si maior, oxigonius.

XIX.

Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

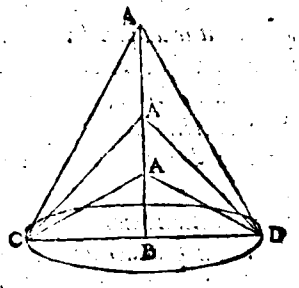
Basis

XX.

Basis vero circulus à conuersa recta linea descriptus

SCHOLIVM.

Ostendendum quomodo conus orthogonius sit, vel angulum rectum ad verticem habeat.



Exponatur triangulum orthogoniũ ABC rectũ habens ABC angulum, & rectam lineã BC rectæ AB æqualem. dico ad punctũ A rectum angulum constitui producatur enim CB vsq; ad D: ponaturq; BD ipsi CB æqualis, & AD iungatur. Itaq; quoniam AB est æqualis BC, erit & ãgulus BCA ãgulo BAC æqualis, & vterq; ipsorum dimidius recti, quod rectus ponatur ABC: eadẽ ratione & BAD est recti dimidius. totus igitur DAC angulus rectus est; & idcirco conus circa ABC descriptus est orthogonius; nimirũ recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eundem locum restituatur, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB necesse est inconuersione rectam lineam AC congruere rectæ AD, cum CB ipsi BD sit æqualis; & circulus à puncto C descriptus basis erit coni, qui A triangulo ABC constituitur, & eius circuli diameter erit basis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quòd si conus à vertice A ad basim vsq; bifariam diuidatur, portionum superficies non aliud erunt, nisi triangulũ ADC, quod est orthogonium. quare & coni vertex orthogonius erit. si vero angulus BAC sit maior dimidio recti, erit ob eandem caussam angulus quoq; DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtusus; & conus ambligonius erit, vel ad verticem angulum obtusum habebit. si denique BC sit minor, quàm AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quæ ostensa sunt, DAC angulus recto minor hoc est acutus, & conus oxygonius erit.

XXI.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides conos, & Cylindros dumtaxat rectos diffiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuersè ex Apollonio. Serenoq; ortum explicare visum est.

EX APOLLONIO.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiã circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramq; partem producatur, & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiam, quousq; ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri, superficiem à recta linea descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis, quarũ vtraq; in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta, voco Conicam superficiem; Verticem ipsius manens punctum, Axem rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli du-

citur

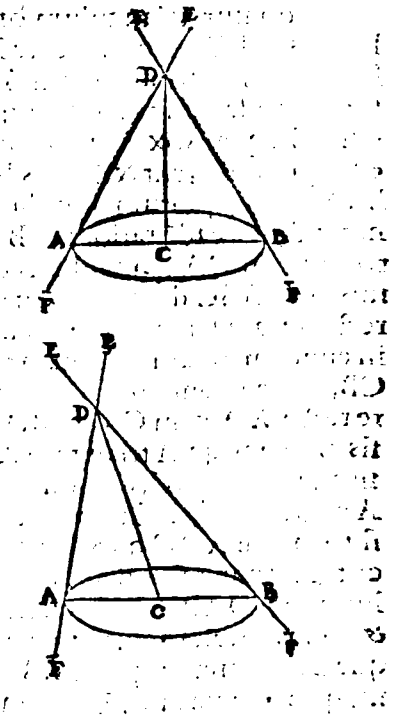
citur. Conum autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur. Verticem coni punctum, quod & superficiei conicæ vertex est. Axem rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. Basim circulum ipsum.

Conorum rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habet.

Quem locum explicans Futocius ita scribit.

Sit circulus A B, cuius centrum C: & punctum aliquod sublime D: iunctaq; D B in infinitũ ex vtraq; parte producatur ad puncta E F. si igitur recta linea D B feratur eo vsque in circuli A B circumferentia, quousq; punctum B rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moueri: describet superficiem quandam, quæ quidẽ constat ex duabus superficiebus, ad D punctum se se tangentibus. eam voco conicam superficiem; quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. verticem superficiei dicit, punctum D: axem, rectam D C. conum verò appellat figuram contentam circulo A B, & ea superficie, quam D B sola describit: coni verticem pũctum D: axem D C; & basim, A B circulum. At si D C ad circulum fuerit perpendicularis, rectũ vocat conum: sin minus, scalenũ.

Describetur autem conus scalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quæ non sit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineæ, quod est in sublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipsam conuertatur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur lineam circũductam in conuersione quandoq; maiorem; quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.



XXI.

Cylindrus est comprehensa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum conuertatur, quousq; rursus restituatur in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XXII.

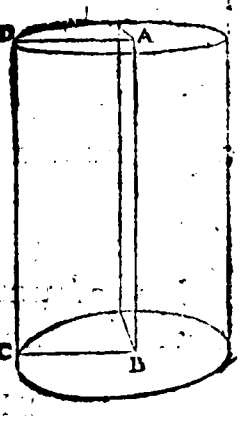
Axis Cylindri est manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XXIII.

Basis autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuersis describuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, & latera AB manente intelligatur latus CD conuerti, quousq; ad eum locum redeat, à quo cepit moueri. erit iam descripta figura, cuius axis est AB recta linea manens, & basis circuli ipsi à punctis CD circa contra BA descripti.



EX SERENO

Si duorum circulorum æqualium, & parallelorum diametri semper inter sese parallelæ, & ipsa in circulorũ planis circa manens centrum circumferantur, & vnà circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit superficies, quæ à circulata recta linea describitur, Cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & infinitum angere potest, recta linea describente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. Cylindri basis circuli ipsi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. latus autem Cylindri linea, quæ cum recta sit, & superficie ipsius Cylindri, A bases vtrasque contingit: quàm & circumlatam describere superficiem Cylindri antea diximus Cylindrorum rectiquidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. Scaleni autem, qui non ad rectos C angulos existentem ipsis basibus axem habent.

XXIV.

Similes coni, & Cylindri sunt, quorum, & Axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent.

F. C. COMMENTARIVS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum scalenos hoc modo diffiniemus.

Similes coni, & Cylindri sunt, quãdo per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum, & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quem axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus est figura solida, sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quattuor triangulis æqualibus, & æquilateris comprehensa.

Octaedrum

XXVII.

Octaedrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris compræhensa.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida, quae duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis continetur.

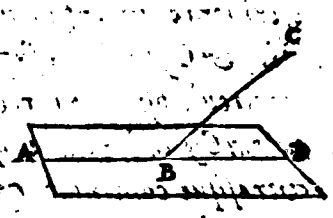
XXIX.

Icosaedrum est figura solida, quæ viginti triangulis æqualibus & æquilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectae lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædã vero in sublimi.

Si enim fieri potest rectæ lineę AB pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi, erit vtiq; recta linea quędam ipsi AB in directum continuata in subiecto plano. sitq; BD, duabus igitur datis rectis lineis

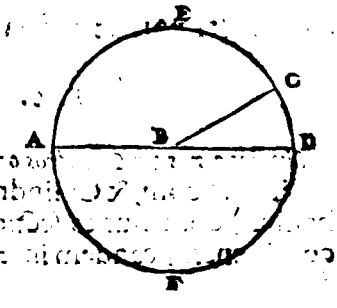


A ABC ABD communis portio est AB, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non conuenit in plurib⁹ punctis; quã vno alioqui rectæ lineæ sibi ipsis congruent.

B non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SCHOLIVM.

A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD communis portio est AB, quod fieri non potest.) *Duabus enim rectis lineis non est communis portio. si enim fieri potest, sit duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB; & sumatur in recta linea ABC centrum quidem B, interuallo vero BA, & circulus AEF describatur. quoniam igitur punctum B centrum est circuli AEF, & per B ducta est quædam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter. ABC igitur semicirculus in sectione circuli per centrum facta est. ergo AEC semicirculus est. rursus quoniam B centrum est circuli AEF, & per B ducta est quædam ducta est ABD, erit ABD circuli AEF diameter.*



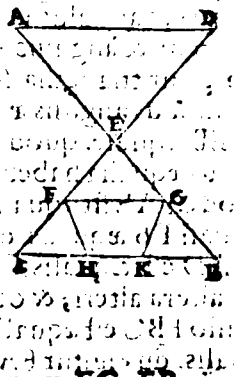
ostensa autem est, & ABC diameter eiusdem circuli. & semicirculi eiusdem circuli sunt æquales inter se. ergo AEC semicirculus semicirculo AED est æqualis minor maiori, quod fieri non potest. non igitur duabus rectis lineis communis portio est, sed differẽs ac propterea neq; fieri potest, vt terminatæ rectæ lineæ alia recta linea in directum continuata sit ex iis, quæ ante ostensa sunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non est recta linea.

B Alioqui rectæ lineæ sibi ipsis congruent.) *Manifestum est congruentibus rectis lineis, & earum fines inter se congruere. frustra enim hoc, cum rectæ lineæ eosdem fines habentes spatium cõtinebunt. quod fieri non potest.*

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duæ rectæ lineæ se inuicem secent, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se inuicem in puncto E secent. dico ipsas AB CD in vno esse plano, & omne triangulum in vno plano consistere. sumantur n. in ipsis EB EC quælibet puncta FG, iungantur q; CB, FG, & FH GK ducantur. dico primũ FBC triangulum cõsistere in vno plano. si n. trianguli EBC pars quidẽ FHC, vel GBK in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano: erit, & vnius linearum EB EC pars in subiecto plano, & pars in alio. Quod si triãguli ECB pars FG BG sit in subiecto plano, reliqua vero in alio, vtrarum q; rectarum linearum EC EB quædam pars erit in subiecto plano, quædam vero in alio: quod absurdum esse ostendimus. Triangulum igitur EBC in vno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est vtraq; ipsarum EC EB. in quo autem vtraq; ipsarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectæ lineæ AB CD in vno sunt plano, & omne triangulũ in vno plano consistit.



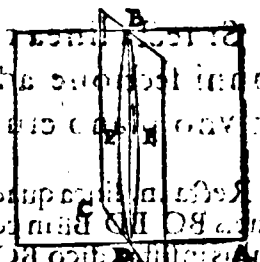
SCHOLIVM.

Propositum est ostendere rectas lineas quæ se mutuo secant in vno plano esse. quoniam autem hoc per triangulum ostenditur, illud apposuit, & omne triangulum in vno plano consistit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana se inuicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo n. plana AB BC se inuicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. dico lineã DB rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidẽ AB recta linea DEB, in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtiq; duarum rectarum linearum DEB DFB ijdem termini, & ipsę spacium continebunt, quod est absurdum. non igitur DEB DFB rectę lineę sunt. similiter ostendemus neq; aliam quampiã, quę à puncto D ad B ducitur rectam esse, præter ipsam DB. communem igitur sectionem planorũ AB BC sectionẽ. si igitur duo plana se inuicẽ secent, cõmunis ipsorũ sectio recta linea erit.

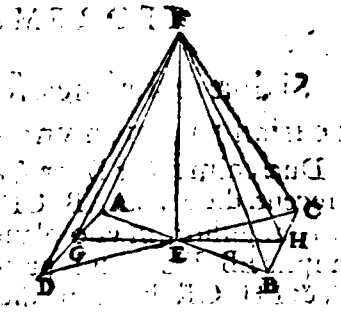


THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Si recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducta per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta n. linea quædã EF duabus rectis lineis AB CD se inuicẽ secãtibus in puncto, videlicet E ad rectos angulos insistat. dico EF etiam plano per AB, CD ducto

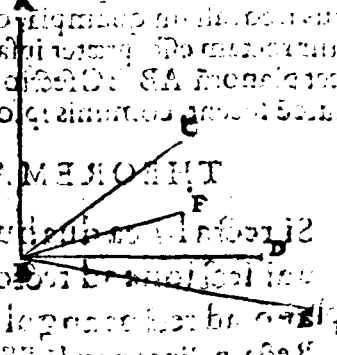
ducto ad rectos angulos esse. sumantur. n. rectæ lineæ AE EB CE ED inter se æquales: perq; E ducatur recta linea GEH vtcumq; & iungantur A D CB: deinde à quouis puncto F ducantur FA F G FD FC FH FB. & quoniã duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, & 4. primi. angulos æquales continẽt, erit AD basis basi C B æqualis, & triangulũ AED triangulo CEB æqua le. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem, & angulus AEG æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH duos angu- los duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus AE vni la- 26 primi. teri EB æquale. quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera reliquis la teribus æqualia habebunt, ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. Quod cũ AE sit æqualis EB, cõmunis autem, & ad rectos angulos FE; erit basis 4. primi. AF basi FB æqualis eadem quoq; ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniã AD est æqualis CB, & AF ipsi FB; erunt duæ FA AD duabus FB BC æqua les, altera alteri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus igitur FAD 8. primi. angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æqualis BH. sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqua- 4. primi. lis est angulo FBH, vt demonstratum fuit basis igitur GF basi FH est æqualis. rur sus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus igitur GE F angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est vterq; angulorũ GEF HEF. er- go EF ad GH vtcunq; per E ductã rectos efficit angulos. Similiter ostendemus F E etiã ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano, 3. diffi. rectos angulos efficere. recta autem ad planũ recta est quando ad omnes rectas lineas ipsam cõtingentes, & in eodẽ existentes plano rectos efficit angulos. qua re FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. at subiectũ planũ est quod per A B CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se inuicem secãtibus in cõmuni sectione ad rectos ãgulos insistat, etiã ducto per ipsas plano ad rectos ãgulos erit.



THEOREMA. V. PROPOSITIO. V.

Si recta linea tribus rectis lineis se se contingentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

Recta n. linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE in contactu B ad rectos an gulos insistat. dico BC BD BE in vno plano esse. non n. sed si fieri potest, sint BD BE quidẽ in subiecto plano, BC vero in sublimi, 3. huius. & planũ per AB BC producatur. cõmunem vtriq; sectionem in subiecto plano faciat re ctã lineam faciat BF. in vno igitur sunt plano per AB BC ductæ tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB vtriq; ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planũ Ex antece- dente. autem DB BE est subiectum planum. ergo AB 3. diffi. ad subiectum [illegible] quæ sunt in eo omnes rectas lineas ipsam contin- tes,

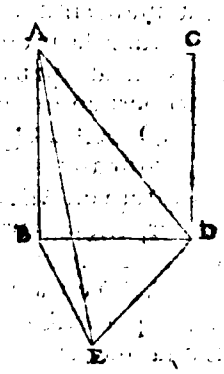


tes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in plano sublimi quare tres rectæ lineæ BC BD BE in vno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis se se tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se se parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subiecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim subiecto plano in punctis BD, iungaturq; BD recta linea, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB æquali, iungantur BE AE AD. Quoniã igitur AB recta est ad subiectũ planum, & ad oẽs rectas lineas, quæ ipsam cõtingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficiet. contingit autem AB vtraq; ipsarum BD BE existens in subiecto plano. ergo vterq; angulorum ABD ABE rectus est. Eadem rõne rectus etiam est vterq; ipsorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis est ipsi DE, communis aũt BD, erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent. basis igitur AD basi BE est æqualis. rursus quoniã AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE cõis. ergo angulus ABE angulo EDA est æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad vtramq; ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineae BD DA DC in vno sunt plano. in quo autẽ sunt BD DA, in hoc & AB: omne enim triangulum in vno est plano. ergo AB BD DC in vno plano sint necesse est, atq; est vterq; angulorum ABD BDC rectus. parallela igitur est AB ipsi CD. quare si duæ rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint, illae inter se se parallelae erunt.



diffi. 5.

4. primi.

8. primi.

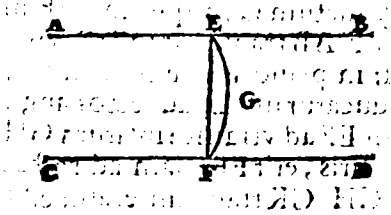
Ex antecedente. 2. huius.

28. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in vtraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duae rectae lineae parallelae AB CD, & in vtraq; ipsarũ sumantur quaelibet puncta EF. Dico rectã lineã quae puncta EF cõiungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelae. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, vt EGF, & per EGF planũ ducatur, q̃ in subiecto plano sectionem faciat, rectã lineam. faciat vt EF. ergo duae rectae lineae EGF EF spatium cõtinebunt, q̃ fieri nõ potest. non igitur, quae à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano. quare erit in eo, quod per AB CD parallelas transit, si igitur duae rectae lineae parallelae sint, & reliqua, quae sequuntur, Quod oportebat demonstrare.

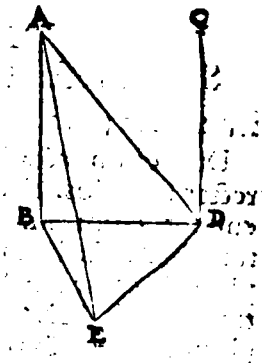


3. huius.

Coroll. 29. primi libri.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ, sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.



Sint duę rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipsarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. dico & reliquā CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrant. n. AB CD subiecto plano in punctis BD, & BD iungatur. ergo AB CD BD in vno sunt plano. ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subiecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis: iungantur q, BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur est vterq; angulorū ABD ABE. Quòd cum in parallelas rectas lineas AB CD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis æquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; a c propterea CD perpendicularis est ad BD. & quoniam AB est æqualis DE, communis autē BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB rectus. n. vterq; est basis igitur AD basi BE est æqualis. Rursus quoniā AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis earum cōmunis AE. quare angulus ABE est æqualis angulo FDA. rectus autē est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quæ in eodē existentes plano ipsam cōtingunt, rectos faciet angulos. at in plano per BA AD est DC, quoniā in plano per BD DA sunt AB BD: in quo autē sunt AB BD in eodē est ipsa DC. quarę ED ipsi DC est ad rectos angulos: ideoquè CD ad rectos angulos est ipsi DE. sed & CD ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE, DB se mutuo secantibus in cōmuni sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est ad rectos angulos. planū autē per DE DB est subiectum planū. ergo CD subiecto plano ad rectos angulos erit.

Ex antecedente.

3. diffi.

b 29. primi.

4. primi.

8. primi.

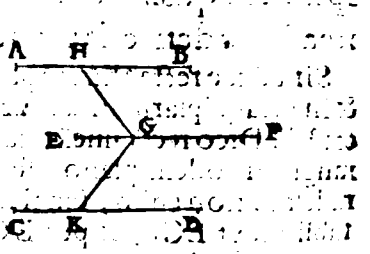
4. huius. q. 8 3. diffi.

2. huius.

4. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, nō existentes in eodem in quo ipsa plano; etiam inter se parallelæ erunt.



Sit. n. vtraq; ipsarū AB CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem in quo ipsa, plano. dico AB ipsi CD parallelā esse. sumatur in EF quodvis punctum G, a quo ipsi EF in plano quidem per EF AB transeunte ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunte per FE CD. rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. & quoniam EF ad vtramq; ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK transeunte. atq; est EF ipsi AB parallela, ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. vtraq; igitur ipsarū AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autē duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt inter se. ergo AB ipsi CD est parallela.

4. huius.

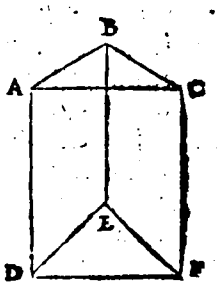
Ex antecedente.

6. huius.

THEO-

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingentibus sint parallelę, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.



Duæ. n. rectæ lineæ se se contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF se se contingentibus sint parallelę, nō autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF ęqualem esse. Assumantur .n. BA BC ED EF inter se ęquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Qm igitur BA ipsi ED ęqualia est & parallela, erit & AD ęqualis & parallela ipsi BE. eadē ratione & CF ipsi BE ęqualis & parallela erit. Vtraq; igitur ipsarum AD CF ipsi BE ęqualis est & parallela. Quae aūt eidem rectae lineae sunt parallelae, non existentes in eodem, in quo ipsa plano; & inter se parallelae erunt. ergo AD parallela est ipsi CF, & aequalis. atq; ipsas coniūgunt AC DF. & AC igitur ipsi DF aequalis est & parallela. Et quoniā duae rectae lineae AB BC duabus DE EF aequales sunt, & basis AC est aequalis basi DF; erit angulus ABC angulo DEF aequalis. Si igitur duae rectae lineae se se contingentes duabus rectis lineis se se contingentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. quod oportebat demonstrare.

31. primi.

Ex antecedente.

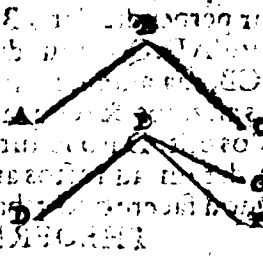
33. primi

8. primi.

SCHOLIVM

CONVERSVM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non existentibus, & earum una parallela sit unius contentium æqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit.

F. C. COMMENTARIVS.



Sint duo anguli æquales ABC DEF: & rectæ lineę AB BC angulum ABC continentes non sint in eodem plano; in quo DEF. sit autem DE parallela ipsi AB. Dico & EF ipsi BC parallelam esse. Si enim non est EF parallela ipsi BC, erit alia ipsi parallela. sit EG. Vtraq; quoniam duæ rectæ lineæ se se contingentes AB BC duabus rectis lineis se se contingentibus DE EG sunt parallelę, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC est æqualis. Sed & angulus DEF ponitur æqualis angulo ABC. angulus igitur DEF angulo DEG ęqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur EG parallela est ipsi BC. similiter ostendemus nec ullam aliam eidem BC parallelam esse præter ipsam EF. ergo EF ipsi BC est parallela. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum sublime A, datum autem subiectū planum. oportet à puncto A ad subiectū planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subiecto enim plano ducatur quaedam recta linea vt cumq; BC, & à puncto A ad B

C perpendicularis agatur AD. Si-
quidem igitur AD perpendicularis
sit etiã ad subiectum planum; factũ
iam erit, quod proponebatur: sin
11. primi. minus ducatur à puncto D ipsi BC
12. primi. in subiecto plano ad rectos angulos
DE: & à puncto A ad DE perpendi-
cularis ducatur AF. deniq; per F du-
catur GH ipsi BC parallela. Et quo-
niam BC vtriq; ipsarum DA DE est
4. huius. ad rectos angulos, erit & BC ad re-
ctos angulos plano per ED DA trã-
seunti, atq; est ipsi parallela GH. Si
autem sint duæ rectæ lineæ paralle-
8. huius. læ, quarum vna plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua eidem plano ad re-
3. diffi. ctos angulos erit. quare & GH plano per ED DA trãseunti ad rectos angulos
est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam
b contingunt, est perpendicularis. contingit autẽ ipsam AF existẽs in plano per
ED DA, ergo GH perpendicularis est ad FA. & ob id FA est perpẽdicularis ad
GH: est autem AF & ad DE perpendicularis. ergo AF perpendicularis est ad
vtrãq; ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contin-
4. huius. gentibus in cõi sectione ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto
ad rectos angulos erit: quare FA plano per ED GH ducto est ad rectos angu-
los. planum autem per ED GH est subiectum planum. ergo AF ad subiectum
planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subiectum pla-
num perpendicularis recta linea ducta est AF. quod facere oportebat.

PROBLEMA II. PROPO. XII.

Dato plano à puncto, quod in ipso datum est, ad rectos angu los rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subiectum, punctũ autẽ
quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano
ad rectos angulos rectã lineã constituere. Intelligatur
Ex antece- aliquod punctũ sublime B. à quo ad subiectũ planum
dente. agatur perpendicularis BC; & per A ipsi BC parallela
ducatur AD. Quũ igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt
AD CB, vna autẽm ipsarum BC subiecto plano est ad
rectos angulos, & reliqua AD subiecto plano ad rectos
8. huius. angulos erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipso est datum ad rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri põt, dato plano à puncto
q in ipso est A, duæ rectæ lineæ AB AC
3. huius. ad rectos angulos constituantur ex eadem
A parte: & ducatur planum per BA AC, q
sectiones communes cum subiecto plano
rectã lineã faciat DAE. ergo rectæ lineas
AB AC DAE in vno sunt plano. Et quũ
3. diffi. CA subiecto plano ad rectos angulos est,
& ad omnes rectas lineas, quæ in subie-

cto plano existentes ipsam contingunt, rectos facient angulos. contingit autē ipsam DAE. quę est in subiecto plano. angulus igitur CAE rectus est. Eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis, & in vno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. quod demonstrare oportebat. B

F. C. COMMENTARIVS.

Et ducatur planum per BA AC] *Sunt enim ex secunda huius rectæ lineæ BA AC in vno plano.* A

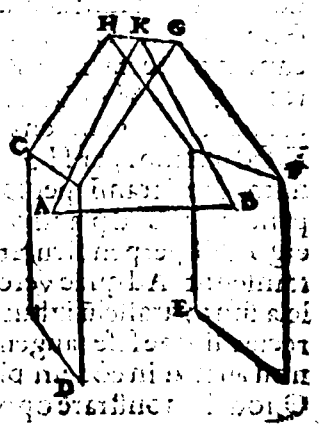
SCHOLIVM.

Quod fieri non potest] *Essent enim & parallelæ, eidem plano ad rectos angulos existentes; & inter se conuenirent. quod est absurdum, parallelæ autem essent ex sexta huius.* B

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIV.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim linea quædam AB ad vtrumq; ipsorū planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. si enim non ita sit, producta conuenient inter se. conueniant; & communem sectionem faciant rectā lineam GH; & in ipsa GH sumpto quouis puncto K, jungantur AK BK. Quoniam igitur AB perpendicularis est ad EF planum, erit & perpendicularis ad ipsā BK rectam lineam in plano EF producto existētem. quare angulus ABK rectus est. Eadē ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duorum angulorum ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana CD EF producta inter se conuenient. quare CD EF parallela sunt necesse est. Ad quæ igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod demonstrare oportebat.

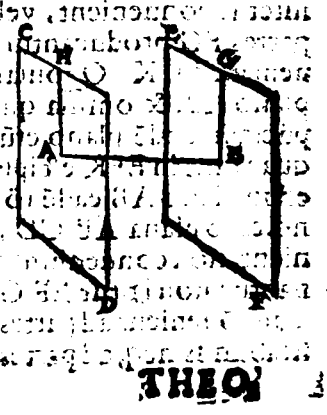


SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIVS.

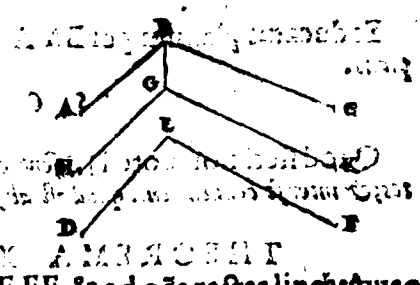
Sint duo plana parallela CD EF rectaq; quædam linea AB ad planum CD sit perpendicularis. Dico AB etiam ad planum EF perpendicularem esse. Si enim non est perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG alium planum ducatur, eius & plani CD communis sectio sit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG est acutus, productis planis conuenient itaque inter se rectæ lineæ BG AH. quare & ipsa plana conuenient. at qui parallela ponuntur. quod fieri non potest. non igitur AB ad planum EF non est perpendicularis. ergo perpendicularis sit necesse est. quod demonstrandum proposuimus.



THEO

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis se se tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallelæ erunt.



Duæ.n. rectæ lineæ sese tangẽtes AB BC duabus rectis lineis sese tangentibus DE EF parallelæ sint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF transeunt, si producantur, inter se non cõuenire. Ducatur 4. à puncto B ad planum, q per DE EF transit perpendicularis BG, quæ plano in pũcto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH, ipsi vero EF parallela GK. Ita- 5. que q̃m BG perpendicularis est ad planũ per DE EF, & ad oẽs rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodẽ sunt plano, rectos faciet angulos. contingit autẽ ipsam vtraq; earum GH GK, quæ est in eodem plano. rectus igitur est vterque angulorum BGH BGK. Et quoniã BA parallela est ipsi GH. anguli GBA BGH duobus rectis sunt æquales. rectus aũt est BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoq; GB ad BA est perpendicularis. Eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se mutuo secantibus ad rectos angulos insistat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem causſam BG est perpendicularis ad planum per HG GK. sed planum per HG GK est aliud, quod per DE EF transit. quare BG ad planum, quod transit per DE. EF est perpendicularis. ostensa autem est BG & perpendicularis ad planũ per AB BC: atq; est ad planũ per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad vtrumq; planorum, quæ per AB BC DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. parallelũ igitur est planũ per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

3. diffi.

29. primi,

2. huius,

Ex antecedente.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XVI.

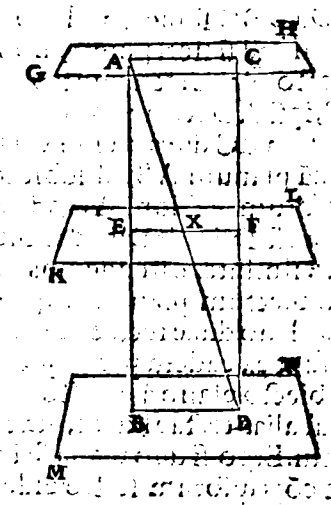
Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo.n. plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH secentur; cõmunes aũt ipsorũ sectiones sint EF GH. dico EF ipsi GH parallelã esse. si.n. non est parallela, productæ EF GH inter se conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur primũm, vt ad FH partes cõueniant in K. Quoniam igitur EF est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur pũcta in eodẽ plano erũt. vnũ aũt punctorum quæ sunt in EFK est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB, eadẽ rõne & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se cõuenient. non conueniunt aũt, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ cõuenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neq; ad partes EG conuenire, si producan-

ducantur. quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPO. XVII.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.



Duæ enim rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A E B C F D. dico vt AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. iungantur enim AC B D AD: & occurat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX B D parallelæ sunt. eadem ratione quoniã duo plana parallela GH KL à plano AEFC secantur, cõmunes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. & quoniam vni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, vt AE ad EB, ita erit AX ad XD: rursus quoniam vni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit vt AX ad XD, ita CF ad FD. ostensum autem est & vt AX ad XD, ita esse AE ad EB. & vt igitur AE ad EB, ita est CF ad FD. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. Quod demonstrare oportebat.

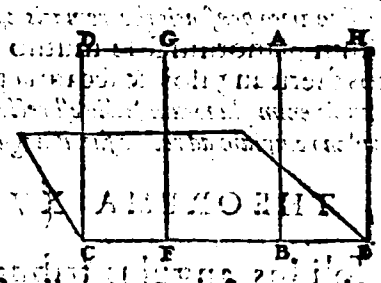
Ex antecedente.

2. sexti.

11. quinti.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos ãgulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.



Recta enim linea quædam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subiecto plano ad rectos angulos esse producatur. n. per AB planum DE, sitq; plani DE, & subiecti plani cõmunis sectio CE: & sumatur in CE quodlibet punctum F: à quo ipsi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB subiectum planum est perpendiculatis, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano perpendicularis erit. quare etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est. sed & GFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FC. est autẽ AB subiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidẽ plano ad rectos angulos erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos sunt. & communi planorum sectioni CB in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subiecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectum est ad subiectum planum. similiter demonstrabuntur, & omnia quæ per AB transeunt plana subiecto plano recta esse. si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

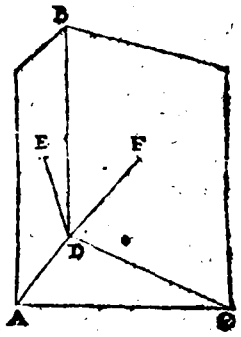
3. diffi.

8. huius.

4. diffi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.



Duo enim plana se inuicem secantia AB BC subiecto plano sint ad rectos angulos: cōis autem ipsorum sectio sit BD. Dico BD subiecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subiecto plano: & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipsi AD rectae lineae ad rectos angulos DE: in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniã planum AB ad subiectũ planum rectum est, & cōi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit DE ad subiectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subiectum planum. quare ab eodem puncto D subiecto plano duae rectae lineae ad rectos angulos constitutae sunt ex eadem parte, quod fieri non potest. non igitur subiecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliae rectae lineae, praeter ipsam DB, communem planorum AB BC sectionem. Ergo si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos, angulos, & cōis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

13. huius

F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonstratis apparet conuersum antecedentis theorematis nempe hoc.

Si omnia, quae per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

Sit enim recta linea dictorum planorum communis sectio. quare cum ea plano plano cuipiam ad rectos angulos esse ponantur, & recta linea quae ipsorum communis sectio est eidem plano ad rectos angulos erit.

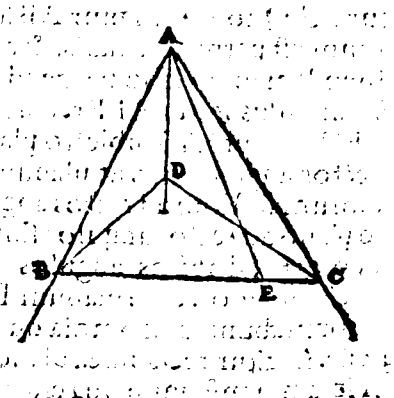
Conuersum vero praesentis theorematis apparet ex antecedente. quod huiusmodi est

Quorum planorum se se mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erũt.

Communis enim planorum sectio est recta linea, per quam dicta plana transeunt. quod cum recta linea plano cuipiam ad rectos fuerit angulos, & ipsa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocunque sumpti.



Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocunq; sumptos. si enim BAC CAD DAB anguli inter se aequales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocunque sumptos. Sin-

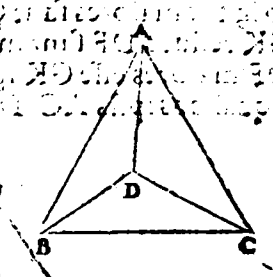
minus

minus, sit maior BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A constituatur angulo DAB in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponatur q; ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC, & DB, DC iungantur. Itaq; quoniam DA est æqualis AE, cõmunis autem AB, duæ DA AB duabus BA AE æquales sunt: & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est æqualis. Et quoniam duæ DB DC ipsa BC maiores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quã reliqua EC maior. Quòd cum DA sit æqualis AE, cõis autem AC & basis DC maior, basi EC; erit angulus DAC angulo EAC maior. ostensus autem est & DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores sunt. similiter demonstrabimus & si duo quilibet alij fuerint, eos reliquo esse maiores. si igitur solidus angulus tribus angulis planis cõtinetur; duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocunq; sumpti. Quod demõstrare oportebat. 21.primi. 4.primi. 21.primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis solidus angulus minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

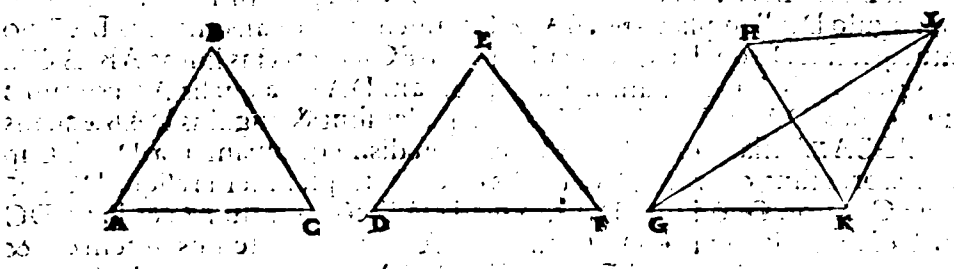
Sit solidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DAB contentus. Dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. sumantur .n. in vnaquaq; ipsarum AB AC AD quæuis puncta B C D; & BC CD DB iungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores sunt. anguli igitur CBA ABD angulo CBD sunt maiores. Eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD maiores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB, tribus angulis CBD BCD CDB sunt maiores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt æquales duobus rectis. Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis maiores sunt. Quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt nouem triangulorum nouem anguli CBA ABD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt maiores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur. quod oportebat demonstrare.



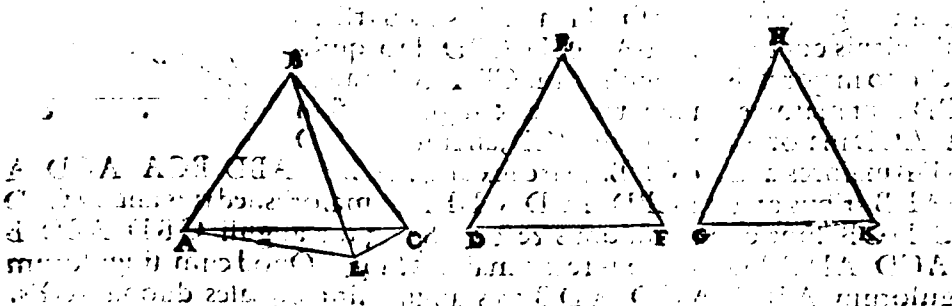
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocunq; sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, vt ex iis, quæ rectas æquales coniungunt rectis, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK quorum duo reliquo sint maiores, quomodocunq; sumpti, videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK; anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC, & præterea anguli GHK ABC angulo DEF, maiores sint q; æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK. & AC DF GK iungatur. Dico fieri posse, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur, hoc est ipsarum AC DF GK duas quaslibet reliqua esse maiores, quomodocunq; sumptas. si igitur anguli ABC DEF GHK inter se æquales sunt, manifestum est,



cũ & æqualibus factis AC DF GK ex æqualibus ipſis triangulum conſtitui poſſe, ſin minus ſint inæquales, & ad rectam lineam HK, atq; ad punctum in ipſa H angulo ABC æqualis angulus conſtituatur KHL, & ponatur vni ipſarum AB
23 primi. BC DE EF GH HK æqualis HL: & GL KL iungantur. Itaq; quũ duæ AB BC duabus KH HL æquales ſunt, & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit baſis AC æqualis baſi KL. Et quoniã anguli ABC GHK angulo DEF ſunt maiores,
4. primi. æqualis autem eſt angulus ABC angulo KHL: erit GHL ãgulo DEF maior. Quod cum duę GH HL duabus DE EF æquales ſint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior, baſis GL baſi DF maior erit. Sed GK KL ipſa GL ſunt maiores. multo igitur maiores ſunt GK KL ipſa DF. eſt autem KL æqualis AC. ergo AC
24. primi. GK reliqua DF ſunt maiores, ſimiliter demonſtrabimus, & ipſas quidem AC
20. primi. DF maiores eſſe GK, ipſas verò GK DF maiores AC. fieri igitur poteſt vt ex æqualibus ipſis AC DF GK triangulum conſtituatur.

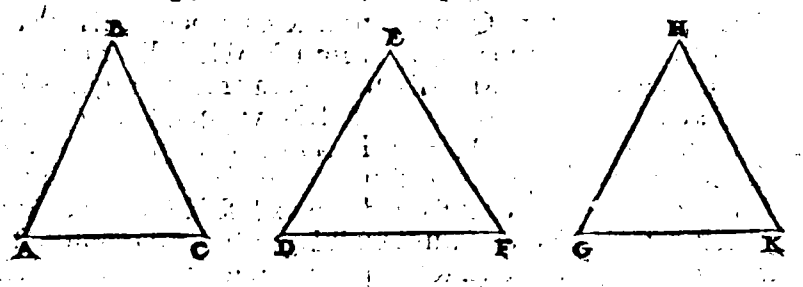


ALITER. Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo ſint maiores quomodocunq; ſumpti: cõtineant autem ipſos æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri poſſe vt ex æqualibus ipſis AC DF GK triangulum conſtituatur: hoc eſt rurſus duas reliqua maiores eſſe, quomodocunq; ſumptas. ſi igitur rurſus anguli ad B E H ſint æquales, & AC DF GK æquales erunt, & duæ reliquæ maiores: ſin
24. primi. minus, ſint inæquales anguli ad B E H, & maior qui eſt ad B vtroq; ipſorũ qui ad E H. maior igitur eſt & recta linea AC vtraq; ipſarum DF GK: & manifeſtum eſt ipſam AC vnà cum altera ipſarum DF GK reliqua eſſe maiorem, dico
23. primi. & DF GK ipſa AC maiores eſſe. conſtituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & vni ipſarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL LC iungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales ſunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit baſis AL baſi GK æqualis. & quoniam anguli ad EH ãgulo ABC maiores ſunt, quorum angulus GHK eſt æqualis ipſi ABL; erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quod cũ duæ LB BC duabus DE EF æquales ſint, altera alteri, & angulus DEF angulo LBC maior; baſis DF baſi LC maior erit, oſtenſa eſt autem GK æqualis AL. ergo DF GK ipſis AL LC ſunt maiores. ſed AL
24. primi. LC maiores ſunt ipſa AC, multo igitur DF GK ipſa AC maiores erunt. quare rectarum, lineárum AC, DF GK duæ reliquæ maiores ſunt, quomodocunque ſumptæ: ac propterea fieri poteſt, vt ex æqualibus ipſis AC DF GK triangulũ cõſtituatur. Quod oportebat demonſtrare.

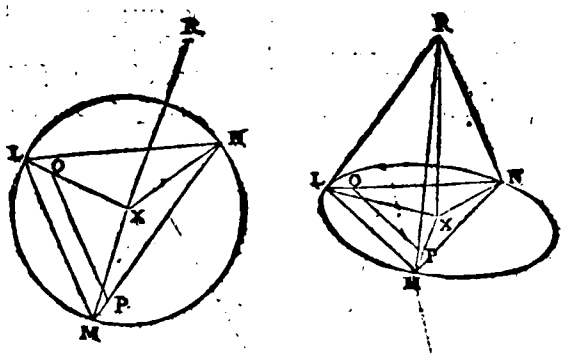
PRO-

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumq; ſumpti, ſolidum angulum conſtituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis eſſe minores.



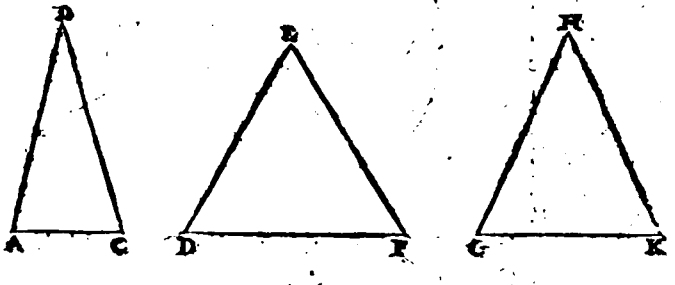
Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumq; ſumpti. ſintq; tres anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipſis ABC DEF GHK ſolidum angulum conſtituere. abſcindantur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK iũgãtur. fieri igitur põt vt exæqualibus ipſis AC DF GK cõſtituatur triangulũ. itaq; cõſtituatur LMN, ita vt AC quidem ſit æqualis LM, DF vero ipſi MN. & præterea GK ipſi LN: & circa LMN triãgulũ circulus LMN deſcribatur: ſumaturque ipſius cẽtrũ X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in vno eius latere, vel extra. Sit primũ intra: ſitq; X: & LX MX NX iungantur. dico AB maiorem eſſe ipſa LX. ſi enim non ita ſit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. ſit primum æqualis. Quoniã igitur AB eſt æqualis LX, atq; eſt AB ipſi BC æqualis; erit LX æqualis BC, eſt autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales ſunt: altera alteri; & AC baſis baſi LM æqualis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM eſt æqualis. eadem ratione, & angulus quidem DEF eſt æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales ſunt. ſed tres LXM MXN NXL quattuor rectis ſunt æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod eſt abſurdum. non igitur AB ipſi LX eſt æqualis. dico præterea neq; AB minorem eſſe ipſa LX ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ponatur ipſi quidem AB æqualis XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB eſt æqualis BC, & XO ipſi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliq; PM eſt æqualis; ac propterea LM parallela eſt ipſi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. eſt igitur vt XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem eſt LX, quàm XO. ergo & LM quã OP eſt maior. ſed LM poſita eſt æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaq; quoniã duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales ſunt, & baſis AC maior baſi OP, erit angulus ABC angulo OXP maior. ſimiliter demonſtrabimus & DEF angulũ maiorẽ eſſe ãgulo MXN, & ãgulũ GHK ãgulo NXL. tres igitur ãguli ABC DEF GHK tribus LXM



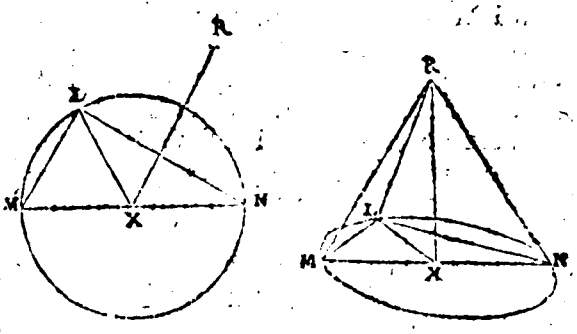
Ex antecedente.
22. primi.
5. quarti.
8. primi.
Coroll. 15. Primi.
2. ſexti.
4. ſexti.
25. primi.

MXN NXL ſunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quattuor rectis minores ponũtur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed & æquales. q̃ eſt abſurdum. non igitur AB minor eſt, quàm LX. oſtenſum aũt eſt neq; eſſe æqualem. ergo maior ſit neceſſe eſt. conſtituatur à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR, & exceſſui quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN iungantur. Quoniã igitur RX perpendicularis eſt ad planum LMN circuli, & ad vnamquamq; ipſarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniã LX eſt æqualis XM, cõis autem & ad rectos angulos XR, erit baſis LR æqualis baſi RM. Eadem ratione & RN vtriq; ipſarum RL RM eſt æqualis. Tres igitur rectæ lineæ RL RM RN inter ſe æquales ſunt. Et quoniã quadratum XR ponitur q̃uale exceſſui, quo quadratũ ex AB ſuperat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR q̃uale. quadratis autem ex LX XR æquale eſt quadratum ex RL; rectus enim angulus eſt LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoq; AB ipſi RL eſt æqualis. ſed ipſi quidem AB q̃ualis eſt vnaquæq; ipſarũ BC DE EF GH HK; ipſi vero RL q̃ualis vtraq; ipſarum RM RN. vnaquæq; igitur ipſarũ AB BC DE EF GH HK vnicuiq; ipſarum RL RM RN eſt æqualis. Quòd cũ duæ LR RM duabus AB BC æquales ſint, & baſis LM ponatur æqualis baſi AC; erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem q̃ne & angulus quidẽ MRN angulo DEF, angulus aũt LRN angulo GHK eſt æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales ſunt tribus datis ABC DEF GHK ſolidus angulus cõſtitutus eſt ad R, qui angulis LRM MRN LRN cõtinetur.

Sed ſit centrũ circuli in vno laterũ triãguli, videlicet in MN, quod ſit X, & XL iungatur. Dico rurſus AB maiorẽ eſſe ipſa LX. Si n. nõ ita ſit, vel AB eſt q̃ualis LX vel ipſa minor. ſit primum æqualis. duæ igitur AB BC, hoc eſt DE EF



duabus MX XL, hoc eſt ipſi MN q̃uales ſunt. ſed MN ponitur æqualis DF. ergo DE EF ipſi DF ſunt aequales. quod fieri nõ poteſt non igitur AB eſt aequalis LX. ſimiliter neque minor. multo enim magis id quod fieri non poteſt, ſequeretur. ergo AB ipſa LX maior eſt. & ſimiliter ſi exceſſui quo quadratum ex AB ſuperat quadratũ ex LX æquale ponatur, vt quadratum ex RX, & ipſa RX circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.



Sed ſit centrũ circuli extra triangulũ LMN, q̃ ſit X, & LX MX NX iũgantur. Dico & ſic AB ipſa LX maiorẽ eſſe. ſi. n. non ita ſit, vel aequalis eſt, vel minor. ſit primũ æqualis. ergo duæ AB BC duab. MX XL aequales ſunt, altera alteri; & baſis AC baſi ML æqualis. ãgulus igitur ABC æqualis eſt ãgulo MXL. eadem

coroll. 15. primi.

12. huius.

3. d. ſſi.

4. primi.

47. primi.

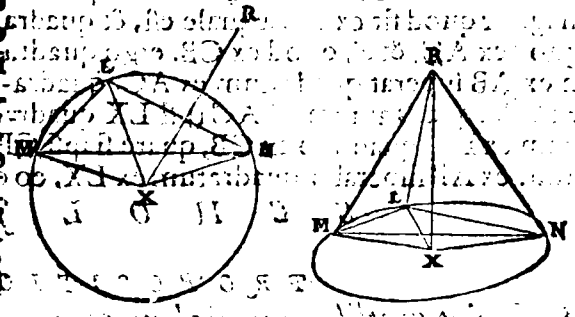
8. primi.

20. primi.

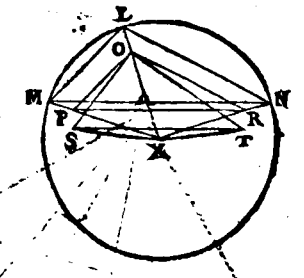
8. primi.



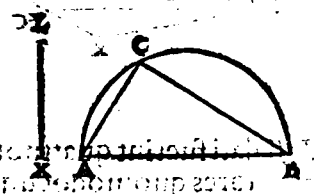
dem ratione, & GHK angulus ipsius LXN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. sed & anguli ABC GHK angulo DEF maiores sunt, & angulus igitur MXN ipso DEF est maior. & quoniã duae DE EF duabus MX XN aequales sunt, & basis DR aequalis basi MN, erit MXN ãgulus ãgulo DEF æqualis. ostẽsus autẽ est maior, q̃ est absurdum. nõ igitur AB est aequalis



LX, deinceps vero ostendemus neq; minorẽ esse. quare maior necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsam aequalem ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema constituetur. Itaq; dico neque minorem esse AB ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungantur. Quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquae PM aequalis. parallela igitur est LM ipsi PO, & triangulum LMX triangulo PXO aequiangulum. quare vt XL ad LM, ita XO ad OP; & permutãdo vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autẽ est LX quàm XO. ergo LM quam OP est maior. sed LM est aequalis AC. & AC igitur, quàm OP maior erit. itaq; quoniam duae AB BC duabus OX XP sunt aequales altera alteri; & basis AC maior est basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior, similiter & si XR sumatur aequalis vtriq; ipsarũ XO XP, & iungatur OR, ostẽdemus angulum GHK angulo OXR maiorem. cõstituatur ad rectam lineam LX, & ad pũctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autẽ GHK æqualis LXT, & ponatur vtraque XS XT ipsi OX æqualis iungaturq; OS OT ST. Et quoniam duae AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS, erit basis AC, hoc est LM basi OS æqualis. eadẽ ratione, & LN est æqualis ipsi OT. quòd cũ duæ ML LN duabus OS ST sint æquales, & angulus MLN maior angulo SOT; erit & basis MN basi ST maior. sed MN est aequalis DF. ergo & DF quã ST maior erit. Quoniã igitur duae DE EF duabus SX XT æquales sunt, & basis DF maior basi ST; erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autẽ est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK maior est, sed & minor. Quod fieri non potest.



3. sexti.
4. sexti.



25. primi.

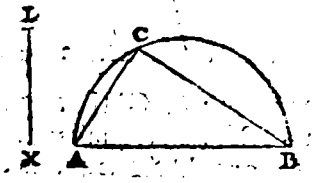
4. primi.

42. primi.

25. primi.

LEMMA.

Quo autem modo ſumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ita oſtendemus.



Exponantur rectę lineæ AB LX, ſitq; maior AB, & in ipſa deſcribatur ſemicirculus ACB; in quò aptetur recta linea AC ipſi LX æqualis, & BC iungatur. itaq; quoniam in ſemicirculo AB C angulus eſt AGB, erit ACB rectus. quadratum igitur quod fit ex AB æquale eſt, & quadrato quod ex AC, & ei, quod ex CB. ergo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex AC, quadrato ex CB. æqualis autem eſt AC ipſi LX quadratum igitur ex AB ſuperat quadratum ex LX, quadrato ex CB, quare ſi ipſi CB, æqualem ſumamus XR, quadratum ex AB ſuperabit quadratum ex LX, eo quod fit ex RX quadrato.

