

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

47
LES QUINZE LIVRES
DES ELEMENTS
D'EUCLIDE.

Traduits en François par D. HENRION,

TOME II.



A ROUEN,

Chez JEAN LUCAS, rue aux Juifs, à côté de
la petite porte de l'Hôtel de Ville.

M. DC. LXXVI.

STANDARD
STANDARD SEC
SCHEDULE

MOBILE, ALA. 1900

II E M O T



STANDARD

STANDARD SEC
STANDARD SEC

STANDARD



AVERTISSEMENT.

A large, ornate initial letter 'D' decorated with intricate floral and foliate patterns. The letter is the first letter of the word 'AUTANT' in the following text.
A U T A N T que Com-
mandin , Stevin , &
Dibuadius , ont estimé
que le dixième Livre
d'Euclide seroit ren-
du beaucoup plus clair & intelli-
gible , si on y joignoit les nom-
bres , je les ay ajoûtez aux endroits
les plus difficiles & obscurs , me
servant quelquefois du travail de
ces Autheurs. Et voyant que cha-
cun n'entend pas les operations des
nombres radicaux & des nombres
sourds , lesquelles neanmoins sont
nécessaires pour l'intelligence de ces
applications de nombres , j'ay ajoû-
té icy un sommaire & abrégé de

AVERTISSEMENT.

L'Algebre , auquel sont enseignez non seulement les Algorithmes , & autres operations des nombres radicaux & nombres sourds , mais aussi toutes les autres regles & operations Algebriques. Si quelqu'un en desire voir les démonstrations, il les trouvera au second traitté de nôtre Collection Mathematique.

SOMMAIRE



SOMMAIRE

D E

L'ALGEBRE.

*Que c'est qu'Algebre. qui en est l'inventeur, de
quelles figures & caracteres on se sert en icelle.
& leur signification.*

CHAPITRE I.



L'ALGEBRE est une Arithmetique de nombres figurez : ou bien parlant plus intelligiblement, c'est une science par laquelle on peut rendre manifeste & connuë en nombre une quantité inconnuë.

Quant à l'inventeur de cette science, il est incertain : car les uns l'attribuent à Geber Arabe, les autres à un Mahomet fils de Moyse Arabe : & les autres à Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle science, outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a plusieurs autres figures & caracteres, dont on se sert en cette science, lesquels sont figurez, &

nommez diversément par les Auteurs qui ont écrit d'icelle science : mais entre cette diversité de caractères, nous avons choisi les suivans, les jugeant plus propres & aisez à représenter ce qu'ils signifient qu'aucuns autres.

N. $\mathfrak{N}$. q . c . qq . $\mathfrak{f}$. qc . $b\mathfrak{f}$. qqq . cc . $q\mathfrak{f}$. $c\mathfrak{f}$.
 qqc . $d\mathfrak{f}$. $qb\mathfrak{f}$. &c.

Le premier caractère N, a l'appellation du nombre absolu & simple : tellement que le nombre auquel ledit caractère sera aposé, est absolu & simple : comme 4 N, ne signifie autre chose que 4 unités simples ; toutefois ce caractère N défaut le plus souvent aux nombres simples ; c'est pourquoy les nombres auxquels est aposé ledit caractère N, ou bien auxquels il n'y a aucun signe, doivent être pris pour simples & absolus.

Le second caractère $\mathfrak{N}$, s'appelle racine : tellement que le nombre auquel est aposé ledit caractère, sera nommé par racine, comme 7. $\mathfrak{N}$, signifient 7 racines.

Le troisième caractère q , représente quarré ; tellement que 5 q , signifient cinq quarrés.

Le quatrième caractère c , signifie cube ; comme 7 c , signifient sept cubes.

Le cinquième caractère qq , signifient quarré de quarré, comme 8 qq , s'appellent huit quarrés de quarré.

Le sixième $\mathfrak{f}$, denotte fursolide ; tellement que 4 $\mathfrak{f}$, signifient quatre fursolides.

Le septième caractère qc , denotte quarré de cube, comme 7 qc , signifient sept quarrés de cube.

Le huitième $