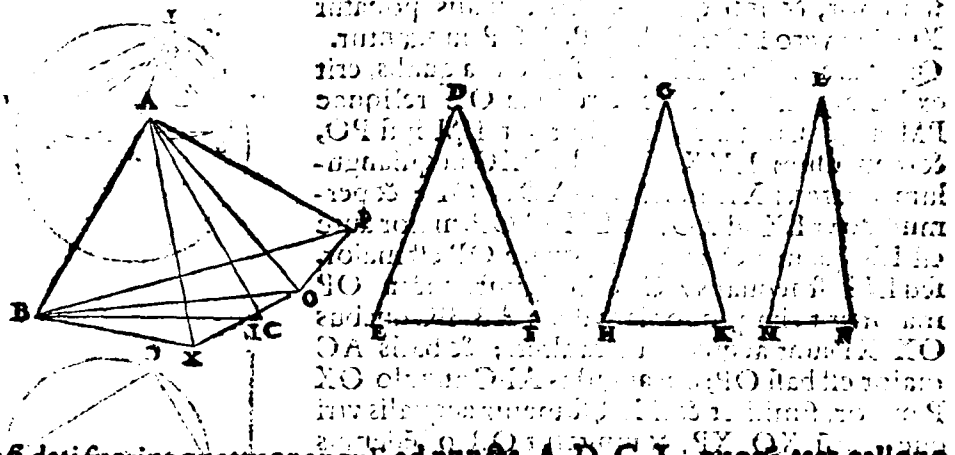
31.tertii.

47.primi.

SCHOLIVM.

PROPOSITIO. I.

Si fuerint quotlibet anguli plani, quorum vno reliquis ſint maiores quomodocunq; ſumpti, contineant autem ipſos recta linea æquales. Dico & rectarum linearum angulos ſubtendentium vna reliquas maiores eſſe quomodocunq; ſumptas. hoc eſt fieri poſſe, vt ex iis, quæ rectas lineas coniungunt multorum laterum figura conſtituatur.

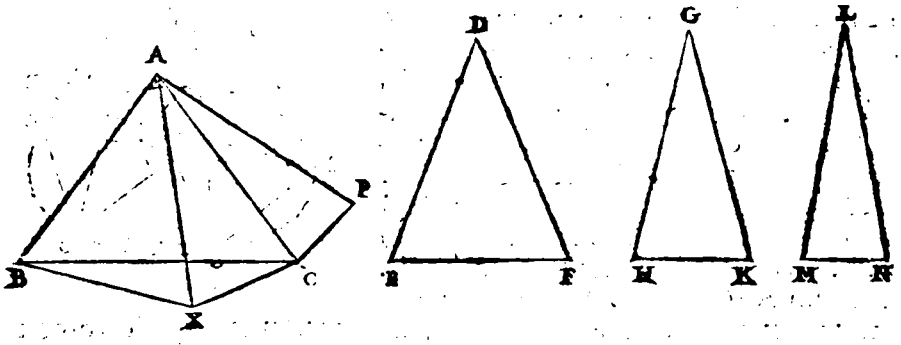


Vt ſi dati fuerint quattuor anguli ad puncta A D G L, quorũ tres reliquo ſint maiores quomodocũq; ſumpti: æquales antè ſint rectæ lineæ BA AC ED DF HG GK ML LN: & iungatur BC EF HK MN. dico ipſarũ BC EF HK MN tres reliqua maiores eſſe, quomodocũq; ſumptas. ſi.n. æquales ſint anguli ad puncta A, D G L, & latera BC EF HK MN æqualia erũt. & manifeſtũ eſt tres vna reliqua eſſe maiores, quomodocũq; accipiãtur. ſi vero inæquales ſint, ſit maior qui ad A. baſis igitur BC ſingulis ipſarũ EF HK MN maior eſt quare BC cũ vna earũ reliquis quibuslibet eſt maior. & cũ duabus reliqua multo maior erit. dico etiã EF HK MN ipſa BC maiores eſſe. Quoniã.n. angulus ad A maior eſt ſingulis ipſorũ D G L, cõſtituatur ad BA rectã lineã, & ad pũctũ in ipſa A ãgulo, qui ad D æqualis ãgulus BAX, & ad rectã lineã AX, & ad pũctũ in ipſa A ãgulo, qui ad G æquali cõſtituto ãgulo XAO, vel AO cadet intra lineã AC, vel in ipſã, vel extra ipſam. cadat primũ intra, & ad rectã lineã OA, & ad

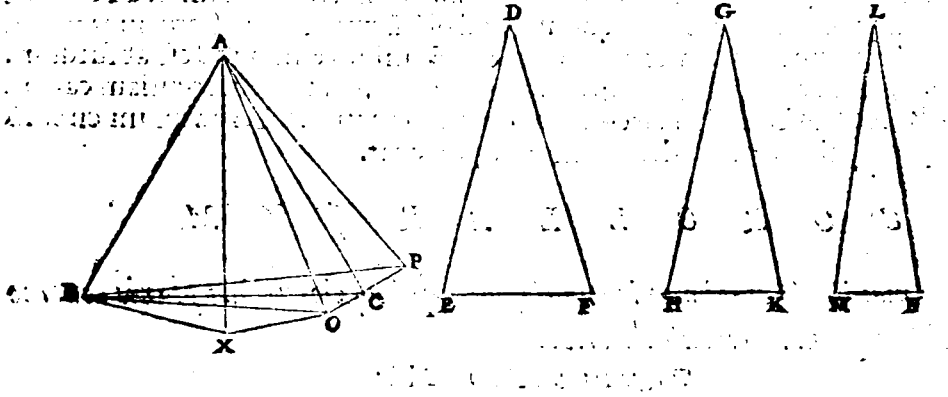
24.primi

23.primi

& ad punctum in ipsa A angulo qui ad L æqualis fiat angulus OAP. cadet AP extra lineam AC, propterea quòd tres anguli D G L reliquo sunt maiores. & ipsis AB ACæquales ponatur AX AO AP, iungantur q; BX XO BO OP BP. quoniã igitur duæ BA AP duabus BA AC sunt æquales, angulus autẽ BAP maior est angulo BAC; erit & BP basis basi BC maior. sed ipsa BP maiores sunt BO OP. quare BO OP ipsa BC sunt multo maiores. suntq; BX XO ma- 24 primi.



iores quã BO. ergo BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC. atq; est BX quidẽ æqualis ipsi EF, quoniã, & angulus BAX æqualis est angulo EDF; XO vero est æqualis HK. & OP MN. quare EF HK MN ipsa BC multo maiores erunt: sed recta linea, quæ cum AX continet angulũ æqualẽ angulo G cadat in ipsam AC, vt in secunda figura: & BX XC CP iungantur. itaq; quoniã BX XC ipsa BC maiores sunt, & sunt BX XC CP æquales ipsis EF HK MN; erunt EF HK MN ipsa BC multo maiores. deniq; recta linea AO, quæ cum AX continet angulũ angulo G æqualẽ, cadat extra AC vt in tertia figura: ponatur q; æqualis ipsi AB: & iungãtur BP BO OP BX XO. q̃m igitur duæ BA AP duabus BA 4. primi.

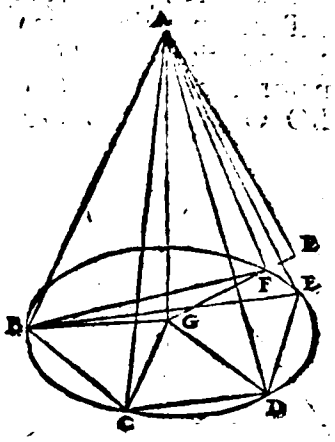


AC æquales sunt, ãgulus aũt BAP maior est ãgulo BAC; erit BP quã BC maior. Rursus quoniã BO OP maiores sunt quã BP, & BX XO maiores quã BO: erũt BX XO OP quã BP multo maiores. sed BP est maior BC quare BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC: suntq; BX XO OP ipsis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipsa BC multo maiores sũt. & quoniã tres reliqua maiores, sunt quomodocũq; sũptæ, fieri potest, vt ex ipsis quadrilaterũ ipsã cõstituatur. 24. primi.

PROPOSITIO II.

Si in aliquod planum à quodam sublimi puncto æquales rectæ lineæ cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ à dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circulum perpendicularis erit.

A puncto .n. A in ſubiectum planum æquales rectae lineae cadant AB AC AD AE ad puncta B C D E. Dico ea puncta in circuli circumferentia eſſe. Iungantur .n. in ſubiecto plano BC CD DE EB, & circa BCD triangulum circulus deſcribatur BCDF. ergo puncta BCD in circuli circumferentia ſunt. Dico etiã ipſum E in circumferentia eſſe. non enim, ſed ſi fieri poteſt, vel extra vel intra cadat. & primum cadat extra, & ſumpto circuli centro G, ab eo ad puncta B C D E rectae lineae ducãtur GB GC GD GE, vt GE circulum in puncto F ſecet, & iungantur AE AG. Quoniam igitur AB ipſi AC eſt aequalis, eſt autem. & BG aequalis CG; duae AB BG duabus AC CG aequales ſunt, & baſis AG eſt vtriq; cõmunis.



8. primi. angulus igitur ABG angulo ACG eſt aequalis triangulum q; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis aequales. ergo angulus AGB aequalis eſt angulo AGC. Eadem ratione, & angulus AGC angulo AGD aequalis erit. Quod cum AG ad plures quàm duas rectas lineas in eodem

4. primi. exiſtentes plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipſas ducitur perpendicularis erit. quare ad circulum ipſum. Itaq; quoniam GD ipſi GF eſt aequalis, communis autem, & ad rectos angulos GA, erit baſis AD baſi AF aequalis. ergo & vtraqueq; ipſarum AB AC AE aequalis eſt ipſi AF. Et quoniã

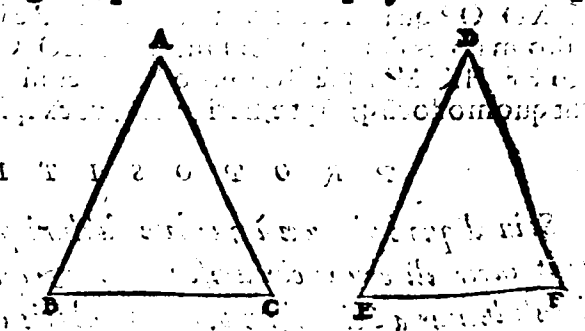
4. primi. 16. primi. angulus AFE maior eſt recto AGF, quod exterior ſit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF angulus qui eſt ad F maior eſt angulo qui ad E. Quare & latus AE maius eſt latere AF. ſed & oſtenſum eſt aequale, quod eſt abſurdum. non igitur punctum E extra circuli circumferentiam cadit. ſimiliter oſtendemus neq; cadere intra. ducentes .n. ad ipſum rectã lineam, & ad circuli ferentiam protendentes, rurſuſque ab A ad dictũ punctum rectam lineam iungentes, oſtenſtemus ipſam, & aequalem eſſe, & minorem. quod eſt abſurdum. At ſi neq; extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipſam circũferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli ſunt circumfereutia, & AG ad ipſum circuli eſt perpendicularis. quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnis anguli ſolidi, qui æquicruribus planis continetur, baſim ipſam in circulo deſcribi.

PROPOSITIO IIIr

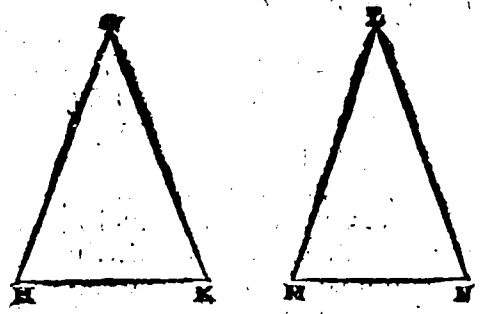
Ex planis quotlibet datis angulis, quorum vno reliqui ſint maiores quomodocumque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere, oportet autem datos angulos quatuor rectis eſſe minores.



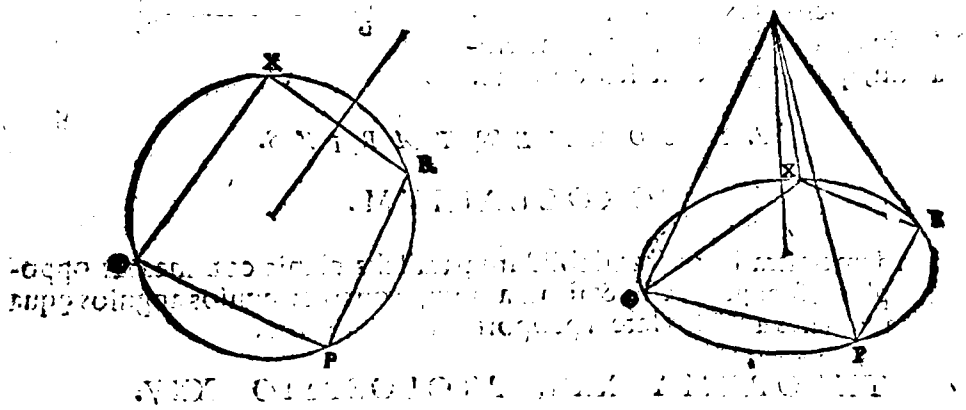
Sint dicti anguli BAC ED F HGK MLN. oportet ex ãgulis qui ſunt ad pũcta ADG L ſolidum angulum conſtitu ere, ſumantur aequales rectae

lineae

lineæ, quæ ipſos angulos continẽt, & iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur ſunt triangula, quæ vno quouis angulo reliquos maiores habent quomodocunque ſumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiẽt. fiat & ſit X O P R. Et quoniã oportet ex æquicruribus triangulis B AC EDF HGK MLN ſolidũ angulum conſtituere: omnis autem ſolidi



Ex coroll. antecedenti.

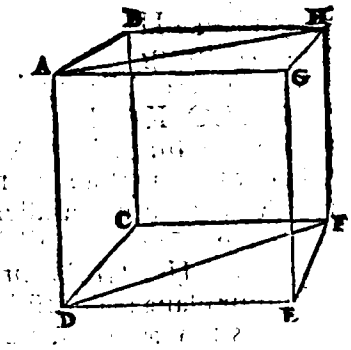


anguli, qui æquicruribus triangulis continetur baſim circumſcribit circulus; & anguli ſolidi contenti triangulis BAC EDF HGK MLN, baſim circulus circumſcribet. dicti vero anguli baſis conſtat ex baſibus ipſorum triangulorum, videlicet XO PR. ergo quadrilaterum XOPR circulus circumſcribit. Et deinceps eadem conſtruentes ijs, quæ dicta ſunt in angulo ſolido pro baſi triangulũ habente propoſitum efficiemus.

THEOERMA XXI. PROPOSITIO XXIV.

Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum .n. CDGH parallelis planis A C GF AH DF FB AE contineatur. Dico oppoſita eius plana, & æqualia, & parallelogramma eſſe. Quoniam .n. duo plana parallela BG CE, à plano AC ſecantur, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt: ergo AB ipſi CD eſt parallela. Rurſus quoniam duo plana parallela BF AE ſecantur à plano AC, cões ipſorum ſectiones parallelæ ſunt. parallela igitur eſt AD ipſi BC: oſtenſa autem eſt, & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. ſimiliter demonſtrabimus, & vnumquodque ipſorum DF FG GB BF AE parallelogrammum eſſe. Iungantur AH DF. Et quoniam parallela eſt AB quidẽ ipſi DC; BH vero ipſi CF, erunt duæ AB BH ſe ſe tangentes duabus DC CF ſe ſe tangentibus parallelæ, & non in eodẽ plano. quare æquales angulos continebunt. angulus igitur ABH ã-



16. huius.

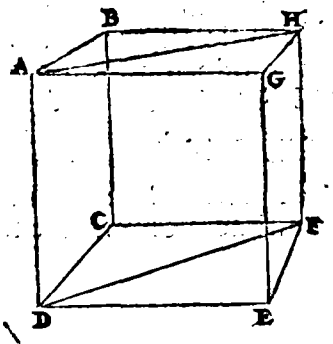
10. huius.

gulo

34. primi. 4. primi

gulo DCF est æqualis. Et quoniã duæ AB BH duabus DC CF æquales sunt, & angulus ABH æqualis angulo DCF, erit basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulũ æquale triangulo DCF. Quòd cum ipsius quidẽ ABH triãguli duplũ sit BG parallelogrammũ: ipsius verò DCF trianguli duplũ parallelogrãmũ CE; erit BG parallelogrãmum æquale parallelogrammo CE. similiter demõstrabimus & AC parallelogrãmũ parallelogrãmo GF, & parallelogrãmũ AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogrãma sunt, quod oportebat demonstrare.

41. primi



F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM.

1. diff sexti

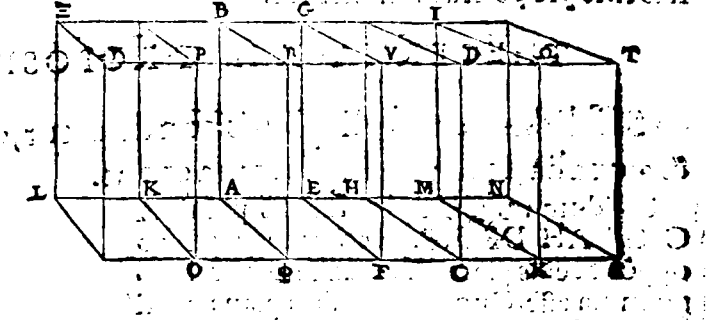
Ex iam demonstratis constat, si solidum parallelis planis contineatur opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidũ n. parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico vt AF basis ad basim EH CF, ita esse AB FY solidum ad solidũ EGCD. producatur enim AH ex vtraq; parte, & ponãtur ipsi quidem EH æquales quotcumq; HM MN; ipsi vero AE æquales quotcumque AK KL, & compleantur parallelogramma LO K& HX MS, & solida LP KR DM MT. Quoniã igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectælineæ; erunt, & parallelogramma K& AF inter se æqualia; itemque æqualia inter se parallelogramma LO KX KB AG, & adhuc parallelogrãma LR KP AR inter se æqualia; oppositum. n. sunt. Eadem rõne & parallelogrãma EC HX MS æqualia inter se; itemque parallelogrãma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogrãma DH MA NT. tria igitur plana solidorũ LP KR AY trib. planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia, ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia erunt. Eadẽ rõne & tria solida ED DM MT sũt æqualia inter se. quotuplex igitur est basi LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidũ solidi AY. Eadẽ rõne quotuplex ẽ NF basis ipsius basis HF, totuplex ẽ & solidũ NY ipsius HY solidi & si basis LF

1. sexti Ex antecedente.



sis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit. & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit, & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY YH sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & HY solidi, nempe basis NF & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidū solidum NY superare, & si æqualis æquale, & si minor minus. est igitur vt AE basis ad basim FH, ita AY solidum ad solidum YH. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

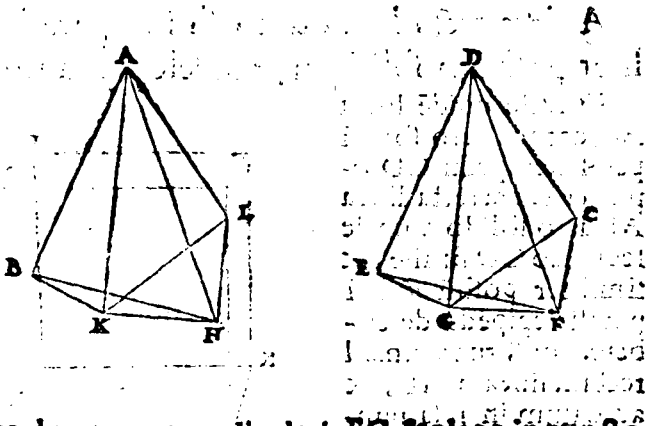
F. C. COMMENTARIVS.

Quod si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo; erit solidum ad solidum, vt altitudo ad altitudinem.

Hoc enim nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione XVIII.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XXVI.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.



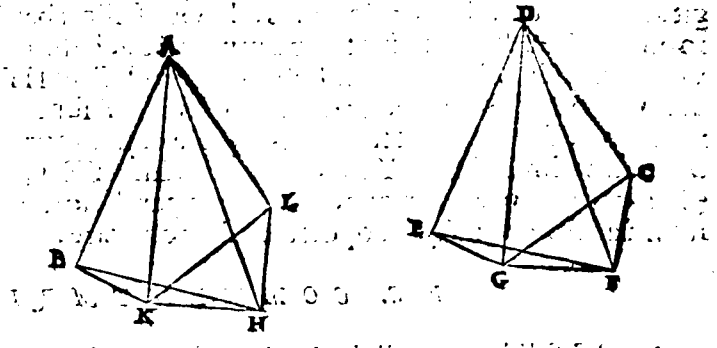
Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. sumatur enim in linea DF quis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; iungaturq; DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa puncti A, angulo quidem EDC æqualis angulus constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH, ponaturq; ipsi GF æqualis KH, & HA iungatur. Dico angulum solidum ad A, qui angulis BAL BAH HAL cōtinetur, æqualē esse solido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contēto. sumātur n. æquales rectæ lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE. Quoniā igitur FG perpendicularis est ad subiectū planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, sunt q; in subiecto plano rectos faciet angulos. vterq; igitur angulorum FGA FGD FGE rectus est. Eadē ratione, & vterq. ipsorum HKA, HKB est rectus. Et q̄m duæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis BK basi EG æqualis. est autem & KH æqualis GF, atq; angulos rectos continent. æqualis igitur, & HB ipsi FE. rursus q̄m duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, & rectos cōtinēt angulos; erit basis AH basi DF æqualis: estq; AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; & basis HB est æqualis basi FE. ergo āgulus BAH āgulo EDF æqualis erit. Eadē ratione, & āgulus HAL āgulo FDC est æqualis, quādoquidē si assumamus æquales AL DC, & iūgamus KL HL GC FC, q̄m totus BAL est

æqualis

12. huius.
23. primi.
12. huius.
3. diffi.
4. primi.
4. primi.
8. primi.

æqualis toti EDG; quorum BAK ipsi EDG ponatur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. & quoniam duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, & angulos æquales cõtinent; basis KL basi GC æqualis erit. est autẽ & KH æqualis GF. duæ igitur LK KH duabus CG GF sunt æquales; anguloſq; rectos cõtinẽt. ergo basis HL æqualis est basi FC. rursus quoniam duæ HA AL duabus FD DC æquales sunt; & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL æqualis angulo FDC. atq; est angulus BAL angulo EDC æqualis. ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. quod facere oportebat.

4. primi



8. primi.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

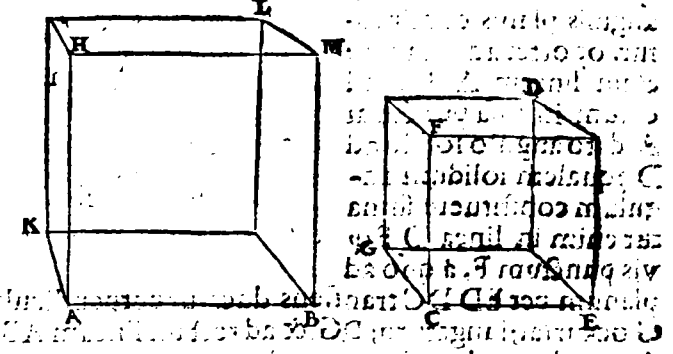
A data recta linea dato solido parallelepipedo *simile, & similiter* positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidẽ linea AB; datum vero solidũ parallelepipedũ CD. oportet à data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positũ solidũ parallelepipedũ describere. constituatur. n. ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulus BAH HAK KAB contineatur, ita vt angulus quidẽ BAH æqualis fit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus angulo GCF, & fiat vt EC ad CG, ita BA ad AK, vt autẽ GC ad CF, qua KA ad AH. ergo ex æquali vt EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est vt EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia, erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoq; ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. A data igitur recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est, quod facere oportebat.

Ex antecedente

11. sexti.

3. diffi. sexti.

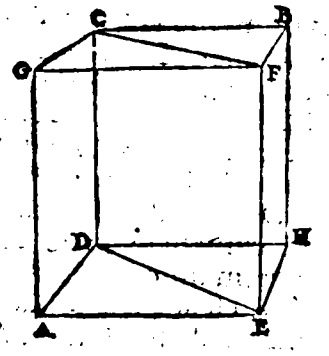


THEOREMA XXIII. PROPO. XXVIII.

Si solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonales oppositorum

positorum planorum ab ipso plano bifariam secabitur.

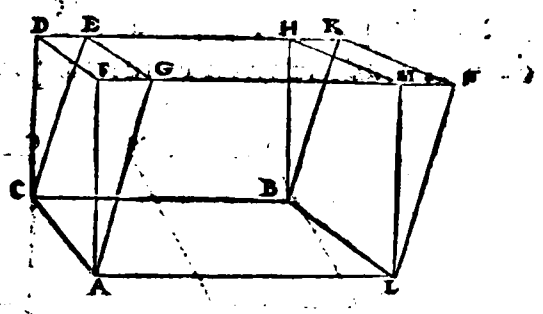
Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorũ planorum, videlicet CF DE. dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE. & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim æqualibus planis, & numero & magnitudine continẽtur. ergo totum AB solidum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdẽ rectis lineis FN DK. dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam.n. parallelogrammum est vtrumq; ipsorum CH CK; erit CB; vtriq; ipsarum DH EK æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammũ CG parallelogrãmo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidẽ parallelogrammũ AB, oppositũ autẽ ipsi GEHM. ergo totum CM solidum paralepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. solida igitur parallelepipeda, quae in eadẽ sunt basi, & eadem altitudine, quorũ stantes sunt in eisdẽ rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demõstrare oportebat.



34. primi.

1. primi

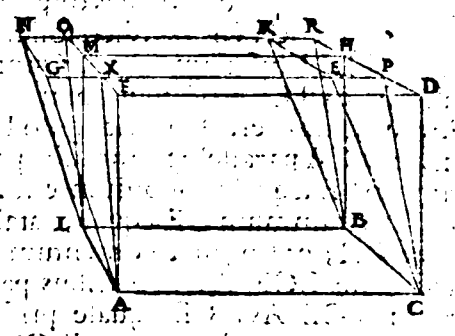
24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM solido CN aequale esse. producãtur enim NX DH, & GE FM, cõueniãtque inter se in punctis RX; & adhuc producantur FM GE ãd OP puncta & AX LO CP BR iungantur. solidum CM, cuius basis quidẽ ACBL parallelogrãmum, oppositum autem ipsi FDHM est aequale solido CO,

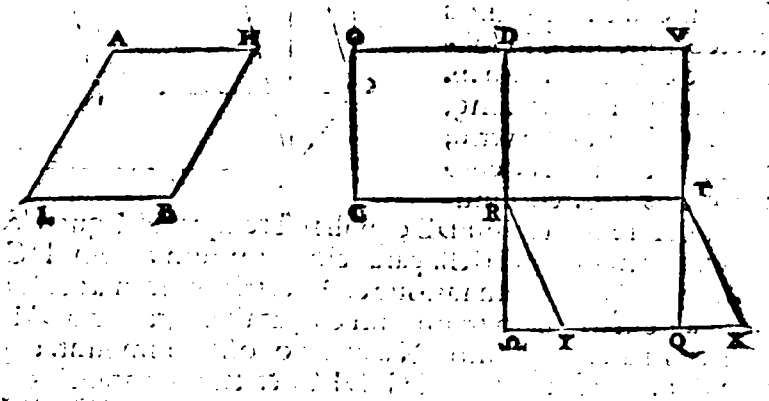


Ex antecedente.

cuius basis parallelogrãmum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem. n. sunt basi ACBL, & ipsorũ stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. Sed solidum CO, cuius bãsis quidem parallelogrãmum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est aequale solido CN, cuius basis ACBL parallelogrãmũ, & ipsi oppositũ GE KN. etenim in eadẽ sunt basi ACBL, & eorũ stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & C M solidum solido CN aequale erit. Solida igitur parallelepipeda, quae in eadẽ sunt basi, & eadẽ altitudine, quorum stantes non sunt in eisdẽ rectis lineis, inter se sunt aequalia. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPO. XXXI.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine inter se sunt æqualia.



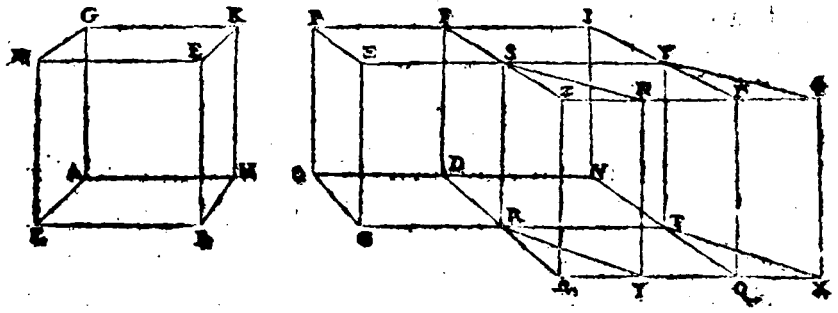
Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadẽ altitudine. Dico solidũ AE solido CF æquale esse. sint aũt primum stantes HK BE AG LM OP DF CR RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus aũt ALB ángulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directũ RT: cõstituaturq; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturq; basis RX, & TY solidum. quoniã igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales, erit parallelogrãmũ RX æquale & simile parallelogrãmo HL. Et quoniã rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosq; æquales cõtinẽt, parallelogrammum RY parallelogrãmo AM æquale & simile erit. Eadem rõne LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogrãma solidi AE tribus parallelogrãmis solidi TY æqualia & similia sunt. Sed & tria tri-

bus

25. primi.

2. diffi. sexti.

bus oppoſita & æqualia ſunt & ſimilia. totum igitur AE ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo ♈Y eſt æquale. producantur DR XY, conueniantq; inter ſe in puncto Ω, & per T ipſi DΩ parallela ducatur TQ, & producatur TQOD, & conueniant in V, compleanturq; ſolida Ω♈ RI. ſolidum igitur ♦Ω cuius baſis eſt R♈ parallelogrãmum, oppoſitum autem ipſi Ωr eſt æquale ſolido ♈Y, cuius baſis eſt R♉ parallelogrãmũ, & oppoſitum ipſi Y♦, in eadem. n. ſunt baſi R♈, & eadem altitudine, & eorum ſtantes RΩ RY TQ TX SZ SN ♦r ♉♦ in eiſdem ſunt rectis lineis ΩXZ♦. Sed ſolidum ♈Y æquale eſt ſolido AE. ergo & ♈Ω ſolido AE eſt æquale. præterea quoniã parallelogrãmum RYXT eſt æquale parallelogrãmo ΩT, etenim in eadẽ eſt baſi RT, & in eiſdem parallelis RT ΩX. Sed parallelogrãmum RYXT parallelogrãmo CD eſt æquale, quoniam & ipſi AB; parallelogrammumq; ΩT æquale parallelogrãmo CD: aliud autem parallelogrãmum DT. eſt igitur vt CD baſis ad baſim DT, ita ΩT ad ipſam DT. Et quoniam ſolidum parallelepipedum CI plano RF ſecatur planis oppoſitis parallelo; erit vt CD baſis ad baſim DT, ita ſolidum CF ad RI ſolidũ. Eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano R♉ oppoſitis planis parallelo, vt ΩT baſis ad baſim CD, ita erit ſolidum Ω♈ ad RI ſolidũ. ſed vt CD baſis ad baſim DT, ita baſis ΩT ad ipſam TD. Vt igitur ſolidum CF ad RI ſolidum, ita ſolidum Ω♈ ad ſolidum RI. Quòd cum vtrumq; ſolidorum CF Ω♈ ad ſolidum RI eandem habeat proportionem, ſolidum CF ſolido Ω♈ eſt æquale. ſolidum autem Ω♈ oſtenſum eſt æquale ſolido AE. ergo & AE ipſi CF æquale erit. ſed non ſunt ſtantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipſis AB CD baſibus. Dico rurſus ſolidum AE æquale eſſe ſolido CF.

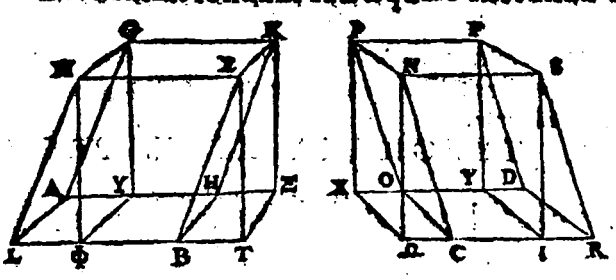


14. huius.

19. huius.

25. huius.

Ducantur à punctis KE GM PF N Sad ſubiectũ planum perpendiculares K♑ ET GY M♦ PX F♈ N♌ SI, & plano in punctis ♑ T Y ♦ X ♈ ♌ I occurrant, & iungantur ♑T Y♦ XY T♦ X♈ X♌ ♌I ♈L. æquale igitur eſt K♦ ſolidum ſolido PI; in æqualibus enim ſunt baſibus KM PS, & eadem altitudine, quorum ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed K♦ ſolidum ſolido AE eſt æquale: ſolidũ vero PI æquale ſolido CE. ſi quidẽ in eadẽ ſit baſi, & eadẽ altitudine, quorũ ſtantes non ſunt in eiſdẽ rectis lineis. ergo & ſolidũ AE ſolido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.



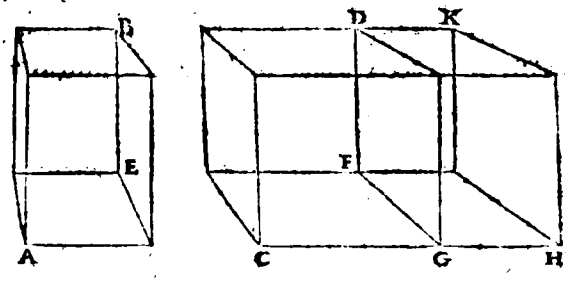
11. huius.

Ex proximè demõſtratis

20. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXII.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.



Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eãdem altitudinem habeant. Dico inter se esse vt bases, hoc est vt AE basis ad basim CF ita solidum AB ad CD solidum. applicetur. n. ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à basi FH eadem altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est æquale; in æqualibus. n. sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. Itaq; quoniã solidum parallelepipedum CK plano DG secatur, oppositis planis parallelo; erit vt HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum, atque est basis quidem FH basi AE æqualis: solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habẽt altitudinem inter se sunt vt bases. Quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente. 25. huius.

E. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam solida parallelepipeda in eadem basi, vel in æqualibus basibus constituta tam inter se proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum, propositione XLI.

COROLLARIVM.

Ex his igitur & iam demonstratis sequitur prismata triangulares bases habentia, quæ vel in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur, & eadem altitudine inter se æqualia esse. Et insuper quæ eandem habent altitudinem inter se esse vt bases. Et quæ vel in eisdem vel æqualibus basibus constituuntur, inter se esse vt altitudines.

28. huius.

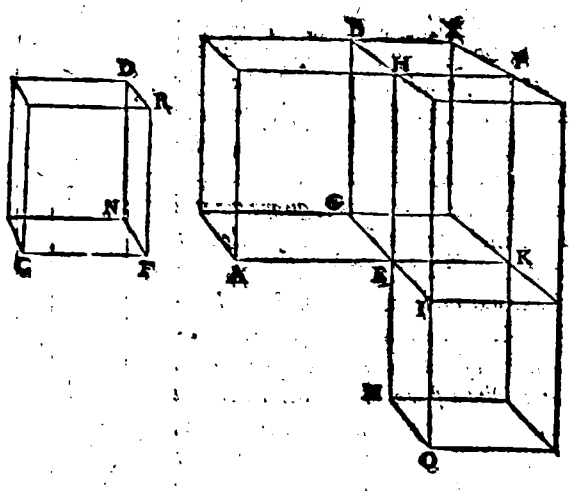
Sunt. n. ea solidorum parallelepipedorum dimidia. per bases autem prismatis intelligimus vnamquamq; sed alterum duntaxat oppositorum planorum similium, & parallelorum, vt nũc in prismate triangularem basim habente, alterum triãgulum, alioquin obstarent, quæ in vltima propositione huius tradũtur.

THEOREMA XXVIII. PROPO. XXXIII.

Similia solida patallelepipeda inter se sunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint similia solida patallelepipeda AB CD. latus autẽ AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplam proportionem habere eius, q̃ habet AE ad CF. producantur. n. EK EL EM in directũ ipsis AE GE HE. & ipsi quidẽ CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN æqualis EL; & adhuc ipsi FR. æqualis EM, & KL, parallelogrãmũ, & KO solidũ cõpleatur. Qm̃ igitur duæ KE EL duabus GE EN æquales sũt, sed & ãgulus KEL ãgulo CFN est æqualis; q & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrãmũ simile parallelogrãmo CN. Eadem ratione, & parallelogrammum

mũ KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipſi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogrãma ſolidi KO tribus parallelogrãmis CD ſolidi æqualia & ſimilia ſunt. ſed tria tribus oppoſitis æqualia ſũt & ſimilia. totum igitur KO ſolidum æquale eſt & ſimile toti ſolido CD. compleatur GK parallelogrammum; & à baſibus quidem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipſi AB ſolida compleantur AX LP. & quoniã ob ſimilitudinem ſolidorum AB CD eſt vt AE ad CF. ita EG ad FN; & EH ad FR; æqualis autem FC ipſi EK, & FN ipſi EL, & FR ipſi EM. erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. ſed vt AE quidem ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita GK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammũ ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. ſed vt AG quidem ad GK, ita AB ſolidum ad ſolidum EX: vt autem GK ad KL, ita ſolidum XE ad PL ſolidũ: & vt PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO. & vt igitur ſolidum AB ad ſolidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. ſi autẽ quattuor ſint magnitudines deinceps proportionales prima ad quartam triplam proportionem habet eius, quam ad ſecundam. ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. ſed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammũ ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipſam EK. quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplam proportionem habebit eius, quam AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, & recta linea EK rectæ CF eſt æqualis. ergo & AB ſolidum ad ſolidum CD triplam habet proportionem eius, quã latus ipſius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonſtrare oportebat.



14. huius.

1. ſexti.

Ex antecedente.

11. quinti.
11. diffi. quinti.

Ex antecedente.
1. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum, quod fit à prima ad ſolidum, quod à ſecunda ſimile, & ſimiliter deſcriptum; quoniam & prima ad quartam triplã proportionem habet eius, quam ad ſecundam.

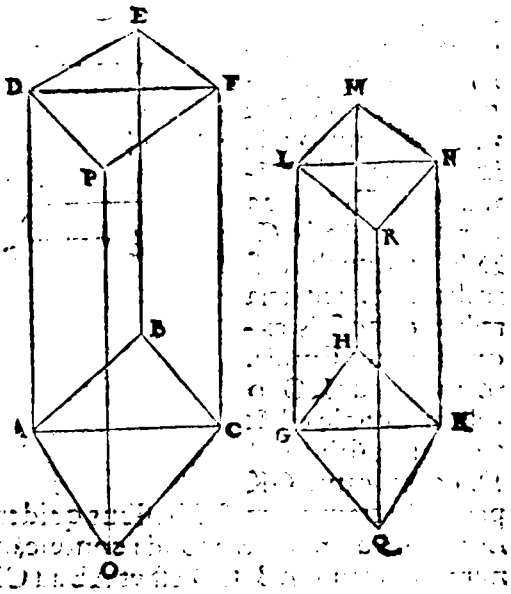
COMMENTARIVS.

Ex proxime demonſtratis, ſequitur priſmata ſimilia, quę triangulares baſes habent in tripla eſſe proportione homologorum laterum.

Sint ſimilia priſmata triangulares baſes habentia, & ſimiliter poſita AE GN, & priſmatis quidem AF baſis ſit triangulum ABC, & quod ipſi oppoſitum DEF: priſmatis vero GN baſis ſit triangulum GHK, & ipſi oppoſitum LMN. Sit autẽ latus AB homologum lateri GH, dico priſma AF ad priſma GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. com-

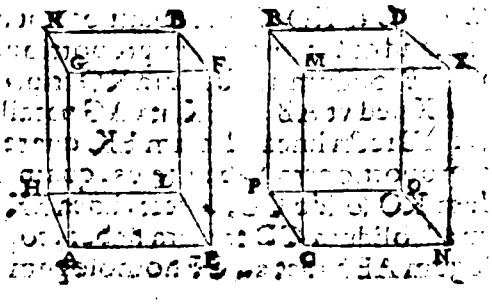
pleantur enim ſolida parallelepipeda, & ſit ſolidi quidem parallelepipedi AF baſis quadrilaterum ABCO, & ipſi oppoſitum quadrilaterũ DEFP ſolidi vero parallelepipedi GN baſis ſit quadrilaterum GHKQ, & quod ipſi opponitur LMNR. Itaq; qm̃ priſma AF ponitur ſimile priſmati GN, erit parallelogrãmum ABED ſimile parallelogrãmo GHML. quare & ipſi oppoſitum parallelogrammũ OCFP ſimile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonſtrabitur parallelogrammum AOPD ſimile ipſi GQRL. ſolidum igitur parallelepipedum AF ſimile eſt ſolido parallelepipedo GN. ſimilia autem ſolida parallelepipeda in tripla ſunt proportione homologorum laterum. quare, & ipſorum dimidia in eadem proportione erũt priſma igitur AF ad priſma GN triplã proportionem habebit eius, quam habet AB ad GH. Quod oportebat demonſtrare.

9. dif. huius.
24. huius.



THEOREMA XXIX. PROPO. XXXIV.

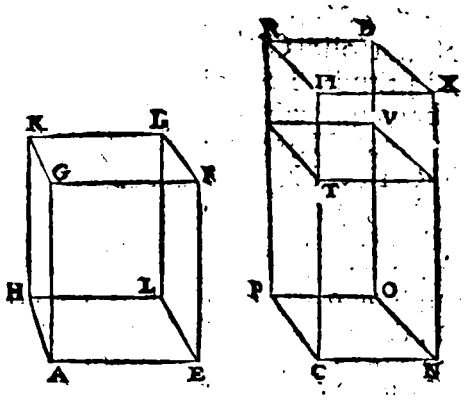
Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondẽt, ea inter ſe ſunt æqualia.



Sint aequalia ſolida parallelepipeda AB CD. dico ipſorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpõdere, hoc eſt vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Sint enim primũ ſtantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos ãgulos baſibus ipſorũ. dico vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG; ſi gitur baſis EH baſi NP ſit æqualis, eſt aũt & AB ſolidũ æquale ſolido CD; erit & CM aequalis ipſi AG. ſi.n. baſibus EH NP aequalibus exiſtentibus nõ ſint AG CM altitudines aequales, neq, AB ſolidũ ſolido CD æquale erit. ponitur autem æquale. nõ igitur inæqualis eſt altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis ſit neceſſe eſt, ac propterea vt EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG, ex quibus cõſtat ſolidorũ parallelepipedorũ AB CD baſes ex cõtraria parte altitudinibus reſpondere. At vero nõ ſit baſis EH aequalis baſi NP. Sed EH ſit maior. eſt aũt & AB ſolidũ ſolido CD aequale. ergo maior eſt CM ipſa AG; alioquin rurſus ſequeretur ſolida AB CD aequalia nõ eſſe, quæ ponũtur aequalia. Itaq; ponatur CT aequalis ipſi AG. & a baſi quidẽ NP, altitudine autẽ CT ſolidum parallelepipedum VC compleatur. Qm̃ igitur ſolidũ AB ſolido CD eſt aequale, aliud aũt aliquod eſt VC, & aequalia ad idem eandẽ habẽt proportionem, erit vt AB ſolidũ ad ſolidũ CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. ſed vt AB ſolidum ad ſolidũ CV, ita baſis EH ad NP baſim aequalia.n. ſunt AB CV ſolida. Vt aũt ſolidum CD ad ipſum CV, ita MP baſis ad baſim PT, & MC ad CT. & vt igitur baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. ſed CT æqualis AG. ergo & vt EH baſis ad baſim NP, ita

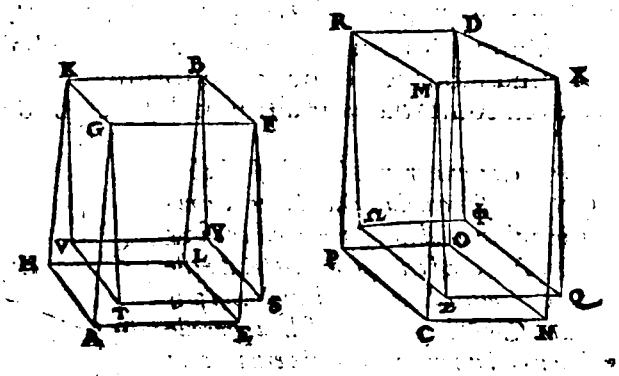
7. quinti
32. huius.
25. huius.
1. ſexti.

NP, ità MC ad AG. quare ſolidorũ parallelepipedorum AG CD baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. rurſus ſolidorum parallelepipedorũ AB CD baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus: ſitq; vt EH baſis ad baſim MP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinẽ ſolidi AB. dico ſolidũ AB ſolido CD aequale eſſe. Sint. n. rurſus ſtantes ad rectos angulos baſibus. & ſi quidem baſis EH ſit aequalis baſi NP, eſtq; vt EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem: erit ſolidi CD altitudo altitudini ſolidi AB aequalis, ſolida aũt parallelepipeda, quae ſunt in aequalibus baſib. & eadẽ altitudine inter ſe aequalia ſunt. ergo ſolidũ AB ſolido CD eſt aequale. ſed non ſit EH baſis aequalis baſi NP, & ſit EH maior. maior igitur eſt & ſolidi CD altitudo altitudine ſolidi AB. hoc eſt CM ipſa AG. ponatur ipſi AG aequalis rurſus CT, & ſimiliter ſolidũ CV cõpleatur. Itaq; qm eſt vt EH baſis ad baſim NP, ita MC ad ipſã AC; aequalis aũt eſt AG ipſi CT: erit vt baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. ſed vt baſis EH ad NP baſim, ita AB ſolidũ ad ſolidũ CV; aequealta. n. ſunt ſolida AB CN. vt aũt MC ad CT, ita & MP baſis ad baſim PT, & ſolidũ CD ad CV ſolidũ & vt igitur ſolidũ AB ad ſolidũ CV, ita CD ſolidũ ad ſolidũ CV. Quòd cũ vtrũq; ſolidorũ AB CD ad ipſum CV eandẽ proportionẽ habeat, erit AB ſolidũ ſolido CD aequale. qd demõſtrare oportebat.



30. huius

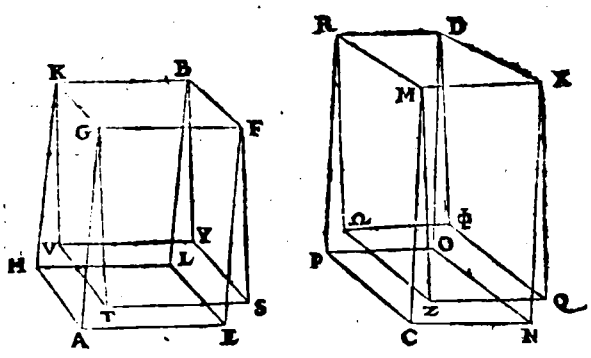
Nõ ſint aũt ſtãtes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos baſibus ipſorum: & à punctis FGBK XMDR ad plana baſium EH NP ducantur perpendiculares, quae planis in punctis STYVQZΩ occurant & cõpleantur ſolida FVXΩ. dico & ſic aequalibus exiſtentibus ſolidis AB CD, baſes ex cõtraria parte altitudinibus reſpondere, & vt EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Quoniam. n. ſolidum AB ſolido CD eſt aequale; ſolido autẽ AB aequale eſt ſolidũ BT; in eadem namq; ſunt baſi FK, & eadem altitudine; quorũ ſtantes nõ ſunt in eiſdem rectis lineis: & ſolidũ DC eſt aequale ſolido DZ, quòd in eadẽ ſint baſi XR, & eadem altitudine, quorum ſtãtes non ſunt in eiſdem rectis lineis; erit & ſolidum BT ſolido DZ aequale. aequaliũ autẽ ſolidorũ parallelepipedorum, quorũ altitudines baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos; baſes altitudinibus ex cõtraria parte reſpondent. eſt igitur vt FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. atq; eſt baſis quidem FK baſi EH aequalis, baſis vero XR aequalis baſi NP. quare vt EH baſis ad baſim NP, ita eſt altitudo ſolidi DZ ad ſolidi BT altitudinẽ. eadem aũt ſunt altitudines ſolidorum DZ BT; itemq; ſolidorũ DC BA. eſt igitur vt EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi DC altitudo ad altitudinẽ ſolidi AB. ergo ſolidorum parallelepipedorum AB CD baſes ex cõtraria parte altitudinib. reſpõdent. rurſus ſolidorum parallelepipedorũ AB CD baſes ex cõtraria parte reſpõdeãt altitudinibus: ſitq; vt EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinẽ. dico ſolidũ AB ſolido CD aequale eſſe. Iiſdem namq; cõſtru-



31. huius

Ex ante demonſtratis.

ctis, quoniã vt EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinẽ solidi AB; & basis quidem EH est aequalis basi FK; NP vero ipsi XR: erit vt FK basis ad basim XR, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eaedem autem sunt altitudines solidorum AB CD, & ipsorum BT DZ. est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorum BTDZ parallelepipedorũ bases ex contraria parte respondent altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt aequalia. ergo BT solidum solido DZ est aequale. sed solidum quidem BT aequale est solido BA, etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorũ stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AB solido CD est aequale. Quod demonstrare oportebat.



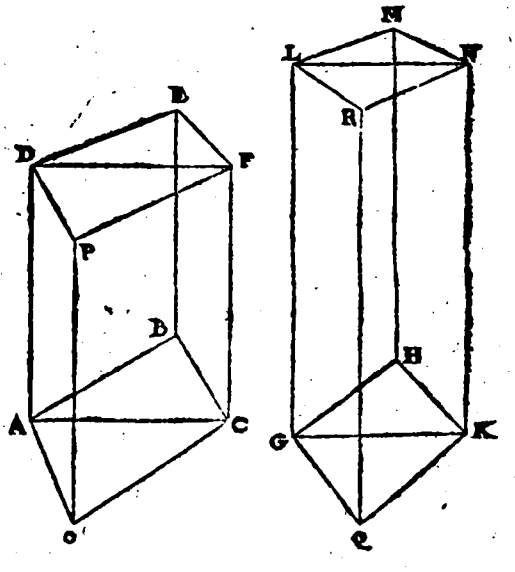
F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs quæ ante dicta sunt, illud etiam demonstrari potest.

Aequalium prismatum & triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quorum prismatum triangulares bases habẽtiũ, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt aequalia.

Sint prismata, quæ triangulares bases habẽt AF GN *inter se æqualia. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt triangulum* ABC *ad triangulum* GHK, *ita esse prismatis* GN *altitudinem ad altitudinem prismatis* AF. *Compleantur enim solida parallelepipeda, quæ etiam inter se æqualia erunt, cum sint prismatum dupla: æqualium autem solidorũ parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. ergo vt solidi parallelepipedi* AF *basis ad basim solidi parallelepipedi* GN, *hoc est vt quadrilaterum* ABCO *ad quadrilaterũ* GHKQ, *ita est solidi parallelepipedi* GN *altitudo ad altitudinem. solidi parallelepipedi* AF. *sed vt quadrilaterum* ABCO *ad quadrilaterum* GHKQ, *ita triangulum* ABC *ad triangulum* GHK. *Vt igitur triangulum* ABC *ad triangulum* GHK, *ita altitudo solidi parallelepipedi* GN *ad altitudinem solidi parallelepipedi* AF, *hoc est ita prismatis* GN *altitudo ad altitudinem prismatis* AF. *Rursus prismatum* AF GN *bases ex contraria parte respondeant altitudinibus, hoc est vt triangulũ* ABC *ad triangulũ* GHK, *ita sit prismatis* GN *altitudo ad altitudinem prismatis* AF. *dico prismata* AF GN *inter se æqualia esse. compleantur enim rursus solida parallelepipeda, erit quadrilaterum* ABCO *ad quadrilaterũ* GHKQ, *vt triangulũ* ABC

15. quinti.

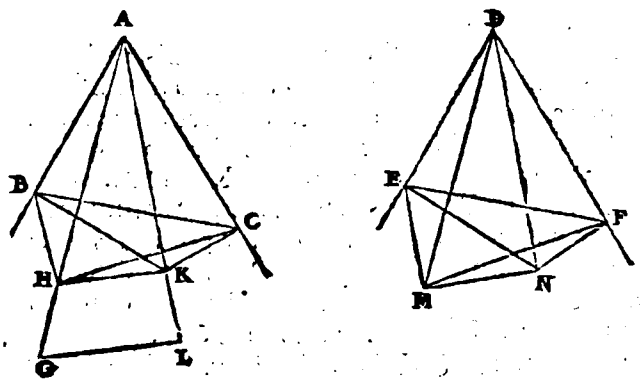


ad

ad triangulum GHK. quare vt ſolidi parallelepipedi AF *baſis ad baſim ſolidi parallelepipedi* GN, *ita erit priſmatis* GN *altitudo ad altitudinem priſmatis* AF, *hoc eſt, ita ſolidi parallelepipedi* GN *altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi* AF. *quorum autem ſolidorum parallelepipedorũ baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. ergo & æqualia erunt eorum dimidia. priſma igitur* AF *priſmati* GN *eſt æquale. quod demonſtrare oportebat.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXV.

Si ſint duo anguli plani æquales, & inuerticibus ipſorum ſublimes rectæ lineæ conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quęuis puncta, atq; ab ipſis ad plana in quibus ſunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iũganturrectæ lineæ: cũ ſublimibus æquales angulos cõtinebũt.



Sin duo anguli rectilinei æquales BAC EDF: & à pũctis AD ſublimes rectæ lineæ AG DM conſtituãtur, quę cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineãt, alterum alteri: ãgulum quidem MDE æqualem ãgulo GAB, angulũ vero MDF ãgulo GAC æqualem: & ſumantur in ipſis AG DM quaeuis pũcta G M, à quibus ad plana per BAC EDF ducãtur perpẽdiculares GL MN, occurrentes planis in punctis LN; & LA ND iũgantur. dico angulũ GAL angulo MDN æqualẽ eſſe. ponatur ipſi DM æqualis AH, & per H ipſi GL parallela ducatur HK. eſt autem GL perpendicularis ad planũ per BAC. ergo & HK ad planũ per BAC perpendicularis erit. ducantur à punctis KN ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE iungantur. Quoniã igitur quadratũ ex HA æquale eſt quadratis ex HK KA; quadrato autẽ ex HA æqualia ſunt ex KC CA quadrata; erit quadratũ ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autẽ ex HK KC æquale eſt quadratũ ex HC. quadratũ igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA eſt rectus. eadẽ ratione & angulus DFM rectus eſt. ergo angulus ACH ipſi DFM eſt æqualis. eſt autẽ & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triãgula ſunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterũ alteri, & vnũ latus vni lateri æquale, quod vni æqualiũ angulorũ ſubtenditur; videlicet HA ipſi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt, alterũ alteri. quare AC eſt æqualis DF. ſimiliter demonſtrabimus & AB ipſi DE æquale eſſe, iungantur HB ME. & quoniã quadratum ex AH eſt æquale quadratis ex AK KH, quadrato aũt ex AK æqualia ſunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadratum ex AH æqualia. ſed quadratis

8. huius.

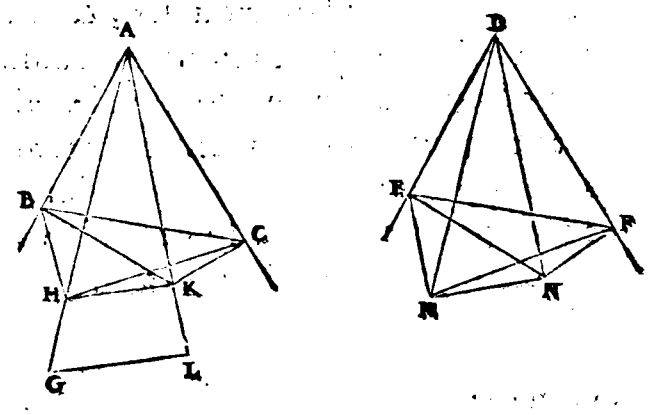
47. primi.

47. primi.

48. primi.

26. primi.

drātis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & HK perpendicularis est ad subiectum planum. quadratum
48 primi. igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus est. eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis
26 primi. angulo EDM, ita enim ponitur; atq; est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE est æqualis. Quoniam igitur AC quidē est æqualis DF, AB verò ipsi DE; erunt duę CA AB duabus FD DE æquales. Sed & angulus BAC angulo FDE
4 primi. est æqualis. basis igitur BC basi EF, & triangulū triāgulo, & reliqui anguli reliquis æquales sūt. ergo angulus ACB angulo DFE. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN.



quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis, eadem ratione, & CBK angulus est æqualis angulo FEN. itaq; duo triāgula sunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales habentia alterū alteri, & vnū latus vni lateri æquale, quod est ad æquales āgulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus
26 primi. æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autē & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales sunt, & rectos continent angulos.
4 primi. basis igitur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia
47 primi. sunt ex AK KH quadrata; etenim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia; quorum quadratū ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquū ex KH quadratū reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cū duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis erit. Quod oportebat demonstrare.
8 primi.

COROLLARIVM.

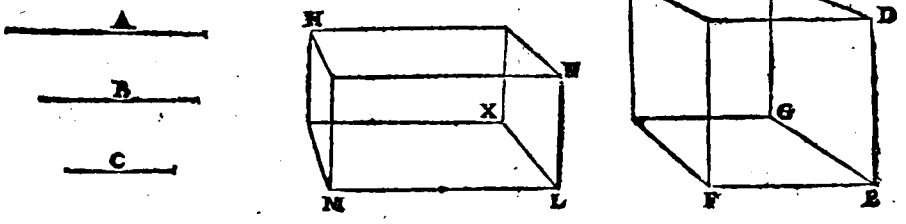
Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales continent angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducantur, inter se æquales esse.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus sit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint

Sint tres rectæ lineæ proportionales ABC, sitq; vt A ad B, ita B ad C. dico solidum, quod fit ex ipsis ABC æquale esse solido, quod fit ex B. æquilatero quidē, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E cōtentus tribus



angulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis vnaquæq ipsarum DE GE EF, solidū parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A po natur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituatur angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidem B æqualis LX, ipsi vero C æqualis LN. Quoniam igitur est vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B vnicuique ipsarum LX EF EG ED, & C ipsi LN; erit vt LM ad EF, ita DE ad LN: & circum æquales angulos MLN DEF, latera ex contraria parte sibi ipsis respondent. ergo MN parallelogrammum parallelogrammo DF est æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt DEF NLM, & in ipsi sublimes rectæ lineæ constituuntur LX EG æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares; quæ à punctis GX ad plana per NLM DEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. Quæ verò in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK: atq; est solidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedū, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Quod demonstrare oportebat.

26. huius.

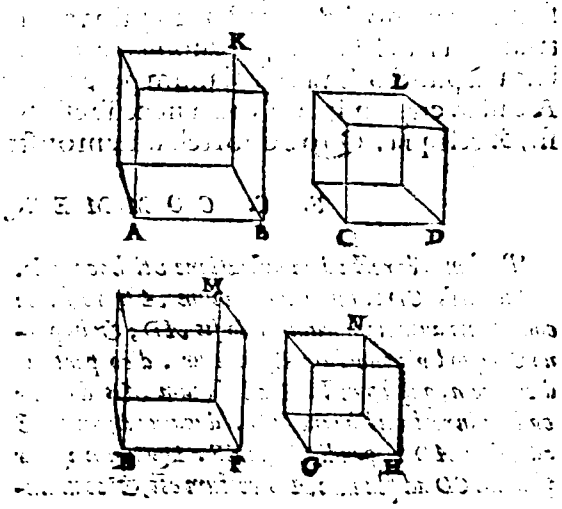
14. sexti.

Ex antecedenti.

32. huius.

THOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXVII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiūt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

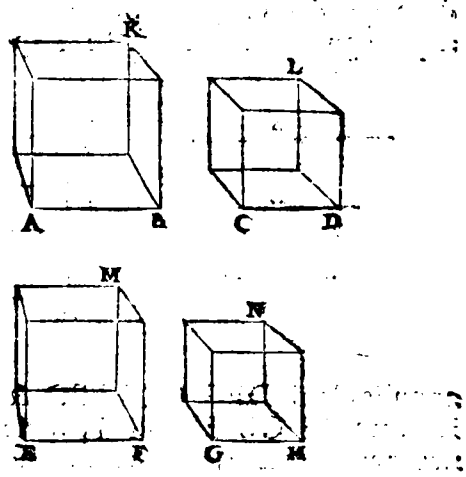


Sint quattuor rectae linae proportionales AB CD EF GH, sitque vt AB ad CD, ita EF GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia, & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico vt KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quo-

niam

niam enim ſolidum parallelepipedum KA ſimile eſt ipſi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quàm AB habet ad CD. eadem ratione & ſolidum ME ad ipſum NG triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atq; eſt vt AB ad CD, ita EF ad GH. vt igitur AK ad LC, ita ME ad NG. ſed ſit vt ſolidum AK ad ſolidum LC, ita ME ſolidum ad ſolidum NG. dico vt recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam GH. Quoniam enim rurſus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD: habet autem, & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH, atq; vt AK ad LC, ita ME ad NG: erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. ſi igitur quatuor rectæ lineæ proportionales ſint & reliqua. Quod oportebat demonſtrare.

33. huius.

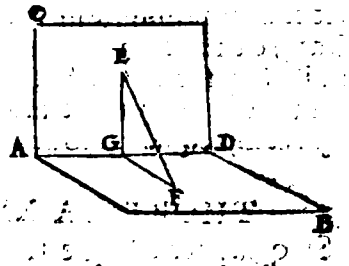


THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si planum ad planum rectum ſit; & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in vno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum ſectionem cadet.

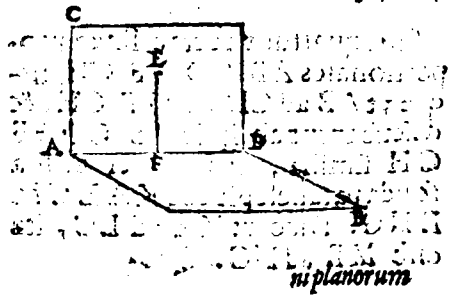
Planum n. CD ad planum AB rectum ſit, cõmunis autẽ eorũ ſectio ſit AD, & in ipſo CD plano, quod vis punctũ E ſumatur. dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipſam AD. non n. ſed ſi fieri poteſt, cadat extra, vt EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autẽ F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidẽ & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iungatur. quoniam igitur FG plano CD eſt ad rectos angulos; contingit autem ipſam recta linea EG, quæ eſt in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. ſed & EF plano AB ad rectos angulos eſt. rectus igitur eſt angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis ſunt æquales; quod eſt abſurdum. nõ igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipſam cadat neceſſe eſt. Si igitur planum ad planum rectum ſit, & reliqua. Quod oportebat demonſtrare.

17. primi.



F. C. COMMENTARIVS.

Poſſumus et recta demonſtratione vti hoc modo. Sit rurſus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipſorum ſectio ſit AD; & in plano CD quod vis punctum E ſumatur. dico perpendicularem, quę à puncto E ad planum AB ducitur cadere in rectam lineam AD. ducatur à puncto E ad ipſam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum eſt, & communi planorum

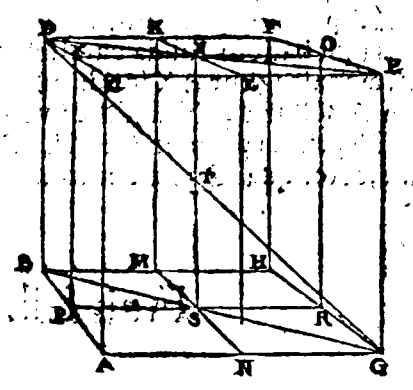


ni planorum sectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta est EF; erit EF reliqui plani AE ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum sectionem AD cadit. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXIX.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur, cõis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter sese bifariam secabunt.

In solido.n.parallelepipedo AF oppositorum planorum CF AH latera bifariam secentur in punctis KLMN XPOR, & per sectiones plana ducantur KN XR, cõis autẽ planorum sectio YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Duo YS, DG sese bisariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS DT vero ipsi TG aequalem esse. Iungantur.n. DY YE BS SG. Quoniã igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se aequales sunt. Et quoniã DX quidem est aequalis OE XY vero ipsi YO, & angulos aequales continent; erit basis DY aequalis basi YE, & triangulũ DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis aequales, angulus igitur XYD est aequalis angulo OYE, & ob id recta linea est DYE Eadem ratione, & BSG recta est. atq; est BS aequalis SG. Et quoniam CA ipsi DB aequalis est & parallela, sed CA est aequalis, & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG aequalis, & parallela, & ipsas coniungunt rectae lineae DE GB. parallela igitur est DE ipsi BG & sumpta sunt in vtraq, ipsarum quaeuis puncta DYG S, & iunctae sunt DG YS. ergo DG YS in vno sunt plano. Quod cum DE sit parallela BG erit & EDT angulus angulo BGT aequalis, alterni enim sunt. est autem & DTY angulus aequalis ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis aequales habentia, & vnum latus vni lateri aequale, quod vni aequalium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG, ergo & reliquos angulos reliquis angulis aequales habebunt. quare DT quidem est aequalis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, & reliqua. Quod oportebat demonstrare.



29.primi.

4.primi.

14.primi.

9.huius.

33.primi.

7.huius.

29 primi

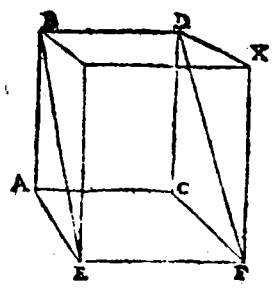
15.primi.

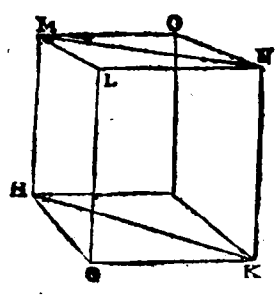
26.primi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XL.

Si sint duo prismata æqualta, quorũ vnũ quidẽ basim habeat parallelogrãmũ; alterũ vero triãgulum, & parallelogrammũ duplum sit ariangu li; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æqualta ABCDEFGHKLMN &

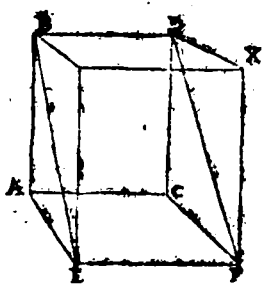


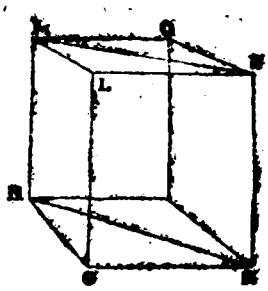


IIOVE

vnum

vnum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum ipsius triangulari GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. compleantur enim AX GO solida. Et quoniam parallelogrammum AF trianguli





GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æqualta, &c reliqua. Quod demonstrare oportebat.

gr. huius.

Finis Libri Vndecimi.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Duodecimus.

ET SOLIDORVM SECVNDVS.

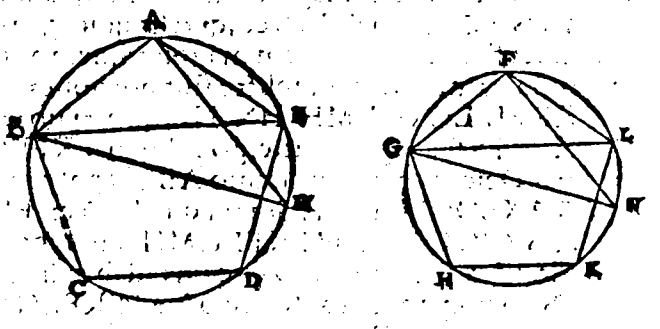
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THOREMA I. PROPOSITIO I.

SIMILIA polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & ipsis similia polygona ABCDE FGHLL; diametri autem circulorum sint BM GN. dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. iungantur enim BE AM GL FN. & quoniã polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL, & BAE angulus angulo GFL est aequalis: atq; est vt BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL vnum angulum vni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL. circa æquales autem angulos latera proportionalia. quare triangulum ABE triangulo FGL aequiangulum est, ac propterea angulus AEB aequalis est angulo FLG. sed angulus quidem AEB angulo AMB est aequalis, in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem FLG aequalis est angulo FNG. ergo & AMB angulus est aequalis angulo FNG. est aũt & rectus angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo aequalis. aequiangulũ igitur est triangul AMB triangulo FGN. ergo vt BM ad GN ita BA ad GF. sed proportionis quidem BM ad GN dupla est proportio quadrati ex BM ad quadratum ex GN proportionis vero BA ad GF dupla est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL. & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonũ. Quare similia polygona, quae in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata.



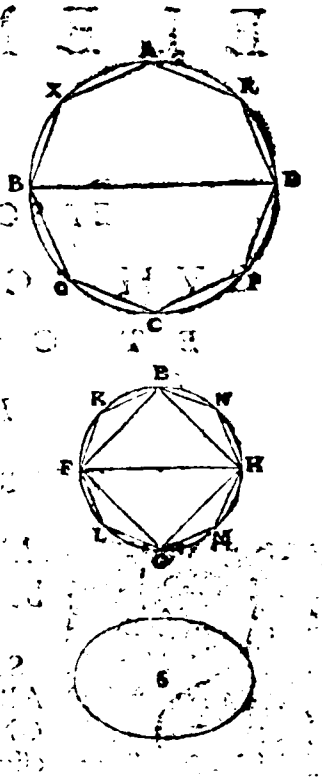
21. tertij.

31. tertij.

THOREMA III. PROPOSITIO II.

Circuli inter se sunt vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipsorũ sint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratũ ex FH, ita esse circulũ ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita est; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spaciũ aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primũ ad minus ꝙ sit S: & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. Itaq; descriptum in circulo quadratum maius est dimidio circuli EFGH; quoniam si per pũcta EFGH contingentes circulũ ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium quadratũ EFGH. descriptorum autẽ circa circulũ quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH maius est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis KLMN: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. Vnũ quodq; igitur triãgulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli, in qua consistit, quoniã si per pũcta KLMN contingentes circulum ducãmus, & parallelogrãma, quæ sunt in rectis lineis EF FG GH HE cõpleamus; erit vnum quodq; triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrãmi, quod ad ipsum est. sed portio minor est parallelogrãmo. quare vnum quodq; triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli, in qua consistit. reliquas igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas: atq; hoc semper facientes relinquemus tandẽ quasdã circuli portiones, quæ minores erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spacium superat. etenim ostensum est in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis si a maiori auferatur maius quã dimidiũ, & ab eo, ꝙ relinquitur, rursus maius quã dimidiũ, & hoc semper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquã, quæ minori magnitudine exposita sit minor. Itaq; relictæ sint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ maiores sint excessu, quo circulus EFGH ipsũ S spaciũ superat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonũ maius erit spacio S. Describatur ẽt in circulo ABCD polygono EKFLGMHN simile polygonũ AXBOCPDR. est igitur vt quadratũ ex BD ad quadratũ ex FH, ita polygonũ AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonũ. sed & vt quadratũ ex BD ad quadratũ ex FH, ita ABCD circulus ad spaciũ S. ergo & vt circulus ABCD ad spaciũ S, ita polygonũ AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonũ; & permutando vt circulus ABCD ad polygonũ, ꝙ in ipso est, ita spaciũ S ad polygonum EKFLGMHN. maior autẽ est circulus ABCD eo, ꝙ in ipso est polygono. quare & spaciũ S maius est polygono EKFLGMHN. sed & minus, ꝙ fieri nõ potest. Nõ igitur est vt quadratũ ex BD ad quadratũ ex FH, ita ABCD circulus ad spaciũ aliquod minus circulo EFGH. similiter ostẽdemus neq; esse vt quadratum ex FH ad quadratũ ex BD, ita circulũ EFGH ad aliq̃ spaciũ minus circulo ABCD. dico igitur neq; esse vt quadratum ex BD ad quadratũ ex FH, ita circulum ABCD ad aliq̃ spacium maius circulo EFGH. si. n. fieri põt, sit ad maius spacium S. erit igitur cõuertẽdo vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita spacium S ad ABCD circulum. sed vt spaciũ S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliq̃ spaciũ minus circulo ABCD, vt demõstrabitur. ergo & vt quadratum ex



A

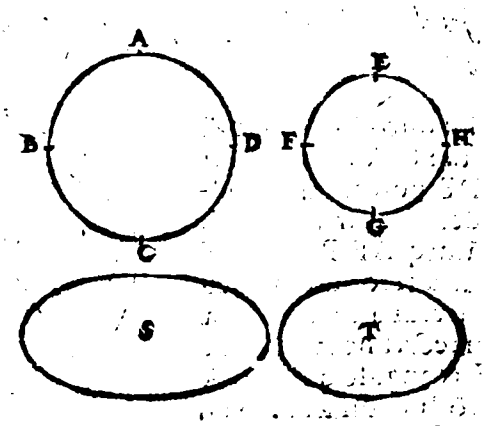
B

C

ex antecedenti.

11. quinti.

ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpaciũ minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. nõ igitur vt quadratum ex BD ad quadratũ ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpacium aliquod maius EFGH circulo. oſtẽſum autem eſt neq; ad minus. quare vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſeſunt, vt diametrorum quadrata. quod oſtendere oportebat.



LEMMA.

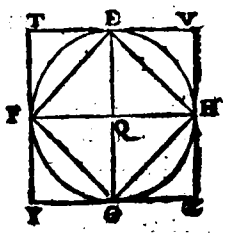
Itaque dico ſi ſpacium S ſit maius circulo EFGH eſſe vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad ſpacium aliquo circulo ABCD minus.

Fiat enim, vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T. dico ſpacium T circulo ABCD minus eſſe. quoniam enim eſt vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T; erit permutando vt ſpacium S ad circulum EFGH, ita ABCD circulus ad ſpaciũ T. maius autem eſt ſpacium S circulo EFGH. ergo & ABCD circulus ſpacio T eſt maior; ac propterea vt ſpaciũ S ad circulum ABCD, ita eſt EFGH circulus ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH] A

Deſcribatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe ductis per EFGH puncta rectis lineis, quæ circulum contingant vt ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipſius TE dupla. Iungantur enim EG FH ſeſe in puncto Q ſecantes, quæ circuli diametri erunt: atq; erit Q circuli centrum. angulus igitur QEV eſt rectus. ſed & rectus FQH; ſi quidem duæ FQ QE æquales ſunt duabus HQ QE; & baſis EF æqualis baſi EH. ergo angulus FQE angulo HQE eſt æqualis: & ob id vterq; rectus. ex quibus ſequitur rectam lineam TEV ipſi FQH parallelam eſſe. & eadem ratione oſtendentur TFY, VHZ parallelæ ipſi EQG; & inter ſeſe. parallelogramma igitur ſunt FV VG FE EH. quod cum FQ ſit æqualis QH, erit & TE ipſi EV æqualis: ideoq; TV eſt dupla ipſius TE. ſimiliter demonſtrabimus, & TY ipſius TE duplam. cumque TT TV æquales ſint, erunt & earum dimidiæ FT TE æquales. Et quoniam TV dupla eſt ipſius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadruplum erit. ſimiles enim rectilineæ figuræ in duplà ſunt proportione homologorum laterum. ſed quadratum ex EF eſt æquale quadratis ex FT TE quæ quidem ſunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex EF, hoc eſt quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonſtrare.



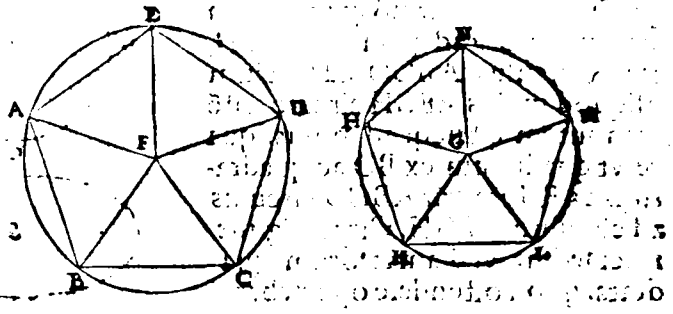
18. tertij.
8. primi.
28. primi.
34. primi.
cor. 20. ſexti.
47. primi.

Erit vnum quodq; triãgulorum CKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt] *Ex 41 primi.* B

SCHOLIVM.

Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygonon EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. G

In dato circulo, descripto in circulo polygono simile polygonum describere.



Sint duo circuli, quorũ centra FG, & in circulo ABCDE polygonũ quodvis describatur ABCDE. iungãturq; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cẽtro G quædam recta linea vtcunque GH: & angulo quidem AFB cõstituatur æqualis angulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, deniq; angulo DFE æqualis angulus MGN cõstituatur. ergo reliquus AFE reliquo HGN est æqualis. & iungantur HK KL LM MN NH. est aũt vt AF ad FB, ita HG ad GK, similia enim sunt AFB LGK triangula; quod ostensum est in theoremate sexto sexti libri eberi circulorum. vt igitur semidiameter circuli ad circuli semidiametrum, ita BA ad HK. similiter ostendemus, & vnamquamq; ipsarum BC CD DE EA ad vnamquamq; KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sunt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales sunt. polygona igitur ABCDE HKLMN singulos angulos singulis angulis æquales habent: & circa æquales angulos latera proportionalia. ergo polygonũ ABCDE simile est polygono HKLMN. In dato igitur circulo FHKLMN polygono ABCDE simile polygonum descriptum est. Quod facere oportebat.

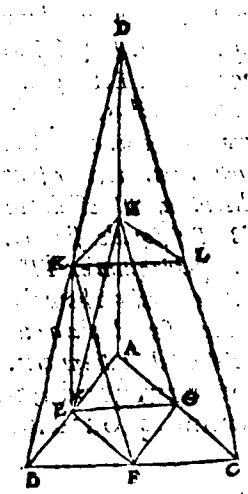
23. primi.

4. sexti.

1. diffin. 3.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangulárem habens basim diuiditur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesq; toti & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt maiora.



Sit pyramis, cuius basis quidem ABC triangulũ; vertex autem punctum D. dico pyramidẽ ABCD diuidi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares; basesq; habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse maiora. secentur. n. AB BC CA AD DB DC bifariã in punctis EFGHKL, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniã igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD, erit EH ipsi DB parallela. Eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est æqualis EB. Sed EB ipsi AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit est aũt & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis ãgulo KHD. basis igitur EH basi KD est æqualis quare triãgulũ AEH æquale est & simile triãgulo HKD. Eadẽ rõne & triangulũ AHG triãgulo HLD æquale est & simile. Et qm̃ duæ rectæ lineæ se se tangentes EH HG duabus rectis lineis se se tãgentibus KD DL parallelæ sunt, non aũt in eodẽ plano, æquales ãgulos cõtinebũt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL.

2. sexti.

34. primi.

29. primi.

4 primi.

KDL. rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit basis EG basi KL æqualis, æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis, cuius basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & similis est pyramidi, cuius basis est triangulum HKL & vertex D punctum. & quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB parallela ducta est HK; erit triangulum ADB triangulo DHK æquiangulum, & latera habent proportionalia. Simile igitur est ADB triangulum triangulo DHK: & eadem rõne rtiãgulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triãgulo DHL. quòd cum duæ rectæ lineæ se se tangentes BA AC duabus rectis lineis se se tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodæm plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atq; est vt BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; idcoq; pyramis, cuius basis quidem triãgulum ABC, vertex autem punctum D similis est pyramidi, cuius basis triangulum HKL, & vertex punctum D. sed pyramis cuius basis quidem HKL triãgulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cuius basis triãgulum AEG, & vertex H pũctum. quare & pyramis cuius basis triãgulum ABC & vertex punctum D similis est pyramidi, cuius basis AEG triãgulum, & vertex punctum H. Vtraq; igitur ipsarum AEG H HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. & quoniã BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrãmum duplum trianguli GFC. & quoniã duo prismata æquealta sunt, quorum vnum quidem basim habet parallelogrãmum, alterum vero triãgulum, estq; parallelogrãmum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrãmis EBFG EBKH KHFG est æquale prismati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrãmis KFCL LCGH HKFG cõtinetur. & manifestum est vtrumq; ipsorum prismatum, & cuius basis est EBGF parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea: & cuius basis est GFC triãgulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, maius esse vtraq; pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta HD; quoniam si iungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cuius basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, vertex autem punctum K. sed pyramis, cuius basis triangulum EBF, & vertex K punctum est æqualis pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus. n. & similibus planis continentur. quare & prisma, cuius basis parallelogrãmum EBFG, opposita autem ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis AEG triangulum, & vertex punctum H. prisma vero cuius basis parallelogrãmum EBFG & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati, cuius basis GFC triãgulum, & ipsi oppositum triangulum HKL. & pyramis cuius basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cuius basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt maiora duabus dictis pyramidibus quorũ bases triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius basis ABC triãgulum, vertex autem punctum D, diuisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntq; duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. Quod ostendere oportebat.

4. primi.

10 vndecimi

A

B

C

10. dif. vndecimi

F. C. COMMENTARIVS.

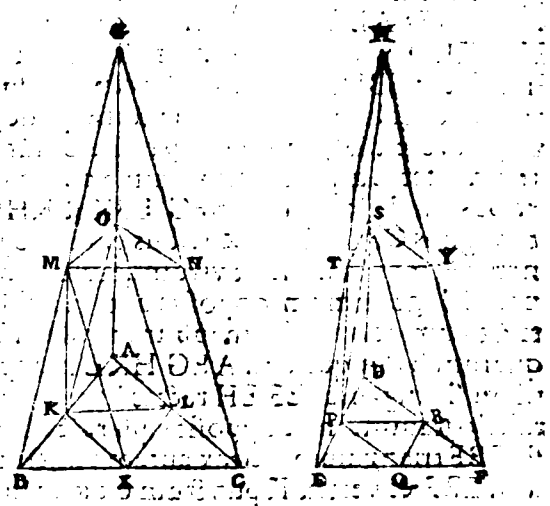
Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC] *Iuncta enim EF quoniam BF est æqualis FC, & EG parallela ipsi BC, erit triangulum BEF æquale triangulo FGC sed parallelogrammum EBFC duplum est trianguli BEF. ergo & ipsius FGC trianguli duplum erit.* A 28. primi. 41. primi.

Erunt ea prismata inter se æqualia] *Ex vlt. vndecimi libri.* B

C Prisma quidem cuius basis est EBFG parallelogrāmum. & opposita ipsi recta linea HK, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulū, vertex aūt punctū K; *Velut totum est sua parte maius; est enim pyramis ipsius prismatis pars quædam. sed inferius ex iis, quæ in 7. huius demonstrantur, apparebit tertiam partem esse, cum sit tertia pars prismatis, cuius basis GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH.*

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Si sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant, diuidatur autem vtraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atq; hoc semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in vna pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramidem altitudine æqualia.



Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices autem sint puncta GH, & diuidatur vtraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuisa intelligatur: atq; hoc sēper fiat. Dico vt ABC basis ad basim DEF ita esse prismata omnia, quę sunt in pyramide ABC ad prismata omnia, quę in pyramide DEF multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit XL ipsi AB parallela. & triangulum ABC triangulo LXC simile. Eadem ratione & triangulum DEF simile est triangulo RQF. Et quoniam BC quidem est dupla CX; EF vero dupla ipsius FQ, vt BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est igitur vt BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando vt triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autē ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triangulum. & oppositum ipsi STY. & vt igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma, cuius basis est triangulum LXC, oppositum autē ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. Et cum duo prismata, quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quę in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit vt prisma, cuius basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cuius basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN; ita prisma cuius basis parallelogrāmum EPRQ & opposita recta linea ST ad prisma cuius basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo vt prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando vt prismata KBXLOMN LXCOMN ad prismata PEQRST RQF

a. sexti.

a a. sexti.

A

11. quinti.

A

2

RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. Vt autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC, ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & vt triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide DEFH. similiter autem & si factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit vt OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH. sed vt OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & vt igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH, & quattuor ad quattuor. eadem autem ostendentur, & in factis prismatibus ex diuisione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium simpliciter multitudine æqualium.

LEMMA.

At vero vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita esse prisma, cuius basis triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY hoc modo ostendemus.

In eadem enim figura intelligantur ab ipsis GH punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorum plana, quæ inter se æquales erunt; propterea & pyramides ipsæ æquealtæ ponuntur. Et quoniam duæ rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta secantur à parallelis planis ABC OMN, in easdem proportiones secabuntur. & secatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam secabitur à plano OMN. Eadem ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam secabitur. & sunt æquales perpendiculares, quæ ab ipsis GH ducuntur ad plana ABC DEF, ergo & æquales quæ à triangulis OMN STY ad ipsa ABC DEF perpendiculares ducuntur. æquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula LXC RQF, opposita autem ipsis OMN STY. quare & solida parallelepipeda, quæ à dictis prismatibus describuntur æquealta, inter se sunt vt bases, & eorum dimidia vt LXC basis ad basim RQF, ita inter se dicta prismata erunt. Quod demonstrare oportebat. 17. vndecimi. 15. quinti.

F. C. COMMENTARIVS.

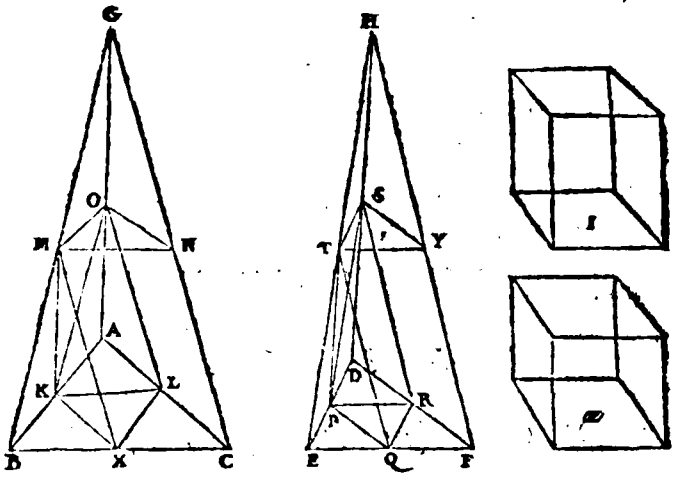
Sed vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY] *Hoc etiam constare potest ex corollario, quod nos ad 32 vndecimi conscripsimus.*

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt vt bases.

Sint. n. eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. dico vt ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si. n. non ita sit, erit vt ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad maius. Sit primum ad solidum minus, sitque Z. & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. & rursus pyramides ex diuisione factæ similiter diuidantur, atq; hoc semper fiat, quoad sumantur quædã pyramides à pyramide

ramide DEFH, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis DEFH ſolidum Z ſuperat. Itaq; ſumantur, & ſint exempli cauſſa pyramides DPRS STYH. erunt igi-



tur reliqua in pyramide DEFH priſmata ſolido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totidem partes ſimiliter pyramidi DEFH. ergo vt ABC baſis ad baſim DEF, ita quæ in pyramide ABCG priſmata ad priſmata quę in pyramide DEFH; ſed vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramis ABCG ad ſolidum Z & vt igitur ABCG pyramis ad ſolidum Z ita quę in pyramide ABCG priſmata ad priſmata, quæ in pyramide DE FH: & permutando vt ABCG pyramis ad priſmata, quæ in ipſa ſunt, ita ſolidum Z ad priſmata, quæ in pyramide DEFH. maior autem eſt pyramis ABCG priſmatibus, quæ in ipſa ſunt. ergo & ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide DEFH eſt maius. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad ſolidum aliquod minus pyramide DEFH. ſimiliter oſtendemus neq, vt DEF baſis ad baſim ABC, ita eſſe pyramidem DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neq; eſſe vt ABC baſis ad baſim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod ſolidum maius pyramide DEFH. ſi.n. fieri poteſt, ſit ad maius, videlicet ad ſolidum I. erit igitur conuertendo vt DEF baſis ad baſim ABC, ita ſolidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem ſolidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime oſtenſum fuit. & vt igitur DEF baſis ad baſim ABC, ita pyramis DEFH ad ſolidum aliquod pyramide ABCG minus. Quod eſt abſurdum. non igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt ABCG pyramis ad ſolidum aliquod maius pyramide DEFH. oſtenſum autem eſt. neq; ad minus. quare vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadē ſunt altitudine, & triangulares baſes habent inter ſe ſunt vt baſes. Quod demonſtrare oportebat.

Ex antecedenti.

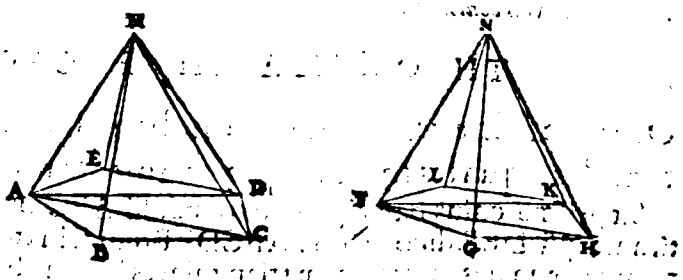
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Pyramides, quæ eadem ſunt altitudinæ, & multiangulas baſes habent, inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint eadē altitudine pyramides, quæ multiangulas baſes habeant ABCDE FGHKL: vertices aūt MN puncta. dico vt ABCDE baſis ad baſim FGHKL; ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. diuidatur.n. baſis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; baſis vero FGHKL diuidatur in triāgula FGH FHK FKL. & in vno quoq; triāgulo intelligantur pyramides æqualtæ ac pyramides, quae à principio. Quoniā igitur eſt vt triangulum ABC ad triāgulum

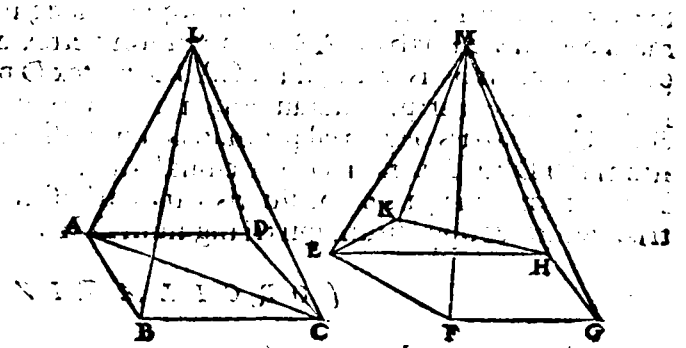
lum ACD, ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo vt ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidē ACDM. sed & vt ACD triangulum ad triangulum ADE, ita pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex aequali vt ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM: & rursus cōponendo vt ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. Eadem rōne & vt FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & cū duae pyramides sunt ADEM FKLN, quae triangulares bases habent & eadem sunt altitudine; erit vt ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramides ad pyramidē FKLN. Quòd cum sit vt ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM: vt autem ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN; erit ex aequali vt basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed & vt FKL basis ad basim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex aequali vt ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur, quae eadem sunt altitudine, & multiangulas bases habent, inter se sunt, vt bases. Quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente,



F. C. COMMENTARIVS.

Idem etiam demonstrabitur, si bases inequalibus numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides equealte ABCDL EFGHKM, sitq; pyramidis ABCDL basis quadrilaterum ABCD, & vertex L; pyramidis vero EFGHKM basis sit pentagonum EFGHiK, & vertex L. Dico vt quadrlaterum ABCD ad pentagonū EFGHK, ita esse ABCDL pyramidem ad pyramidem EFGHKM. Jungantur AC EG EH.



erit quadrilaterum ABCD diuisum in duo triangula ABC ACD, & pentagonum diuisum in tria triangula EFG EGH EHK. Itaque intelligantur ab vnoquoque triangulo pyramides aequealta primis pyramidibus. Et quoniam est vt triangulum ABC ad triangulum ACD, ita pyramis ABCL ad pyramidem ACDL; erit componendo vt quadrilaterum ABCD ad triangulum ACD, ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Eadem ratione demonstrabimus in altera pyramide vt quadrilaterum EFGH ad triangulum EGH, ita esse pyramidem EFGHM ad pyramidem EGHM: vt autem triangulum EGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EGHM ad pyramidem EHKM. Quare ex equali vt quadrilaterum EFGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EFGHM ad pyramidem EHKM; & rursus componendo vt pentagonum EFGHK ad triangulum EHK, ita tota pyramis EFGHKM ad pyramidem EHKM conuertendoq; vt triangulum EHK ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EHKM ad totam pyramidem EFGHKM. Sed vt triangulum ACD ad triangulum EHK, ita est pyramis ACDL ad pyramidem EHKM. erat autem vt quadrilaterū ABCD ad triangulū ACD ita pyramis ABCDL ad pyramidē ACDL. Quare rursus ex equali vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita erit pyramis ABCDL

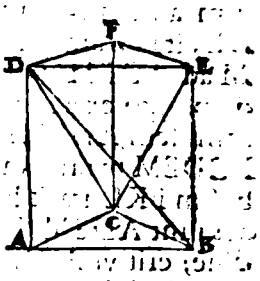
Ex antecedente.

Ex anteced.

BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonstrabitur, quotcunque lateribus baſes earum contineantur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Omne priſma triangularem habens baſim diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, quę triangulares baſes habent.



Sit priſma cuius baſis quidem triangulũ ABC, oppoſitũ autẽ ipſi DEF. dico priſma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes. Iungantur n. BD, EC, CD. Et quoniã parallelogrammũ eſt ABED, cuius diameter BD, erit ABD triangulũ triangulo EBD æquale. ergo pyramis cuius baſis triangulum ABD, vertex autẽ punctũ C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis EDB triangulum & vertex punctum C. Sed pyramis cuius baſis EDB triangulum & vertex punctũ C, eadẽ eſt pyramidi, cuius baſis triangulum EBC, & vertex D punctum, iiſdem. n. planis continentur. Ergo & pyramis cuius baſis triangulum ABD, vertex autem punctum C æqualis eſt pyramidi, cuius baſis EBC triangulum, & vertex punctum D, rurſus quoniã FCBE parallelogrãmum eſt cuius diameter CE, triangulũ ECF triangulo CBE eſt æquale. ergo & pyramis, cuius baſis EBC triangulum, vertex autem punctum D æqualis eſt pyramidi, cuius baſis triangulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius baſis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D oſtenſa eſt æqualis pyramidi, cuius baſis triangulum ABD, & vertex C punctum quare & pyramis cuius baſis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis eſt pyramidi cuius baſis triangulum ABD, & vertex C punctum. Priſma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter ſe æquales, quae triangulares baſes habent. & quoniam pyramis, cuius baſis ABD triangulum, vertex autem punctũ C, eadẽ eſt pyramidi, cuius baſis triangulum CAB, & vertex D punctum, iiſdem namque planis continentur: pyramis autem, cuius baſis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars oſtenſa eſt priſmatis, cuius baſis ABC triangulum, & oppoſitum ipſi DEF. & pyramis igitur, cuius baſis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars eſt priſmatis eandem baſim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppoſitum ipſi triangulum DEF.

34. primi

6. huius.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam etiam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppoſitam ipſi eandem, diuiditur in priſmata, quæ triangulares baſes habent, & quæ ipſis opponuntur:

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus ſequitur priſmata omnia, quae eadem sũt altitudine inter ſe eſſe, vt baſes: ſunt. n. ea pyramidũ eiuſdẽ altitudinis tripla. *Sed & hæc vera ſunt, quæ nos demonſtrauimus in libro de centro grauitatis ſolidorum propoſitione. XX. & XXI.*

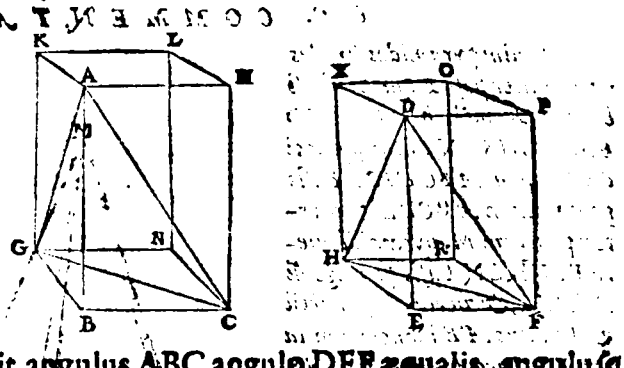
Priſmata omnia, & pyramides, quae in eiſdem, vel aequalibus baſibus conſtituuntur eam inter ſe proportionem habent, quam altitudines.

Et

Et insuper prismata omnia & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quæ triangulares bases habent in tripla sunt proportione homologorum laterum.



Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidē triangula ABC DEF, vertices autem GH puncta. dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH triplā proportionem habere eius, quam BC habet ad EF. compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angulus q; GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atq; est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. Quoniam igitur est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. Tria igitur parallelogrāma BM KB BN tribus EP EX ER sunt similia. Sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia, & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia, & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur, ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO, similia autē solida parallelepipeda in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo solidū BGML ad solidum EHPO triplā habet proportionē eius, quam habet latus homologū BC ad EF homologū latus. sed ut BGML solidū ad solidū EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidē DEFH, pyramis .n. sexta pars est ipsius solidi cum prisma quod est dimidiū solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplū. quare & pyramis ABCG ad piramidem DEFH triplam proportionem habebit eius, quàm BC habet ad EF.

9. diffi. vndecimi.

1. diffi. sexti.

24. vndecimi.

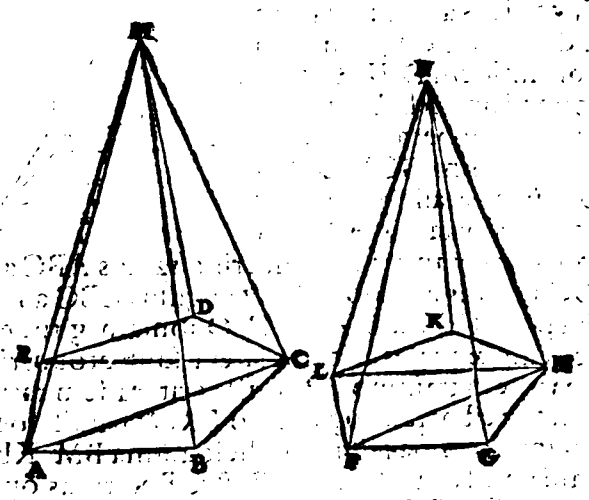
COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides, quæ multangulas bases habent inter se esse in tripla proportione homologorum laterum. ipsis enim diuisis in pyramides triāgulares bases habentes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus in similia triangula diuidūtur, & numero æqualia, & homologa totis; erit vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & oēs pyramides in pyramide altera triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multiangulā habens basim ad pyramidem, quæ multiangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad py-

ramidem, quæ triangularem basim habet est in tripla proportione homologorum laterum. & pyramis igitur multiangulam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint enim pyramides similes & similiter positæ, quæ pro basibus pentagona habeant ABCDEM, FGHKLN, sitq; pyramidis quidem ABCDEM basis pentagonum ABCDE, & vertex punctum M, pyramidis vero FGHKLN basis pentagonũ FGHKL, & vertex N punctũ & sit latus AB homologum lateri FG. Dico pyramidem ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim AC, CE, FH, HL. & quoniam polygona similia in similia triangula diuidũtur, numeroque æqualia, & homologa totis, erit triangulum ABC simile triangulo FGH, triangulumque ACE triangulo FHL simile, & triangulum CDE triangulo HKL. est autem ob pyramidum similitudinem triangulum AMB simile triangulo FNG. quare vt MA ad AB ita NF ad FG, vt autem BA ad AC, ita GF ad FH. & æquali igitur vt MA ad AC, ita LF ad FH. non aliter demonstrabitur vt MC ad CA, ita NH ad HF. ergo triangulum MAC simile est triangulo NFH. est autem, & triangulum MBC simile triangulo NGH ob similitudinẽ pyramidum. pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC, & vertex M punctum, similis est pyramidi, cuius basis triangulum FGH, & vertex punctum N. quippe quod similibus triangulis contineantur. Eadem ratione demonstrabitur pyramis ACEM similis pyramidi FHLN, & pyramis CDEM pyramidi HKLN. sed pyramis quidem ABEM ad pyramidem FGHN triplã habet proportionem eius, quam habet AB ad FG, & pyramis ACEM ad pyramidem FHLN triplam proportionem habet eius, quam AE habet ad FL, hoc est quam AB habet ad FG, est enim vt BA ad AE, ita GF ad FL, & permutando vt BA ad GF, ita AE ad FL. pyramis igitur CDEM ad pyramidem HKLN triplam proportionem habet eius, quàm CD ad HK, hoc est quam AB ad FG. quoniam enim vt AB ad BC, ita est FG ad GH, vt autem BC ad CD, ita GH ad HK; erit ex æquali vt AB ad CD, ita FG ad HK, & permutando vt AB ad FG, ita CD ad HK. Vt igitur vna antecedentium ad vnam consequentium, hoc est pyramis ABCM ad pyramidem FGHN, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. ergo & pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG. quod demonstrare oportebat.



20. sexti.

9. diff. vnd.

COROLLARIVM.

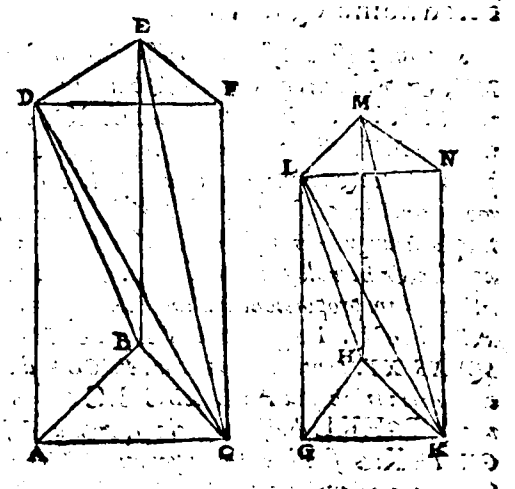
Ex his colligitur pyramides similes, quæ multiangulas bases habent diuidi in pyramides triangulares bases habentes similes, & numero æquales, & homologas totis.

Sed

Sed quod Euclides demonstrauit in pyramidibus similibus, nos etiam in similibus prismatibus demonstrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonstratum sit, prismata similia, quæ triangulares bases habent in tripla esse proportione homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonstrare, in hunc modum.

THEOREMA II.

Prisma similia, quæ triangulares bases habent in pyramides similes, numero que æquales diuiduntur, & prisma ad prisma tripla habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint prismata similia, & similiter posita AE GM & prismatis quidem AE basis sit triangulum ABC, & quod ipsi opponitur triangulum DEF; prismatis vero GM basis sit GHK triangulum & oppositum ipsi LMN; sitque latus AB lateri GH homologum. Dico prismata AE GM diuidi in pyramides similes, numeroque aequales, & prisma AE ad prisma GM triplam habere proportionem eius, quã habet AB ad GH. Iungantur enim BD EC CD HL MK KL. erit ex iam demonstratis prisma AE diuisum in tres pyramides æquales inter se, & prisma GM similiter diuisum in totidem pyramides aequales, quae pyramidibus prismatis AE similes erunt. Quoniam enim ob prismatum similitudinem parallelogrammum AEED simile est parallelogrammo GHML, erit vt DE ad AB, ita LG ad GH; atque est angulus DAB æqualis angulo LGH. triangulum igitur DAB triangulo LHG est simile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH, & alia triangula, quæ sunt parallelogrammorum dimidia eijs triangulis, quibus respondent similia demonstrabuntur. Et quoniam vt DC ad CA, ita est LK ad KG; vt autem AC ad CB, ita GK ad KH; erit ex aequali vt DC ad CB, ita LK ad LH. Et similiter demonstrabitur vt DB ad BC, ita esse LH ad HK. quare triangulum DBC simile est triangulo LHK. Quod cum triangulum DAB simile sit triangulo LGH, triangulumq; DBC simile triangulo LHK, & triangulum DAC ipsi LGK, erit pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum simili pyramidi, cuius basis triangulum GHK, & vertex punctum L. Eadem ob causã erit pyramis cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, simili pyramidi cuius basis MHK triangulum, vertex autem punctum L, & ad hæc piramis, cuius basis triangulum EFC, & vertex punctum D similis pyramidi, cuius basis triangulum MKN, & vertex L punctum. Quoniam igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL, similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum; habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionem eius, quam habet AB ad GH. Pyramis autem EBCD ad pyramidem MHKL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK, hoc est quam AB habet ad GH; est enim vt AB ad BC, ita GH ad HK: & permutando vt AB ad GH, ita BC ad HK. & similiter pyramis EC FD ad pyramidem MKNL proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN, hoc est BC ad HK, hoc est AB ad GH. Vt igitur vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Quare vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita totum prisma AE ad totum prisma GN. sed pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad GH. Ergo & prisma AE ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH.

9. diff. vnde cimi.

6. sexti

9. dif. vndecimi.

12. quinti.

ALITER. *Quoniam igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL, similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum: habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionẽ eius, quã AB habet ad GH. sed vt pyramis ABCD ad pyramidẽ GHKL, ita prisma AE ad prisma GM, sunt. n. prismata pyramidũ tripla. ergo, & prisma*

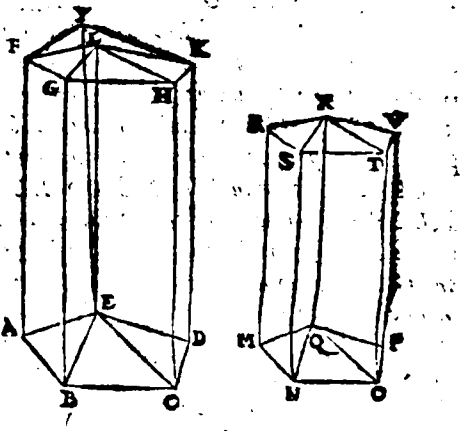
AE ad prisma GM triplã proportionẽ habebit eius, quam habet AB ad GH. Prismata igitur similia, quæ triangulares bases habent, diuiduntur in pyramides similes, numeroq; æquales, & prisma ad prisma triplam habet proportionẽ eius, quam latus homologum habet ad homologũ latus, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. II.

Prismata similia, quæ multiangulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroque æqualia, & homologa totis: & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus:

Sint duo prismata similia, & similiter posita AK MV, & prismatis quidem AK basis sit pentagonum ABCDE, & ipsi oppositum FGHKL; prismatis uero MV basis sit pentagonum MNOPQ, & oppositum ipsi RSTVX: sitq; latus AB lateri MN homologum. Dico prismata AK MV diuidi in prismata, quæ triangulares bases habent, similia & numero æqualia, & homologa totis; et prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iungantur EB EC LG LH QN QO XS XT. pentagonum igitur ABCDE diuisum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonumq; FGHKL diuisum in tria triangula FGL LGH LHK: & similiter pentagonum MNOPQ diuisum erit in tria triangula MNQ QNO QOP: & pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur unumquodq; prismatum AK MV diuisum in tria prismata triangulares bases habentia ductis planis per LG GB, per que LH HC, & per XS SN, & per XT TO. Quoniam igitur similia polygona in similia triangula diuiduntur, numeroque æqualia, & homologa totis: erunt triangula ABE FGL similia triangulis MNQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaque ECD LHK ipsis QOP XTV similia. Et quoniam prisma AK ponitur simile prismati MV, parallelogrammum ABGF simile erit parallelogrammo MNSR, & parallelogrammum AELF simile ipsi MQXR. quare ut LE ad EA, ita XQ ad QM: ut autem AE ad EB, ita MQ ad QN. Ex æquali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN; ideoq; ut BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB est æqualis angulo XQN ob similitudinem prismatum. si enim similibus existentibus prismatibus AK MV, angulus LEB non est æqualis angulo XQN, alter eorum maior erit. sit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipsa E angulo NQX constituatur æqualis angulus BEY, ut recta linea EY terminetur à plano pentagoni FGHKB in puncto Y; & iungantur FY YK. erit pentagonum FGHKY simile pentagono RSTVX. sed & pentagonum FGHKL ponitur eidem simile. pentagonum igitur FGHKL simile est pentagono FGHKY. quare angulus FLK æqualis est angulo FYK. sed & maior, quod fieri non potest. Nõ igitur similibus existentibus prismatibus angulus LEB inæqualis est angulo XQN. quare necessario est æqualis; & ob id angulus EBG æqualis est angulo QNS. ergo & qui ipsis opponuntur FGB GLE angulis XSN SXQ sunt æquales. parallelogrammum igitur BELG simile est parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum LECH simile parallelogrammo XQOT. ergo prisma AL, cuius basis triangulum ABE, & ipsi oppositum FGL simile est prismati MX, cuius basis triangulum MNQ, & oppositum ipsi RSX; similibus. n. planis cõtinentur, est autem ob prismatum similitudinem, & parallelogrammum BCHG simile parallelogrammo NQTS, & parallelogrammum EDKL simile ipsi QPVX. ergo & prisma BH, cuius basis triangulum EBC, & ipsi oppositũ LGH est simile prismati NT, cuius basis triangulũ QNO, & ipsi oppositũ XST, & deniq; prisma CL cuius basis triangulum ECD, & oppositũ ipsi LSK simile est prismati OX, cuius basis triangulum QOP, & quod ipsi opponitur XTV. similia autẽ,

prismata



ae sexti.

9. diffinitione undecimi.

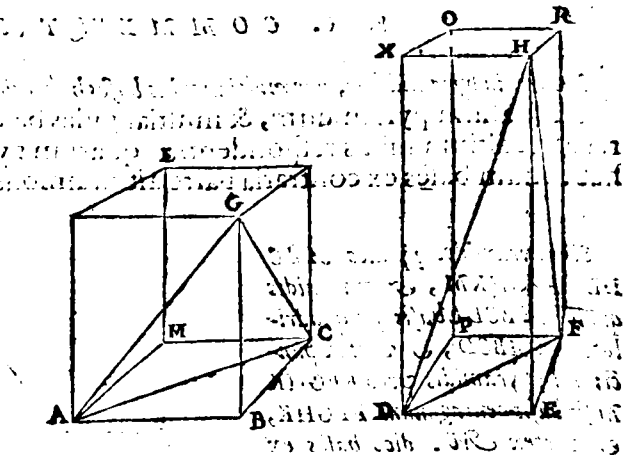
1. diffexti.

14. primi.

priſmata, quæ triangulares baſes habent ſunt in tripla proportione homologorum laterum, quod nos & ad 34. propoſitionem antecedentis libri, & proxime aliter demonſtrauimus. priſma igitur AL ad priſma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN, & priſma BH ad priſma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO, hoc eſt AB ad MN. priſma autem CL ad priſma OX triplam proportionem habet eius, quam habet CD ad OP, hoc eſt AB ad MN vt ſupra demonſtrauimus. homologa enim latera omnia inter ſe eandem habent proportionē quare vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Vt igitur priſma AL ad priſma MX, ita omnia priſmata ad omnia priſmata, hoc eſt totum priſma AK ad totum priſma MV. priſma autem AL ad priſma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN, erga & priſma AK ad priſma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN. Similia igitur priſmata, quę multiangulas habent baſes in ſimilia priſmata triangulares baſes habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis; & priſmo ad priſma triplam proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demoſtrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales.

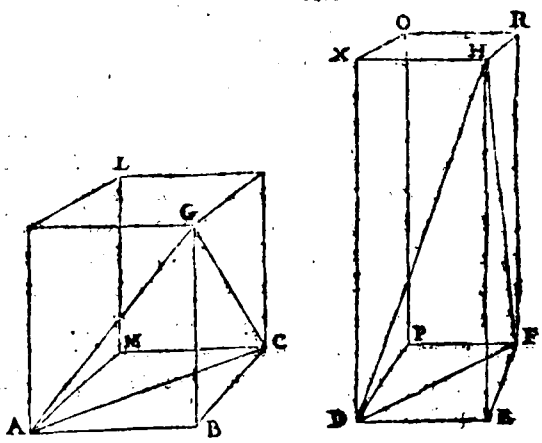


Sint .n. pyramides æquales quæ triangulares baſes habeāt ABC DEF, vertices vero GH puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, & vt AC baſis ad baſim DEF, ita eſſe pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleātur .n. BGML EHPO ſolida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG eſt æqualis pyramidi DEFH, atq; eſt pyramidis quidem ABCG ſextuplum BGML ſolidum, pyramidis vero DEFH ſextuplum ſolidum EHPO; erit ſolidum BGML. ſolido EHPO æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorū baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. eſt igitur vt BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. Sed vt BM baſis ad baſim EP, ita ABC triangulū ad triangulū DEF, ergo & vt ABC triangulum ad triangulum DEF, ita ſolidi EHPO altitudo ad altitudinem ſolidi BGML. Sed ſolidi quidem EHPO altitudo eadem eſt altitudini pyramidis DEFH; ſolidi vero BGML altitudo eadem eſt altitudini pyramidis ABCG. eſt igitur vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinē pyramidis ABCG. quare pyramidū ABCG DEFH baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Sed pyramidum ABCG DEFH baſes ex contraria parte reſpondeāt altitudinibus, ſitq; vt ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem eſſe. ijſdem.n. conſtructis, quoniā vt ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG, vt autem ABC baſis ad baſim DEF, ita BM parallelogrāmū ad parallelogrāmū EP. erit & vt parallelogrāmū BM ad EP parallelogrāmū, ita pyramidis DEFG altitudinem pyra-

15. quinti; 34. vndecimi

15. primi.

midis ABCG. ſed pyramidis quidem DEFH altitudo eadē eſt altitudini ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt altitudini ſolidi parallelepipedi BGML. eſt igitur vt BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. quorum autem ſolidorum parallelepipedorū baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, ea ſunt æqualia. ſolidum igitur parallelepipedū BGML æquale eſt ſolido parallelepipedo EHPO atq; eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG; ſolidi vero EHPO itidem ſexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFK eſt æqualis. æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent illæ ſunt æquales. Quod oportebat demonſtrare.



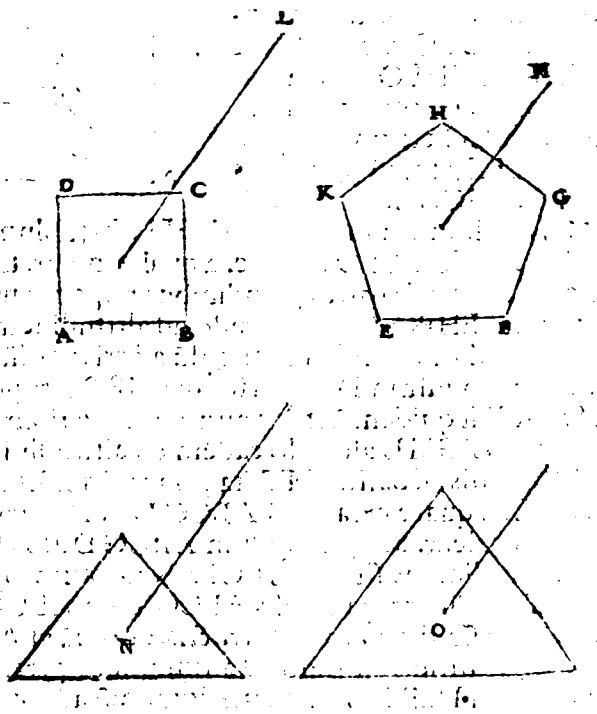
F. C. COMMENTARIVS.

Sed & in pyramidibus, quę multiangulas baſes habentidem demonſtrabitur hoc modo.

Æqualium pyramidum, & multiangulas baſes habentium, baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent: & quarum pyramidum multiangulas baſes habentium baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illæ ſunt æquales;

Sint pyramides æquales ABC DL EFGHKM, & pyramidis quidē ABCDL baſis ſit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHK M ſit baſis pentagonum EFGHK, & vertex M. dico baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere: hoc eſt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita eſſe vt pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. fiat enim ex XXVI. ſexti triangulum in quo N, æquale quadrilatero ABCD. & rurſus fiat alind triangulū in quo O æquale pentagono EFGHK, & à triangulo N erigatur pyramis æqualta pyramidi ABCDL: à triāgulo aūt O erigatur alia pyramis æqualtā pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N æqualis pyramidi ABCDL: ſunt enim in baſibus æqualibus, & æqualem habent altitu-

6. huius.



dinem

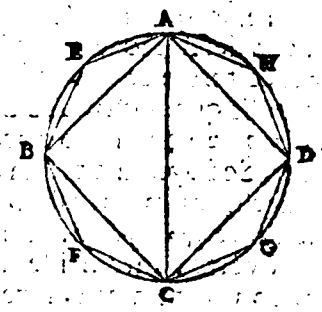
dinem: & simili ratione pyramis O æqualis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyramidi O est æqualis. æqualium autem pyramidum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Vt igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed vt triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, vtrumq; enim vtriq; est æquale. ergo vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc est altitudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinẽ. Sed ijsdem stantibus sit vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM æqualem esse. est enim vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare vt triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL, hoc est ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illę sunt æquales. æqualis igitur est pyramis N pyramidi O: ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM est æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & multiangulas bases habentium, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex prædictis colligitur prismatum omnium æqualium bases ex contraria parte altitudinibus respondere: & quorum prismatum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea esse æqualia, prismata enim in eisdem basibus constituta, & eadem altitudine sunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

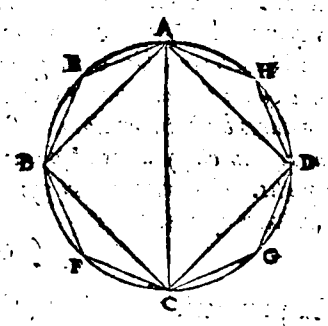
Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.



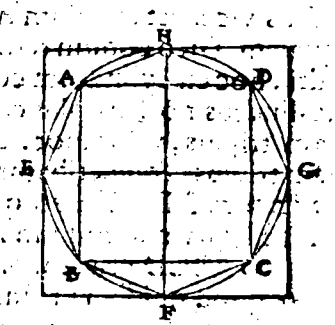
Habeat enim conus eandem basim, quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinẽ æqualem. Dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus nõ sit triplus coni, vel maior erit, quam triplus, vel minor. Sit primum maior quàm triplus; & describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD maius est, quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur prisma æquealtum cylindro, quod quidem prisma maius erit, quàm cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æquealta, nimirũ prismata ipsa. quare prismata inter se sunt vt bases, & prisma igitur erectum à quadrato ABCD dimidum est prismatis erecti à quadrato quod circa circulum ABCD describitur, atque est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulum ABCD. prisma igitur erectum à quadrato ABCD æquealtum cylindro dimidio cylindri est maius. secentur circumferentiae AB BC CD DA bifariam in punctis EFGH, & AE EB BF FC CG GD DH HA iũgatur. Vnũquodq; igitur triangulorũ AEB BFC CGD DHA maius est dimidio portionis circuli ABCD, in qua cõsistit, vt superius demõstratũ est. erigãtur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA prismata æquealta cylindro. ergo & vnumquodq; erectorum prismatũ maius est dimidio portionis cylindri: quae ad ipsum est, qm̃ si per puncta EFGH parallelae ipsis AB BC CD DA ducantur, & cõpleãtur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma: à quibus solida parallelepipeda æquealta cylindro erigãtur: erũt vnius cuiusq; erectorum dimi-

ex corol. huius.

dia prismata ea, quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triãgulis AEB BFC CGD DHA maiora sunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipsa sunt. Itaq; reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigentes prismata æquealta cylindro, & hoc semper facientes quoad tandem relinquantur quædam portiones cylindri quę sint minores excessu, quo cylindrus ipsius coni triplum superat. relinquantur iam & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cuius basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quæ cylindri, maius est, quàm triplum coni. Sed prisma cuius basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri triplum est pyramidis, cuius basis polygonũ AEBFCGDH, vertex autem idem, qui coni, & pyramis igitur, cuius basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idẽ qui coni, maior est cono qui basim habet ABCD circulum. Sed & minor ab ipso. n. cõprehenditur, q̃ fieri non potest. Nõ igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni.



Dico insuper neq; cylindrum minorem esse, quã triplum coni, si enim fieri potest, sit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit cõmutetendo conus maior, q̃ tertia pars cylindri. Describatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius est quã dimidium ABCD circuli, & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticẽ habẽs eundẽ quem conus. pyramis igitur erecta maior est quàm coni dimidium: quoniam, vt ante demonstrauimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium eius, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto, etenim inter se sunt vt bases, quare, & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cuius basis quadratum ABCD, dimidia est eius pyramidis, quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, maior est cono, ipsum namq; cõprehendit. ergo pyramis cuius basis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni, maior est, quàm coni dimidium. secentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis E F G H. & iungãtur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quodq; igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA, maius est, quãm dimidium portionis circuli AB CD, in qua consistit. erigantur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæq; pyramidum eo, iem modo erectarum, maior est, quàm dimidium coni portionis, quæ est ad ipsum. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariã, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigẽtes pyramidem verticem habentem eundem, quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandẽ quasdã coni portiones, quæ maiores erunt excessu, quo conus tertiã cylindri partem superat. Relinquãtur & sint, quæ in ipsis AE EB BF FC CG GD DH HA. reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum AEBFCGH, & vertex idem qui coni, maior est quã tertia cylindri pars. sed pyramis cuius basis polygonum AEBFCDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cuius basis polygonũ AEBFCDH, altitudo autẽ eadem quæ cylindri. prisma igitur, cuius basis AEBFCGH polygonũ, & altitudo eadem, quæ cylindri, maius est cylindro, cuius basis



est

est circulus ABCD. sed & minus, ab ipso enim comprehenditur, fieri non potest. non igitur cylindrus minor est, quam triplus coni. ostensum autem est neq; maiorem esse, quam triplum, ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cilindri, eandem, quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem, quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

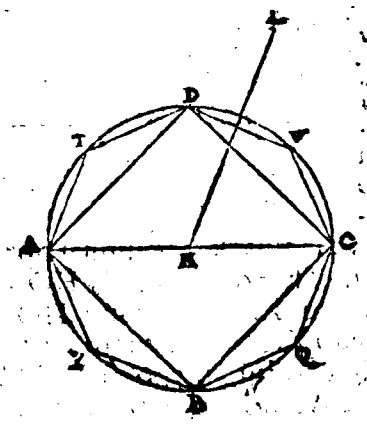
Eodem modo illud etia demonstrabitur in conis & cylindris scaleni.

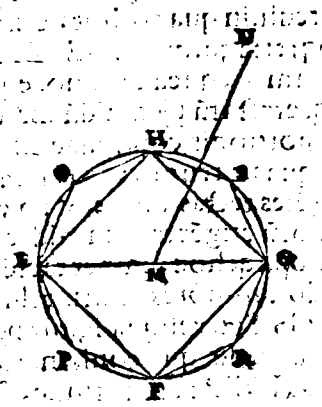
COROLLARIVM.

Ex quibus constat omnẽ conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti siue scaleni, qui eandem basim habet, & æqualem altitudinem.

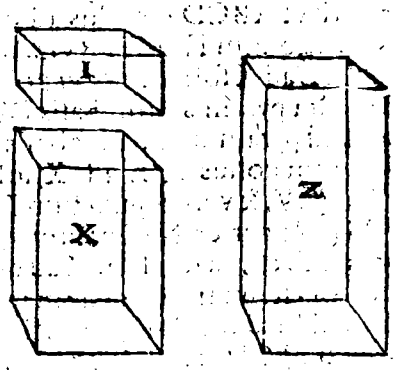
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.

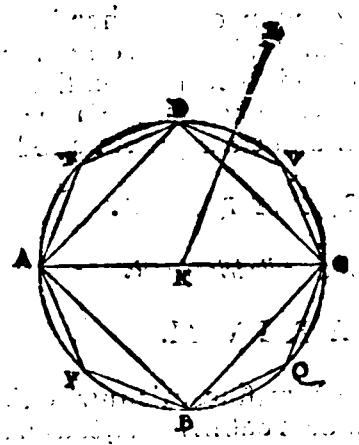


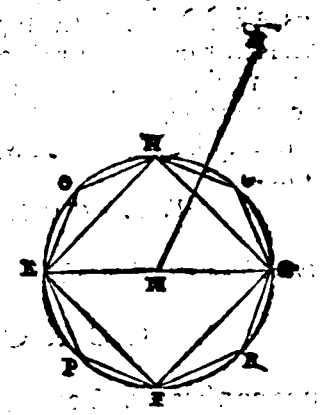


Sint eadem altitudine coni, & cylindri, quorũ bases circuli ABCD EFGH axes autem KL MN. & diametri basiũ AC EG. dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conũ. si .n. non ita sit: erit vt ABCD circulus ad circulũ EFGH, ita conus AL ad aliquod solidũ minus cono EN, vel ad maius, sit primum ad minus φ sit X & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidũ. conus igitur EN, ipsis solidis X I est æqualis. describatur in EFGH circulo quadratũ EFGH. ergo quadratum maius est, quã dimidiũ circululi. erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. pyramis igitur erecta maior est, quã coni dimidiũ: nã si circa circulum quadratũ describamus, & ab ipso erigamus pyramidẽ æqualtã cono; erit inscripta pyramis piramidis circũscriptæ dimidia, etenim inter se sunt vt bases: conus autẽ circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis, cuius basis quadratum EFGH, vertex

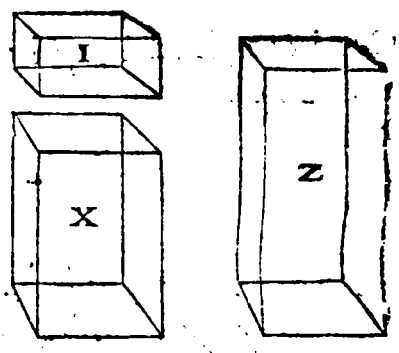


autem





autem idem qui coni, maior eſt quã coni dimidiũ. ſecentur circũferẽtiæ EF FG GH HE bifariã in punctis OPRS, & OE EP PF FR RG GS SH iungãtur. Vnũquodq; igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius eſt q̃ dimidiũ portionis circuli, in qua cõſiſtit. erigatur ab vnoquoq; triãgulorũ HOE EPF FEG GSH pyramis æquealta cono. ergo & vnaquaeq; erectarũ pyramidũ maior eſt q̃ dimidiũ portionis coni, quae eſt ad ipsã. Itaq; reliquas circumferẽtias ſecãtes bifariã, & iũgẽtes rectas lineas, & ab vnoquoq; triãgulorũ erigẽtes pyramides aequealtas cono, atq; hoc ſemper facientes, relinquemus tãdem aliquas portiones coni, q̃ ſolido I minores erunt. relinquantur & ſint quae in ipſis HO OE EP PF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius baſis polygonũ HOEPFRGS, altitudo aũt eadẽ. quę coni, maior eſt ſolido X. Deſcribatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS ſimile, & ſimiliter poſitũ polygonũ DTAYBQCV, & ab ipſo erigatur pyramis aequealta cono AL. Qm igitur eſt vt quadratũ ex AC ad quadratũ ex EG ita DTAYBQCV polygonũ ad polygonũ HOEPFRGS; vt aũt quadratũ ex AC ad quadratum ex EG ita ABCD circulus ad circulum EFGH: erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. ſed vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X ſolidum: & vt polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, ita pyramis cuius baſis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L ad pyramidem, cuius baſis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctũ N. Vt igitur conus AL ad X ſolidum, ita pyramis, cuis baſis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem, cuius baſis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. quare permutando vt conus AL ad pyramidẽ quae in ipſo eſt, ita ſolidum X ad pyramidem, quae in cono EN. conus autem AL maior eſt pyramide, quae in ipſo. maius igitur eſt ſolidũ X pyramide, quae in cono EN. ſed & minus, quod fieri non poteſt. Non igitur vt ABCD circulus ad circulũ EFGH, ita eſt AL conus ad ſolidum aliquod minus cono EN. Similiter demõſtrabitur neq; vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita eſſe conum EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. Dico praeterea neq; eſſe vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod ſolidũ maius cono EN. Si enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum maius, quod ſit Z. ergo conuertendo vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit ſolidum Z ad AL conum. ſed vt ſolidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod ſolidum minus cono AL, & vt igitur EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod ſolidum



1.huius.
2.huius.

mius

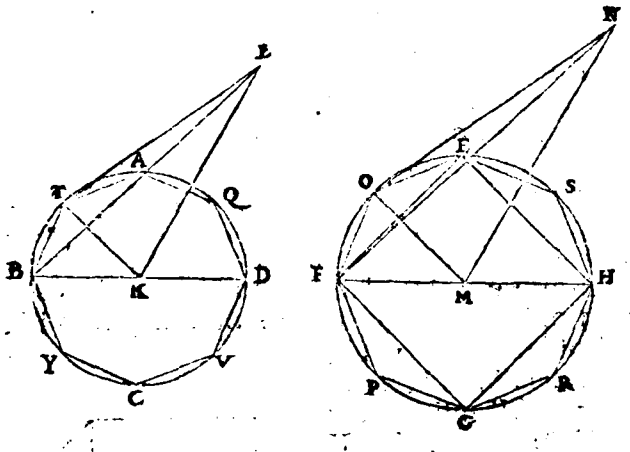
minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum maius cono EN: ostensum autem est neq; esse ad minus. ergo vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed vt conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim vterq, vtriusq; triplus. & vt igitur ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æquealti conis. ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinẽ inter se sunt vt bases. Quod demonstrare oportebat. 15.quinti. 11 antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

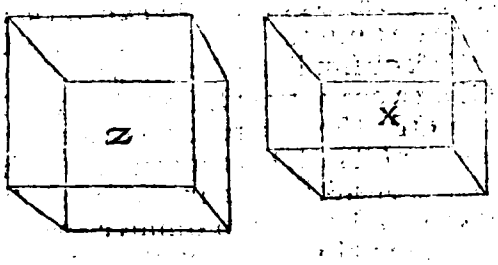
Et hoc in conis, & cylindris scalenis similiter demonstrabitur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Similes coni & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

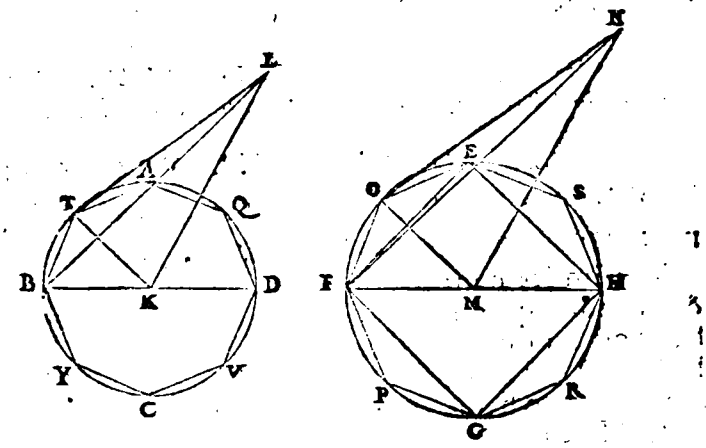


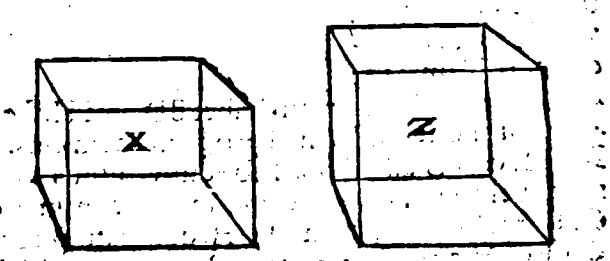
Sint similes coni & cylindri, quorũ bases quidem circuli ABCD EFGH; diametri vero basiũ BD FH: & axes conorũ, vel cylindrorum HK MN. dico conũ cuius basis ABCD circulus, vertex autẽ punctũ L ad conum, cuius basis circulus EFGH, vertex autẽ N punctum, triplam habere proportionẽ eius quam habet BD ad FH. si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplã proportionem eius, quã BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem, vel ad maius. habeat primum ad minus, quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH maius est, quàm dimidiũ EFCH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. ergo erecta pyramis maior est, quam coni dimidia. itaq; secentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariã in punctis OPRS & iungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. vnumquodq; igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius est quam dimidium portionis circuli EFGH, in qua consistit. & erigatur ab vnoquoq; triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habẽs, quẽ conus, ergo & vnaquæq; erectarum pyramidũ maior est quã dimidia portionis coni, quæ est ad ipsam secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem, quem conus; atque hoc semper facientes tandem relinquemus quasdam coni portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis,



cuius

cuius basis quidem polygonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, maior est solido X. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EOFPGRHS simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eundem vertieem habens, quem conus, & triangulorum continentium pyramidem, cuius basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, vnum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonū, & vertex punctū N, vnū sit NFO, & iungātur KT MO. Qm igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit vt BD ad FH, ita KL axis ad axē MN. vt aūt BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN, & permutando vt BK ad LL, ita FM ad MN. perpēdicularis. n. vtraq; est, & circa æquales angulos BKLMN latera sūt proportionalia. Simile igitur est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est vt BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quattuor rectorum, qui sunt ad K cētrum, eadem est pars & angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad centrum M: erit triangulum BKT triangulo FMO simile. Et qm ostensum est vt BK ad KL ita esse FM ad MN; æqualis aūt est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recta. n. sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. Quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit vt LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali vt LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triāgulorum LTK NOM, sit vt LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, vt KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum aūt est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali vt TL ad LB, ita ON ad NF. triāgulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoq; æquiangula sunt LTB NOF triāgula, & inter se similia. quare & pyramis, cuius basis triāgulum BKT vertex autem L punctum, similis est pyramidi, cuius basis FMO triāgulū, & vertex punctum N; similibus. n. planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autē similes, & quæ triāgulares bases habent in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidē FMON triplā hēt proportionem eius q̄ BK habet ad FM. Similiter à punctis quidē AQDVCY ad K; à punctis vero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triāgulis erigentes pyramides vertices eosdē habentes, quos coni, ostendemus & vnāquamq; pyramidum eiusdem ordinis ad vnaquamq; alterius ordinis triplam proportionem habere eius, quā habet BK latus homologum ad homologum latus FM, hoc





est quam

est quã BD ad FH. Sed vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & vt BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonũ, vertex autẽ punctum L ad totam pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & vertex punctũ N. quare & pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & vertex punctum N, triplam proportionem habet eius, q̃ BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius basis circulus ABCD vertex autem punctum L ad solidum X triplã proportionem habere eius, q̃ BD ad FH. Vt igitur conus, cuius basis circulus ABCD, vertex autem punctum L ad solidum X, ita est pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, vertex aũt punctum L ad pyramidẽ cuius basis polygonũ EOFPRHS & vertex punctum N, & permutãdo, vt conus cuius basis circulus ABCD, vertex autẽ punctum L ad pyramidem, quæ in ipso est, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, vertex aũt punctum L; ita solidũ X ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS. & vertex punctũ N dictus autẽ conus maior est pyramide q̃ in ipso; etenim eam comprehendit, maius igitur est & solidum X pyramide, cuius basis polygonum EOFPGRHS, vertex autẽ punctũ N. sed & minus, quæ fieri non põt. non igitur conus, cuius basis ABCD circulus, & vertex punctum L ad aliquod solidum minus cono, cuius basis circulus EFGH & vertex N punctum, triplam proportionẽ habet eius quã BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neq; conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplã proportionem habere eius, quã habet FH ad BD. Itaq; dico neq; ABCDL conum ad solidum maius cono EFGHN triplã habere proportionem eius, quã BD habet ad FH. si.n. fieri potest habeat ad aliquod solidum maius, quod sit Z. cõuertendo igitur solidum Z ad conum ABCDL triplã proportionem habet eius, quã FH ad BD: vt autem solidum Z ad conum ABCDL. ita EFGHN conus ad aliquod solidũ minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplã proportionem habebit eius, quã FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. nõ igitur ABCDL conus ad solidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quã BD ad FH. ostensum autem est neq; ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quã BD ad FH. vt autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrũ. cylindrus 15. quinti.
n. in eadem existẽs basi, in qua conus, & ipsi æqualtus coni triplus est. cum o- 10. huius
stẽsum sit oẽm conum tertiã partem esse cylindri. eandem quã ipse basim habẽtis, & aequalem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplã proportionẽ habebit eius, q̃ BD bẽt ad FH. similes igitur coni, & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, q̃ sunt in basibus. q̃ demõstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

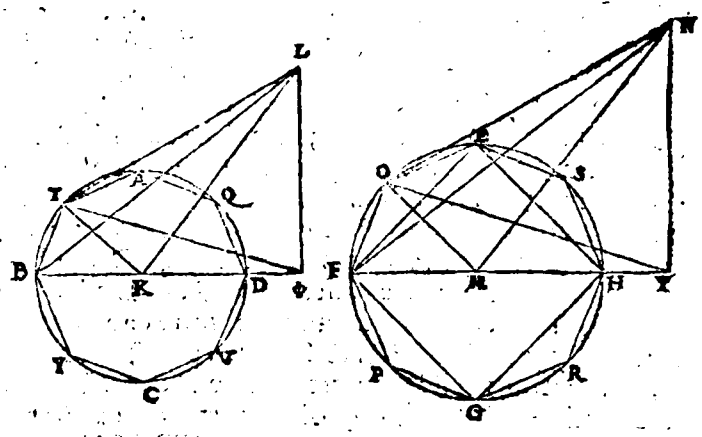
Præcedens demonstratio in conis, & cylindris tantum rectis; congruit, quam nos vniuerse ad omnes tam rectos quàm scalenos accommodabimus hoc pacto.

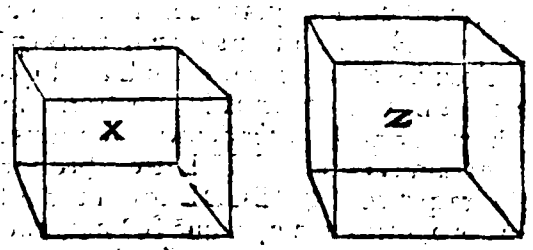
Similes coni & cylindri omnes interse in tripla sunt proportionem diametrorum, quae sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, & axes KL MN; & per axes ducantur plana ad rectos angulos basibus, quæ bases secent. sintq; eorum planorum & basium communes sectiones BD FH, quæ circulorum diametri erunt. Dico conum cuius basis ABCD circulus, & vertex punctum L ad conum cuius basis circulus EFGH vertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet BD ad FH. si enim non ita sit, habebit conus ABCDL ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplã proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad solidum minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quam dimidium EFGH circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æqualta cono, quę maior erit, quam coni dimidia, & secentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS, iunganturque EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius est, quam

dimidium

dimidium portionis circuli EFGH, in qua cõsistit: et erigatur ab vnoquoq; triangulorũ EOF FPG GRH HSE pyramis eundem, quem conus verticem habens. ergo & vnaquaeq; erectarum pyramidum maior est, quã dimidia coni portionis quae est ad ipsam. secãtes igitur reliquas circumferentias bifariã, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigentes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus: atq; hoc semper facientes tandem relinquemus quasdã coni portiones, quae minores erunt excessu, quo conus EFG HN ipsum X solidum superat. reliquantur, & sint quae in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N solido X est maior. Describatur etiam in circulo ABCD ipsi EOFPGRHS polygono simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ. atq; ab eo erigatur pyramis eundem, quem conus verticem habens: & triangulorum quidem continentium pyramidem cuius basis polygonum ATBYCVDQ; & vertex punctum L; vnum aliquod sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, vnum sit NFO; & KTMO iungantur. Quoniam igitur conus ABD similis est cono EFGH, erit ex diffinitione conorũ similium, quam nos in principio antecedentis libri attulimus, vt diameter BD ad diametrum FHL ita axis KL ad MN axem: vt autem BD ad FH, ita BK ad FM: ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN; & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. atq; est angulus BKL aequalis angulo FMN ex eadem diffinitione conorum similium. cum igitur circa aequales angulos BKL FMN latera sint proportionalia; erit BKL triangulum simile triangulo FMN. & quoniam vt BK ad KT, ita est FM ad MO: angulus autem BKT est aequalis angulo FMO; etenim quae pars est angulus BHT quatuor rectorum, qui sunt ad centrum K, eadem est pars angulus FMO quatuor rectorum, qui sunt ad M centrum. rursus erunt circa aequales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangulo FMO est simile. Itaq; quoniam ostensum est vt BK ad KL, ita FM ad MN, aequalis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL ita OM ad MN. & sunt in conis rectis anguli TKL OMN inter se aequales, quod recti sint. ergo in ipsis cum circa aequales angulos TKL OMN latera sint proportionalia; erit triangulum LKT simile triangulo NMO. At in conis scalenis hoc modo demonstrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis basium rectae lineae LΦ NΥ, quae cadent in communes planorum & basium sectiones BD FH ex 38 antecedentis libri. & iungantur TΦ OΥ. Cum igitur ex diffinitione conorum similium angulus LKΦ sit aequalis angulo NMΥ, & anguli LΦK NΥM vtriq; recti: erit & reliquus KLΦ reliquo MNΥ aequalis, & triangulum LΦK simile triangulo NΥM. rursus cum angulus BKT sit aequalis angulo FMO; & reliquus ex duobus rectis TKΦ aequalis erit reliquo OMΥ. est autem ob similitudinem triangulorum LΦK NΥM, vt ΦK ad KL, ita ΥM ad MN, & ob similitudinem triangulorum BKL FMN, vt LK ad KB, hoc est ad KT ipsi aequalem, ita NM ad MF, hoc est ad MO. ergo ex aequali vt ΦK ad KT, ita ΥM ad MO. & & cũ circa aequales ãgulos TKΦ ONΥ latera sint proportionalia, erit & triangulũ KTΦ triãgulo MOΥ simile. ergo vt LΦ ad ΦK, ita NΥ ad ΥM; & vt ΦK



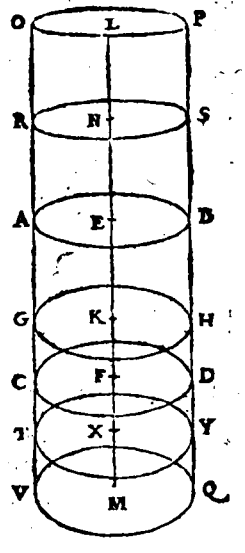


6. sexti

inter se æquales, quod vtriq; recti ex diffinitione rectæ lineæ, quæ ad planum rectæ est cum igitur circa æquales angulos LΦT NΨO latera sint proportionalia. sequitur triangula quoq; LTΦ NOΨ inter se similia esse. ideoq; vt LT ad TΦ, ita NO ad OΨ, & vt TΦ ad TK, ita OΨ ad OM. ex æquali igitur vt LT ad TK, ita est NO ad OM. demonstratum autem est vt LK ad KT, ita esse NM ad MO. quare conuertendo vt TK ad KL, ita OM ad MN. rursus igitur ex æquali vt TL ad LK, 6. sexti. *ita est ON ad NM. quod cum triangula LKT NMO latera habeant proportionalia, æquiangula sunt, & ob inter se similia. Itaq; quoniam ob similitudinem triangulorum BKL FMN est vt LB ad BK. ita NF ad FM, & ob similitudinem triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO, erit ex æquali vt LB ad BT, ita NF ad FO: & conuertendo vt TB ad BL, ita OF ad FN. Rursus quoniam ob similitudinem triangulorum LKT NMO, vt LT ad TK, ita est NO ad OM & ob similitudinem triangulorum KBT MFO, vt KT ad TB, ita MO ad OF; ex æquali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. rursus igitur ex æquali vt TL ad LB, ita erit ON ad NF. quare triangulorum LTB NOF latera sunt proportionalia, ob eamq; causam & æquiangula & inter se similia erunt. pyramis igitur, cuius basis triangulum BKT, vertex autem punctum L similis est pyramidi, cuius basis triangulum FMO, & vertex N punctum, similibus enim planis continentur, & numero æqualibus. pyramides autem similes in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BkTL ad pyramidem FMO N triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Reliqua similiter vt in antecedente demonstrabimus.*

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus. n. AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurat axi EF in K puncto. Dico vt BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF producatur enim EF axis ex vtraque parte ad puncta LM: & ipsi quidem EK axi exponatur æquales quotcumq; EN NL ipsi vero FK æquales quotcumq; FX XM: & per puncta L NXM ducantur plana ipsis AB CD parallela; atq; in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. Quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se vt bases bases autem æquales sunt. ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. Quod cum axes LN NE EK inter se æquales sunt, itemq; cylindri PR RB BG inter se æquales; sitq; ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG; quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. Eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis LK sit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis. Si aũt axis LK maior sit axe KM, & cylindrus PG maior erit cylindro GQ, & si minor minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD sumpta sunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æquemultiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ, & si æqualis æqualis, & si minor minor. est igitur axis EK ad axem KF, vt BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylĩdrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrũ, ita axis ad axem. Quod demonstrare oportebat. 11. huius

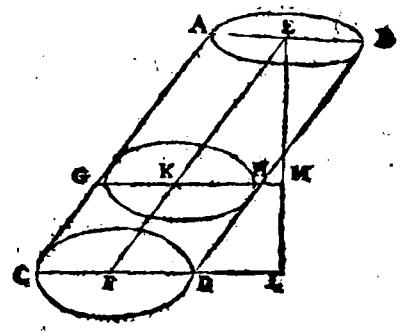
F. C. COMMENTARIVS.

Illud etiam contingit in cylindro scaleno, quod eadem ratione demonstrabitur.

Ex quibus constat si quilibet cylindrus secetur plano basibus parallelo, vt cylindrus ad cylindrum, ita esse altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.

In cylindris enim rectis illud perspicuum est, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in scalenis vero facile apparebit ducta recta linea EL a puncto E ad basis planum perpendiculari, quę plano per GH ducto in M occurrat. Quoniam enim duæ rectæ lineę EF EL secantur à planis parallelis, in easdem proportiones secabuntur. quare vt EK ad KF, ita erit EM ad ML; ac propterea vt BG cylindrus ad cylindrum GD, ita cylindri BG altitudo EM ad ML altitudinem cylindri GD, quod propositum fuerat demonstrandum.

15 vndecimi



THEOREMA XIV. PROPO. XIV.

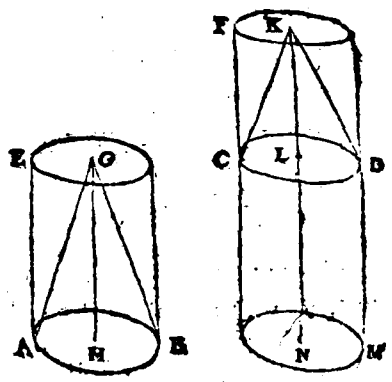
In æqualibus basibus existentes coni, & cylindri inter se sunt vt altitudines.

Sint n. in æqualibus basibus AB CD cylindri EB FD, dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. producatur enim KL axis ad punctũ N; ponaturq; ipsi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniã igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se sunt vt bases: bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM plano secatur CD, oppositis planis parallelo, erit vt CM cylindrus ad cylindrũ FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem: vt autẽ EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG cõus ad conum CDK; cylindri n. sunt conorum tripli. ergo & vt CH axis ad axem KL, ita est ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri inter se sunt, vt altitudines. Quod demonstrare oportebat.

11. huius.

Ex antecedenti.

15. quinti. 1. huius.



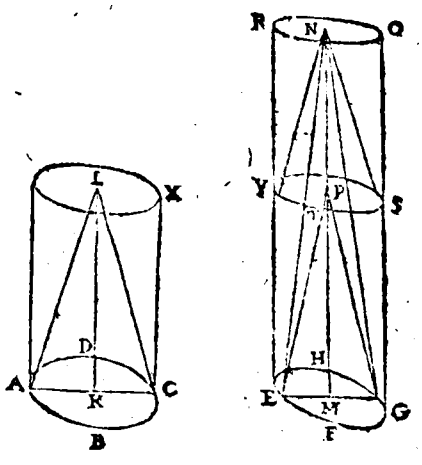
F. C. COMMENTARIVS.

Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL.] *Hoc est ita esse altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, de quibus Euclides loquitur, altitudo ipsa axis est siue ab axe determinatur; in scalenis vero non item. sed tamen nihilominus demonstrabitur conos & cylindros in æqualibus basibus constitutos inter se esse vt axes, & ob id, vt eorum altitudines ex ijs, quę nos proxime diximus.*

THEOREMA XV. PROPO. XV.

Æqualium conorum, & cylindrorum bases ex cõtraria parte altitu-

altitudinibus reſpondent, & quorum conorum & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi interſe ſunt æquales.



Sint æquales coni & cylindri, quorũ baſes quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipſorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum ſunt altitudines, & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere, hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem MN ad altitudinem KL. altitudo.n.KL vel æqualis eſt altitudini MN, vel non æqualis. Sit primum æqualis: atq; eſt AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni, & cylindri inter ſe ſunt vt baſes. æqualis igitur eſt baſis ABCD baſi EFGH, ac propterea ex cõtraria parte ſibi ipſis reſpondent. eſtq; vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non ſit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, ſed maior ſit MN, & auferatur ab ipſa MN altitudini LK æqualis PM, & per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum E F G H R O parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius baſis quidem, EFGH circulus, altitudo autem P M. Quoniam igitur AX cylindrus æqualis eſt cylindro EO, alius autem aliquis eſt cylindrus ES; erit vt A X cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim; cylindri enim A X ES eandem habent altitudinem, vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum ita MN altitudo ad altitudinem MP. nam cylindrus EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. eſt igitur vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem eſt MP altitudo altitudini K L. quare vt baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent.

9. huius.

1. huius.

13. huius.

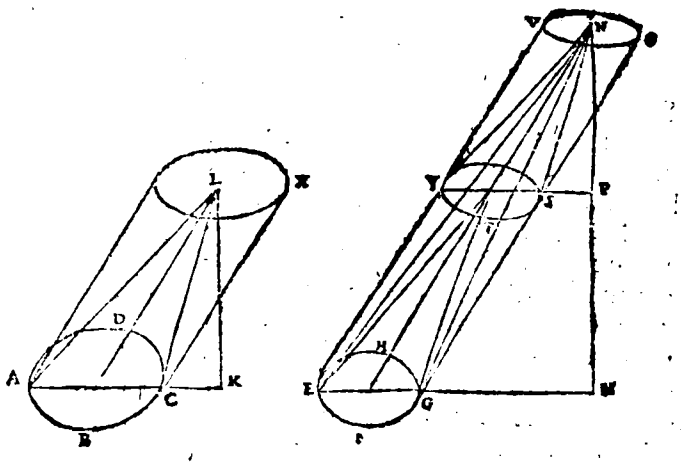
Sed cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte reſpondeant altitudinibus: ſitq; vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. dico AX cylindrum cylindro EO æqualem eſſe. ijſdem .n. conſtructis qm̃ vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis eſt altitudini MP: erit vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem.n. habent altitudinem. vt autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus EO ad ES cylindrum, eſt igitur vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO eſt æqualis. ſimiliter autem & in conis. Quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonſtrauit. Sed & in omnibus demonſtrabitur hoc modo.

Sint æquales coni, & cylindri ſiue recti ſiue ſcaleni, quorum baſes circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondere; hoc eſt vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem NM ad LK altitudinem, nam vel altitudines LK NM ſunt æquales vel inæquales; ſi æquales, cum æquales ſint cylindri, erunt & baſes æquales inter ſe: cylindri enim, & coni qui

eãdem habent altitudinem, inter ſe ſunt vt baſes. quare baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent. Si vero altitudines non ſint æquales, Sit maior NM altitudo; à qua auferatur PM æqualis altitudini LK, & per P ducatur planum cylindrum ſecans, oppoſitis planis parallelum TYS, intelligaturq; cylindrus ES, cuius baſis circulus EFGH; & altitudo PM. Itaq; quoniam cylindrus AX eſt æqualis cylindro EO, & alius cylindrus eſt ES: erit vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim, cum eandem habeant altitudinem. Vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP: cylindrus enim EO ſecatur plano TYS oppoſitis planis parallelo. quare vt cylindrus RS ad cylindrum SE, ita eſt NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo vt cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Vt igitur baſis ABCD ad EFGH baſim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. æqualis autem eſt altitudo MP altitudini LK. ergo vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſt altitudo NM ad LK altitudinem.



12. huius. 13. huius.

Sed cylindrorum AX EO baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondeant, ſitq; vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro EO æqualem eſſe. ijſdem enim conſtructis quoniam vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem altitudo autem LK eſt æqualis ipſi PM altitudini; erit vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD baſis ad baſim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum. quod eandem altitudinem habeat: & vt NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Vt igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO eſt æqualis. ſimiliter autem, & in conis. Æqualium igitur conorum, & cylindrorũ baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, & quorum conorum, & cylindrorum baſes ex contraria parte altitudinibus reſpondent, illi inter ſe ſunt æquales. quod demonſtrare oportebat.

11. huius.

Sed & illud verum eſt quod nos demonſtraulmus in commentarijs in librum Archimedis de conoidibus, & ſpheroidibus ad propoſitionem XI.

Cylindri omnes & coni inter ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & ex proportione altitudinum.

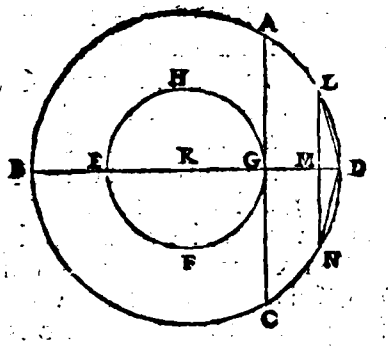
PROBLEMA I. PROPOSITIO XVI.

Duobus circulis circa idem centrum exiſtẽtibus in maiori polygonum æqualium, & numero parium laterum deſcribere quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonũ æqualium, & numero parium laterum deſcribere, nõ tangens minorem circulum EFGH. ducatur enim per K centrũ recta linea BD atq; à puncto G ipſi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaq; circumferentiam BAD bifariam ſecantes & eius dimidium rurſus bifariam, & hoc ſemper facientes tandem relinquemus

circum

circumferentiam minorem ipsa AB. relinquatur, sitq; LD, & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producatur, iungantur q; LD DN LN. ergo LD ipsi DN est æqualis. & quoniã LN parallela est AC, & AC tangit circulum EFGH; ipsa LN circulũ EFGH non tanget, & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. quod si ipsi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tãges minor circulũ EFGH. quod facere oportebat.

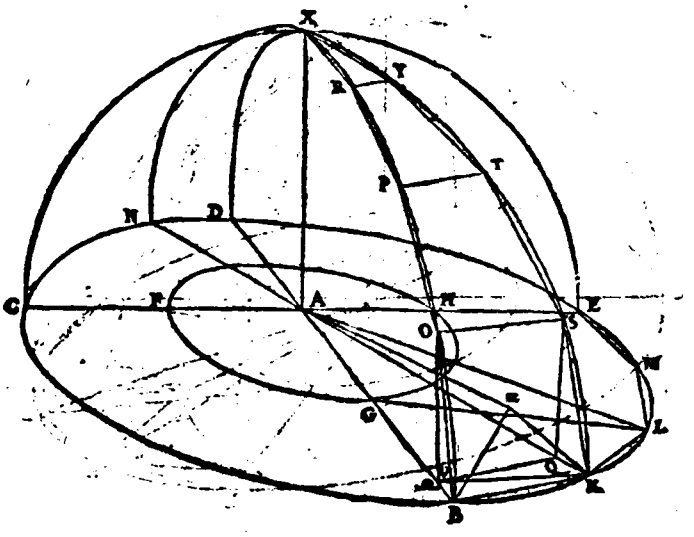


P. C. COMMENTARIVS.

¶ Ergo LD ipsi DN est æqualis.] *Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, quare & bifariam ipsam secabit. atq; erit LM æqualis MN. cum igitur duæ LM MD duabus NM MD æquales sint & angulos æquales contineant, nempe rectos: erit basis LD basi LN æqualis.* 3. tertij. 4. primi.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus in maiori solidũ polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

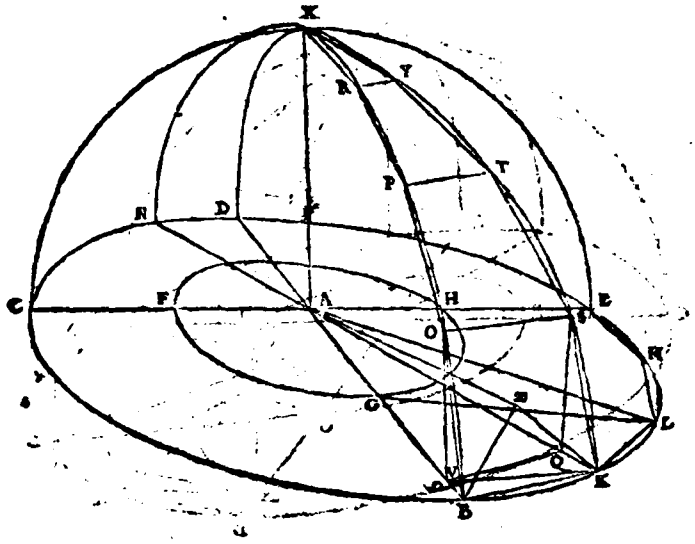


Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrũ A. oportet in maiori sphæra describere solidũ polyhedrum minoris sphæræ superficiẽ non tangens. secentur sphæræ plano aliquo per centrũ ducto. erunt sectiones circuli, quoniã diametro manẽte, & semicirculo circũducto sphæra facta est. ergo in quacũq; positione semicirculum intelligamus, q per ipsum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet, & constat circulũ maximũ esse, cum diameter sphæræ, quæ & semicirculi, & circuli diameter est, maior sit omnibus rectis, quæ in circulo vel sphæra ducuntur. Intelligatur igitur maior quidem sphæra



16. tertij.

circulus BCDE; in minori autem circulus FGH: & ducantur ipſorum duæ diametri ad rectos inter ſe angulos BD CE: & duobus circulis circa idē centrum
4. existentibus BCDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualiū, & pariū numero laterum deſcribatur, non tangens minorem circulum FGH; cuius latera
Ex antecedente. ſint in BE circuli quadrante BK KL LM ME: & iuncta KA producatur ad N: & à puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos conſtituatur AX; quæ ſuperficiei ſphæræ in puncto X occurrat: & per AX, & vtramq; ipſarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficient in ſuperficie ſphaeræ maximos circulos. itaq; efficiant, & ſint in diametris BD KN eorū ſemicirculi BXD KXN. Quoniam igitur XA recta eſt ad planū circuli BCDE, erunt omnia plana, quæ
18. vndecimi. per ipſam XA tranſeunt ad planum circuli BCDE recta, quare & ſemicirculi BXD KXN recti ſunt ad idem planum. & quoniam ſemicirculi BED BXD KXN æquales ſunt, in æqualibus. n. conſiſtunt BD KN diametris; erunt & eorū quadrātes BE BX KX inter ſe æquales. quot igitur latera polygoni ſūt in quadrāte BE, tot erunt & in quadrātibus BX KX æqualia ipſis BK KL LM ME. deſcribantur & ſint BO OP PR RX KS ST TY YX: iungantur q; SO TP YR, & ab ipſis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur: cadēt hæ in communes planorum ſectiones BD KN, quoniā & plana ſemicirculorū BXD KXN ad planū circuli BCDE recta ſunt. itaq; cadant, ſintq; OV SQ: & VQ iungatur. cū igitur in æqualibus ſemicirculis BXD KXN æquales circūferentiae ſumptæ ſint BO KS, & ductæ perpēdiculares OV SQ. erit OV quidē
B ipſi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ. eſt autē & tota BA æqualis totti KA. ergo & reliqua VA reliq; QA eſt æqualis. Vt igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, idq;
2. ſexti. 6. vndecimi 33. primi. oq; VQ ipſi BK parallela eſt quod cū vtraq; ipſarū OV SQ recta ſint ad circuli BCDE planū, erit OV ipſi SQ parallela. oſtenſa autē eſt & ipſi æqualis. ergo



9. vndecimi C A QV SO æquales ſunt & parallelae. & quoniam QV parallela eſt ipſi SO, ſed & parallela ipſi KB, erit & SO ipſi KB parallela: & ipſas coniungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterū eſt in vno plano: nā ſi duae rectae lineae parallelæ ſint, & in vtraque ipſarū quæuis pūcta ſumātur, quæ dicta puncta coniungit recta linea in eodem eſt plano, in quo parallelae. & eadem ratione vtraq; ipſorum quadrilaterorū SOPT TPRY in vno ſunt plano. eſt autem in vno plano & triangulum YRX. ſi igitur à punctis OSPTRY ad A



ductas rectas lineas intelligamus, cōſtituetur quædam figura ſolida polyhedra,

inter

inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus composita, quarũ bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex aũtẽ punctũ A. quòd si vno quoq; laterum KL, LM ME, quemadmodum in KB eadem cõ struamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera iam dicta, & YRX triangulum; & quæ eiusdẽ ordinis sunt; vertex aũt A punctũ. Dico dictã figurã polyhedrã nõ tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à puncto A ad planũ quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK iungãtur. Itaq; q̃m AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad 3. diff. vnde cimi. ꝙs rectas lineas, quę ipsam contingunt, & in eodem sunt plano rectos angulos faciet. ergo AZ ad vtrãq; ipsarum BZ ZK est perpendicularis. & q̃m AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK ęquale, & sunt quadratõ quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; &. n. angulus ad Z rectus est, qua- 49. primi, drato aũtẽ ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. cõe auferatur quadratum ex AZ. reliquũ igitur quod ex BZ reliquo ꝙ ex ZK est æquale; ideoq; recta linea BZ rectę ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & interuallo vna ipsarũ ZB ZK descriptus, etiã per puncta O S trãsibit, atq; erit in circulo KBOS quadrilaterũ: D Et q̃m KB maior est, q̃ QV, æqualis autem QV ipsi SO; erit & KB, quã SO maior. Sed KB est æqualis vtriq; ipsarũ KS BO. ergo vtraq; KS BO, quàm SO est maior. cum igitur in circulo quadrilaterum sit KBOS, & ęquales sint KB BO KS, & minor OS; sitq; ex centro circuli BZ, erit quadratum ex KB maius, quã E duplum quadrati ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis Kω. Et q̃m BD minor est, quã dupla ipsius Dω; atq; est vt BD ad Dω, ita rectangulum cõtẽ- F tum DB Bω ad rectangulum, quod Dω ωB cõtinetur, nẽpe descripto ex Bω quadrato, & cõpleto parallelogrãmo in ipso ωD. quare & rectãgulum contentum G DB Bω minus est, quã duplum eius, ꝙ Dω ωB cõtinetur: & iuncta KD, quod DB H Bω cõtinetur est æquale quadrato ex KB; & quod cõtinetur Dω ωB æquale quadrato ex Kω. quadratum igitur ex KB minus est, quã duplum quadrati ex Kω, sed quadratum ex KB maius est, quã duplum quadrati ex BZ ergo quadratum ex Kω quadrato ex BZ est maius. Et q̃m BA est æqualis AK, erit quadratũ ex BA quadrato ex AK æquale. & sunt quadrato quidem ex BA ęqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato aũt ex AK ęqualia quadrata ex Kω ωA. quadrata igitur ex B Z ZA quadratis Kω ωA sunt ęqualia; quorum quadratum ex Kω maius est qua- K drato ex BZ. ergo reliquum ex ωA quadratum quadrato ex ZA est minus, ac propterea recta linea AZ maior, quã recta Aω. multo igitur maior est AZ, quã AG; atq; est AZ quidem ad vnam polyhedri basim, AG vero ad superficiem minoris sphærę. quare polyhedrum minoris sphaerae superficiem nõ tangit.

Ostendendum aũt aliter & expeditius, maiorem esse AZ, quã AG. Ducatur A à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & AL iũgatur. Itaq; circumferentiã EB bifariã secãtes, & dimidiã ipsius bifariã, atq; hoc semper faciẽtes tandem re- linquemus quandã circumferentiã minorem circumferentia circuli BCD, quæ subtenditur æquali ipsi GL. relinquatur, sitq; circumferentia KB. minor igitur est recta linea KB, quã GL. Et q̃m in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS, & minor OS; erit ãgulus BZK obtusus; ideoq; BK maior, quàm BZ. sed GL quã BK est maior. multo igitur maior est GL, quã BZ, & quadratum ex GL quadrato ex BZ maius. & cũ æqualis sit AL ipsi AB, erit & quadratum ex AL quadrato ex AB ęquale. sed quadrato quidẽ ex AL æqualia sunt quadrata ex AG GL; quadrato aũt ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata igitur ex AG GL, quadratis ex BZ ZA æqualia sunt; quorũ quadratũ ex BZ nimus est quadrato ex GL. ergo reliquũ ex ZA quadratũ majus est quadrato ex A G; & ob id recta linea ZA, q̃ recta AG est maior. Duabus igitur sphæris circa idẽ

centrum

centrum existentibus, in maiori solidum polyhedrum descriptum est; minoris sphæræ superficiem non tangens. quod facere oportebat.

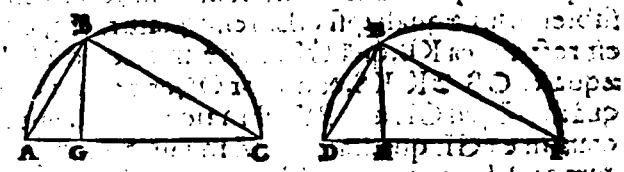
COROLLARIVM.

Quod si etiam in altera sphæra, solido polyhedro descripto in sphæra ABCDE simile solidũ polyhedrum describatur, habebit solidũ polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplam proportionem eius, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphæræ diametrum. diuisis enim solidis in pyramides numero æquales, & eiusdem ordinis erũt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis, cuius basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera sphæra eiusdem ordinis triplam proportionem habet eius, quã latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quã habet AB ex centro sphæræ circa centrum A existentis ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & vnaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A ad vnamquamq; pyramidem eiusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia cõsequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphæræ diametrum.

F. COMMENTARIVS.

A Erunt sectiones circuli.] *Hoc vniuersè à Theodosio demonstratur in prima propositione sphæricorum, nempe quomodocunque plano sphæra secetur, semper sectiones fieri circulos.*

B Erit OV quidem ipsi SQ æqualis: BV vero æqualis KQ.] *Sint enim duo semicirculi æquales ABC DEF, sumanturque æquales circumferentia AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipsi EH, & AG ipsi DH æqualem esse. quoniam enim circumferentia AB est æqualis circumferentiæ DE, quæ sunt æqualium circulorum, erunt rectæ lineæ ABDE inter se æquales. & eadem ratione æquales BC EF. ergo & vt AB ad BC, ita DE ad EF: atque est angulus ABC in semicirculo rectus æqualis recto DEF. anguli igitur circa æquales angulos latera sunt proportionalia*

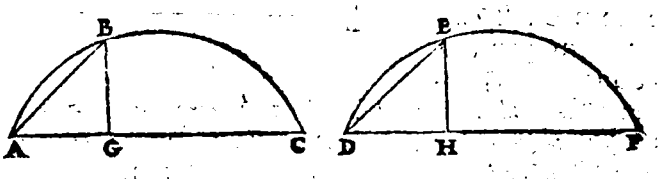


19. tertii.

lia, erit triangulum ABC simile triangulo DEF. sed triangulum ABG est simile triangulo ABC, ergo & ipsi DEF. triangulum autem DEH est simile triangulo DEF. triangulum igitur ABG triangulo DEH est simile, ergo vt AB ad BG, ita DE ad EH, & permutando vt AB ad DE, ita BG ad EH. aequalis autem est AB ipsi DE. ergo & BG ipsi EH est aequalis. & eodē modo demōstrabitur AG equalis ipsi DH, quod demonstrare oportebat. sed & illud vniuersē in omnibus portionibus demonstratur sequenti lemmate.

6. sexti. 8. sexti. 9. sexti. 14. quinti.

Sint equales portiones æqualiū circulorū ABC DEF; sumanturq; circumferētiæ equales AB DE: & à pūctis BE ad AC DF perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG quidem ipsi EH equalem esse; AG vero ipsi DH.



H

Iungantur AB DE, & quoniam æquales sunt circumferentiæ AB DE, erunt, & reliquæ BC EF inter se æquales, ergo & equales anguli, qui in ipsis consistunt. quare angulus BAC est equalis angulo EDF. sed & recti sunt anguli, qui ad GH. duo igitur triangula sunt, ABG DEH, quæ duos angulos duobus angulis æquales habent, alterum alteri, & vnum latus AB vni lateri DE equale, quod vni æqualium angulorum subtenditur. ergo omnia omnibus sunt æqualia. æqualis igitur est AG ipsi DH, & BG ipsi EH. quod demonstrare oportebat.

27. tertii. 6. primi.

C

Nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in vtraq; ipsarum quæuis puncta sumantur, quæ dicta puncta coniungit in eodem est plano in quo parallelæ] *Ex. XI. vndecimi.*

DI

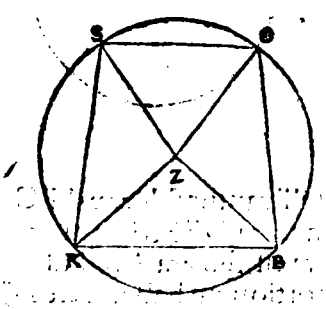
Et quoniam KB maior est, quam QV) *Est enim triangulum AQV triangulo AKB simile, cum angulus ad A sit vtriq; communis, angulusque AQV angulo AKB, & angulus AVQ angulo ABK equalis. vt igitur AK ad KB, ita AQ ad QV, & permutando vt AK ad AQ, ita KB ad QV. est autem AK maior, quam AQ. ergo & KB, quam QV maior erit.*

2. primi. 4. sexti.

Erit quadratum ex KB maius, quam duplum quadrati ex BZ.] *Nam cum rectæ lineæ KB BO KS æquales sint, & minor ipsis OS: erunt circumferentiæ, quas auferunt KB BO KS inter se æquales & reliqua circumferentia OS maiores. quare & anguli KZB KZB BZO equales, & maiores angulo OZS. sunt autem quattuor anguli quattuor rectis æquales. ergo OZS est minor recto, videlicet acutus: & vnusquisque reliquorum trium obtusus: ac propterea quadratum quod fit ex KB maius est duobus quadratis, quæ ex KZ ZB. hoc est maius, quam duplum quadrati quod ex BZ. sunt enim KZ ZB inter se equales, vt demonstratum est. sed & hoc sequenti lemmate planius demonstratur.*

E

Sit in circulo quadrilaterū KBOS, cuius tria latera SK KB BO, inter se sint equalia: sitq; BO maior, quam OS; & sumpto circuli centro Z, iungatur BZ. Dico quadratum ex KB quadrati ex BZ maius esse, quam duplum.



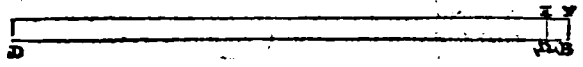
Iungantur enim OZ SZ KZ. Quoniam igitur BZ est æqualis ZS, & communis ZO, erunt duæ BZ ZO duabus SZ ZO equales altera alteri, & basis BO basi OS maior. angulus igitur BZO angulo OZS est maior. & quoniam angulus OZB vnicuique ipsorum BZK KZS est æqualis; in æqualibus namq; circumferentijs consistunt OB BK KS; quod rectæ lineæ equales sint: erit et vterque angulorum BZK KZS maior angulo OZS. sed quattuor anguli OZS SZK KZB BZO quattuor rectis sunt æquales: etenim circa vnum punctum Z consistunt. vnusquisque igitur angulorum OZB BZK KZS est obtusus. ideoq: obtusiangulū est triangulum BZO. At in obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quadratis, quæ à lateribus obtusum angulum continentibus sunt. ergo quadratū, quod ex BK maius est quadratis, quæ ex KZ ZB. sed quadrata ex KZ ZB dupla sunt quadratū

coro. 15. primi.

drati ex BZ; aqualis enim eſt KZ ipſi ZB. quadratum igitur ex KB, maius eſt, quàm duplum quadrati ex BZ. quod oportebat demonſtrare.

F Et quoniam BD minor eſt quàm dupla ipſius DΩ] *Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD, cadit inter G & B, quod circulum FGH non tangit, vt ex antecedente conſtat: & cum BD dupla ſit ipſius DA, erit ipſius DΩ minor quàm dupla.*

G Atque eſt vt BD ad DΩ, ita rectangulum contentum DB BΩ ad rectangulum quod D Ω ΩB continetur.] *Deſcribatur ex ΩB quadratum quod ſit ΩBΨΞ, & compleatur DΞ parallelogrammum. erit vt BD ad DΩ, ita rectangulum DΨ ad rectangulum DΞ. ex prima ſexti, hæc eſt ita rectangulum, quod continetur DB BΩ ad rectangulum contentum DΩ ΩB.*



H Et iuncta KD, quod DB BΩ continetur eſt æquale quadrato KB.] *Eſt enim angulus in ſemicirculo DKB rectus, & ab eo ad baſim perpendicularis ducitur KΩ. quare ex corollario octauæ ſextilibri KB eſt proportionalis media inter DB BΩ: & KΩ media inter DΩ ΩB, & ob id quadratum quidem ex KB aquale eſt rectangulo contento DB BΩ, quadratum vero ex KΩ æquale ei, quod DΩ ΩB continetur.*

K Multo igitur maior eſt AZ quàm AG] *Quoniam enim polygonum BKLME in maiori circulo BCDE deſcriptum eſt: non tangens minorem circulum FGH, perpendicularis à puncto K ducta ad BD, videlicet KΩ circumferentiam eius non tanget ex iis, quæ in antecedente demonſtrata ſunt. quare AΩ maior erit, quam AG; & idcirco AZ longe maior, quam quæ à centro minoris ſphæræ ad eius ſuperficiem pertinet.*

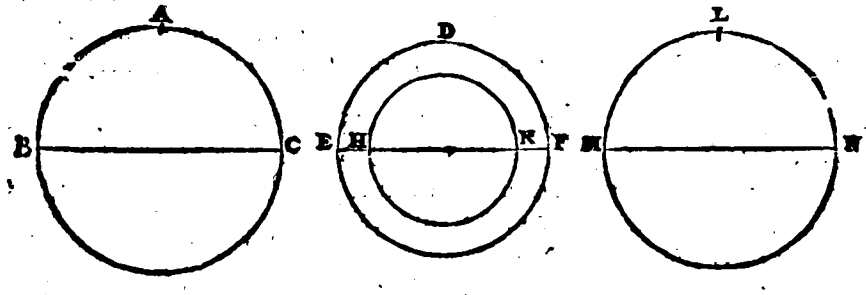
L Et quoniam in circulo eſt BKSO quadrilaterum] *Intelligatur enim deſcriptum quadrilaterum BKSO, vt in antecedentibus.*

M Et ſunt æquales OB BK KS, & minor OS.] *Hæc proxime demonſtrata ſunt.*

N Et cum æqualis ſit mL ipſi AB.) *Sunt enim à centro ad ad circumferentiam maioris circuli BCDE.*

THEOREMA XVI. PROPO. XVIII.

Sphæræ inter ſe in tripla ſunt proportione ſuarũ diametrorũ.



Intelligantur ſphæræ ABC DEF; quarũ diametri BC EF. Dico ABC ſphæram ad ſphęram DEF triplam proportionem habere eius, q̃ habet BC ad EF. Si enim non ita eſt, ſphæra ABC ad ſphæram minorem ipſa DEF, vel ad maiorem triplã proportionem habebit eius, q̃ habet BG ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur ſphæra DEF circa idem centrum, circa q̃ eſt ſphęra GHK: deſcribaturq; in maiori ſphæra DEF ſolidũ polyhedrũ non tãgens minorem ſphęram GHK in ſuperficie; & in ſphæra ABC deſcribatur ſolidũ polyhedrum ſimile ei, quod in ſphæra DEF deſcriptum eſt. ſolidum igitur polihedrũ, quod in ſphæra ABC ad ſolidum polyhedrum, q̃ in ſphæra DEF triplã proportionem habet eius, quam BC ad EF. habet aũt ABG ſphæra ad ſphæram GHK triplam proportionem eius, quam BC ad EF. ergo vt ABC ſphæra ad ſphærã GHK,

Ax anteced.

Ea corol. antecedente.

HK, ita ſolidum polyhedrum in ſphæra ABC ad ſolidum polyhedrum in ſphæra DEF; & permurando, vt ABC ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſa eſt, ita GHK ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF. maior autẽ eſt ſphæra ABC ſolido polyhedro, quod eſt in ipſa. ergo & GHK ſphæræ polyhedro, q̃ in ſphæra DEF eſt maior. ſed & minor, ab ipſo enim compræhenditur, quod fieri non poteſt. nõ igitur ABC ſphæra ad ſphæram minorem ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quã BC ad EF. ſimiliter oſtendemus neq; DEF ſphæram ad ſphæram minorẽ ipſa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. dico inſuper ſphæram ABG neque ad maiorẽ ſphæram ipſa DEF triplam proportionem habere eius, quam BC ad EF. ſi enim fieri poteſt, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur ſphæra LMN ad ABC ſphæram triplam proportionem habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. vt autem ſphæra LMN ad ABC ſphæram, ita ſphæra DEF ad ſphæram quandam minorem ipſa ABC, vt ante demonſtratum fuit; quoniam ſphæra LMN maior eſt ipſa DEF. ergo & DEF ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ABC triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt, non igitur ABC ſphæra ad ſphæram maiorem ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BE ad EF. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. ergo ABC ſphæra ad ſphæram DEF triplã proportionem habebit eius, quam BC ad EF, quod demonſtrare oportebat.

Finis Libri Duodecimi.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Tertiusdecimus.

ET SOLIDORVM TERTIVS.

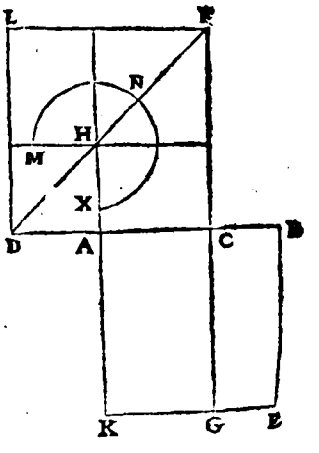
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à *dimidia fit*, quadrati.

A Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C; & sit AC maior portio: producaturq; in directum ipsi CA recta linea AD, & ponatur AD ipsius AB dimidia. dico quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum esse. describãtur B ex AB DC quadrata AE DF. & in DF describatur figura, & FC ad G producatur. Itaq; quoniam AB extrema, ac media rõne secatur in C, erit quod AB BC continetur æquale quadrato ex AC. atq; est rectangulum quidem CE quod cõtinetur AB BC; quadratum vero ex AC est FH. ergo rectangulum CE quadrato FH est æquale. & quoniam BA dupla est ipsius AD; aequalis autem *BA ipsi* AK; & DA ipsi AH: erit & KA ipsius AH dupla. vt autem KA ad AH, ita est rectangulum KC ad ipsum CH. duplum igitur est KC rectangulum rectanguli CH: & sunt rectãgula LH HC ipsius CH dupla. ergo rectangu-



C lum KC rectãgulis LH HC est æquale. ostensum autem est & rectangulum CE æquale quadrato FH. totum igitur AE quadratũ est æquale gnomoni MNX. Rursus quoniam BA dupla est ipsius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplũ, hoc est quadratum AE D quadrati DH. æquale autem est quadratũ AE gnomoni MNX. ergo & MNX gnomõ quadruplus est quadrati DH. & ob id totũ DF ipsius DH est quintuplum. atq; est DF quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratũ igitur ex CD quadrati ex DA quintuplũ E erit. ergo si recta linea extrema, ac media rõne secta fuerit, maior portio assumens totius dimidiam quintuplum potest eius, quòd à dimidia fit quadrati. Quod demonstrare oportebat.

SCHO-

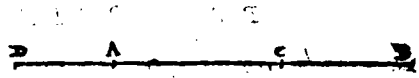
SCHOLIVM.

Resolutio est sumptio quæsiti tamquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod verum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea, quæ consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem.

Antecedentis theorematis resolutio:

Recta enim linea quædam AB extrema, ac media ratione secetur in C, sitq; maior portio AC. & ponatur AD ipsius AB dimidiæ æqualis. dico quadratũ ex CD quadrati ex DA quintuplum esse quoniam .n. quintuplum est quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex CA AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur: erunt quadrata ex CA AD vna cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla, ergo diuidẽdo quadratum ex CA cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplũ est quadrati ex AD. sed ei quidem, φ bis CA AD cõtinetur æquale est rectangulũ BAC. est enim BA ipsius AD dupla, quadrato autem ex AC est æquale rectangulum ABC, namq; AB extrema, ac media ratione secta est in C. rectangulum igitur BAC vna cum rectangulo ABC quadruplum est quadrati ex AD, sed rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplũ est quadrati ex AD. quod quidẽ ita se habet, est enim BA ipsius AD dupla.



4. secundi.

3. secundi cor. 20. sex.

Compositio.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD; quadratum autem ex AB est rectangulum BAC vna cum rectangulo ABC: erit rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. sed rectangulum quidẽ BAC est æquale ei, quod bis DA AC continentur; rectangulum autem ABC est æquale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum est quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis DA AC continetur quintuplũ est quadrati ex DA. sed quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC est id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. Quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C.] *Quomodo hoc fiat, docuit in vndecima propositione secundi libri. & in 30. sexti.* A

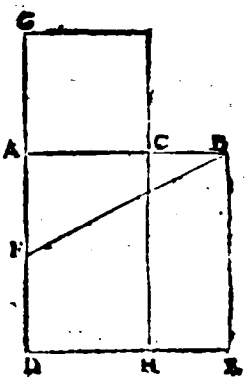
Describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura.] *Sit ex AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & iunctæ DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipsarum DL CF, quæ diametrum DF in puncto H secet. rursus per H ducatur recta linea alterutri ipsarum EF DC parallela.* B

Et sunt rectangula LH HC ipsius HC puncta.] *Suplementa enim LH HC inter se sunt æqualia ex 43. primi libri.* C

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum.] *Ex 20 sexti.* D

Quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit.] *Possumus etiam aliter, & fortasse expeditius idem demonstrare in hunc modum.* E

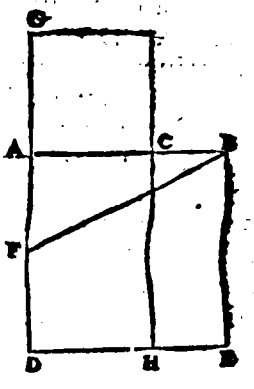
Sit recta linea AC, qua extrema, ac media ratione secetur in C, & ex AB fiat quadratum ADEB; secta aq; AD bifariam in F, & iuncta FB, producatur FA in G, ita vt FG ipsi FB sit æqualis, erit AG æqua
20. sexti *lis AC ex demonstratis in vndecima secundi libri. quare FG constat ex maiori portione, & ex dimidia totius AB. Dico quadratum ex FG quintuplum esse quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla est ipsius AF, erit quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. sed quadratum ex FB est æquale quadratis ipsarum FA AB, ex 47 primi. quadratum igitur ex FB, hoc est quadratum ex FG quadrati ex FA quintuplum erit. quod oportebat demonstrare. sed & alia nonnulla demonstranda sunt, quæ ad hanc sectionem attinent.*



PROPOSITIO I.

Data recta linea, extrema ac media ratione secta, & vtraque ipsius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, qua extrema, ac media ratione secetur in C. Dico ipsas AC CB datas esse. Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam AB est 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratum est 25: quadratum autem ipsius AB est 100. ergo quadratum ex FB est 125, & ipsa FB, hoc est FG ℞ 125. sed FA est 5. erit igitur
17. sexti. *AG, hoc est AC ℞ 125 minus. Quod cum 5. sit vt BA ad AC, ita AC ad CB, rectangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE æquale erit quadrato ex AC. quadratum autem ex AC, hoc est quadratum R 125 minus 5 est 150 minus ℞ 12500. si igitur ad CH applicetur 150 minus ℞ 12500 latitudinem faciens CB, erit CB 15 minus R 125. ergo AC CB datæ sunt. vt oportebat.*



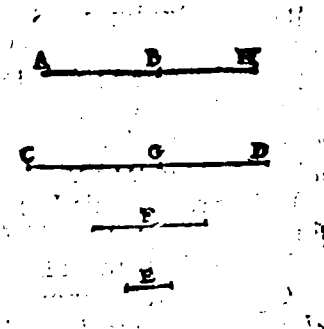
Ex quibus manifestū est si recta linea rationalis, exposita rationali longitudine cōmēsurabilis extrema ac media rōne secta fuerit, maiorē eius portionē apotomen esse quintam, & minorem esse apotomen primam:

Est enim quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. ergo quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratum ex FB ad quadratum ex
6. decimi. *BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipsi BA longitudine incommensurabilis; ac propterea FB plus potest, quam FA quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. est autem AF, quæ ipsi AG congruit, expositæ rationali longitudine commensurabilis. quare AC est apotome quinta. At vero CB esse apotomen primam, ma-*
5. diffin. tertiarum. *nifesto constat; quadratum enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri.*

PROPOSITIO II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectæ lineæ CD E, ita vt CD sit ipsius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis sit F: & ex CD abscindatur DG ipsi F æqualis; fiatq; vt CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo vt CD ad DG hoc est ad F, ita AH ad HB, et
Cor. 20. sex. *quoniam tres rectæ lineæ CD F E deinceps proportionales sunt erit vt CD ad E, ita quadratum ex CD ad quadratū ex F. Est autem CD quintupla ipsius E, quadratum igitur ex CD quintuplum est quadrati ex F. ergo quadratum ex AH quadrati ex HB est quintuplum. est q; AB ma-*



ior portio

ior portio rectę lineæ, quæ extrema, ac media ratione secatur. quare BH est totius dimidia. & dupla ipsius BH est tota recta linea, quam nobis inueniendam proposuimus.

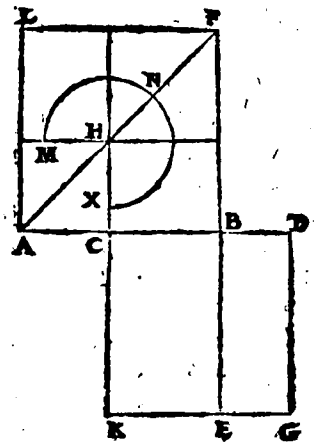
Itaque constat, Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim maior portio AB 4 sitq; CD 5, & E 1. erit F, hoc est GD Ɽ 5, & CG 5 minus Ɽ 5. Fiat vt 5 minus Ɽ 5 ad R 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum Ɽ 5 per 4, perducetur Ɽ 80. deinde multiplicabimus 5 minus Ɽ 5 per eam, quæ ex bini nominibus ipsi respondet, videlicet per 5 plus Ɽ 5, producetur 20. & per eandem multiplicabimus Ɽ 80 fiet Ɽ 2000 plus Ɽ 400. quare si ad 20 applicabimus R 2000 plus Ɽ 400, latitudinem faciet R 5 plus 1, cuius duplum est Ɽ 20 plus 2. tota igitur recta linea est R 20 plus 2. & minor portio R 20 minus 2.

THEOREMA II. PROPO. II.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ.

Recta. n. linea AB partis ipsius AC quintuplum possit: & ipsius AC dupla sit CD. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, CB maiorem esse portionem. Describantur. n. ex vtraq, ipsarum AB CD quadrata AF CG; & in AF figura descripta, producatur FB in E. qm igitur quadratum AF quintuplum est ipsius AH, erit MNX gnomon ipsius AH quadruplus. & quoniam DC dupla est CA, quadratū ex DC quadrati ex CA quadruplum est, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH, ostensus est autem MNX gnomon quadruplus ipsius AH quadri, ergo gnomon MNX quadrato CG est aequalis. Rursus quoniā DC dupla est CA, æqualis autem est DC ipsi CK. & AC ipsi CH; erit KC ipsius CH dupla. parallelogrāmum igitur KB duplum est parallelogrāmi BH. & sunt parallelogramma LH HB ipsius HB dupla. ergo KB aequale est ipsis LH HB. sed & totus MNX gnomō toti CG est aequalis & reliquū igitur HF aequale est reliquo BG. atq; est BG quidem quod CD DB continetur; etenim CD est aequalis DG: ipsum vero HF est quadratum ipsius BC. ergo & continetur CD DB quadrato ex CB est aequale. vt igitur DC ad CB, ita est CB ad BD. maior autem est DC, quàm CB. ergo & CB quàm BD est maior. Itaq; recta linea CD extrema, ac media ratione secta, maior portio est CB. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictae partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quae à principio rectae lineae. Quod demonstrare oportebat.



A

29. sexti

B

14. sexti

At vero duplam ipsius AC maiorem esse, quàm CB, sic demonstrabitur.

Si enim non, sit, si fieri pōt, BC ipsius CA dupla. quadratū igitur ex BC quadruplum est quadrati ex CA; & ob id vtrumq; quadratorum, quae fiunt ex BC CA quadrati ex CA quintuplum est. sed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur. ergo quadratum ex BA aequale est quadratis ex BC CA. quod fieri non pōt. nō igitur BC dupla est ipsius CA. similiter demōstrabimus neq; minorem BC ipsius CA duplā esse. multo. n. maius absurdum sequetur: ergo ipsius AC dupla maior est quàm BC. quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea quædam C D partis ipsius DA quintuplum posit, & ipsius DA dupla ponatur AB. Dico AB extrema, ac media ratione sectam esse in puncto C, & maiorem portionem esse AC, quæ quidem est reliqua pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniã enim AB extrema, ac media ratione secta est in C, & AC est maior portio; erit rectangulum A BC quadrato ex AC æquale. est autem & rectangulum B A C æquale ei, quod
2. secundi. bis DA AC continetur. etenim BA ipsius AD est dupla. ergo rectangulum A
10. sexti. BC vnà cum rectangulo BAC, quod quidem est ipsius AB quadratum, æquale est ei, quod bis DA AC continetur vnà cum quadrato ex AC. quadratum an-
4. secundi. tem ex AB quadruplum est quadrati ex AD. ergo quod bis DA AC cõtinetur vnà quadrato ex AC quadruplũ est eius, quod fit ex AD quadrati. ergo & quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur D A AC; hoc est quadratũ ex CD, quintupla sunt quadrati ex AD. ꝙ quidẽ ita se habet.

Compositio.

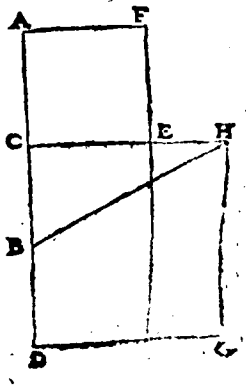
Quoniam igitur quadratum ex CD quintuplum est quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex DA AC vnà, cum eo, *quod bis DA AC continetur*; erunt quadrata ex DA, AC vnà cum eo ꝙ bis continetur DA AC quintupla ipsius quadrati ex DA. & diuidendo quod bis DA AC continetur vnà cum quadrato ex AC quadrupla sunt quadrati ex AD. est autem, & quadratum ex AB quadrati ex AD quadruplum. ergo quod bis continetur DA A
8. secundi. C, quod est rectangulum BAC vnà cum quadrato ex AC est æquale quadrato ex AB. sed quadratum ex AB est rectangulum ABC vnà cum rectãgulo BAC.
14. sexti. rectangulum igitur BAC vnà cũ rectãgulo ABC est æquale rectãgulo BAC vnà cu quadrato ex AC. & ablato cõi rectangulo BAC, erit reliquum rectangulum ABC quadrato ex AC æquale. est igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. maior autem est BA, quã AC. ergo & AC quã CB est maior. quare AB extrema, ac media ratione secta est in C, & AC est maior portio. Quod oportebat demõstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum posit] *Hoc est quadratum rectæ lineæ AB quintuplum sit quadrati partis ipsius AC.*

B Maior autem est DC, quam CB] *Hoc est dupla ipsius AC maior est, quam BC, illud autem ipse mox demõstrabit. sed & aliter idẽ demõstrari põt hoc pacto.*

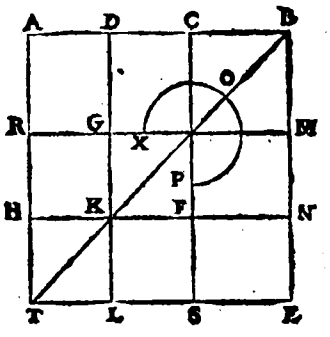
Recta enim linea AB partis ipsius BC quintuplum possit, & producatur AB ad D, ita vt DC ipsius CB sit dupla. dico si CD extrema ac media ratione secetur, maiorem eius portionem esse AC. fiãt enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur. Itaque quoniam DC, hoc est HC dupla est ipsius CB, erit quadratum ex HC quadrati ex CB quadruplum. sed quadratum ex BH est æquale duobus quadratis quæ fiunt ex HC CB. quadratum igitur ex BH quintuplũ est quadrati ex CB; idcoque BH ipsi BA est æqualis. ergo ex ijs, quæ demonstrata sunt in vndecima secundi libri recta linea CH extrema, ac media ratione secatur in B, & CE est maior portio. est autem CH ipsi CD æqualis, & CE æqualis ipsi CA. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, &c. reliqua. quod oportebat demonstrare.



THEO-

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio minor assumens dimidiam maioris portionis quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati.



Recta.n. linea quędã AB extrema, ac media ratione secetur in C; sitq; AC maior portio, & secetur bifariam in D. dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. describatur enim ex AB quadratum AE, & figura cõpleatur. Quoniã igitur AC dupla est CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum, hoc est quadratũ RS quadrati FG. & quoniã rectangulum, quod AB BC continetur est æquale quadrato ex AC, atq; est rectangulum quidem contentum AB BC ipsum CE; quadratum vero ex AC est RS; erit rectangulum CE quadrato RS æquale. quadruplum autem est quadratum RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quadrati FG quadruplum est. rursus quoniã AD æqualis est DC, erit & HK ipsi KF æqualis. ideoq; quadratum GF est æquale quadrato HL. æqualis igitur est GK ipsi KL, hoc est MN ipsi NE. ergo & parallelogrammum MF parallelogrammo FE est æquale. sed MF est æquale CG. quare & CG ipsi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP est æqualis parallelogrammo CE. ostensum autem est CE quadruplũ GF quadrati. & gnomon igitur XOP ipsius GF quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplum est ipsius GF. est autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB GF vero, quod ex DC. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC est quintuplum, Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C; & sit AC maior portio, cuius dimidia CD. dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. quoniã enim quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; quadratum autem ex BD est quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC. ergo quod AB BC continetur vnà cum quadrato ex DC quintuplum est quadrati ex DC: & diuidendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum est. ei vero, quod continetur AB BC est æquale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione secta est in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum est. quod quidem ita se habet est enim AC ipsius CD dupla.



6. secundi.

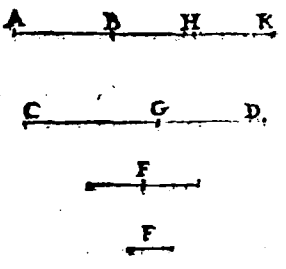
Compositio.

Quoniam dupla est AC ipsius CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplũ. sed quadratũ ex AC est æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum est quadrati ex CD: & cõponẽdo quod continetur AB BC vnã cũ quadrato ex CD, quod quidẽ est quadratũ ex BD, quintuplũ est quadrati, quod fit ex DC. atq; hoc est quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis, & alia constare possumus.

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.



Sit minor portio AB: & exponantur rectę lineę CD E; sitq; CD ipsius E quintupla: & inter CD E media proportionalis sumatur F, & alia constituantur, quemadmodum superius dictum est in propositione secunda earum, quas nos ad primam huius apposuimus: similiter demonstrabitur quadratū ex AH quadrati ex HB quintuplum esse. atque est AB minor portio rectę lineę, quæ extrema, ac media ratione secatur. ergo BH est maioris portionis dimidia, & eius dupla BK portio maior. tota igitur linea est AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

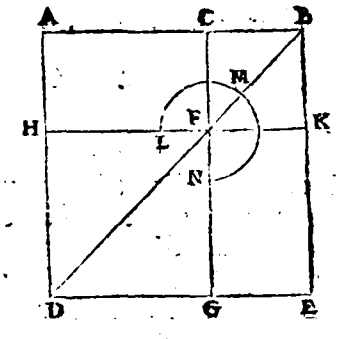
Patet igitur data minori portione rectæ lineæ, quę extrema ac media ratione secatur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim minor portio AB 4, & sit CD 5, & E 1. similiter, vt supra eodem in loco, demonstrabimus, maiorem portionem esse R 20 *plus* 2 *quare tota recta linea erit* 6 *plus* R 20.

THEOREMA IV. PROPO. IV.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, totius & minoris portionis vtraq; quadrata tripla sunt quadrati eius, quod à maiori fit portione.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla esse. Describatur.n.ex AB quadratum ADEB, & figura compleatur. itaq; quoniã AB extrema, ac media ratione secta est in C, & maior portio est AC; erit rectangulum contentum AB BC quadrato ex AC æquale. atq; est rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG est quod fit ex AC. aequale igitur est AK ipsi HG. & quoniã rectangulum AF est aequale FE, commune apponatur CK, erit totum AK toti CE aequale. ergo rectangula CE AK ipsius AK sunt dupla. sed rectangula AK CE sunt gnomon LMN, & quadratum CK. gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla sunt ipsius AK. rectangulum autẽ AK ostensum est aequale quadrato HG. ergo gnomon LMN, & quadratum CK, ipsius HG sunt dupla; ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla sunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG sunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quę quidem sunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH est quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla. quod demonstrare oportebat.



SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio:

Recta enim linea AB extrema, ac media rõne secetur in C, & sit AC maior portio

portio. dico quadrata ex AB BC tripla esse quadrati ex AC. Quoniã enim quadrata ex AB BC tripla sunt quadrati ex AC; suntq; quadrata ex AB BC æqualia rectangulo, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC: erit rectãgulum, quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & dividendo quod bis continetur AB BC duplum quadrati ex AC. ergo quod semel AB BC continetur quadrato ex AC est æquale. quod quidem ita se habet, recta enim linea AB extrema, ac media ratione secta est in puncto C.



30. sexti

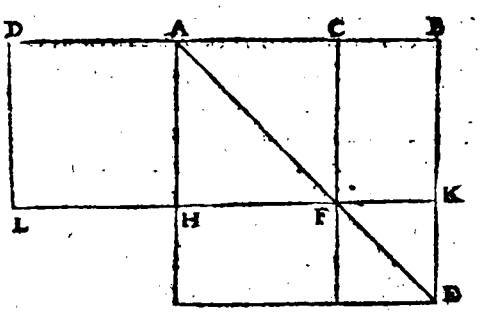
A

Compositio.

Itaq; quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, atq; est AC maior portio; erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC æquale. ergo quod bis continetur AB BC duplũ est quadrati ex AC: & componendo quod bis continetur AB BC vnà cũ quadrato ex AC triplũ est quadrati ex AC. sed quod bis AB BC cõtinetur vnà cum quadrato ex AC est æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciatuq; ipsi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.



Recta.n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC portio maior: ponaturq; ipsi CA æqualis AD. dico rectamlineam DB extrema, ac media ratione secari in puncto A: & maiorẽ portionem esse AB, quæ à principio posita est. describatur enim ex AB quadratum AE, & figura cõpleatur. quoniam igitur AB extrema, ac media ratione secta est in C. erit rectangulum quod cõtinetur AB BC quadrato ex AC æquale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC est CE: quadratum vero ex AC est CH. ergo EC ipsi CH est æquale. sed CE est æquale EH, & CH ipsi HD. quare & DH ipsi HE æquale erit cõmune apponatur HB totum igitur DK toti AE est æquale. atq; est DK quidem, quod BD DA continetur; est enim AD æqualis DL: quadratum autem AE est quod fit ex AB. ergo quod BD DA cõtinetur est æquale quadrato ex AB. & ob id vt DB ad BA, ita est BA ad Ad. sed BD est maior, quam BA. maior igitur est BA quã AD. ergo DB extrema, ac media ratione secta est in A, & AB est maior portio. quod demõstrare oportebat.

14. sexti

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta.n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit maior portio AC; pona-

C:ponaturq; AD ipſi AC æqualis Dico DB extrema ac media ratione ſecari in puncto A: & BA maiorem eſſe portionem. Quoniã enim



DB extrema,ac media ratione ſecta eſt in A,& maior portio eſt AB; erit vt DB ad BA,ita BA ad AD. æqualis autem eſt DA ipſi AC. vt igitur DB ad BA, ita BA ad AC:& per conuerſionem rationis vt BD ad DA,ita AB ad BC. quare diuidendo vt BA ad AD,ita AC ad CB.æqualis autem eſt DA ipſi AC. eſt igitur vt BA ad AC,ita AC ad CB. quod quidem ita ſe habet,etenim AB extrema, ac media ratione ſecatur in C puncto.

Compoſitio.

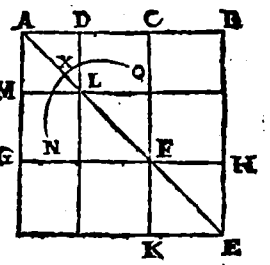
Itaq; quoniam AB extrema,ac media ratione ſecatur in C,erit vt BA ad AC ita AC ad CB. aequalis autem eſt CA ipſi AD.ergo vt BA ad AD,ita AC ad CB: componendoq; vt BD ad DA,ita AB ad BC;& per conuerſionem rationis vt DB ad BA,ita BA ad AC. atq; eſt CA aequalis AD. eſt igitur vt DB ad BA,ita BA ad AD. quare DB extrema,ac media ratione ſecatur in puncto A, & BA eſt portio maior.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed non inutile viſum eſt hoc loco demonſtrare theorema aliud quo vtitur Pappus in quinto libro,quamquam eius demonſtrationem nullam afferat.

Si recta linea extrema,ac media ratione ſecetur, abſcindatur; à maiori portione linea, quae minori ſit aequalis; erit etiam ea extrema,ac media ratione ſecta: & maior portio erit quae abſciſſa eſt recta linea.

Sit recta linea AB, quę extrema,ac media ratione ſecetur in C, ſitque AC maior portio: & ab ipſa AC abſcindatur CD, quę ipſi CB ſit æqualis. Dico AC extrema, & media ratione ſecari in D: & CD maiorem eſſe portionem. fiat enim ex AB quadratum AE: & iunctæ AE ducantur per CD rectæ lineæ FK DL ipſi BE parallelæ, quæ diametrum AE ſecent in punctis FL: & per FL ducantur GFH ML parallelæ ipſi AB. Itaque quoniam AB extrema,ac media ratione ſecatur in C; rectangulũ, quod AB, BC continetur, hoc eſt rectangulum CE eſt æquale quadrato AF. ſed ipſi CE æquale eſt rectangulum GE etenim ſuplementa CH GK inter ſe æqualia. ſunt: & quadratum FE eſt commune vtrique. ergo rectangulum GE quadrato AF eſt æquale. ſi igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum: & à quadrato AF auferatur quadratum LF, quod quidem eſt æquale quadrato FE, cum DE CB ſint æquales, reliquum GK rectangulum, hoc eſt rectangulum MF, hoc eſt ipſum DF gnomoni NXO æquale erit, à quibus ſublato communi LC, erit reliquum DG rectangulum æquale quadrata LF. at rectangulum quidem DG eſt quod CA AD continetur: quadratum vero LF eſt quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD, ita CD ad DA. ſed AC maior eſt



14. ſexti. *quam CD. ergo & CD quam DA maior erit. recta igitur linea AC extrema, ac media ratione ſecta eſt in D, & maior eius portio eſt CD, quod demonſtrare oportebat.*

THEOREMA VI. PROPO. VI.

Si recta linea rationalis extrema,ac media ratione ſecta fuerit, vtraq; portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur.

Sit recta linea rationalis AB; & ſecetur extrema,ac media ratione in C ſitque AC maior portio. Dico vtram que portionem AC CB irrationalem



eſſe.

esse, quæ apotome appellatur. producatur enim BA in D, & sit ipsius BA dimidia AD. Itaq; quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione secatur in C, & maiori portioni CA adijcitur AD, quæ est ipsius AB dimidia; erit quadratũ ex CD quadrati ex DA quintuplum. quadratum igitur ex CD ad quadratũ ex DA proportionem habet, quam numerus ad numerum; ideoq; quadratum ex CD commensurabile est quadrato ex DA. rationale autem est quadratum ex DA; etenim DA est rationalis, cum sit ipsius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD est rationale; ac propterea ipsa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea CD ipsi DA incommensurabilis est longitudine. quare CD DA rationales sunt potentia solum commẽsurabiles; & idcirco AC apotome est. Rursus quoniã AB extrema, ac media ratione secta est, & maior portio est AC; erit ABC rectangulum æquale quadrato ex AC. quod igitur fit ex apotoma AC ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC. sed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinẽ facit apotomen primam. ergo BC est apotome prima. ostensa est autem, & AC apotome. si igitur recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. atque illud est. Quod demonstrare oportebat.

Ex 1. huius.

6. decimi.

6. diffin. decimi.

9. decimi. 74. decimi.

98. decimi.

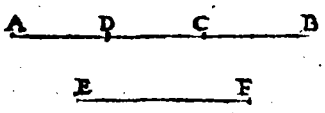
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc nos supra etiam aliter demonstrauimus. sed & alia ab his non abhorrentia demonstrare aggrediemur, quę eiusmodi sunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac mediæ ratione sectæ fit rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis, erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit maior portio AC rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis. Dico minorem portionem CB esse apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam. Diuidatur enim AC bifariam in D. & quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, & minori portioni BC adijcitur CD quę est dimidia portionis maioris; quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC



1. huius.

ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum, atq; ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum ex DC, quod ipsa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD est rationale, & ipsa BD rationalis. cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi DC incommensurabilis erit longitudine. quare BD DC rationales sunt potentia solum commensurabiles; ideoq; CB apotome est. dico & quintam esse. sit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex BD superat, quadratũ ex DC. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. & cum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi EF longitudine est incõmensurabilis. quare BD plus potest, quã DC quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine. atq; est DC longitudine cõmensurabilis expositę rationali AC. ergo CB est apotome quinta. rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; & AC est maior portio, erit rectangulum ABC æquale quadrato ex AC. quadratum igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB sed quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinẽ facit eã, quę ex binis nominibus; & eundẽ ordinem habet, quam ipsa apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus est quinta. si igitur maior portio rectæ lineę extrema, ac mediæ ratione sectæ sit rationalis, expositę rationali longitudine commensurabilis

6 decimi. 6 diffin. decimi.

9 decimi.

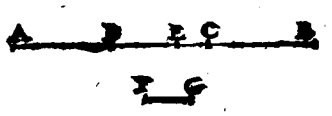
9 decimi.

5 dif. tertiarum.

mensurabilis, erit maior portio apotomæ quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

Si minor portio rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ fuerit rationalis, expositaeq; rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.



Sit recta linea AB, quæ extrema. ac media ratione secetur in C, & sit minor portio CB rationalis, expositæq; rationali longitudine commensurabilis. Dico maiorem portionem AC esse ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. secetur enim AC bifariam in D. Eadem ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. itaque secetur DC in E, ita vt DE ad EC eandem proportionem habeat, quam ED ad DC. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipsi commensurabile. & quoniam est vt tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad

19.quinti. *reliquam ED, vt BD ad DC, hoc est vt DE ad EC. ergo cum tres rectæ lineæ proportionales sint*

cor.20.sex. *BE ED EC; erit BE ad EC, vt quadratum ex BE ad quadratum ex ED. sed quadratum ex BE quintuplum est quadrati ex ED: est enim BE ad ED, vt BD ad DC. quare BE ipsius EC quintu-*

6.dif.decim *pla est; & idcirco BC est quadrupla ipsius CE; estque BC rationalis. ergo & rationalis CE, & ipsi CB longitudine commensurabilis. & quoniam quadratum ex DE commensurabile est qua-*

9.dif.decim *drato ex EC, atque est quadratum ex EC rationale; erit etiam rationale quadratum ex DE, ipsaq; DE rationalis. quod cum quadratum ex DE ad quadratum ex EC proportionem non habeat, quæ*

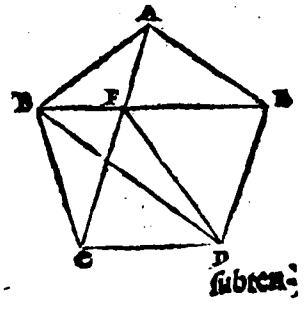
9.decimi. *quadratus numerus ad quadratum numerum: erit DE ipsi EC incommensurabilis longitudine.*

37.decimi. *Sunt igitur DE EC rationales, & inter se potentia solum commensurabiles; & ob id DC ex bi-*

9.decimi. *nis nominibus est cuius maius nomen DE. Dico & quintam esse. fit enim quadratum ex FG, quo quadratum ex DE superat quadratum ex EC. habebit quadratum ex DE ad quadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo FG ipsi DE longitudine est incommensurabilis. itaq; quoniam DE plus potest quam EC quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: estq; EC expositæ rationali CB longitudine commensurabilis: erit DC ex bis nominibus quinta. est autem AC ipsius CD dupla. ergo & AE est quinta ex binis nominibus. rectæ enim lineæ commensurabilis ei, quæ est ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC sit æquale rectangulo ABC, si ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipsam AB. ergo AB ex binis nominibus est prima. quadratum namque eius, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. si igitur minor portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis expositæ rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta; & tota ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni æquilateri tres anguli siue continuati, siue non continuati fuerint æquales, æquiangulum erit pentagonum.



Pentagoni enim æquilateri ABCDE tres anguli primum cõtinuati, qui ad puncta ABC æquales inter se sint. Dico pẽtagonum ABCDE æquianguli esse. iungantur. n. AC BE FD. & quoniã duæ CB BA duabus BA AE æquales sunt, altera alteri, &

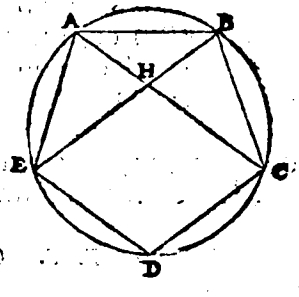
4.primi. angulus CBA est æqualis angulo BAE, erit basis AC æqualis basi BE, & triangulum ABC triangulo ABE æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera

subten-

ſubtenduntur. angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo CAB, quare & latus AF eſt æquale lateri BF. oſtenſa autem eſt & tota AC toti FE æqualis. ergo & reliqua FC eſt æqualis reliquæ FE. atq; eſt CD æqualis DF, duæ igitur FC CD duabus FE ED æquales ſunt, & baſis ipſorum eſt communis FD. quare angulus FCD angulo FED eſt æqualis. oſtenſus autem eſt, & angulus BCA æqualis angulo AEB. totus igitur BCD æqualis eſt toti AED. ſed angulus BCD poſitus eſt æqualis angulis, qui ſunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis, qui ſunt ad AB æqualis erit. ſimiliter demonſtrabimus & angulum CDE angulis, qui ſunt ad AB eſſe æqualem. æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonum, ſed non ſint anguli continuati ſibi ipſis æquale, ſed qui ſunt ad puncta ACD. Dico & ſic æquiangulum eſſe ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ BA AE duabus BC CD æquales ſunt, & angulos æquales continent; erit baſis BE æqualis baſi BD, & ABE triangulum triangulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. æqualis igitur eſt angulus AEB angulo CDB. eſt autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniã & latus BE eſt æquale lateri BD. totus igitur angulus AED toti CDE eſt æqualis. Sed angulus CDE angulis, qui ſunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis, qui ſunt ad AC eſt æqualis. Eadẽ rõne & angulus ABC æqualis eſt angulis, qui ſunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur eſt ABCDE pentagonum. Quod demonſtrare oportebat. 8. primi.

THEOREMA VIII. PROPO. VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos ſubtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione ſe mutuo ſecant, & maiores ipſarum portiones pentagoni lateri ſunt æquales.

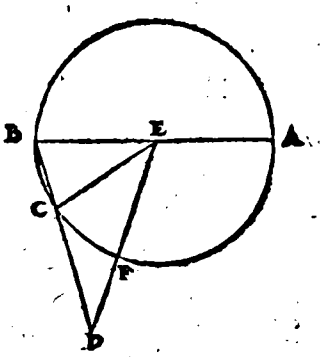


Pentagoni enim æquilateri, & æquiãguli ABCDE duos continuatos angulos, qui ſunt ad puncta AB ſubtendant rectæ lineæ AC BE, quæ ſeſe in puncto H ſecent. Dico vtramq; ipſarum extrema, ac media ratione ſecari in puncto H: & maiores earum portiones pentagoni lateri æquales eſſe. deſcribatur enim circa ABCDE pentagonum circulus ABCDE. & quoniam duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC æquales ſunt, & angulos æquales continent; erit baſis BE baſi AC æqualis & ABE triangulũ æquale triangulo ABC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. æqualis igitur eſt BAC angulus angulo ABE. ergo AHE angulus angulo BAH eſt duplus. etenim extra triangulum eſt ABH. eſt autem & angulus EAC duplus anguli BAC, quòd & circumferentia EDC circumferentiæ CB eſt dupla. ergo HAE angulus æqualis eſt angulo AHE; & ob id recta linea HE eſt æqualis ipſi EA, hoc eſt ipſi AB. Et quoniam BA eſt æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB æqualis. ſed angulus ABE oſtenſus eſt æqualis angulo BAH. ergo & BEA angulus æqualis eſt angulo BAH. & communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE, & triangulo ABH eſt angulus ABE. reliquus igitur BAE reliquo AHB eſt æqualis. ergo triangulum ABE æquiangulum eſt triangulo ABH; ideoque vt EB ad BA, ita eſt AB ad BH; æqualis autem eſt BA ipſi EH. vt igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed BE maior eſt quàm EH. ergo & EH quàm HB eſt maior. recta igitur linea BE extrema, ac media ratione ſecta eſt in H, & maior portio HE pentagoni lateri eſt æqualis, 4. primi 32. primi 33. ſexti. 6. primi. 21. tertij.

aequalis. similiter demonstrabimus, & AC extrema, ac media ratione secari in H, & maiorem eius portionem CH pentagoni lateri aequalem esse. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si exagoni & decagoni latera in circulo descripta componãtur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus.



Sit circulus ABC, & descriptis in dicto circulo figuris, sit decagoni quidem latus BC, hexagoni vero CD, & in directum sibi ipsis constituantur. dico totam rectã lineam BD extrema, ac media ratione secari in C, & maiorem eius portionem esse CD. sumatur enim centrum circuli, quod sit E; iungantur; EB EC ED, & BE ad A producatur. quoniam igitur decagoni aequilateri latus est BC, erit ACB circumferentia circumfentiae BC quintupla; & ob id circumferentia AC. quadrupla est circumferentiae CB. vt autem circumferentia AC ad ipsam CB, ita AEC angulus ad angulum CEB. angulus igitur AEC anguli CEB quadruplus est. & quoniã EBC angulus est aequalis angulo ECB, erit angulus AEC, anguli ECB duplus. est autem recta linea EC æqualis ipsi CD; vtraq; enim est æqualis lateri hexagoni, quod in circulo ABC describitur. quare & angulus CED æqualis est angulo CDE. est igitur angulus ECB anguli EDC duplus. sed & angulus AEC duplus ostensus est anguli ECB. angulus igitur AEC anguli EDC est quadruplus. ostensus autẽ est & angulus AEC quadruplus anguli BEC. ergo EDC angulus ãgulo BEC æqualis erit. atq; est angulus EBD communis duobus triangulis BEC BED. & reliquus igitur BED reliquo ECB est æqualis. ideoq; triangulum EBD triangulo EBC æquiangulum. ergo vt DB ad BE, ita EB ad BC. æqualis autem est EB ipsi CD. vt igitur BD ad DC, ita DC ad CB. atq; est BD maior quam DC. ergo & DC quam CB est maior; ac propterea recta linea BD extrema, ac media ratione secta est in C, & CD est maior ipsius portio. Quod demonstrare oportebat.

Vlt. sexti.
5. primi. 32. primi
5. primi. 32. primi
32. primi. 4. sexti

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis & alia demonstrare licet, nempe hęc.

PROPOSITIO I.

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus.



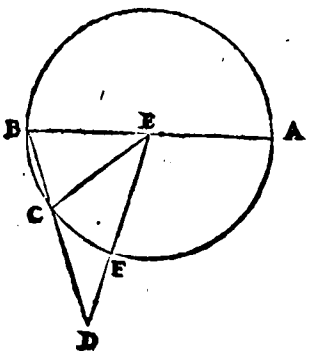
Sit recta linea AB, quę secetur in C, ita vt AC sit hexagoni latus, & CB latus decagoni in eodem circulo descripti. ergo AB extrema, ac media ratione secatur in C: atq; est AC maior portio abscindatur ab AC linea CD æqualis. erit AC quoq; extrema, ac media ratione secta in D atq; erit CD portio maior ex iis. quæ à nobis demonstrata sunt ad quintam huius. est autem AC hexagoni latus, & CD latus decagoni. si igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonstrare oportebat.

Ex anteced.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta.



Maneant enim eadem, quæ supra; & sit diameter AB rationalis. Dico decagoni latus BC esse apotomen quintam. Quoniam enim diameter AB est rationalis, erit quoque eius dimidia EC, hoc est CD rationalis. atq. est DC maior portio rectae lineæ DB extrema, ac media ratione sectæ, & CB minor portio eiusdem. Quando autem maior portio rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secatur sit rationalis, minor portio est apotome quinta. quod à nobis supra demonstratum fuit ergo latus decagoni BC est apotome quinta. Quod oportebat demonstrare.

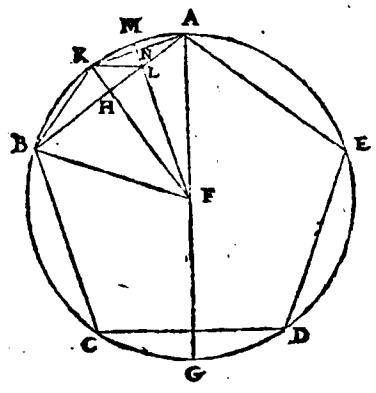
PROPOSITIO III.

Si latus decagoni æquilateri in circulo descripti, sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

Iisdem enim manentibus sit latus decagoni BC rationale. Dico diametrum AB esse ex binis nominibus, quintam. Quoniam enim BC, videlicet minor portio rectae linae extrema, ac media ratione sectæ est rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonstratum est; ipsius autem CD dupla est AB; & quæ longitudine commensurabilis est ei, quae ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atq; ordine eadem ex 67. decimi libri. ergo & AB ex binis nominibus est quinta. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni potest, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.



Sit circulus ABCDE, & in ipso pentagonum aequilaterum ABCDE describatur. Dico pentagoni ABCDE latus posse latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorū. Sumatur.n. centrum circuli F, iunctaq, AF ad G producatur, & iūgatur FB; deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH, & ad X producatur; iunganturq; AK KB. & rursus à puncto F ad AK perpendicularis agatur FB, & producatur ad M, & KN iungatur. Quoniā igitur circumferentia ABCG est aequalis circumferētiae AEDG, quarū ABC aequalis est ipsi AED, erit reliqua CG reliquae GD aequalis Sed CD est pentagoni. ergo CG decagoni erit, quòd cum AF sit aequalis FB & FH perpēdicularis, erit & āgulus AFK aequalis āgulo KFB. quare & circūferētia AK circūferētiae KB est aequalis. dupla igitur est circūferētia AB circūferētiae BK; & ob id recta linea AK est decagoni latus Eadē rōne & AK est dupla KM. & q̄m circūferētia AB dupla est circūferētiae BK, aequalis aūt CD circūferētia circūferētiae AB erit circūferētia CD circūferētiae BK dupla. estq; DC dupla ipsius CG. ergo CG est aequalis BK, sed BK ipsius KM est dupla, quoniā &

AK.& CG igitur ipſius KM dupla erit.eſt autem & CB circumferentia circumferentiae BK dupla:etenim CB eſt aequalis BA. ergo & tota GB dupla eſt ipſius BM, & angulus GFB anguli BFM duplus.ſed & angulus GFB eſt duplus anguli FAB;quandoquidem FAB angulus æqualis eſt angulo ABF. ergo & angulus BFN angulo FAB eſt aequalis. communis autem duobus triangulis ABF BFN eſt KBF angulus. reliquus igitur AFB eſt aequalis reliquo BNF,& triangulum ABF triangulo BFN aequiangulum. ergo vt AB ad BF,ita FB ad BN. rectangulum igitur ABN eſt aequale quadrato ex FB. Rurſus qm̃ AL eſt aequalis LK,cōis autem,& ad rectos angulos LN;erit baſis KN aequalis baſi NA.ergo & angulus LKN angulo LAN eſt aequalis. ſed angulus LAN eſt aequalis angulo KBN.& angulus igitur LKN eſt aequalis angulo KBN. angulus autem NAK eſt cōis duobus triangulis AKB.& AKN.ergo reliquus AkB reliquo KNA eſt aeqalis,& triangulum KAB triangulo KNA aequiangulum. vt igitur BA ad AK,ita KA ad AN;ac propterea rectangulū BAN eſt aequale quadrato ex AK. oſtēſum eſt autem & rectangulum ABN quadrato ex BF aequale. rectangulum igitur ABN vnà cum rectangulo BAN, quod eſt quadratū ex AB eſt aequale quadrato ex BF vnà cum quadrato ex AK. atq; eſt AB quidem pentagoni latus,BF vero latus hexagoni,& AK decagoni.ergo pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Quod demonſtrare oportebat.

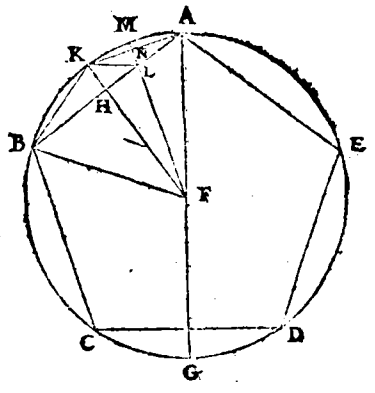
vltime ſexti 32.primi, ea 20,tertij.

4.ſexti 27.ſexti

4.primi. 5.primi

4.ſexti 27.ſexti.

2.ſecundi.



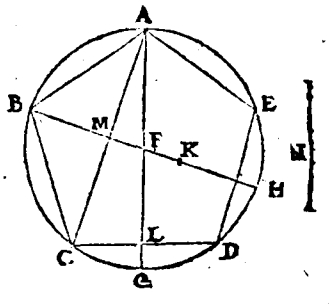
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur,pentagoni latus eſt linea irrationalis,quæ minor appellatur.

In circulo.n. ABCDE rōnalem diametrū habente pentagonū æquilaterū deſcribatur ABCDE. dico pentagoni ABCDE latus irrationalē eſſe lineam,quæ minor appellatur.ſumatur.n. circuli centrum F;& iunctæ AF BF ad puncta GH producantur,& iungatur AC;ponaturque FK ipſius AF pars quarta.rationalis autem eſt AF.ergo & FK eſt rationalis.ſed & rationalis BF. tota igitur BK rationalis erit.& quoniam circūferentia ACG æqualis eſt circumferentiæ ADG,quarū ABC eſt æqualis ipſi AED,erit reliqua CG reliquæ GD æqualis. quod ſi iūgamus AG,fient anguli ad L recti,& DC dupla ipſius CL.Eadē rōne & āguli ad M recti ſunt,& AC dupla CM. Qm̃ igitur angulus ALC eſt æqualis angulo AMF, cōnis autem duobus triangulis ALC,& AMF eſt angulus LAC; reliquus ACL reliquo MFA æqualis erit;ideoq; triangulū ACL triangulo AMF æquiangulū. ergo vt LC ad CA,ita MF ad FA;& antecedentiū dupla. quare vt dupla ipſius LC ad CA,ita ipſius MF dupla ad FA.ſed vt ipſius MF dupla ad FA,ita ē MF ad dimidiā ipſius FA. & vt igitur dupla ipſius LC ad CA,ita MF ad ipſius FA dimidiā:& cōſequentiū dimidia. quare vt dupla LC ad dimidiā ipſius CA,ita MF ad quartā partem ipſius FA. atq; eſt ipſius quidem LC dupla CD;ipſius vero CA dimidia

6.diff.decimi.

4.ſexti.



dimidia CM: & ipſius FA quarta pars FK. eſt igitur vt DC ad CM, ita MF ad FK; & componendo vt vtraq; DCM ad CM, ita MK ad KF. ergo vt quadratum, C
quod fit ex vtraq; DCM ad quadratum ex CM ita quadratum ex MK ad id, q̄ fit ex KF quadratum. & quoniam recta linea, quæ duo pentagoni latera ſubtendit, vt AC extrema ac media ratione ſecta, maior portio eſt æqualis lateri pentagoni, hoc eſt ipſi DC; & maior portio aſſumẽs dimidium totius quintuplum poteſt eius, quod fit à totius dimidia; atq; eſt totius AC dimidia CM: erit quadratum ex DCM tanquam ex vna linea, quintuplum eius, quod fit ex CM. Vt autem quadratum ex DCM tanquam ex vna linea ad quadratum ex CM, ita oſtendimus eſſe quadratum ex MK ad quadratum ex KF. quintuplum igitur eſt quadratum ex MK quadrati ex KF: eſtq; quadratum ex KF rationale; quippe cũ diameter rationalis ſit. ergo & rationale eſt quadratum ex MK; & ipſa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex KF proportionem habet, quã numerus ad numerum. & quoniam EF quadrupla eſt ipſius FK, erit BK ipſius KF quintupla. & quadratum ex BK viginti quintuplum quadrati ex KF. quadratum autem ex MK quintuplum eſt quadrati ex KF. ergo quadratum ex BK quadrati ex KM eſt quintuplum; ac propterea ad illud proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi KM longitudine. atq; eſt vtraq; ipſarum rationalis. ergo BK KM rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, reliqua irrationalis eſt q̄ apotome appelatur. quare MB eſt apotome, & ipſi cõgruẽs MK. dico & quam eſſe. quo enim quadratũ ex BK ſuperat quadratũ ex KM, illi ſit æquale quadratum ex N. ergo BK plus poteſt, quam KM quadrato ex N. & q̄m commenſurabilis eſt KF ipſi FB, & componendo KB commenſurabilis ipſi BF, ſed & BF cõmenſurabilis ipſi BH longitudine, erit & KB ipſi BH commenſurabilis. q̄ cum quadratum ex BK quintuplum ſit quadrati ex KM, habebit quadratũ ex BK ad quadratum ex KM proportionem eam, quam habet quinq; ad vnum. ergo per cõuerſionem rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionẽ habet quam quinq; ad quattuor, & non eam, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. incommenſurabilis igitur eſt BK ipſi N. idcircoq; BK plus poteſt, q̄ KN quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis, itaq; quoniam tota BK plus poteſt, quam congruens MK, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis, & tota BK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali BH, erit MB apotome quarta. quod autem rationali, & apotome quarta continetur rectangulum irrationale eſt, & ipſum porens eſt irrationalis, quæ minor appellatur. ſed AB poteſt id, q̄ continetur HB BM, propterea quod iuncta AH triangulum ABH eſt æquiangulum triangulo ABM. atq; eſt vt HB ad BA, ita AB ad BM. ergo AB pentagoni latus eſt linea irrationalis, quæ minor appellatur. q̄ oportebat demõſtrare.

D E F G H K L M N O P Q R S T

F. C. COMMENTARIUS.

Quod ſi iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipſius CL) *Iunctis enim AC ALG, ſi etiam intelligatur iuncta AD, quoniam circumferentia CG eſt æqualis circumferentia GD, erit angulus CAG æqualis angulo GAD. duę igitur CA AL duabus DA AL æquales ſunt, & angulus CAL eſt æqualis angulo DAL. ergo & baſis CL baſi LD eſt æqualis, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. angulus igitur ALC eſt æqualis angulo ALD. & obid vterq; rectus eſt. & cum CL ſit æqualis LD, erit DC ipſius C L dupla.* A 3. tertij 4. primi dif. 10. primi

Et antecedẽtium dupla] *Quoniam n. eſt vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem dupla ipſius LC ad LC, ita dupla ipſius MF ad MF; erit ex æquali vt dupla ipſius LC ad CA, ita dupla ipſius MF ad FA.* B

Ergo vt quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM) *Ex 22. ſexti libri.* C D

Maior portio eſt æqualis lateri pentagoni, hoc eſt ipſi DC] *Ex 8. huius.* E

E Et maior portio assumens dimidiam totius quintuplum potest eius, quod fit à totius dimidia] *ex 1. huius.*

F Ergo & rationale est quadratum ex MK] *Rationali enim commensurabile, & ipsum rationale est ex nona diffinitione decimi libri.*

G Et ipsa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiusdem libri.*

H Et quadratum ex Bk vigintiquintuplum quadrati ex KF] *Ex 20. sexti libri. est enim 25. vt 5 ad 5. ad 1. quare 25. ad 1. proportionẽ duplã habet eius, quam 5. habet ad 1. ex 8. diffinitione quinti libri.*

K Ergo quadratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF sit vt 25. ad 1. quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF sit vt 5 ad 1; erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc est vt 5. ad 1.*

L Incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*

M Si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti reliqua irrationalis est, quæ apotome appellatur] *Ex 74. decimi libri.*

N Et quoniam commensurabilis est KF ipsi FB] *Intellige commensurabilis longitudine, quemadmodum & inferius; posita est enim KF quarta pars ipsius FA, hoc est ipsius FB.*

O Et componendo KB commensurabilis ipsi BF] *Ex 16. decimi.*

P Sed & BF commensurabilis ipsi BH longitudine] *Est enim BF ipsius BH dimidia.*

Q Erit & BK ipsi BH commensurabilis) *Ex 12. decimi.*

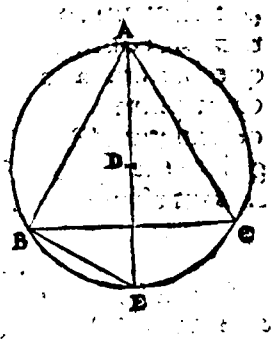
R Erit MB apotome quarta) *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*

S Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irrationale est & ipsum potẽs est irrationalis, quæ minor appellatur) *Ex 95. decimi.*

T Sed AB potest id, quod continetur HB BM) *Ex corollario 8. sexti, & 17. eiusdem.*

THEOREMA XII. PROPO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentia triplum est eius, quæ ex circuli centro.



Sit circulus ABC. & in ipso triangulum æquilaterum describatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplum esse eius, quæ est ex circuli ABC centro. sumatur enim circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E, & BE iungatur. Itaq; quoniã æquilaterum est ABC triãgulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE est sexta pars circuli circumferentiæ; ideoq; recta linea BE est latus hexagoni. & æqualis ipsi DE, quæ est ex circuli centro. & quoniam AE est dupla ipsius ED, erit quadratum ex AE quadrati ex ED. hoc est quadrati ex EB quadruplũ. Quadratum autem ex AE est æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla sunt quadrati ex BE & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum: atq; est BE æqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex DE. ergo trianguli latus est potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. Quod demonstrare oportebat.

Corolla. 15 quarti 20 sexti. 47 primi

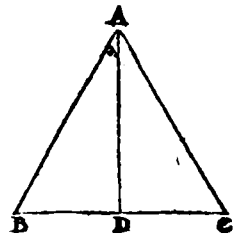
q^a angulus a b c est rectus q^a est in semicirculo.

F. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad basim perpendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4. ad 3.

Sit enim triangulum equilaterum ABC cuius basis BC bifariam secetur in D, & AD iũgatur. erit AD ad ipsam AC perpẽdicularis: sunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD DC

DC æqualia, & baſis AB eſt æqualis baſi AC. angulus igitur ADB eſt æqualis angulo ADC. & ideo vterque ipſorum rectus, & AD ad BC eſt perpendicularis. dico quadratum ex BA ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4. ad 3. Quoniam enim AB dupla eſt ipſius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadruplum: atque eſt quadratum ex AB æquale quadratis ex AD DB: quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quam 4. ad 3. quod oportebat demonſtrare.

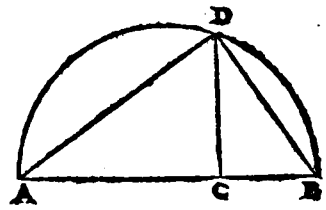


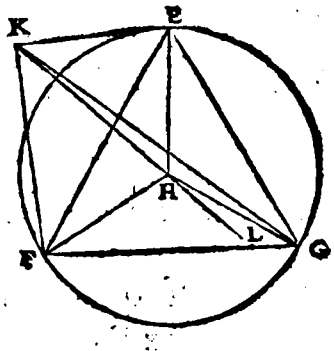
20 ſexti
47. primi

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem conſtituere, & ſphærę compræhendere data, ac demonſtrare ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis.

Exponatur enim datę ſphæræ diameter AB, & ſecetur in C, ita vt AC ipſius CB ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus ADB: & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DA iungatur: exponatur præterea circulus EFG æqualem habens eam, quæ ex centro ipſi DC, in quo deſcribatur triangulum aequilaterum EFG: ſumaturque centrum circuli H, & iungantur EH HF HG: atq; à puncto H ipſi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK ita vt HK ipſi AC ſit aequalis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta eſt ad planum circuli EFG, & ad omnes rectas lineas, quae in eodem circuli plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipſam vnaquæq; linearum HE HF HG. ergo HK ad vnamquamq; ipſarum HE HF HG eſt perpendicularis. & quoniam AC quidem eſt aequalis HK, CD vero ipſi HE, & rectos angulos continēt; erit baſis DA aequalis baſi KE. eadem ratione & vtraq; KF KG ipſi DA eſt æqualis. tres igitur KE KF KG inter ſe aequales ſunt. quod cū AC ſit dupla CB, erit AB ipſius BC tripla. vt autē AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, vt deinceps demonſtrabitur. triplum igitur eſt quadratū ex AD quadrati ex DC eſt autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum. atq; eſt DC æqualis EH. ergo & DA ipſi EF eſt æqualis. ſed AD oſtenſa eſt æqualis vnicuiq; ipſarū KE KF KG. & vnaquaeq; igitur ipſa rū EF FG GE vnicuiq; KE KF KG eſt aequalis. & ob id æquilatera ſūt quattuor triāgula EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur cōſtituta eſt ex quattuor triāgulis aequalib' & aequilateris, ucuis baſis quidē eſt triangulū EFG, vertex autem K punctū. itaq; oportet ipſam & ſphaera data cōprehēdere, & oſtēdere ſphęrę diametrū potētia ſeſquialterā eſſe lateris pyramidis. producatur. n. recta linea HL in directū ipſi HK; ponaturq; HL

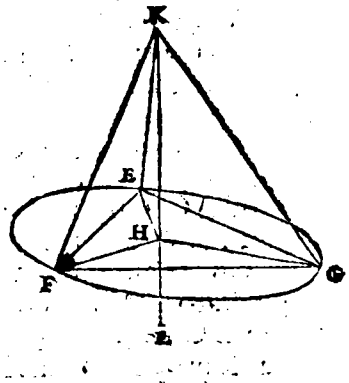




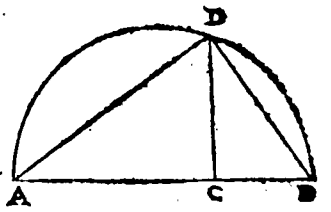
3. diffi. vndecimi

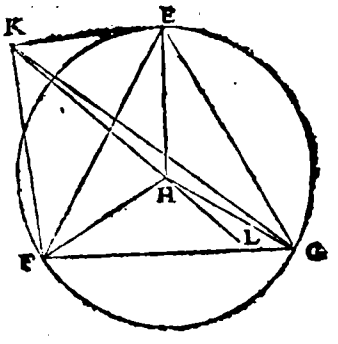
4. primi

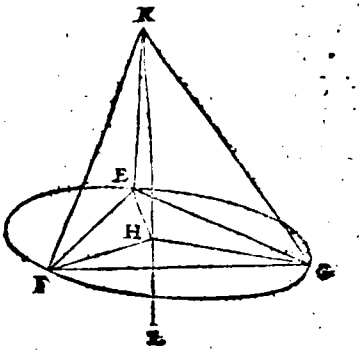
A
B
C



ipſi BC æqualis. & quoniam eſt vt AC ad CD, ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipſi KH, CD vero ipſi HE, & CB ipſi KL: erit vt K
17.ſexti. H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K HL eſt æquale quadrato ex EH. atq; eſt rectus vterq; angulorum KHE EHL. ergo in KL deſcriptus ſemicirculus, & per punctum E tranſibit. nam ſi coniũgamus EL, angulus LEK fiet
8.ſexti. rectus, cum triangulum ELK æquiãgulum ſit vnicuiq; triangulorũ ELH EKH. ſi igitur manente KL ſemicirculus cõuerſus in eundẽ rurſus locũ reſtituatur, à quo cœpit moueri, etiã per puncta FG tranſibit, iunctis FL LG; & rectis ſimiliter factis ad puncta FG angulis: atq; erit pyramis cõpræhenſa data ſphæra; etenim KL ſphæræ diameter eſt æqualis diametro datæ ſphæræ AB, quoniã ipſi quidẽ AC ponitur æqualis KH; ipſi vero CB æqualis HL. dico igitur ſphęrę diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris pyramidis. quoniam enim AC dupla eſt ipſius CB, erit AB ipſius BC tripla. ergo per conuerſionem rationis BA ſeſquialtera eſt ipſius AC. vt autẽ BA ad AC, ita eſt quadratum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam iũcta BD, eſt vt BA ad AD, ita DA ad AC ob ſimilitudinem triangulorum DAB DAC, &
Cor.8.ſexti quod vt prima ad tertiam, ita quadratum ex
Cor.20.ſex prima ad quadratũ ex ſecunda. ergo quadratum ex BA ſeſquialterum ex quadrati ex AD atq; eſt BA quidem datæ ſphęrę diamerer, AD vero æqualis lateri pyramidis. ſphæręę igitur diameter ſeſquialtera eſt lateris pyramidis. Quod demonſtrare oportebat.

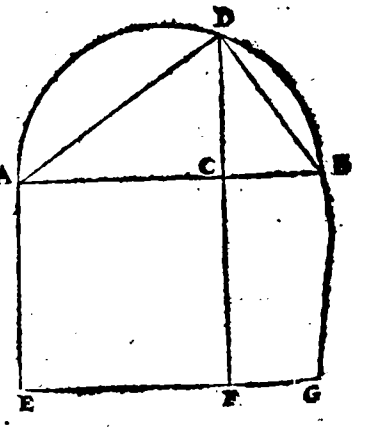






Itaq; demonſtrandum eſt vt AB ad BC, ita eſſe quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur .n. ſemicirculi figura; iũgaturq; DB: & ex AC deſcribatur quadratum EC, &
Cor.8.ſexti parallelogrammum FB compleatur. Quoniam
17.ſexti, igitur eſt vt BA ad AD, ita DA ad AC, propte-
1.ſexti. rea quod triangulum DAB æquiangulum eſt triãgulo DAC; erit rectangulũ contentũ BAC quadrato ex AD æquale. & quoniã eſt vt AB ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelogrãmum BF; atq; eſt parallelogrammum quidem EB, quod continetur BA AC. eſt enim EA æqualis AC; parallelogrammum vero BF æquale eſt ei, quod AC CB continetur: erit vt AB ad BC, ita rectangulũ contentum BA AC ad cõtentũ AC CB. eſt autem contentum BA AC
17.ſexti. æquale quadrato ex AD: & contentum AC CB
Cor.8.ſexti quadrato ex DC, æquale: perpendicularis .n. DC media eſt proportionalis inter baſis portio



nes AC CB, cum angulus ADB sit rectus. ex quibus sequitur vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC.] *Quod deinceps demonstrabitur, videlicet ad finem huius, sed in scholio aliter demonstratur. hoc modo.* A

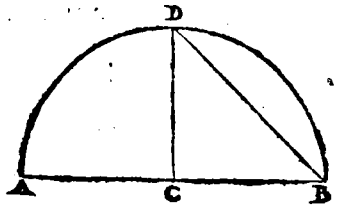
Quoniam enim est vt BA ad AC, ita quadratum ex DA ad quadratum ex AC, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC.] *Nam tres rectæ lineæ BA AD AC deinceps proportionales sunt ex corollario 8. sexti, & quadratum ex AD superat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47. primi:*

Est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum.] *Ex antecedente.* B

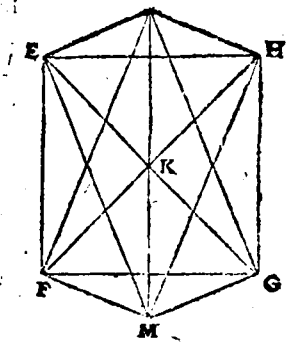
Ergo & DA ipsi EF est æqualis.] *Quoniã .n. quadratũ ex AD triplũ est quadrati ex BC,* C *& quadratum DC ex FE triplum quadrati ex EH; estq; quadratum ex DC æquale quadrato ex EH, quod DC ipsi EH sit æqualis: erit quadratum ex AD æquale quadrato ex EF: ideoq; AD ipsi EF æqualis.*

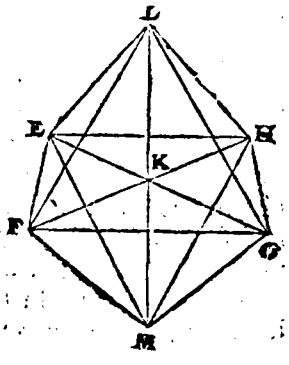
PROBLEMA II. PROPOSITIO XIV.

Octaedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua pyramidé: demonstrareq; sphæræ diametrum potétia duplam esse lateris octaedri.



Exponatur datæ sphæræ diameter AB: & in C bifariã secetur; describaturq; in AB, semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD: & DB iungatur. exponatur præterea quadratum EFGH habens vnumquodq; latus æquale ipsi BD: & iũctis HF EG, erigatur à puncto K ipsi EF GH quadrati plano ad rectos angulos K L; producaturq; ad alteras partes plani, vt KM: & auferatur ab vtraq; rectarum linearum KL KM vni ipsarũ KE KF KG KH æqualis vtraq; KL XM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG MH. quoniam igitur KE est æqualis KH, atq; est rectus angulus EKH; erit quadratum ex HE quadrati ex EK duplum: rursus quoniã LK est aequalis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. ostensum est autem, & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale est quadrato ex EH, & LE ipsi EH æqualis. eadem ratione & LH est æqualis HE. æquilaterum igitur est LEH triangulũ similiter ostendemus, & vnumquodq; reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EFGH, vertices autem LM puncta, aequilaterũ esse. octaedrũ igitur cõstitutũ est, quod octo triãgulis æquilateris continetur. itaq; oportet ipsum & data sphæra comprehendere; demonstrareq; sphearae diametrũ potentia duplam esse lateris octaedri. quoniam enim tres rectae lineae LK KM KE inter se aequales sunt, semicirculus in LM descriptus, & per punctũ E transibit, & ob eandem causam si manente LM conuersus semicirculus in eundem locũ restituatur, à quo cœpit

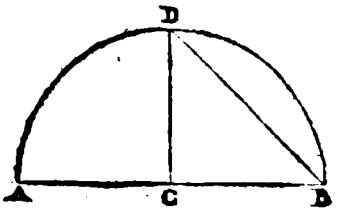




mouerí

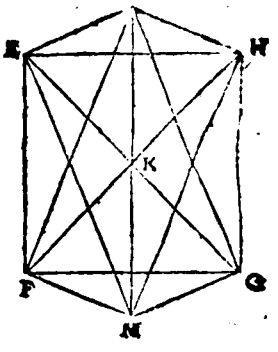
74. primi,

moueri, tranſibit etiam per puncta FGH: atq; erit octaedrum ſphæra cõpræhẽſum. dico etiam comprehenſum eſſe data ſphæra. quoniam .n. LK eſt æqualis KM, cõmunis autem KE, & angulos æquales continent; erit baſis LE baſi EM æqualis. & quoniam rectus eſt LEM angulus, in ſemi



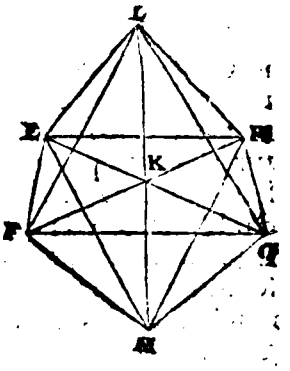
47. primi. circulo .n. erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rurſus quoniam AC eſt

Cor. 8. & 20 ſexti æqualis CB, erit AB dupla ipſius BC. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur eſt quadratum ex AB quadrari ex BD; oſtenſum eſt autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplũ. arq, eſt quadratum ex BD æquale quadrato ex LE; poſita eſt enim EH ipſi DB æqualis. ergo quadratum ex AB eſt æquale quadrato ex LM; ac propterea ipſa AB eſt æqualis LM. eſt autem AB diameter datæ ſphæræ quare LM eſt æqualis datæ ſphærę diametro. octaedrum igitur comphænſum eſt data ſphaera: & ſimul demonſtratum eſt ſphaerae diametrum lateris octaedri potentia duplam eſſe.

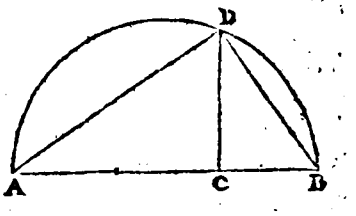


PROBLEMA III. PROPOSITIO XV.

Cubum conſtituere, & ſphæra compræhendere, qua & priores, demonſtrareque ſphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam eſſe.



Exponatur enim datæ ſphæræ diameter AB: & ſecetur in C, ita vt AC ipſius CB ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus ADB. & à puncto C ipſi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iungatur. deinde exponatur quadratũ EFGH, habens vnumquodq; latus æquale ipſi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab vnaquaq; rectarum linearum EK FL GM HN vni ipſarum EF FG GH HE æqualis vnaqueq; EK FL GM HN: & KL LM MN NK iungantur. cubus igitur cõſtitutus eſt FN, qui ſex quadratis æqualibus continetur. Itaq; oportet ipſum & ſphæra data compræhendere, demonſtrareq; ſphæræ diametrum dotentia triplam eſſe lateris cubi. iungantur enim KG EG. & quoniam rectus eſt KEG angulus, propterea quod, & KE perpendicularis ſit ad EG



8. diffi. vnde cimi. planum videlicet, & ad rectam lineam EG: ſemicirculus in KG deſcriptus & per punctum E tranſibit. Rurſus quoniam FG perpendicularis ad vtramq; ipſarum FL FE, & ad FK planum eſt perpendicularis. quare ſi iungamus FK ipſa FG & ad FK perpendicularis erit; ac propterea rurſus in KG deſcriptus ſemicirculus tranſibit, & per punctum F. ſimiliter autem, & per reliqua cubi puncta tranſibit. ſi igitur manente KG conuerſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur, à quo cæpit moueri, erit cubus ſphæ-

4. vndecimi

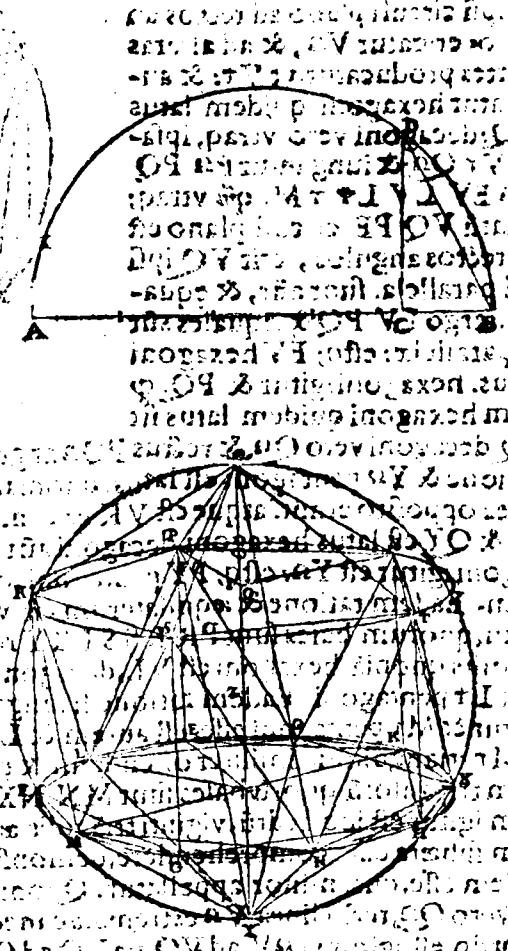
ta comprehensus. Dico & data sphæra. Quoniam enim GF est æqualis FE, atque est rectus qui ad F angulus, erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum, æqualis autem est EF ipsi EK quadratum igitur ex EG duplum est quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE EK, hoc est quadratum ex GK triplum est quadrati ex KE. & quæ AB est ipsius BC tripla: & vt AB ad BC, ita quadratū ex AB ad quadratum ex BD; erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. ostensum est autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE: & posita est KE ipsi BD æqualis. ergo & KG est æqualis AB. atq; est AB datæ sphæræ diameter. Quare & KG æqualis erit diametro datæ sphæræ. cubus igitur data sphæra est comprehensus. & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse. quod demonstrare oportebat.

47. primi

Coroll. 20. sexti

PROBLEMA V PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere & sphæra comprehendere, quæ & prædictas figuras; demonstrare quē icosaedri latus irrationalem esse lineam quæ minor appellatur.

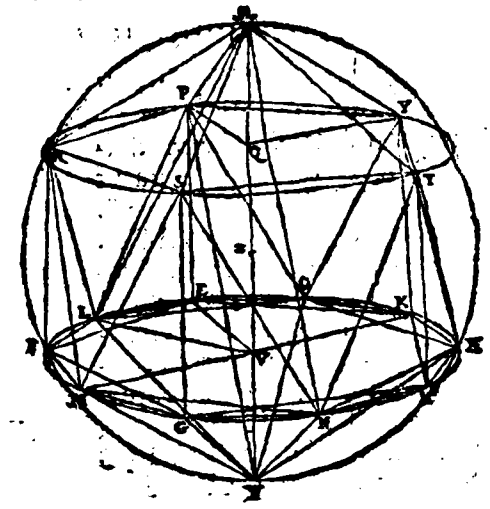


Exponatur datæ sphæræ diameter AB; secetur que in C, ita vt AC ipsius DB sit quadrupla: & in AB descripto semicirculo ADB. ducatur à puncto C ipsi AB ad rectos angulos recta linea CD, & DB iungatur. deinde exponatur circulus EFGHK, cuius ea, quæ ea centro sit æqualis ipsi DB: describaturque in circulo EFGHK pentagonū æquilaterum & æquiāgulum EFGHK: & circumferentiæ EF FG GH HK KE bifariam secentur in LMNXO punctis; & iungantur EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE: & similiter LM MN NX XO OL. æquilaterum igitur est LMNXO pentagonum; & recta linea EO est decagoni latus. deinde à punctis EFGHK ipsi plano circuli ad rectos angulos erigantur EP FR GS HT KY æquales axistentes ei, quæ ex centro circuli EFGHK: & iungantur PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX XY YO OP. Quoniam igitur vtraque ipsarum E P K Y eidem plano est ad rectos angulos, erit EP ipsi KY

parallela

parallela;atq; eſt ipſi æqualis. quæ autem æquales, & parallelas ad eaſdē partes
33.primi. coniungunt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. ergo PY ipſi EK & æ-
qualis eſt, & parallela. ſed EK eſt latus pentagoni æquilateri. ergo & PY eſt pen
tagoni æquilateri latus, in circulo EFGHK deſcripti. Eadem rōne & vnaquæq;
ipſarū PR RS ST TY eſt latus pentagoni æquilateri in eodē circulo deſcripti,
æquilaterū igitur eſt PRSTY pentagonū. & q̄m hexagoni quidem latus eſt PE,
B decagoni vero EO, atq; eſt rectus PEO āgulus; erit PO latus pētagoni. etēnim la
tus pentagoni pōt & hexagoni, & decagoni latus in eodē circulo deſcriptorum. Eadem rōne & OY eſt pentagoni latus; eſt autem & PY latus pentagoni. ergo æquilaterū eſt triangulū POY. & ob eandem cauſſam vnumquodq; triāgulorū PLR RMS SNT TXY eſt æquilaterum & q̄m pentagoni oſtenſa eſt vtraq; ipſarum PL PO, atq; eſt LO pentagoni; erit PLO æquilaterum triangulum. Eadem rōne & vnumquodq; triangulorum LRM MSN NTX XYO æquilaterum eſt. ſumatur centrū circuli EFGHK, q̄ ſit punctum V; & à puncto V ipſi circuli plano ad rectos angulos erigatur Vω, & ad alteras partes producatur, vt Vτ; & auferatur hexagoni quidem latus VQ; decagoni vero vtraq; ipſarū Vτ Qω; & iungantur Pω PQ Yω EV LV Lτ τM. q̄m vtraq; ipſarū VQ PE circuli plano eſt
8.undecimi ad rectos angulos, erit VQ ipſi PE parallela. ſunt autē, & æquales. ergo EV PQ & æquales ſunt & parallelæ; eſtq; EV hexagoni latus. hexagoni igitur & PQ. q̄
10.huius. cum hexagoni quidem latus ſit PQ, decagoni vero Qω, & rectus PQω angulos; erit Pω latus pentagoni. Eadem ratione & Yω pentagoni eſt latus. quoniam ſi iungamus VK QY & æquales, & ex oppoſito erunt. atque eſt VK ex centro circuli, videlicet hexagoni latus. ergo & QY eſt latus hexagoni. decagoni autē Qω, & rectus angulus eſt YQω. pentagoni igitur eſt Yω, eſtq; PY pentagoni. quare æquilaterum eſt PYω triangulum. Eadem ratione & æquilaterum eſt vnumquodq; reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt PR RS ST TY rectæ lineæ, vertex autem ω punctum. Rurſus quoniā hexagoni eſt VL, decagoni vero Vτ, & ängulus LVτ rectus; erit Lτ pentagoni. Eadem ratione ſi iungamus MV, quę eſt hexagoni, concludetur & Mτ pentagoni eſſe. eſt autem & LM pentagoni. æquilaterum igitur eſt LMτ triangulum, ſimiliter oſtendetur & æquilaterum eſſe vnū quodq; reliquorum triāgulorū quorū baſes ſunt MN NX XO OL, vertex autē τ pūctū. cōſtitutum igitur eſt icoſaedrū, viginti triāgulis æquilateris contentū. Itaq; oportet ipſum ſphæra data comprehendere, demonſtrareq; icoſaedri latus lineam irrationalem eſſe, quæ minor appellatur. Quoniā. n. hexagoni latus eſt VQ. decagoni vero Qω, recta linea Vω extrema, ac media rōe ſecta eſt in Q. & VQ eſt maior portio. eſt igitur vt ωV ad VQ, ita VQ ad Qω. atque eſt VQ ipſi VL æqualis, &





Qω

QΩ ipsi V☿. quare vt ΩV ad VL, ita LV ad V☿. & sunt anguli ΩVL LV☿ recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit ☿LΩ rectus angulus, ob similitudinem triangulorum ☿LΩ VLΩ. ergo semicirculus in ☿Ω descriptus etiam per L transibit. Eadem ratione q͂m est vt ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ, & æqualis est ΩV quidem ipsi ☿Q. VQ vero ipsi QP: erit vt ☿Q ad QP, ita PQ ad QΩ: ideoq; si rursus iungamus P☿, erit angulus, qui ad P rectus. semicirculus igitur descriptus in ☿Ω transibit & per P. Quòd si manente ☿Ω conuersus semicirculus in eundē rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, etiam per P, & per reliqua icosaedri pūcta transibit: atq; erit icosaedrum sphæra comprehensum. dico & data. secetur enim VQ bifariam in Z & q͂m recta linea VΩ extrema ac media ratione secta est in Q. & ΩQ est minor ipsius portio, ipsa ΩQ assumens dimidiā maioris portionis, videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, cp à dimidia maioris portionis describitur. quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum est. & ipsius quidem ZΩ dupla est Ω☿; ipsius vero AQ dupla QV. ergo quadratū ea Ω☿ quintuplū est quadrati ex VQ. & q͂m AC quadrupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC quintupla. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratū ex BD. quadratū igitur ex AB quadrati ex BD est quintuplum. ostensum autem est & quadratū ex Ω☿ quintuplū quadrati ex VQ; atq; est DB æqualis VQ: vtraque enim ipsarum est æqualis ei quæ ex centro circuli EFGHK. quare & AB est æqualis ☿Ω, est q; AB datæ sphæræ diameter. & ☿Ω igitur erit diameter datæ sphæræ. ergo icosaedrum est data sphæra comprehensum. Dico icosaedri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur. Quoniā. n. rationalis est sphæræ diameter, atq; est potētia quintupla eius, quæ ex centro EFGHK circuli; erit & quæ ex centro circuli EFGHK rōnalis. quare & diameter ipsius rōnalis erit. si autē in circulo rōnalem diametrum habente pentagonum æquilaterū describatur, erit latus pētagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri. ergo icosaedri latus est linea irrationalis, q̄ minor appellatur.

D E F G H K L

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est sphæræ diametrū potentia quintuplā esse eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur, & sphæræ diametrum compositā esse ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus, quæ in eodem circulo describuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur vtraq; ipsarum EP KY eidem plano est ad angulos rectos, erit EP ipsi KY parallela.) *Ex 6. vndecimi:* A

Erit PO latus pentagoni) *Ex 10. huius.* B

Quoniam enim hexagoni est VQ, decagoni vero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q) *Ex 9. huius.* C

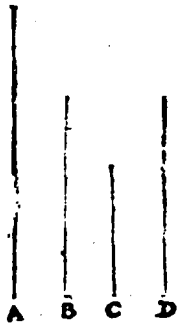
Quare vt ΩV ad VL, ita LV ad V☿: & sunt anguli ΩVL LV☿ recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit ☿LΩ angulus rectus ob similitudinem triangulorum ☿LΩ VLΩ) *Quoniam. n. est vt ΩV ad VL, ita LV ad V☿, erit vt ΩV ad V☿ videlicet vt prima ad tertiam, ita quadratum primæ ΩV ad quadratum VL secundę: cōponendoq; vt Ω☿ ad ☿V, ita quadrata ex ΩV VL, hoc est quadratum ex ΩL ad quadratū ex LV: & per conuersionem rationis vt ☿Ω ad ΩV, ita quadratum ex LΩ ad quadratum ex ΩV: quare LΩ est media proportionalis inter ☿Ω ΩV, quod deinceps demonstrabimus. vt igitur ☿Ω ad ΩL, ita LΩ ad ΩV. atq; est angulus LΩ☿ vtriq; communis. ergo triangulum ☿ΩL simile est triangulo LΩV, & angulus LVΩ rectus est aequalis angulo ☿LΩ. angulus igitur ☿LΩ rectus erit. At veco LΩ inter ☿Ω ΩV mediam esse proportionalem ex his apparebit.* D

Si sint tres rectæ lineæ, sitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectę lineę ABC; sitque vt A ad C, ita quadratum ex B ad quadratum ex C. Dico

ABC

ABC deinceps proportionales esse. sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit vt A ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc est quadratum ex D ad quadratum ex C. sed vt A ad C: ita positum est quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D æquale est quadrato ex B. ac propterea D ipsi B est æqualis. tres igitur rectæ lineæ ABC deinceps proportionales sunt. sed licet expeditius demonstrare angulum ϒLΩ rectum, esse hoc modo. Quoniam enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad Vϒ, sunt q; anguli ΩVL LVϒ recti, erit triangulum ΩVL triangulo LVϒ simile, & angulus LΩV æqualis angulo VLϒ. sunt autem anguli VLΩ LΩV æquales vni recto, cum rectus sit LVΩ: ergo & anguli ΩLV VLϒ vni recto sunt æquales; & ob id angulus ϒLΩ est rectus quod oportebat demonstrare.



E Ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplũ poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur) *Ex 3. huius.*

F Ergo quadratum ex Ωϒ quintuplum est quadrati ex VQ] *Ex 15. quinti.*

G Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD] *Ex corollari 20 sexti. est enim vt AB ad BD, ita DB ad BC ex 8. eiusdem.*

H Erit & quę ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rationalis erit] *Quoniam enim sphęræ diameter est potentia quintupla eius, quæ ex centro circuli, habebit quadratum diametri sphęræ ad quadratum eius, quę ex centro circuli proportionem eam, quam numerus habet ad numerum: & idcirco ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum diametri sphęrę, cum ipsa sit rationalis. ergo & quadratum eius, quæ ex centro circuli, est rationale; ideoque ea, quæ ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quæ rationali commensurabilis est, & ipsa est rationalis.*

6 decimi.

6 diffi. decimi

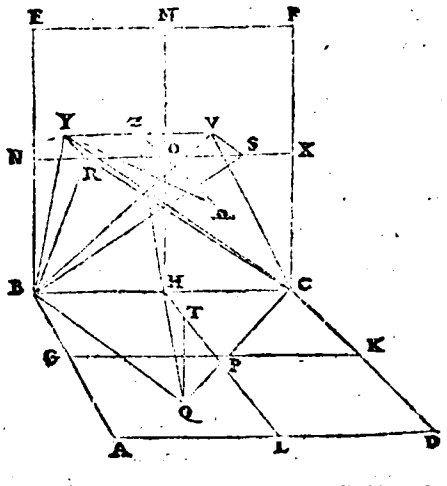
K Si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quę minor appellatur] *Ex 11. huius.*

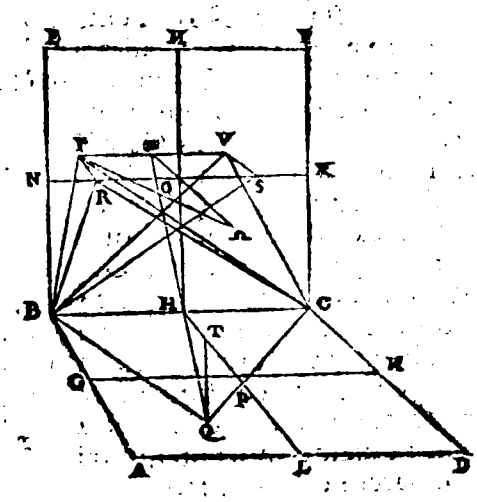
L Sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri) *Illud vero ita dictis manifestissime cõstat.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVII.

Dodecahedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras, demonstrareque dodecahædri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

Exponantur prępicti cubi duo plana ad rectos angulos inter se sc AB CD CBEF: & secetur vnumquodque ipsorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GHKLMNX, & GK HL MH NX iungantur. Deinde secentur rectae lineae NO OX HP extrema, ac media ratione in RST punctis: sintque ipsorum maiores portiones RO OS TP: & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quę ipsis RO OS TP aequales ponantur; iungantur q; YB BQ QC CV VY. Dico pẽtagonum YBQCV aequilaterũ esse, &





A

47.primi

20.sexti

B

32.sexti

C

D

E

47.primi.
20.tertii

8.primi.

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

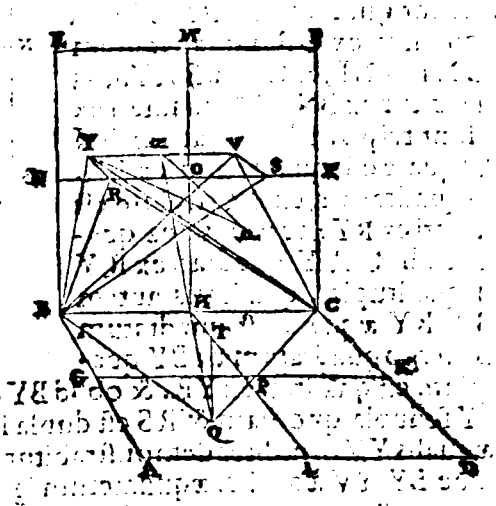
V

X

Z

Æ, & in vno plano, & præterea æquiangulum. Iungantur enim RB SB VB. & quoniam recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior ipsius portio, erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR. æqualis autem est ON ipsi NB, & OR ipsi RY. quadrata igitur ex BN NR quadrati ex RY sunt tripla. sed quadratis ex BN NR æquale est quadratum ex BR. ergo quadratum ex BR triplum est quadrati ex RY: ac propterea quadrata ex BR RY quadrati ex RY sunt quadrupla. quadratis autem ex BR RY æquale est quadratum ex BY. ergo quadratum ex BY quadruplum est quadrati ex YR. & ob id BY est dupla ipsius YR. atque est VY ipsius YR dupla, quoniam & RS est dupla ipsius RO, hoc est ipsius RY. ergo BY est æqualis YV. similiter demonstrabitur & vna quæq; ipsarum BQ QC CV vtrique BY YV æqualis. æquilaterum igitur est BYVCQ pentagonum. Dico & in vno esse plano. ducatur. n. à puncto O ipsa OZ vtriq; ipsarum RY SV parallela ad exteriores cubi partes: & jungantur ZH HQ. dico ZHQ rectã lineam esse. nam cum HP extrema, ac media rõne secetur in T, & PT sit maior ipsius portio, erit vt HP ad PT, ita PT ad TH. æqualis aũt est HP quidẽ ipsi HO, PT vero vtriq; ipsarum TQ OZ. est igitur vt HO ad OZ, ita QT ad TH. atq; est HO parallela ipsi TQ; vtraque. n. ipsarũ plano BD est ad rectos angulos: TH vero est parallela OZ, & vtraq; ipsarum sit ad rectos angulos plano BF. si autẽ duo triangula componantur ad vnum angulum, vt ZOH, HTQ, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera etiam sint parallela, reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. ergo ZH est in directũ ipsi HQ. omnis aũt recta linea est in vno plano. In vno igitur plano est YBQCV pentagonũ. Dico & æquiangulũ. Quõm. n. recta linea NO extrema, ac media rõne secta est in R, & OR est maior portio, erit vt vtraq; NO OR ad ON ita NO ad OR. æqualis aũt est RO ipsi OS. quare vt SN ad NO, ita NO ad OS. & ob id NS extrema, ac media rõne secta est in O; & maior portio est NO. quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla. æqualis autem est ON ipsi NB, & OS ipsi SV. ergo quadrata ex NS SV tripla sunt quadrati ex NB; ac propterea quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed quadratis ex BN NB est æquale quadratũ ex BS. quadrata igitur ex BS SV; hoc est quadratũ ex VB, & angulus VSB sit rectus, quadruplũ est quadrati ex NB: ideoq; ipsa VB ipsius BN est dupla. est autem & BC dupla BN. ergo VB est æqualis BC. & quoniã duæ BY YV duabus BQ QC æquales sunt. & basis VB æqualis basi BC, erit angulus BYV angulo BQC æqualis. similiter ostẽdemus & YVC angulũ æquale angulo BQC. tres igitur anguli BQC BYV YVC inter se æquales sunt. si aũt pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales, pentagonũ æquiangulũ erit. æquiangulũ igitur est pentagonũ BYVCQ. ostensum est aũt & æquilaterũ. ergo pentagonũ BYVCQ æquilaterũ est, & æquiangulũ. atq; est in vno cubi latere BC. si igitur in vnoquoq; duodecim cubi laterũ eadem constituamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis cõtenta. Itaque oportet ipsum & data sphæra cõprehendere; demonstrareq; dodecaedri latus esse irrationalẽ lineã, quæ apotome appellatur: producatur. n. ZO, & sit Zω occurrit igitur Zω diametro cubi, & bifariã se mutuo secant. hoc. n. ostensum est in penultimo theoremate vndecimi libri. secent in ω. ergo ω est centrum

ſphæræ, quæ cubum comprehendit, & Ω dimidium lateris cubi iungatur YΩ. & quoniam recta linea NS extrema ac media ratione ſecta eſt in O, & NO eſt ipſius portio maior, erunt quadrata ex NS, SO, tripla eius quod fit ex NO. æqualis autem eſt NS ipſi ZΩ, quoniam & NO ipſi OΩ eſt æqualis, & ZO ipſi OS. ſed & OS eſt æqualis ZY quoniam & RO. Quadrata igitur ex ΩZ ZY tripla ſunt quadrati, quod fit ex NO. ſed quadratis ex ΩZ ZY æquale eſt quadratum ex YΩ. ergo quadratum ex YΩ triplum eſt quadrati ex NO. Eſt autem quæ ex centro ſphæræ cubum comprehendentis potentia tripla dimidij lateris cubi. prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere, demonſtra req; ſphæræ diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi. ſi autē tota totius, & dimidia dimidiæ, atq; eſt NO dimidia lateris cubi. ergo YΩ eſt æqualis ei, quæ ex centro ſphæræ cubum comprehendentis: eſtq; Ω centrum ſphæræ comprehendentis cubum. quare punctum Y eſt ad ſphæræ ſuperficiem. ſimiliter demonſtrabimus & vnumquemque reliquorum angulorum dodecaedri eſſe ad ſuperficiem ſphæræ. dodecaedrum igitur eſt data ſphæra comprehenſum. Dico dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt RO; erit tota NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio RS. nam cum ſit vt NO ad OR, ita OR ad RN. & earum dupl æ; partes. n. eodem modo multiplicium eandem habent proportionem, erit vt NX ad RS, ita RS ad vtramque NR SX. maior autem eſt NX, quàm RS. ergo & RS eſt maior, quàm vtraque NR SX. eſt igitur NX extrema, ac media ratione ſecta, & RS eſt ipſius maior portio. æqualis autem eſt RS ipſi YV. ergo NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt YV. & quoniam rationalis eſt ſphæræ diameter, atque eſt potentia tripla lateris cubi; erit NX rationalis, quę eſt cubi latus. ſi autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur. ergo YV, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt, quæ apotome appellatur.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt latere cubi extrema, ac media ratione ſecto maiorem portionem eſſe dodecaedri latus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] *Ex 4. huius.*

B Atque eſt HO parallela ipſi TQ; vtraque enim ipſarum plano BD eſt ad rectos angulos) *Ex 6. vndecimi.*

C Reliqua ipſorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt) *Ex 32. ſexti.*

D Quoniam in recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta eſt in R, & OR eſt maior portio, erit vt vtraq; NO OR ad ON, ita NO ad OR) *Ex 5. huius. ſi enim recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adijciaturq; ipſi æqualis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit ea, quę à principio recta linea. quare vt vtra*

que

quę NO OR, hoc eſt vt tota NO vnà cum maiori portione OR ad totam NO, ita eſt NO ad OR. ſit enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS, SO quadrati ex ON ſunt tripla) *Ex 4. huius.* E

Si autem pentagoni æquilateri tres anguli ſint æquales pentagonum æquian gulum erit) *Ex 7. huius.* F

Prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere) *In quinta decima huius.* G

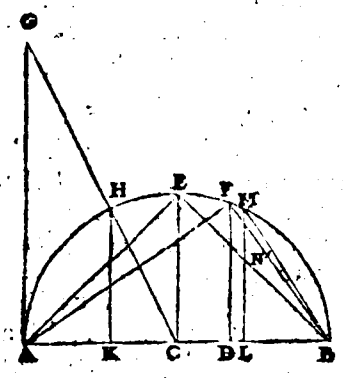
Erit NX rationalis, quę eſt cubi latus] *Nam cum ſphæræ diameter ſit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipſum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipſi commen ſurabile erit. quæ autem rationali ſunt commenſurab les ſive longitudine & potentia, ſive potentia ſolum, rationales ſunt, per ſextam diffinitionem decimi libri.* H

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur) *Ex 6. huius.* K

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XVIII.

Latera quinque figurarum exponere, & inter ſe comparare.

Exponatur datę ſphæræ diameter AB, & ſecetur in C quidem, ita vt AC ſit æqualis CB; in D vero ita, vt AD ipſius DB ſit dupla: deſcribaturq; in AB ſemicirculus AEB. & à punctis CD ipſi AD ad rectos angulos ducantur CE DF: & AF FB EB iungantur. Itaq; quoniam AD dupla eſt ipſius DB, erit AB ipſius BD tripla; & per conuerſionem rationis BA ſeſquialtera ipſius AD. vt autem BA ad AD, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF. eſt.n. triangulum AFB triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AF. eſt autem, & ſphæræ diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis, eſtq; AB ſphæræ diameter. ergo AF pyramidis lateri eſt æqualis. Rurſus quoniam AD dupla eſt DB, erit AB ipſius BD tripla. Sed vt AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex FB. quadratũ igitur ex AB triplum eſt quadrati ex BF. eſt autem ſphæræ diameter potentia tripla lateris cubi: atque eſt AB ſphæræ diameter. ergo BF eſt cubi latus. & qm AC eſt æqualis CB, erit AB ipſius BC dupla. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE. quadratum igitur ex AB quadrati ex BE eſt duplũ atq; eſt ſphæræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB eſt diameter datę ſphæræ. quare BE eſt octaedri latus, ducatur à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AG: ponaturq; AG æqualis AB: & iuncta GC à puncto H ad AB perpendicularis ducatur HK. Quoniam igitur AG dupla eſt ipſius AC; erenim GA eſt æqualis AB, vt autem GA ad AC, ita HK ad KC; erit HK ipſius KC dupla. ergo quadratum ex HK quadruplum eſt quadrati ex KC. Quadrata igitur ex HK KC, quod eſt quadratum ex HC quintuplum eſt quadrati ex KC. æqualis autem eſt HC ipſi CB. ergo quadratum ex BC quintuplum eſt quadrati ex CK. & quoniam AB eſt dupla ipſius BC, quarum AD dupla eſt DB; erit reliqua BD dupla ipſius DC; ideoque BC ipſius CD eſt tripla. nonuplum igitur eſt quadratum ex BC quadrati ex CD. Sed quadratum ex BC quadrati ex CK eſt quintuplum. Ergo quadratum ex KC maius eſt quadrato ex CD. & KC ipſa CD maior. ponatur ipſi KC æqualis CL; & à puncto L ipſi AB ad rectos angulos ducatur LM, & MB iungatur. & quoniam quadratum ex BC quintuplum eſt quadrati ex KC; atque eſt ipſius quidem CB dupla BA; ipſius vero CK dupla KL: erit quadratum ex AB quadrati



8. ſexti

13. huius

15. huius

14. huius

4. ſexti.

20. ſexti.

19. quinti.

20. ſexti.

13. quinti.

Corol. 16. huius. drati ex KL quintuplum. ſed & ſphæræ diameter potentia quintupla eſt eius, quæ ex centro circuli à quo icoſaedrum deſcribitur. atq; eſt AB diameter ipſius ſphæræ. ergo KL eſt hexagoni latus dicti circuli. præterea quoniam ſphęræ diameter compoſita eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo deſcriptorum; atq; eſt AB quidem diameter ſphæræ, KL vero hexagoni latus, & AK eſt æqualis LB: erit vtraq; ipſarum AK LB latus decagoni deſcripti in eodē circulo, à quo icoſaedrū deſcribitur. & qm̄ decagoni eſt LB, hexagoni vero ML; eſt n. æqualis ipſi KL, quod & ipſi HK; namq; æqualiter à centro dī ſtant; & eſt vtraq; HK KL dupla ipſius HC: erit MB latus pentagoni. quod aūt pentagoni idē eſt & icoſadri. ergo MB eſt icoſaedri latus. & qm̄ FB eſt latus cubi ſecetur extrema; ac media rōe in N, & BN ſit maior portio; erit NB dodecaedri latus. q̄ cum ſphæræ diameter oſtenſa ſit ipſius quidē AF lateris pyramidis potentia ſeſquialtera; ipſius vero BE octaedri potētia dupla, & ipſius FB cubi potētia tripla, quarū partiū ſphæræ diameter potentia eſt ſex, earū pyramidis q dem latus erit quattuor; octaedri vero triū, & cubi duarū. ergo latus pyramidis octaedri quidē lateris potentia eſt ſeſquitertium, cubi vero potentia duplum; & octaedri latus lateris cubi potentia eſt ſeſquialterū. latera igitur triū figurarum iam dicta, videlicet pyramidis, octaedri, & cubi inter ſe ſunt in proportionibus rationalibus; reliqua vero duo, dico aūt icoſaedri, & dodecaedri, neq; inter ſe, neq; ad iam dicta ſunt in rationalibus ꝓportionib. nempe minor, & apotome.

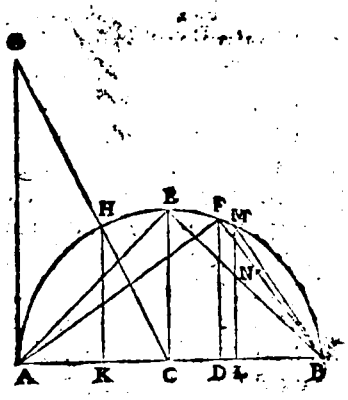
14. tertii.

10. huius

16. huius

Ex corol. antecedentis.

At vero MB latus icoſaedri maius eſſe dodecaedri latere BN, ita demonſtrabimus.



8. ſexti. Quoniā. n. triangulum FDB æquiangulum eſt triangulo FAB, erit vt DB ad BF, ita FB ad BA: & cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, vt prima ad tertiam, ita erit quadratum primæ ad quadratum ſecundæ. eſt igitur vt DB ad BA, ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & conuertendo vt AB ad BD, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD. tripla aūt eſt AB ipſius BD. ergo quadratum ex FB quadrati ex BD eſt triplum. atq; eſt quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; eſt. n. AD ipſius DB dupla. ergo quadratum ex AD maius eſt quadrato ex FB; propterea quod AD quā FB eſt maior. multo igitur maior eſt AL quā FB. & ipſa quidem AL extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt LK, quoniam KL eſt hexagoni latus, & KA decagoni. ipſa vero FB extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt BN. maior igitur eſt KL quàm BN, eſt autē KL ipſi LM æqualis. ergo LM quàm BN eſt maior. ſed BM eſt maior quàm ML. ergo MB, quæ eſt latus icoſaedri maior erit ipſa BN, dodecaedri latere.

Coroll. 20. ſexti.

20. ſexti.

9. huius.

19. primi.

ALITER. Quoniam enim AD dupla eſt DB, erit AB ipſius BD tripla. vt autem AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod triāgulum FAB triangulo FBD æquiangulum eſt. triplum igitur eſt quadratum ex AB quadrati ex BF. Oſtenſum eſt autem quadratū ex AB quadrati ex KL quintuplū. ergo quinq; quadrata ex KL tribus quadratis ex BF ſunt æqualia. ſed tria ex FB maiora ſunt quàm ſex eorum, quæ fiunt ex BN. & quinq; igitur ex KL, quàm ſex eorum, quæ ex BN ſunt maiora. ergo & vnū ex KL maius eſt vno ex BN; ac propterea KL quā BN maior: æqualis aūt KL ipſi LM, maior igitur eſt LM, quā BN; multo igitur MB quàm BN eſt maior. quod demōſtrare oportebat.

Cor. 20. ſex. 8. ſexti.

Tria vero, ex FB maiora eſſe, quàm ſex earum, quæ ex BN, hoc modo oſtendemus.

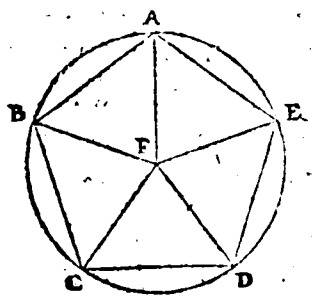
Quoniam

Quoniam enim maior est BN quam NF, erit rectangulum, quod continetur FB BN maius contento BF FN. quod igitur continetur FB BN vna cum contento BF FN maius est, quam duplum eius, quod BF FN cõtinetur. sed quod quidem continetur FB BN vna cum contento BF FN est quadratum ex FB. Contentum autem BF FN est æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione secta est in N. & quod extremis continetur est æquale ei, quod fit à media. quadratum igitur ex FB maius est, quam duplum quadrati ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN est maius; & idcirco tria, quæ ex FE maiora sunt, quam sex eorum, quę fiunt ex BN. quod demonstrare oportebat. a. secundi. 17. sexti

Dico præterea dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis constituitur angulus pyramidis, ex quattuor octaedri, ex quinq; icosaedri: at ex sex triangulis æquilateris, & æquiangulis ad vnum punctum constitutis non est angulus solidus. cum enim trianguli æquilateri angulus sit duæ tertiæ recti, erunt sex quattuor rectis æquales. quod fieri non potest. omnis enim solidus angulus minoribus, quam quattuor rectis continetur. Eadem ratione neq; ex pluribus, quam sex angulis planis constituitur solidus angulus. itaque quadratis tribus angulis cubi continetur. vt autem quattuor contineatur fieri non potest; essent enim rursus quattuor recti. pentagonis autem æquilateris, & æquiangulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, sed vt quattuor cõtineatur fieri non potest. nam cum pentagoni æquilateri angulus cõstet ex recto, & quinta recti parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non potest. neq; vero alijs polygonis figuris cõstituetur angulus solidus propter absurda, quę consequuntur. non igitur præter iam dictas figuras alia figura solida constituitur æquilateris, & æquiangulis cõtenta. quod oportebat demonstrare. 21. vndecimi

Verum enim vero pentagoni æquilateri & æquianguli angulũ constare ex recto, & recti quinta parte hoc modo ostendemus.



Sit enim pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus ABCDE describatur: sumaturq; ipsius centrum, quod sit F; & iungantur FA FB FC FD FE, quae pentagoni ABCDE ãgulos bifariam secabunt. & quoniam quinq; anguli, qui ad F quattuor rectis æquales sunt, & inter se sunt æquales, erit vnus ipsorum, vt AFB vnius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF sunt vnius recti, & quintae partis. æqualis autem est angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus constat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonstrare.

Finis libri Decimitertij.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Quartusdecimus.

ET SOLIDORVM QVARTVS.

Vt quidam arbitrantur.

VT VERO ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS

Cum Commentariis Federici Commandini Vrbinatis.

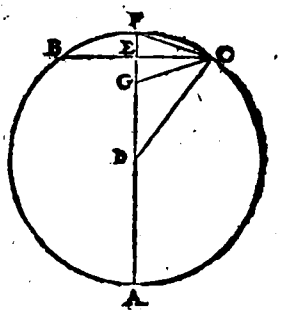


BASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam venisset, patriq; nostro ob mathematicarum disciplinarum societatem commendatus fuisset, ipso peregrinationis tempore, cum eo diu, multumq; versatus est. & aliquãdo expẽdentes id quod ab Apollonio scriptũ est de dodecaedri & icosaedri in eadem, sphæra descriptorum comparatione, quam scilicet hæc inter se proportionem habeant, arbitrati sunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus dicebat, memoriæ, ac literis prodiderunt. Ego vero postea incidi in alium librum ab Apollonio editum, qui propositę rei demonstrationem recte complectebatur; atq; ex eius problematis indagatione magnã cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editũ est, quilibet facile perspicere potest, cum in omniũ manibus versetur. Quod autẽ nos postea summo, quantum conijci licet, studio lucubrasse videmur, id litteris mandatum tibi dedicandum censuimus, vtpote qui ob excellentem in omnibus disciplinis mathematicis, & præsertim in geometria cognitionem prudẽter iudices ea, quæ dicturi sumus: ob eam vero, quæ tibi cum patre meo fuit consuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipsam libenter audias. sed iam tempus est vt proœmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur:

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusq; & hexagoni lateris, & decagoni quæ in eodem circulo describuntur.



Sit circulus ABC, & in eo describatur pentagoni aequilateri latus BC; sumaturque circuli centrum D: & ad BC ducta DE perpendiculari, producatur in directũ ipsi DE recta linea EF. dico DE dimidiam esse vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Iungantur enim DC CF: ponaturque EG ipsi EF aequalis: & à puncto G ad C ducatur GC. Quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla est circumferentiae BFC; atque est totius quidem circuli circumferentiae dimidia ACF, ipsius vero BFC dimidia FC, erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiae FC. ideoq; circumferentia AC ipsius CF est quadrupla. vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF A
ãgulus igitur ADC quadruplus est anguli CDF. duplus autem est angulus AD C
C anguli EFC. ergo & angulus EFC anguli GDC est duplus. est autem & EF C D
angulus aequalis angulo EGC. duplus igitur est angulus EGC anguli GDC: & E
idcirco DG ipsi GC est aequalis. sed GC aequalis est CF. ergo & DG ipsi CF. est autem & GE aequalis EF. aequalis igitur est DE vtriq; EF FC. communis apponatur DE vtraque igitur DF FC ipsius DE est dupla: atq: est DF quidem hexagoni lateri aequalis, FC vero aequalis lateri decagoni. ergo DE est dimidia, & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum.

Itaq; manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eam F
quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli.

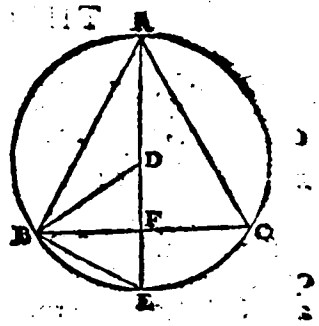
F. C. COMMENTARIVS.

Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] Ex 15. *quinti.* A
Vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF] Ex *vltima sexti.* B
Duplus autem est angulus ADC anguli EFC] Ex 20 *tertij.* C
Est autem & EFC angulus aequalis angulo EGC] *Posita enim est FE æqualis EG.* D
& EC & vtrique communis: anguliq; ad E recti. basis igitur FC est æqualis basi (G, & triangulum triangulo æquale; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur ex 4. primi.
Et idcirco DG ipsi GC est aequalis] *Nam cum angulus EGC exterior sit æqualis duobus interioribus, & oppositis GDC GCD. sitque duplus ipsius GDC; erit angulus GCD æqualis* 32. primi.
angulo GDC, & ob id latus DG lateri GC æquale. 6. primi.
Itaq; manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eam, quae à centro F
circuli ad latus trianguli aequilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius quae ex centro circuli.

Sit circulus ABC, & in ipso describatur triangulum æquilaterum ABC; sumptoq; circuli centro D, ab eo ad BC agatur perpendicularis DF, & ad E producatur. Dico DF dimidiam esse ipsius DE. *iungantur enim DB BE. & quoniam BE est latus hexagoni, quod ex 15. tertij decimi libri apparet: & ideo æqualis ei, quæ ex centro: erunt DB BE inter se æquales; & ipsarum quadra-*

ta

47. primi. ta æqualia. sed quadratum quidem ex DB est æquale quadratis ex BF FD. quadratum uero ex BE æquale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE sunt æqualia; & dempto communi quadrato ex BF, erit quadratum ex DF æquale quadrato ex FE: ac propterea recta linea DF ipsi FE est æqualis, & DF ipsius DE dimidia. quod demonstrare oportebat.



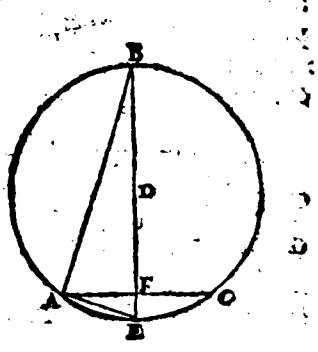
THEOREMA II. PROPO. II.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

Hoc autem conscribitur ab Aristero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro, videlicet vt dodecaedri superficies est ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum, & perpendicularis ducta à cētro sphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem sit, quæ ad icosaedri triangulum ducitur. Itaq; demonstrandum est eundem circulū cōprehendere, & dodecaedri pentagonū, & icosaedri triāgulum in eadem sphæra descriptorū, hoc præmisso:

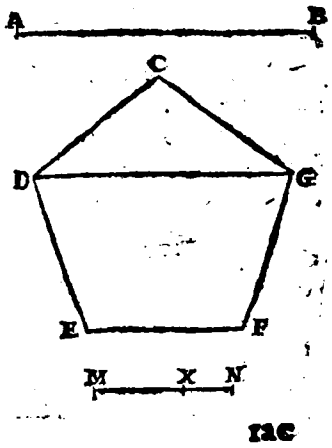
Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod fit ex latere pentagoni, ex recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit eius, quod fit ab ea, quæ ex circuli centro:

Sit ABC circulus, & in eo pentagoni latus AC: sumaturq; circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in pūcta BE producatur, & iūgatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla esse. iuncta. n. AE est decagoni latus. & qm̄ BE dupla
42. primi est ipsius ED; erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplū. quadrato autē ex BE æqualia sunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla sunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex BA
A AE & ED sunt quintupla quadrati ex ED. sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC. quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED sūt quītupla.



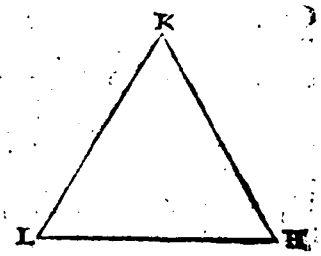
Hoc demonstrato, demonstrandum est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triāgulum in eadem sphære descriptorum.

Exponatur sphæræ diameter AB, & in ipsa sphaera describatur dodecaedrum, & icosaedrum: sitque vnum quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icosaedri vero triangulum KLH. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLH triangulum. Iungatur DG.
B ergo DG est cubi latus. & exponatur recta linea quaedam MN, ita vt quadratum ex AB quadrati ex MN sit quintuplum. Est autem & sphae-



rae

ræ diameter potentia quintupla eius, quæ est ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. secetur MN extrema, ac media ratione in X: & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus. & quoniã quadratum ex AB quintuplum est quadrati ex MN, & triplum quadrati ex DG; erunt tria quadrata ex DG quadratis quinq; ex MN æqualia. vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinq; ex MN ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur quadrata ex CG quinq; quadratis ex MX sunt æqualia. quinq; autẽ quadrata ex KL æqualia sunt quinque quadratis ex MN, & quinq; quadratis ex MX. ergo quinq; quadrata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex GC sunt æqualia. sed tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex GC æqualia sunt quindecim quadratis eius, quæ ex centro circuli descripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demonstratum est quadrata ex DG GC quintupla esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa pentagonum CDEFG descripti. quinque autem quadrata ex KL sunt æqualia quindecim quadratis eius, quæ est ex centro circuli descripti circa triangulum KLH. etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa triangulum KLH descripti. quindecim igitur quadrata eius, quę est ex centro circuli quindecim quadratis eius, quae est ex centro circuli sunt æqualia: ac propterea diameter diametro est aequalis. ergo idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum.



C D E F G H J

F. C. COMMENTARIUS.

Sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC] *Ex decima tertijdecimi.* A

Ergo DG est cubi latus] *Secta enim DG extrema, ac media ratione, maior portio erit æqualis lateri pentagoni CD ex 8 tertijdecimi. si aũt latus cubi extrema ac media rõne secetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertijdecemi. sed CD ponatur latus dodecaedri. ergo DG est cubi latus. nam si duæ rectæ lineę extrema, ac media ratione secentur erit tota ad totam, vt portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonstrabitur.* B

Secetur MN extrema, ac media ratione in X, & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus] *Ex ante dictis sequitur MN esse eam, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur, hoc est hexagoni latus. si aũt hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur erit maior portio latus decagoni. quod nos supra ad nonam tertijdecimi demonstrauimus.* C

Et triplum quadrati ex DG] *Ex 15 tertijdecimi libri.* D

Vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinq; ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinq; quadrata ex MX] *Est enim CG maior portio ipsius DG extrema, ac media ratione sectę. & similiter MX maior portio ipsius MN, & vt tota DG ad totam MN, ita est ipsius DG maior portio ad maiorem portionem ipsius MN. quod deinceps demonstrabitur.* E

Quinq; autem quadrata ex KL æqualia sunt, & quinq; quadratis ex MN, & quinq; quadratis ex MX) *Ex 10 tertijdecimi. est enim KL latus pentagoni descripti in circulo, à quo icosaedrũ describitur, & cuius ea, quę ex centro est MN.* F

Antea enim demonstratum est) *Videlicet proxime ad principium huius theorematis.* G

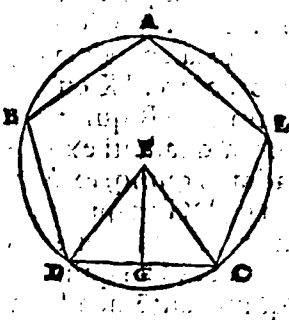
Etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ ex centro circuli) *In duodecima tertijdecimi libri.* H

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipsum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur superficiei dodecaedri est æquale. J

Sit

Sit pentagonum æquilaterũ, & æquiangulũ ABCDE, & circa ipſum circulus: ſumatur autẽ cẽtrũ F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. dico quod tricies CD FG continetur duodecim pentagonis ABCDE aequale eſſe. iungantur .n. CF FD.



A & quoniam quod CD FG continetur duplum eſt trianguli FCD, erit quod quinquies cõtinetur CD

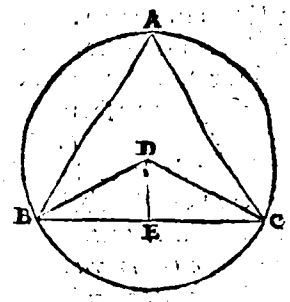
B FG decem triangulis aequale. decem autẽ triangula duo pentagona ſunt, & eorum ſextupla aequalia. ergo quod tricies CD FG continetur eſt aequale duodecim pentagonis. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies. ergo quod tricies continetur CD FG ſuperficiei dodecaedri aequale erit.

Similiter demõſtrabimus, ſi fuerit triangulum æquilaterum, vt ABC, & circa ipſum circulus, cuius centrum D, & ab eo perpendicularis DE, quod tricies BC DE continetur ſuperficiei icoſaedri æquale eſſe.

Quoniam .n. rurſus quod BC DE continetur duplum eſt trianguli DBC, erunt duo triangula aequalia ei, quod continetur BC DE, & eorum tripla. ſex igitur triangula DBC, aequalia ſunt tri-

C bus, quae BC DE continentur, at ſex triangula vt DBC ſunt aequalia duobus ABC trigulis. & eorum de dupla. ergo quod trices BC DE continetur eſt aequale viginti triangulis ABC, hoc eſt ico-

D ſaedri ſuperficiei. erit igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.



COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicuum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur latere pentagoni, & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum deſcripti, in ipſum latus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icoſaedri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum deſcripti ipſum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & icoſaedro in eadem ſphæra deſcriptis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam quod CD FG continetur duplum eſt trianguli FCD.] *Ex 41. primi, ex quo ſequitur duo triangula FCD æqualia eſſe ei, quod* CD FG *continetur.*

B Decem autem triangula duo pentagona ſunt.] *Vnumquodq; enim pentagonum quinq; eiuſmodi triangula continet.*

C At ſex triangula vt DBC ſunt aequalia duobus ABC triangulis.] *Nam triangulum ABC ex tribus triangulis* DBC *conſtat.*

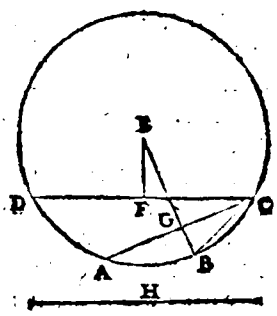
D Erit igitur vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.] *Quoniã enim quod tricies continetur CD FG eſt æquale ſuperficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE æquale ſuperficiei icoſaedri,*

ſaedri, erit vt ſuperficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG, ita ſuperficies icoſaedri ad id, quod tricies continetur BC DE: & permutando vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur. ſed vt quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod ſemel continetur CD, FG ad id, quod ſemel BC DE continetur ex 15 quinti. vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Hoc probato demonſtrandum erit, vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus.

Exponatur circulus ABC comprehendens & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum: & in ipſo deſcribatur trianguli quidem æquilateri latus CD: pentagoni vero AC; ſumptoq; circuli centro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducantur EF EG, & producatur in directum ipſi EG recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cubi latus H. Dico vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe H ad ipſam CD. quoniam, n. vtraq; ſimul EB BC extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt EB, & eſt vtriuſq; quidem dimidia EG, ipſius vero BE dimidia EF: erit & ipſius EG extrema, ac media rõne ſectæ maior portio EF. eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectæ maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit. vt igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF; ideoq; contentum H FE eſt æquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam eſt vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF; ei vero, quod H EF continetur eſt æquale contentum CA EG: erit vt H ad CD, ita contentũ CA EG ad id, quod CD EF continetur, hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD.

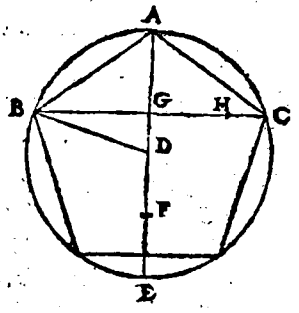


A B C D E F G H K L

Aliter demonſtrare vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus, hoc præmiſſo.

Sit circulus ABC, & in eo deſcribantur æquilateri pentagoni latera AB AC, & iungatur BC; ſumatur autem circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E: ponaturque ipſius AD dimidia DF, & GC ipſius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pentagono æquale eſſe.

Iungatur n. BD. & quoniã AD dupla eſt ipſius DF, erit FA ipſius AD ſeſquialtera. Rurſus quã GC tripla eſt ipſius CH, erit GH ipſius HC dupla. ſeſquialtera igitur eſt CG ipſius GH. quare vt FA ad AD ita CG ad GH. ideoq; contẽtum AF GH eſt æquale ei, quod AD CG continetur: ſed CG eſt æqualis GB. ergo contẽtum AD BG eſt æquale ei, quod AF GH continetur. contentum autẽ AD BG eſt duo triangula, vt ABD. quod igitur AF GH continetur & duo triangula ABD. ergo quinq; rectangula contenta AF GH decem ſunt triangula. decem autem triangula duo pentagona ſunt. quinq; igitur rectãgula conten-

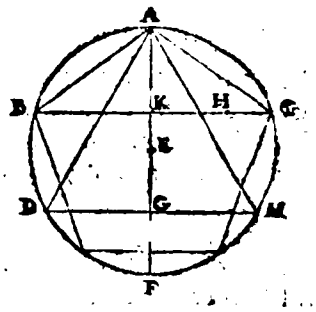


16. ſexti.

M

contenta AF GH duobus pentagonis ſunt aequalia. & quoniam GH eſt dupla HC, erit contentum AF GH duplum eius, quod AF HC continetur. ergo duo rectangula contenta AF HC ſunt aequalia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla, decem igitur rectangula contenta AF HC ſunt aequalia quinque, quae AF GH continentur, hoc eſt duobus pentagonis. ergo quinq; contenta AF HC, vni pentagono ſunt aequalia. quinq; aũt contenta AF HC ſunt aequalia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH quintupla eſt ipſius HC, & cõis altitudo eſt AF. quod igitur AF BH continetur vni pentagono eſt aquale.

Hoc demõſtrato nunc exponatur circulus cõprehendens, & dodecaedri pentagonum, & icoſaedri triangulum in eadem ſphaera deſcriptorũ & in circulo ABC deſcribantur aequilateri põtagoni latera BA AC: & iungatur BC. ſumatur praeterea circuli centrum E, & iuncta AE ad F producatur: ſitq; AE quidem dupla ipſius EG; KC vero ipſius CH tripla; & per G ipſi AF ad rectos angulos ducatur D M. ergo D M eſt latus trianguli aequilateri; & aequilaterum eſt ADM triangulũ & quoniã rectangulum quidem contentum AG BH eſt aequale pentagono, contentum vero AGD aequale triangulo ADM; erit vt rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonũ ad triangulum. vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangula, hoc eſt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, & duodecim quidem BH ſunt decem BC: etenim BH quintupla eſt ipſius HC; & BC ipſius CH ſextupla: ideoq; duodecim BH ſunt aequales decem BC: viginti autem DG ſunt decem DM; dupla enim eſt DM ipſius DG. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc eſt vt BC ad DM, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. atque eſt BC quidem cubi latus, DM vero latus icoſaedri. & vt igitur dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita BC ad DM, hoc eſt cubi latus ad latus icoſaedri.



F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam enim vtraq; ſimul EB BC extrema, ac media rõne ſecta maior portio eſt EB] *Ex nona tertijdecimi.*

B Et eſt vtriuſque dimidia EG] *Ex prima huius.*

C Ipſius vero BE dimidia EF] *Ex ijs quę nos demonſtrauimus ad finem primę huius.*

D Erit & ipſius EF extrema, ac media rõne ſectae maior portio EF) *Ex 15 quinti.*

E Eſt autem & ipſius H extrema, ac media ratione ſectae maior portio CA, vt in dodecaedro oſtenſum fuit) *In 17 tertijdecimi.*

F Vt igitur H ad CA, ita eſt GE ad EF.) *Hoc autem ita eſſe ad finem huius libri demonſtrabitur.*

G Ideoq; contentum H FE eſt aequale ei, quod CA EG cõtinetur) *Ex 16 ſexti.*

H Et quoniam eſt vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima ſexti.*

K Ei vero quod H EF continetur eſt aequale contentum CA EG) *Quod proxime demonſtratum fuit.*

L Hoc eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita H ad CD] *Superius enim demoſtratum eſt vt dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur CA EG ad id, quod CDEF continetur.*

M Contentum autem AD BG eſt duo triangula vt ABD] *Hoc eſt contentum AD BG eſt aequale duobus triangulis ABD, eſt enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*

N Quinq; autem contenta AF HC ſunt aequalia ei, quod continetur AF BH, quoniã BH eſt quintupla ipſius HC: & cõmunis altitudo eſt AF) *Ex prima ſexti.*

Ergo

Ergo DM est latus trianguli æquilateri] *Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad trianguli æquilateri latus est dimidia eius, quæ ex circuli centro, vt nos demonstrabimus ad finem primæ huius.* O

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH est æquale pentagono) *Ex ijs, quæ proxime demonstrauit.* P

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] *Ex demonstratis in 42. primi.* Q

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG] *Parallelogramma enim, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases, ex prima sexti,* R

Et vt igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangula) *Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita esse pentagonum ad triangulum.* S

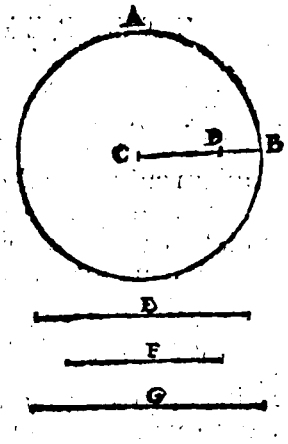
Et duodecim quidem BH sunt decem BC, etenim BH quintupla est ipsius HC, & BC ipsius CH sextupla) *Quoniam enim BH est quintupla ipsius HC, & BC est eiusdē HC sextupla, habebit HB ad BC proportionem eam, quam habet quinque ad sex. sed quinque multiplicans duodecim producit 60. & sex multiplicans decem producit similiter 60. ergo duodecim BH sunt æquales decem BC.* T

Hoc est vt BC ad DM] *Ex 15. quinti.* V

Atq; est BC quidē cubi latus] *Hoc à nobis superius demonstratū est in secundam huius.* X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Ostendendum est, & qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri.



A
B
G
D

Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphęra descriptorum, sumatur; circuli centrum C; & ab eo producatur recta linea vtcumq; CB: & secetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD sit maior portio. quare CD est latus decagoni in eodem circulo descripti. exponatur icosaedri latus E, dodecaedri F, & cubi G. ergo E est trianguli æquilateri latus, F pentagoni in eodem circulo descripti: atque est F ipsius G maior portio. & quoniam E est æqualis lateri trianguli æquilateri: triāguli autem æquilateri latus est potentia triplum ipsius BC. ergo quadratum ex E quadrati ex BC est triplum: suntq; quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permutando. vt igitur quadratū ex E ad quadrata ex CB BD, ita quadratū ex BC ad quadratum ex CD. sed vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita est quadratum ex G ad quadratum ex F; est enim F maior portio ipsius G. & vt igitur quadratum ex E, ad quadrata ex CB BD, ita quadratum ex G ad quadratū ex F; & permutando; conuertendoquè. ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex CB BD. quadrato autem ex F æqualia sunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus. vt igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. & vt igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea

E

F

extrema, ac media ratione secta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atq; est G quidem cubi latus, E vero icosaedri. si igitur recta linea extrema, ac media ratione secetur, erit vt potens totam, & maiorem portionem ad eam, quæ potest totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icosaedri, in eadem sphæra descriptorum.

F. COMMENTARIUS.

A Quare CD est latus decagoni] *Si enim latus hexagoni extrema ac media ratione secetur, maior portio est decagoni latus, in eodem circulo descripti, vt nos supra demonstrauimus ad nonam tertij decimi.*

B Atq; est F ipsius G maior portio) *Ex corollario 17 tertijdecimi, nimirum ipsa G extrema, ac media ratione secta.*

C Trianguli autem æquilateri latus est potentia triplum ipsius BC] *Ex duodecima tertijdecimi.*

D Suntq; quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla) *Ex 4. tertijdecimi.*

E Etenim latus pētagoni pōt & hexagoni & decagoni latus) *Ex 10. tertijdecimi.*

F Sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media raōe secta quadratū totius, & maioris portionis ad quadratū totius & minoris portionis) *Græcus codex corruptus est qui sic habet* εἰς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ β. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ β οὕτως εὐθεῖα ἡ ΑΗ σοτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. corrige εἰς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ β δ οὕτως εὐθεῖα ἡ ΑΗ σοτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. & ita corrige paulo post. etenim hæ voces ἡ δυναμένη. & τὴν δυναμένην hoc loco supernacaneæ sunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Ostendendum nunc est vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

a huius A Quoniam enim æquales circuli cōprehendunt, & dodecaedri pentagonū, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum; in sphæris aūt æquales circuli æqualiter à centro distant. nā quæ à centro sphæræ ad plana circulorū perpendiculares ducuntur & æquales sunt, & in centra circulorū cadunt. ergo quæ à cētro sphæræ ducuntur ad centrū circuli comprehendentis, & dodecaedri pētagonum & icosaedri triangulū æquales sunt, videlicet perpendiculares ipsæ, & ob id pyramides, quę bases habent dodecaedri pentagona, & icosaedri triangula, æque altæ sunt. pyramides autem æque altæ inter se sunt vti bases. vt igitur pentagonum ad triangnlum ita pyramis, cuius basis est dodecaedri pentagonū, & vertex centrum sphæræ ad pyramidem, cuius basis est icosaedri triangulum, vertex autem sphærę centrū. ergo & vt duodecim pentagona ad viginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quę triangulares habent bases. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies, & viginti triangula superficies icosaedri, est igitur vt dodecaedri superficies ad superficiē icosaedri, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quæ triangulares bases habent. & duodecim piramides pētagonales bases habentes sunt dodecaedri solidū: viginti aūt pyramides, quæ triangulares habēt bases sunt solidū icosaedri. quare & vt dodecaedri superficies ad superficiē icosaedri, ita solidū dodecaedri solidū. vt aūt dodecaedri superficies ad superficiē icosaedri, ita ostensū est esse latus cubi ad icosaedri latus. & vt

igitur

igitur latus cubi ad icosaedri latus, ita dodecaedri solidū ad solidum icosaedri.

F. C. COMMENTARIUS.

In sphæris autem æquales circuli æqualiter à centro distant.] *Ex 6. propositione primi libri sphæricorum Theodosii.* A

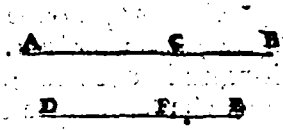
Et in centra circulorū cadūt.] *Ex 2. corollario primæ eiusdē libri sphæricorū Theodosii.* B

Pyramides autem æq; altæ sunt inter se, vti bases.] *Ex quinta & sexta duodecimi.* C

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas lineas si extrema, ac media ratione sectæ fuerint, in subiecta esse analogia, ita demonstrabimus.

Secetur.n. AB extrema, ac media ratione in C, cuius maior portio sit AC: & similiter DE extrema, ac media ratione secetur in F, vt DF sit portio maior. dico vt tota AB ad maiorem portionē AC, ita esse totam DE ad DF maiorem portionem. Quoniā.n. rectangulū quidem ABC est æquale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF æquale quadrato ex DF: erit vt rectangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex DF; & vt rectangulum, quod quater continetur AB BC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF ad quadratū ex DF: cōponēdoq; vt quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF vnà cū quadrato ex DF ad quadratū ex DF. ergo & vt quadratum ex vtraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraq; DE EF ad quadratum ex DF: & longitudine vt vtraq; AB BC ad AC, ita vtraq; DE EF ad DF: & componendo vt vtraq; AB BC vnà cum AC ad AC, hoc est duæ AB ad AC, ita vtraq; DE EF vnà cum DF ad DF, hoc est duæ DE ad DF. & antecedentium dimidia, videlicet vt AB ad AC, ita DE ad DF.



A

B

COROLLARIVM.

Itaq; hoc demonstrato videlicet qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri. atq; hoc demonstrato vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum. & insuper hoc cognito vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum, propterea quòd idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum: cōstat, si in ipsa sphæra describatur & dodecaedrum, & icosaedrum, eandem inter se proportionem habere, quam si recta linea extrema, ac media ratione secetur, habet potēs quadratū totius & maioris portionis ad eā, quæ potest quadratū totius, ac minoris portionis.

C

D

E

Quoniam enim est vt dodecaedrum ad icosaedrum, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, hoc est latus cubi ad icosaedri latus. vt autem latus cubi ad icosaedri latus, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius, & minoris portionis. ergo vt dodecaedrum ad icosaedrum, quæ in eadem sphæra describuntur, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius. & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius, & minoris portionis.

FACI COMMENTARIVS.

A Ergo & vt quadratum ex vtraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraq; DE EF ad quadratum ex DF.] *Ex 8. secundi, est enim quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC æquale quadrato ex AB BC tanquam ex vna linea. & similiter quod quater continetur DE EF vnà cum quadrato ex DF æquale quadrato ex DE EF tanquam ex vna linea.*

B Et longitudine vt vtraq; AB BC ad AC, ita vtraq; DE EF ad DF) *Ex 22. sexti.*

C Eandem habere cubi latus ad latus icosaedri.) *Ex 5. huius.*

D Ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum.) *Ex quarta huius.*

E Ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum.) *Ex 6. huius.*

Finis libri Quarti Decimi.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

Liber Quintusdecimus.

ET SOLIDORVM QVINTVS.

Vt quidam arbitrantur.

VT AVTEM ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI

DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS

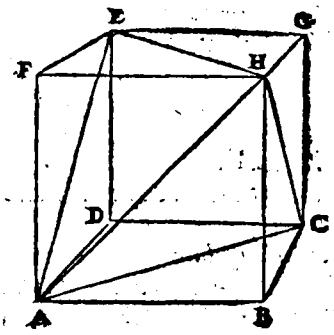
Cum Scholiis antiquis, & Commentariis Federici Comandini Vrbinatis.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. I.



IN dato cubo pyramidem describere.

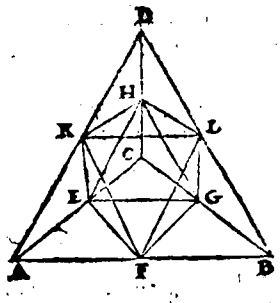
Sit datus cubus ABCD EFGH, in quo oporteat pyramidem describere. Iungantur AC AE CE AH EH HC. itaq; perspicuum est triangula A EC AHE AHC CHE æquilatera esse. quadratorum enim diametri sunt latera. pyramis igitur est AECH, & descripta est in dato cubo.



PROBLEMA II. PROPOSI. II.

In data pyramide octaedrũ describere.

Sit data pyramis ABCD, cuius latera secentur bifariã in punctis EFGHKL, & HK HL EF FG iungantur, & reliquæ. quoniam igitur AB dupla est vtriusq; HK FG, erit HK ipsi GF æqualis, & parallela. Similiter & HG æqualis, & parallela ipsi FK. æquilaterum igitur est HKFG. Dico & rectangulum esse. si enim ab ipsa KL perpendiculares ducantur ad plana EFBG FCEG EFHG HKFG similiter demonstrabimus quæ in quadrato HKFG æquilatera esse.



F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur AB dupla est vtriusq; HK GF, erit HK ipsi GF æqualis & parallela] *Est enim HK ipsi AB parallela; namque vt DH ad HA, ita est DK ad KB. & eadẽ ratione*

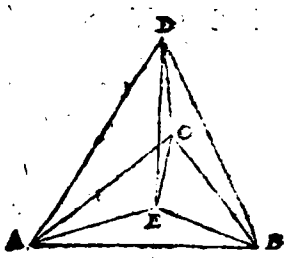
a. sexti A

9.vndecimi tione demonſtrabitur GF parallela ipſi AB. quæ autem vni, & eidem ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ ſunt. ergo HK ipſi GF eſt parallela. triangula autem DAB DHK. æquiangula ſunt.
29 primi. Namq; angulus quidem DHK eſt æqualis angulo DAB; angulus vero DKH æqualis ipſi DBA,
4.ſexti & BAD vtriq; communis. vt igitur AD ad DH, ita AB ad HK. eſtq; AD dupla ipſius DH.
9.quinti. ergo & AE ipſius HK eſt dupla. & eadē ratione erit AB dupla ipſius GF. quare HK ipſi GF eſt
33.primi. æqualis, atq; eſt parallela; vt demonſtratum fuit. quæ autem æquales, & parallelas coniungunt, & ipſæ æquales ſunt, & parallelæ. æqualis igitur: & parallela eſt HG ipſi KF. ſuntq; HK KF inter ſe æquales, cum æqualium ſint dimidiæ. ergo HKFG æquilaterum eſt.

B Dico & triangulum eſſe] *Vt hoc facile demonſtretur duo lemmata præmittenda ſunt.*

LEMMA PRIMVM.

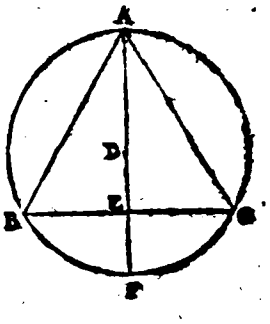
Si à vertice pyramidis ad baſim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa baſis triangulum deſcribitur.



Sit pyramis ABCD, cuius baſis triangulum ABC; & vertex D punctum: ducáturq; à puncto D ad baſim perpendicularis DE. Dico E centrum eſſe circuli circa triangulum ABC deſcripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis eſt ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, quæq; in eodem ſunt plano rectos angulos faciet. recti igitur
47.primi. *anguli ſunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex AD eſt æquale quadratis ex AE ED. & quadratum ex BD æquale quadratis ex BE ED. ſunt autem quadrata ex AD DB æqualia, quod æquales ſint AD DB. ergo quadrata ex AE ED æqualia ſunt quadratis ex BE ED. & dempto communi quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter ſe æqualia. ideoq; rectæ lineæ AE EB æquales ſunt. ſimiliter demõ*
9.tertii. *ſtrabimus CE æqualem eſſe ipſis AE EB. quare punctum E centrum eſt circuli circa triangulum ABC deſcripti. quod demonſtrare oportebat.*

LEMMA SECVNDVM.

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, baſim bifariam ſecat.



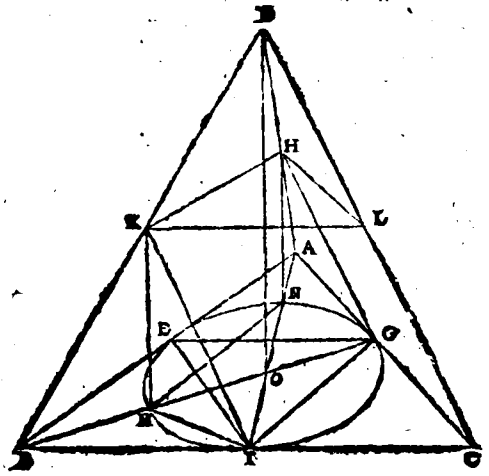
Sit triangulum æquilaterum ABC, & circa ipſum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD ſecet baſim in puncto E. Dico BE ipſi EC æqualem eſſe; producatur enim AE vſq; ad circuli circumferentiã in F. quoniam igitur AF per centrum tranſit, circuli erit diameter: ideoq; circumferentia ABF circumferentiæ ACF eſt æqualis. circum
28.tertii. *ferentia autem AB æqualis eſt circumferentiæ AC, quod recta linea*
27.tertii. *AB ſit æqualis ipſi AC. ergo & reliqua circumferentia BF reliquæ circumferentiæ FC, & angulus BAE angulo EAC æqualis erit. itaq; trianguli ABE duo latera BA AE æqualia ſunt duobus lateribus C*
8.primi. *A AE trianguli AEC: & angulus BAE æqualis eſt angulo EAC. ergo & baſis BE baſi EC eſt æqualis. quod oportebat demonſtrare.*
Poteſt ĕt hoc ꝓbari ex tertia ſexti lib. cum BA ſit æqualis ipſi AC.

COROLLARIVM.

Ex quibus, & ex tertia tertij cõſtat rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum deſcribitur, ad baſim perpendicularem eſſe.

His

His demonſtratis ducatur à vertice pyramidis ABCD ad baſis planum perpendicularis, quę ſit DO. erit ● centrum circuli circa triangulum ABC deſcripti, ex primo lemmate eorum, quæ nos præmiſimus. Itaque per latus pyramidis BD, & per DO ducatur planum pyramidem ſecans. erit illud rectum ad planum baſis AB C, atq; erit eius, & trianguli ABC communis ſectio BO, quę vlterius protracta cadet in G ex ſecundo lẽmate præmiſſorum: & erit ad ipſam AC perpendicularis. eadem ratione ſi per latus pyramidis AD, & per DO intelligatur ductum aliud planũ, ad baſim rectum erit, & communis ipſorum ſectio erit recta linea AOF ad ipſam BC perpendicularis. ducantur à punctis KH ad planum trianguli ABC perpendiculares KM HN. cadent hę in communes planorum ſectiones ex 38 vndecimi, hoc eſt KM cadet in BO, & HN in ipſam AO: & BO AO in punctis MN bifariam dividẽtur. Quoniam enim DO KM perpendiculares ſunt ad idem planum inter ſe parallelæ erunt. quare vt BK ad KD, ita eſt BM ad MO. ſed BK eſt æqualis KD. ergo & BM ipſi MO æqualis erit. Eadem ratione demonſtrabitur AN æqualis NO. & quoniam perpendicularis à circuli centro ducta ad latus trianguli æquilateri dimidia eſt eius, quæ ex centro circuli, vt ad primã, quartidecimi libri demonſtrauimus: erit OF dimidia ipſius OA, & OG dimidia ipſius OB. & cum FO OG ſint æquales, quoniam & ipſæ AO OB quæ ex circuli centro; omnes AN NO OF BM MO OG inter ſe æquales erunt. centro igitur O, & interuallo vna ipſarum FO OG circulus deſcriptus etiam per puncta MN tranſibit. deſcribatur, & NM MF iungantur. quod cum triangula BDO BKM ſint æquiangula, propterea quod linea KM parallela eſt ipſi DO: erit vt DB ad BK, ita DO ad KM: eſtq; DB dupla ipſius BK. ergo & DO ipſius KM dupla erit. & ita demonſtrabitur DO dupla ipſius HN. quare KM HN inter ſe æquales ſunt. & ſunt parallelæ, quippe quod ad idem planum ſint perpendiculares. quæ autem æquales, & parallelas coniungunt, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. æqualis igitur eſt, & parallela MN ipſi KH. ſed FG demonſtrata eſt æqualis, & parallela eidem KH. ergo MN FG æquales ſunt, & parallelę. angulus autem NMK eſt rectus: & ſimiliter rectus NMF, quod in ſemicirculo. quare cum NM duabus rectis lineis KM MF ſe inuicẽ ſecantibus in cõi ſectione ad rectos angulos inſiſtat. ẽt ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. ergo NM perpendicularis eſt ad planum trianguli KMF. Sed demonſtrata eſt FG parallela ipſi MN. quare & FG ad idem planũ perpendicularis erit. ideoq; angulus GFK eſt rectus. ſunt autem anguli GFK FG H duobus rectis æquales. ergo & rectus eſt FGH: et ſimiliter recti, qui ipſis opponũtur. ex quibus ſequitur HK FG & æquilaterum eſſe, & rectangulum quod oportebat demonſtrare.

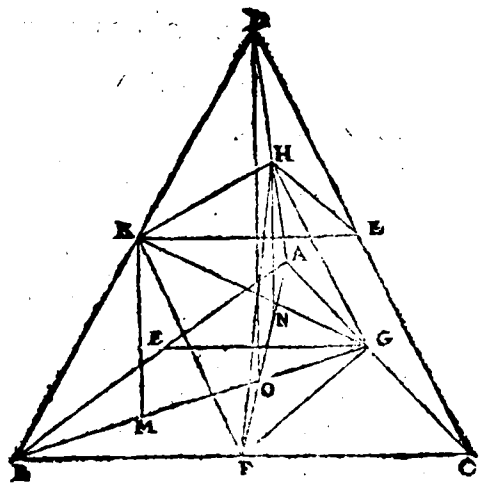


18. vndeci.

6. vndecim. 2. ſext.

4. ſext.

9. quinti. 6. vndecimi 33. primi.



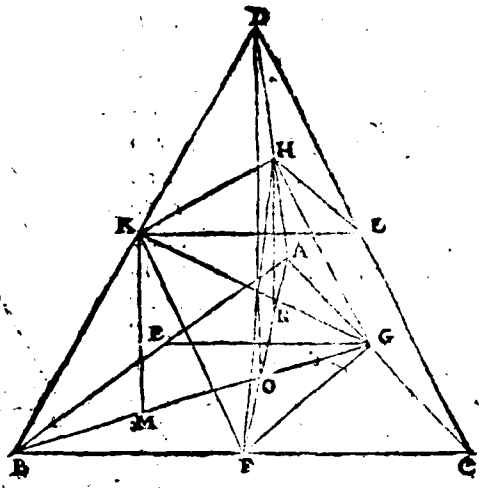
4. vndecim.

8. vndecimi

29. prim.

ALITER. Ductis KM MN perpendicularibus, vt in antecedenti figura, iungantur HF KG & qm̃ perpendicularis BG eſt æqualis ipſi AF; eſt enim AB ad vtramq; ipſarum, vt 4 ad 3, quod nos demõſtrauimus ad 12 tertij de-

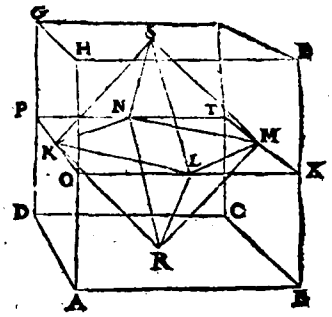
tertij decimi libri. sed & BM est æqualis AN; erit & reliqua MG reliquæ NF æqualis: atque est KM æqualis HN. triangulii igitur KMG duo latera GM MK æqualia sunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF: & angulus GMK rectus est æqualis recto FNH. ergo & basis KG basi FH est æqualis. rursus. Quoniam duo latera FK KH æqualia sunt duobus lateribus GHHK, & basis FH est æqualis basi GK: erit angulus FKH æqualis angulo GHK. & sunt duobus rectis æquales. vterq: igitur ipsorum est rectus, itemq; recti qui ipsis opponuntur. ergo HKFG rectangulum est. quod oportebat demonstrare.



PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

A **In dato cubo octaedrum describere.**

Sit datus cubus ABCDEFGH: & sumantur
B centra insistentium quadratorum KLMN.
C Dico KLMN quadratum esse. ducantur per KLMN parallelæ PO OX XT TP. Quoniã
D igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO
E autem dupla ipsius OL, suntq; æquales PO OX; erunt & KO OL inter se æquales. quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex O
F L. eadem ratione & quadratum ex ML duplũ est quadrati ex LX. ergo quadratum ex KL
G quadrato ex LM est æquale. æquilaterum igitur est KLMN, & constat rectangulum esse.



H Sumantur duo quadrata BD EG; ipsorumq; centra RS, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN. perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. quod eadem ratione demostrabimus.

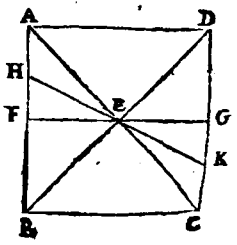
F. C. COMMENTARIVS.

A Et sumantur centra insistentium quadratorum] *videlicet quadratorum CA AE EC CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum, qui circa quadrata describuntur.*

B Ducantur per KLMN parallelæ PO OX XT TP] *Hoc est ducatur PO parallela alterutri ipsarum DA GH: & OX parallela alterutri ipsarum AB HE, & sic in aliis,*

C Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem dupla ipsius OL] *Centrum enim eas bifariam secat, vt demonstrabitur.*

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD conuenientes in puncto E perque E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela. Dico FE ipsi EG æqualem esse.



29. primi. 15. primi. *Anguli enim FAE est æqualis angulo GCE, & anguli AEF angulo CEG ad verticem enim sunt. reliquus igitur reliquo æqualis, & triangulum triangulo simile. quare vt AE ad EF, ita est CE, ad EG: & permutando vt AE ad EC, ita FE ad EG,*

atque

æque est AE æqualis EC, quod AE sit circuli diameter, & E centrum eiusdem. ergo FE ipsi FG æqualis erit. centrum autem non solum ipsum FG bifariam secat, sed & alias omnes, quæ in quadrato per ipsam ducuntur. quod eodem modo demonstrabimus.

Suntq; æquales PO OX,] *Est enim PO æqualis DA, & OX æqualis AB ex 34. primi. quare PO ad OX est vt DA ad AB: & sunt DA AB inter se æquales. ergo & PO OX æquales erunt.* D

Quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL.] *Est enim quadratum ex KL æquale quadratis ex KO OL ex 47. primi.* E

Ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est æquale.] *Ex quo sequitur & rectam lineam KL ipsi LM æqualem esse. sed & aliter demonstrare possumus. Quoniam enim duo latera KO OL sunt æqualia duobus lateribus LX XM, & angulus ad O rectus est æqualis recto ad X; erit & basis KL basi LM æqualis ex 4. primi. & eodem modo demonstrabitur LM æqualis MN, & OK æqualis KN. quare omnes inter se æquales sint necesse est.* F G

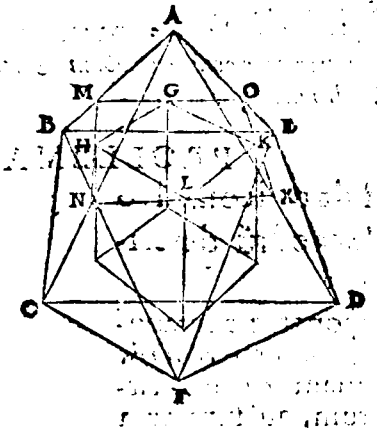
Et constat rectangulum esse.] *Quoniam enim KO est æqualis OL, & angulus KOL est rectus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem caussam angulus MLX est dimidius recti. reliquus igitur KLM rectus est. sunt enim tres anguli duobus rectis æquales. Eadem ratione & vnusquisque aliorum angulorum LMN MNK NKL rectus demonstrabitur.* H

Perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. Quod eadem ratione demonstrabimus.) *Isdem enim argumentis probabimus KSMR NSLR æquilatera esse, & latera eorum ipsis KLMN æqualia.*

PROBLEMA IV. PROPOSITIO IV.

In dato octaedro cubum describere.

Sumantur centra circulorum, quæ sunt circa triãgula ABE ABC ACD ADE, quæ sint GHKL. & GH GK LK LH iungantur. dico GH KL quadratum esse. ducantur per GHKL ipsis EB BC CD DE parallelæ OM MN NX XO quoniam igitur æquilaterum est ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A ducitur ad H centrũ circuli circa triangulum ABC descripti bifariam secat trianguli angulum, qui est ad A. æqualis igitur est MH ipsi HN. eadem ratione & MG est æqualis GO. quoniam autem MN est æqualis MO, & MO ipsi OX; erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK; suntq; anguli HMG GOK recti. ergo HG ipsi GK est æqualis. eadem ratione & reliquæ æquales erunt. cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano. & cum vterq; angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit, similiter & reliqui. quadratũ igitur est GHKL. possumus autem à principio sumentes centra GHKL, ducentesq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG, & dicere GHKL quadratum esse. quod si sumentes reliquorum triangulorum centra, ipsa iungamus, ostendẽtur & reliqua quadrata esse, habebimusq; in dato octaedro descriptum cubum. Quod facere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur æquilaterum est ABC triangulum, recta linea quæ à puncto A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC descripti bifariam secat trianguli angulum, qui est ad A. æqualis igitur est MH ipsi HN.] *Superius n. demonstratũ est rectã lineã ab angulo triãguli æquilateri ductã per centrũ circuli, qui circa triãgulũ describitur*

describitur basim bifariam secare sequitur etiam hoc ex demonstratis in decima primi libri. quod si per centrum H ducatur MN ipsi BC parallela, demonstrabitur eadem ratione MH æqualem esse ipsi HN, cum MA ipsi AN sit æqualis, sunt enim triangula BAC MAN inter se similia.

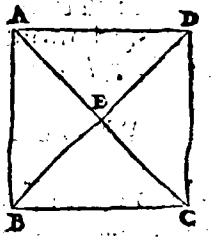
B Quoniam autem NM est æqualis MO, & MO ipsi OX, erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK.] *Cum enim rectæ lineæ NM MO parallelæ sint ipsis CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC simile, & triangulum AMO simile triangulo ABE. vt igitur CB ad BA. ita est NM ad MA. & vt AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex æquali vt CB ad BE, ita NM ad MO. sed CB est æqualis ipsi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipsi MO est æqualis. & eadem ratione MO ipsi OX æqualis demonstrabitur. est autem HM dimidia ipsius MN, & MG dimidia ipsius MO. quare sequitur HM ipsi MG æqualem esse, & ita GO æqualem ipsi OK.*

C Sunt q; anguli HMG GOK recti.] *Quoniam enim rectæ lineæ NM MO parallelæ sunt ipsis CB BE, atq; est angulus CBE rectus, & NMO angulus rectus erit, ex 10. vndecimi.*

D Ergo HG ipsi GK est æqualis.] *Ex 4. primi.*

E Cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano.) Omne enim parallelogrammum est in vno plano.

Sit parallelogrammũ ABCD, & iungantur AC BD, quæ se se in puncto E secent. erit triangulum ABC in vno plano ex 2. vndecimi. itemq; in vno plano. triangulum ACD. sed & triãgulum BCD est in vno plano. quare triangulum DEC, hoc est totum triangulum ACD est in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc est ipsum ABC. totum igitur parallelogrammũ ABCD in vno plano erit. quod oportebat demonstrare.



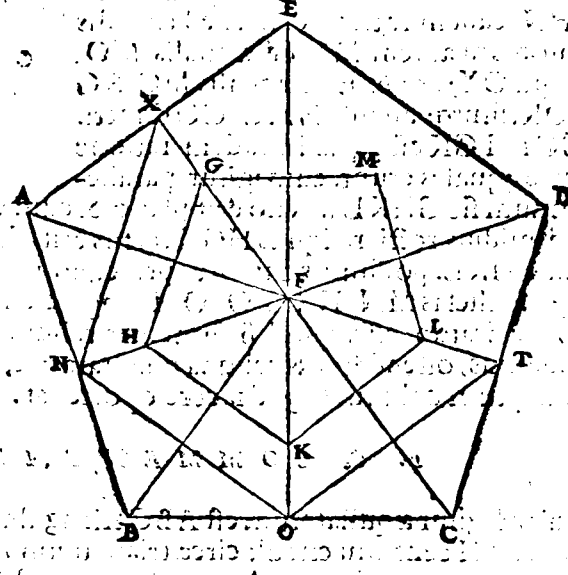
F Et cum vterq; angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit.) *Sunt enim triangula HMG GOK æquicrura, & anguli ad M, & O recti; vt demonstratum iam est.*

Ex iã demonstratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis describatur.

Si enim in dato octaedro cubum, & rursus in cubo pyramidem describamus, & pyramis in dato octaedro descripta erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

In dato icosaedro dodecaedrũ describere.



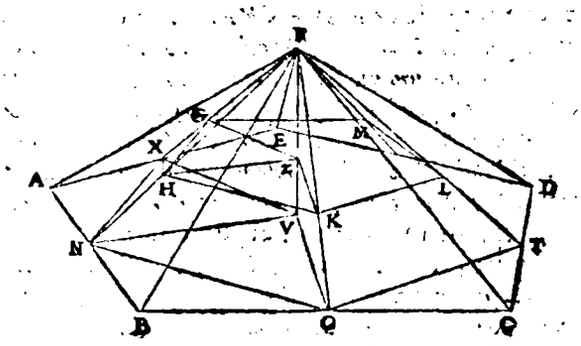
A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE, & sumantur centra circulorum, qui sunt circa triangula AFE AFB BFC CFD DFE, videlicet GHKLM, iunganturq; GH HK KL LM MG, & rursus iunctæ FG FH FK producantur ad puncta XNO, quæ rectas lineas EA AB BC in XNO punctis bifariam secabunt: atq; erit

B vt XN ad NO. ita GH ad

D HK æqualis igitur est & HN ipsi KO. Similiter autem, & reli-

qua

qua pentagoni GHKLM latera æqualia oſtendentur. Dico & æquiangulum eſſe. Quoniam enim duæ XN NO parallelę duabus GH HK æquales angulos continent, & reliqua manifeſta ſunt. Intelligatur à puncto F ad planum pẽtagoni ABCDE ducta perpendicularis, quæ cadet in centrũ circuli circa pentagonum deſcripti. ſi igitur à puncto N ad punctum, in ꝙ dicta perpendicularis cadit, rectam lineã ducamus, & per H ducamus ipſi parallelam, perſpicuum eſt eam perpendiculari occurrere, & eum ipſa rectum angulum continere. Rurſus ſi à punctis XO ad centrum circuli circa pentagonum deſcripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo linea per H ducta perpendiculari occurrit ad GK rectas lineas ducamus, manifeſtum eſt ipſas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Ex quo perſpicue conſtat pentagonum GHKLM in vno eſſe plano.



I
K
G
H
K

F. C. COMMENTARIVS.

Exponatur pentagonum i coſaedri ABCDE] *Hoc eſt pentagonum deſcriptum in circulo, à quo icoſaedrum ortum habet, vt in 16. terti decimi.* A

Quæ rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam ſecabunt] *Ex iis quę nos in antecedente demonſtrauimus.* B

Atque erit vt XN ad NO, ita GH ad HK] *Quoniã enim triangula AFE AFB BFC æquilatera ſunt, & æqualia; erunt perpendiculares, quæ ab angulo F ad baſim ducuntur, videlicet FX FN FO inter ſe æquales. latus enim trianguli æquilateri ad perpendicularem, quæ ab angulo ad baſim ducitur, eam proportionem habet, quam 4. ad 3, vt nos demonſtrauimus ad 12 terti decimi. Rurſus quoniam GHK ſunt centra circulorum, qui circa triangula deſcribuntur, erunt & ipſæ, quæ ex centris FG FH FK æquales. ergo & reliqua æquales ſunt, nempe GX HN KO. ſunt autem æquales EA AB BC & earum dimidiæ EX XA AN NB BO OC. cum igitur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN æqualia ſint duobus lateribus NB BO trianguli BON; & anguli ad AB ſint æquales, ponitur enim pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum: erit & baſis XN baſi NO æqualis. ſed vt FG ad GX, ita eſt FH ad HN: eſt enim vtraque vtriuſque dupla, vt ad primam quartidecimi demonſtratum eſt. ergo GH parallela eſt ipſi XN. & eadem ratione HK ipſi NO eſt parallela. triangulum igitur FGH ſimile eſt triangulo FXN, & triangulum FHK ſimile ipſi FNO: ideoq; vt NX ad HG, ita eſt NF ad FH. vt autem NF ad FH, ita NO ad HK. quare vt NX ad HG, ita NO ad HK. & permutando vt XN ad NO, ita GH ad HK. ſunt autem æquales XN NO. ergo & GH HK æquales ſint neceſſe eſt.* C

Æqualis igitur eſt, & HN ipſi KO) *Videne potius legendum ſit æqualis igitur eſt, & GH ipſi HK propter ea, quæ ſequuntur.* D

Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent, & reliquà manifeſta ſunt) *Nam cum duæ XN NO ſeſe contingentes duabus GH HK, ſe ſe contingentibus ſint parallelę, non autem in eodem plano; æquales angulos continebũt. ergo angulus GHK eſt æqualis angulo XNO. & ſimiliter bifariam ſecta CD in T, & iuncta OT, erit angulus HKL æqualis angulo NOT. ſed anguli XNO NOT ſunt æquales, vt mõſtrabitur. ergo & GHK HKL anguli æquales erunt. & ſimiliter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON CTO æquicrura ſunt ſimilia, & æqualia, erunt anguli AXN ANX BNO BON COT inter ſe æquales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO eſt æqualis reliquo NOT: itemq; reliqui æquales oſtendentur.* E

Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonũ deſcripti) *Cadat enim in punctũ K,* F

&

& intelligatur iunctæ AV BV CV. quoniam igitur FV perpendicularis est ad planum pentagoni, erunt anguli AVF BVF CVF recti, & ob id quadratum ex AF æquale duobus quadratis ex AV VF: & quadratum ex BF æquale duobus ex BV VF. sed quadratum ex AF est æquale quadrato ex BF, quod AF ipsi FB sit æqualis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF sunt æqualia, & dempto communi quadrato ex FV, erit reliquum ex AV æquale reliquo ex VB, & recta linea AV ipsi VB æqualis. Eadem ratione, & recta linea CV æqualis ostendetur ipsis AV VB. ergo V est centrum circuli circa pentagonum descripti. quod demonstrare oportebat.

g. diffi. vndecimi. 47. primi. 9. tertii.

Perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum continere] Nam cum triangulum FNV sit in vno plano, si recta linea à puncto H ducta non occurreret perpendiculari, parallela non esset ipsi NV, quod non ponitur. sunt enim parallelæ in eodem plano ex 35 diffinitione primi libri. Occurat autem perpendiculari in puncto Z. cum igitur angulus NVF sit rectus ex 3. diffi. vndecimi, erit ex 29 primi & HZF rectus.

a. vndecimi. H

Manifestum est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere] Quoniam enim HZ est parallela ipsi NV; erit vt FZ ad ZV, ita FH ad HN. sed vt FH ad HN, ita FG ad GX. vt igitur FZ ad ZV, ita FC ad GX. quare GZ est parallela ipsi XV; angulusque GZF est rectus, nempe ipsi recto XVF æqualis. & eadem ratione angulus KZF rectus erit; inflexique LZ MZ similiter demonstrabitur angulos LZF MZF esse rectos.

a. sexti 11. quinti. K

Ex quo perspicue constat pentagonum GHKLM in vno esse plano] Ex quinta vndecimi. nam recta linea FZ tribus rectis lineis se se tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos insistit. Si igitur reliquis icosaedri angulis eodem modo pentagona subtendemus in dato icosaedro dodecaedrum descriptum erit.

De quinque figurarum lateribus, & angulis.

Oportet autem scire, si quis interroget nos, quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum est. Patet icosaedrum contineri viginti triangulis, & vnumquodq; triangulum ex tribus rectis lineis cõstare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli. fient sexaginta, cuius dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnumquodq; pentagonum habet quinq; rectas lineas, multiplicabimus decies quinq; & erũt sexaginta, cuius rursus dimidium triginta. dimidium autem id circo accipimus, quod singula latera siue sit triangulum, siue pentagonum, siue quadratum, vt in cubo, bis sumantur. Eadem via, & ratione vtentes, & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inueniemus. si vero singularum quinq; figurarum anguli inuestigandi sint, rursus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quæ vnum solidi angulum continent; vt quoniam in icosaedri angulum continent quinq; triangula partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri cõtinent angulum, partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De inclinatione planorum, quæ singulas quinq; figuras continent.

Quæsitum est quomodo in vnaquaq; solidarum quinq; figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipsam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narauit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. In cubo quidem plana, quæ ipsum continent, ad rectos inter se angulos inclinari manifestum est. In pyramide vero exposito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quæ à vertice trianguli ad basim perpendicularis ducitur, circumferentiæ descriptæ se mutuo secent, & à sectione ad centra iunctæ rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quæ pyramidem comprehendunt. At in octaedro à latere trianguli descripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, interuallo autem similiter perpendiculari, quæ à vertice trianguli ad basim ducitur, describatur circumferentiæ; & rursus rectæ lineæ à communi sectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. In icosaedro autem à latere trianguli descripto pentagono, subtenditur recta linea, quæ duobus lateribus subtenditur; & centris quidem terminis eius, interuallo que perpendiculari ipsius trianguli descriptis circumferijs rectæ lineæ à communi sectione ad centra iunctæ continebunt similiter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipsius icosaedri. Deniq; in dodecaedro exposito vno pentagono, & iuncta similiter recta linea, quæ duobus lateribus subtenditur, centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni ipsi parallelum ducitur, describantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conueniunt ad centra similiter iunctæ rectæ lineæ continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationationis planorū dodecaedri.

Cubi planorum inclinatio.

Pyramidis

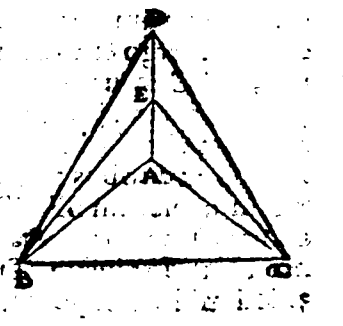
octaedri plānorum inclinatio.

icosaedri plānorum inclinatio.

Dodecaedri planorum inclinatio.

Hunc quidem virum clarissimis de prædictis sermonem habuit, cum demonstratio eorum sibi manifesta videretur. sed vt contemplato demonstratiua perspicue appareat, sermonem in vnoquoq; explicabo, & primum in pyramide.

Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius basis ABC & vertex D punctum, secto autē latere AD bifariam in E iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera sunt ADB, ADC triangula, & bifariam secta est AD, erunt BE EC ad ipsam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum esse.

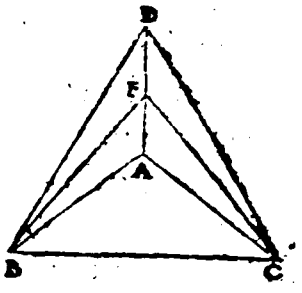


A

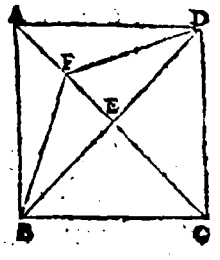
Vt

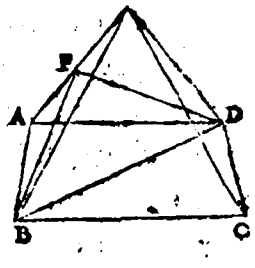
Quoniam

Quoniam .n. AC dupla eſt ipſius AE, erit quadratum ex AC quadrati ex AE quadruplum. ſed quadratum ex AC æquale eſt quadratis ex AE EC, quorum
B quadratum ex AC ad quadratũ ex CE proportionẽ
C habet, quam 4. ad 3, atq; eſt CE ipſi EB æqualis. quadratum igitur ex BC minus eſt quadratis ex BE EC; ideoq; angulus BEC eſt acutus. quod cum duorum planorum ABD ADC communis ſectio ſit AD, & cõmuni ſectioni ad rectos angulos occurrant in vtro que planorum rectę lineę BE EC, quas acutũ angulum continent. erit angulus BEC planorum inclina-
D tio, atq; eſt data; datur enim BC latus exiſtens trian-
E guli, vtraq; ipſarum BE EC eſt perpendicularis trianguli æquilateri. centrio igitur BC, hoc eſt terminis vnius lateris, & interuallo trianguli perpendiculari deſcriptæ circumferentiæ ſe inuicem ſecent in puncto E: & ab eo ad BC iunctę rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem eſt, quod dicebatur. atq; illud (centris quidem BC, interuallo autem trianguli perpendiculari deſcripti circuli ſe mutuo ſecent) manifeſtum eſt. vtraq; enim BE EC maior eſt, quã dimidia ipſius BC: & centris BC, & internallo ipſius BC dimidia deſcripti circuli ſe ſe tangunt. ſi autem minor ſit, neq; ſe tangunt, neq; ſecant: quod ſi maior omnino ſecant; & ita de pyramide ſermo & manifeſtus, & demonſtrationibus congruens apparet.



Intelligatur rurſus in quadrato ABCD pyramis vertícem habens punctum E, & continentia ipſam prętęr baſim triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis dimidia octaedri. ſecetur latus vnius trianguli AE bifariam in F: & BF FD iungantur. ſunt igitur BF FD & æquales inter ſe, & ad ipſam AE perpendiculares. dico angulum BFD obtuſum eſſe. iungantur enim BD; & quoniam quadratum eſt AC, cuius diameter BD, erit quadratum ex BD quadrati ex DA duplum. quadratũ autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem habet, vt proxime dictum eſt, quam 4. ad 3. ergo & quadratum ex BD ad quadratum ex DF proportionem habebit, quam 8. ad 3. eſt autem DF æqualis FB. quadratum igitur ex BD maius eſt quadratis ex BF FD, ac propterea angulus BFD eſt obtuſus. & quoniam duorũ planorũ ABE ADE ſe inuicẽ ſecantium cõmunis ſectio
G eſt AE & ipſi ad rectos angulos in vtroq; plano ductæ ſunt BF FD, angulum obtuſum continentes erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis, inclinationis planorum ABE ADE. ſi igitur angulus BFD datus ſit, &
H dicta inclinatio dabitur. Itaq; quoniam trianguli octaedri datum eſt, & vnum eius latus eſt AD, à quo quadratum AC deſcribitur, datur & BD diameter exiſtens quadrati. ſed & BF FD trianguli perpendiculares datæ ſunt. ergo & angulus BFE dabitur. deſcripto igitur quadrato à latere trianguli, vt AC, & iuncta diametro BD, ſi centris quidẽ BD, interuallo autem perpendiculari trianguli circulos deſcribamus, ſe mutuo ſecabunt in F, & rectæ lineæ à puncto F ad centra ductæ continebunt inclinationẽ BFD, quæ quidẽ eſt reliqua ex duobus rectis, vt dictum eſt. inclinationis planorũ. & hoc loco patet vtramq; ipſarum BF FD maiorem eſſe, quam ipſius BD dimidiam. ideoq; in conſtructione organica neceſſe eſt circuos ſe mutuo ſecare. cõſtat etiam ex demonſtratione ipſam BD ad DF potenti proportionem habere. quã habet & ad 3. & dimidiæ eius potentia eſſe quadruplam. ergo vtraq; ipſarum BF FD ma-



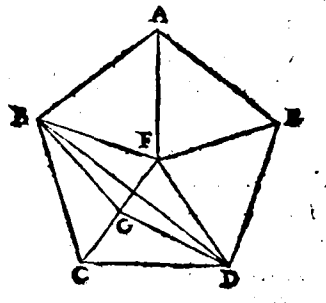


ior

ior est quam dimidia ipsius BD, & hęc quidem de octaedro dicta sint.

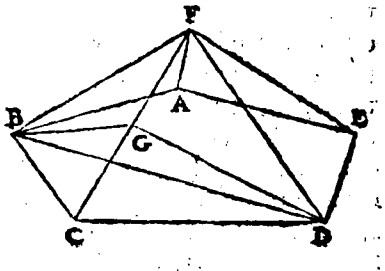
In icosaedro autem intelligatur pentagonũ æquilaterum ABCDE, & in hoc pyramis verticẽ habens punctum F, ita vt continentia ipsam triãgula sint æquilatera. erit ABCDE pyramis figuræ icosaedri pars. secetur latus vnius trianguli FC bifariam in G, & BG GD iungantur. erunt vtiq; & æquales, & ad ipsam FC perpendiculares. dico angulum BGD obtusum esse, quod per se se manifesto constat. Iuncta .n. BD obtusum angulũ BCD pentagoni subtẽdit: hoc autẽ maior est angulus BGD. nã BG GD ipsis BC CD sunt minores. similiter ijs, quæ proxime dicta sunt, patet angulum BGD esse cum, qui reliquitur ex duobus rectis inclinationis BFC CFD triangulorum. hoc autẽ dato, dabitur & planorum icosaedri inclinatio. à latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono, & recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, vt in figura est BD data; & similiter datis BG GC perpendicularibus triangulorum, dabitur & BGD angulus. nam si centris quidem terminis ipsius BD, quę duobus pentagoni lateribus subtenditur, interuallo autem perpendiculari trianguli circuli describantur, se inuicem secabunt, vtpote G: & rectæ lineæ à puncto G ad extra BD ductæ cõtinebũt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura manifestum est vtrãq; BG GD maiorem esse, quàm dimidiam ipsius BD. quamquam ita esse ex constructione organica demonstrari potest. intelligatur enim seorsum triangulũ æquilaterum HKL, & ab ipsa KL pentagonũ describatur KMNXL: iunctaq; ML ducatur HO perpendicularis trianguli HKL. dico HO maiorem esse dimidia ipsius ML, quæ inclinationem planorum subtendit. ducta enim à puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniam ãgulus KLP maior est tertia parte recti, hoc est maior angulo KHO; constituatur angulo KHO æqualis angulus PLR. ergo PL est perpendicularis æquilateri triãguli, cuius latus est RL; ac propterea quadratũ ex RL ad quadratum ex LP proportionem habet, quã 4. ad 3. sed maior est KL quam LR. ergo quadratũ ex KL ad quadratum ex LP maiorem habet proportionẽ, quã 4. ad 3. habet autem & ad quadratũ ex HO proportionem eam, quam 4. ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet, quam ad HO. maior igitur est HO quam LP.

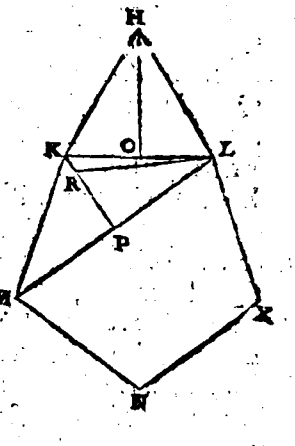
In dodecaedro autẽ hoc modo intelligatur vnũ cubi quadratũ, a quo dodecaedrum describitur ABCD, & duo plana dodecaedri AEBFG GDHCE. dico & sic datam esse duorum pentagonorum inclinationem. secetur FG bifariam in K; & a puncto K ipsi FG ad rectos angulos ducantur in vtroq; planorũ KL KM: & ML iungatur. itaq; primum. dico angulũ MKL obtusum esse. ostensum .n. est in tertiodecimo li-



K

L



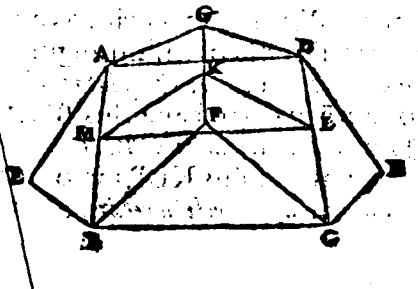


M

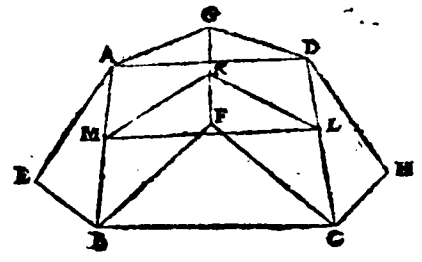
N

O

P



bro elementorũ, & in cõstitutione dodecaedri, rectam lineam, quæ a puncto K ad quadratum ABGD perpendicularis ducitur, dimidiam esse lateris pentagoni. quare minor est quã dimidia ipsius ML. ideoq; angulus MKL est obtusus. simul autem demonstratum est in eodem theoremate, quadratum quidem ex KL æquale esse, & dimidij lateris cubi quadrato, & quadrato dimidij



lateris pentagoni, ita vt KL, & KM inter se æquales maiores sint, quam dimidia ipsius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. Itaq; quoniã latus quadrati ABCD duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datum est pentagonum; erit & ML data. data autem est & vtraq; ipsarum MK KL; perpendiculares enim sunt à bipartita sectione rectæ lineę AB, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentagoni ipsi parallelum, vt ad FG. ergo angulus LKM datus est, nempe reliquus ex duobus rectis, vt dictũ est, inclinationis eius, quã inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectã lineam duobus lateribus subtensam, quę lateri cubi est æqualis: & cẽtris quidẽ terminis ipsius, interuallo autẽ perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, vt in figura sunt KL KM, describere circũferentias, atq; à pũcto in quo conueniunt ad centra rectas lineas ducere, quæ cõtinent angulũ reliquũ ex duobus rectis, inclinationis planorũ. at vero perpendicularẽ KM maiorẽ esse dimidia ipsius ML iã dictum est, vt in elemẽtis simul est demõstratũ.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erunt BE EC ad ipsam AD perpendiculares.] *Ex ijs, quæ nos ad 12. tertiædecimi libri demonstrauimus*

B Quorum quadratũ ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet quam 4. ad 3.] *Ex demonstratis in eodem loco.*

C Quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC] *Est enim quadratum ex BC ad quadrata ex BE EC, vt 4. ad 6.*

D Erit angulus BEC planorum inclinatio.) *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*

E Et vtraq; ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri.] *Dato autẽ latere trianguli æquilateri, & perpendicularis dabitur ex secunda libri datorum, est enim latus trianguli æquilateri ad perpendicularem. vt 4. ad 3.*

F Quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD.] *Est enim quadratum ex BD ad quadrata ex BF FD, vt 8. ad 6.*

G Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE ADE] *Est enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quę ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroq; planorum ducuntur. quare dempto BFD angulo obtuso ex duobus rectis relinquetur acutus angulus, qui est inclinationis planorum ABE ADE. & cum angulus BFD datus sit, & inclinatio planorum detur necesse est ex quarta libri datorum.*

H Datur & BD diameter existens quadrati.] *Ex 26. libri datorum.*

K Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtendit.] *Angulus nãq; pentagoni constat ex recto, & quinta recti parte.*

L Hoc autẽ maior est angulus BGD, nam BG GD ipsis BC CD sunt minores.] *Ex 21. primi. sunt enim BG GD minores, sed maiorem angulum continent.*

M Quoniam angulus KLP maior est tertia parte recti.] *Angulus enim pentagoni ad KL, continet rectũ, & recti quintam, vt dictum est, ergo anguli KML KLM sunt quattuor quinq; recti*

ta recti, & ipſe KLM duæ quintæ. duæ autem quintæ ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6. ad 5.

Sed maior eſt KL quàm LR.] *Iunctæ enim MR, erunt duæ MK KL maiores MR RL ex 21. primi. ergo & dimidia KL quàm dimidia LR maior erit.* N

Maior igitur eſt HO quàm LP.) *Ex 10. quinti.* O

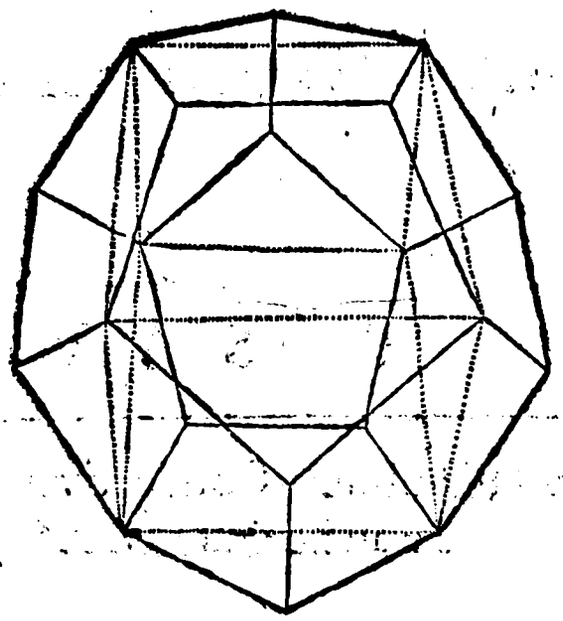
Intelligatur vnum cubi quadratum, à quo dodecaedrum deſcribitur.] *Ad conſtitutionem enim dodecaedri vtitur ipſius cubi quadratis, vt in 17. tertij decimi apparet.* P

Ex ijs autem quę proxime tradita ſunt, & ex demonſtratis in 17. tertij decimi libri conſtat, quomodo in dato dodecaedro cubus deſcribatur.

Quoniam enim in dodecaedri conſtitutione cubi planis vtimur, & ad ſingula eius latera ſingula pentagona dodecaedri deſcribimus, ſi in dodecaedro iam facto appoſite ducamus rectas lineas, quę duobus cuiuſq; pentagoni lateribus ſubtendantur, cubus ipſe conſtitutus erit, vt in ſequenti figura apparere poteſt.

Ex quibus iam perſpicuum eſt quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipſa tum octaedrum deſcribatur.

Nam ſi in dodecaedro cubum, & rurſus in cubo pyramidem vel octaedrum deſcribamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro deſcripta ſint neceſſe eſt.



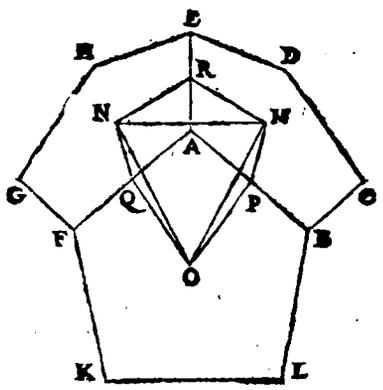
In dato icoſaedro cubum deſcribere.

Primum in icoſaedro dodecaedrum deſcribemus vt in 5. huius dictum eſt; deinde in dodecaedro cubũ, & ita cubus in dato icoſaedro deſcriptus erit.

In dato icoſaedro pyramidem deſcribere.

Si .n. deſcribamus ex antecedenti in icoſaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icoſaedro deſcripta.

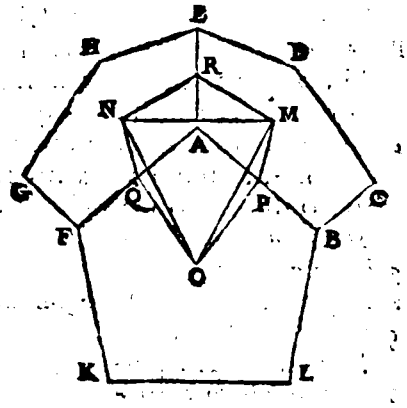
In dato dodecaedro icoſaedrum deſcribere.



Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE, AFGHE, AIKLB: ſumaturque centra circulorum, qui circa pentagona deſcribuntur MNO. & ab ipſis ad latera pentagonorũ perpẽdiculares ducãtur MP OP NQ OQ MR NR: & MN, NO OM iungantur. erunt ex iam demonſtratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipſius dodecaedri, & idcirco inter ſe æquales: denique æquales perpendiculares ipſę. quare trianguli

MOT

MOP duo latera MP PO aequalia sunt duobus lateribus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO est æqualis angulo MRN. basis igitur OM est æqualis basi MN, & ita demonstrabitur basis ON ipsi NM æqualis. ex quibus constat triangulum MNO æquiangulum esse. ergo si reliquis dodecaedri angulis triangula æquilatera eodem modo subtendantur, descriptum erit icosaedrum, sunt enim omnes anguli ipsius dodecaedri numero viginti, quot sunt icosaedri triangula. In dato igitur dodecaedro icosaedrum descriptum est. Quod facere oportebat.



FINIS EVCLIDIS ELEMENTORVM.

PISAVRI.

Apud Flaminium Concordiam. M. DC. XIX.
De auctoritate D.D. Superiorum.

1009658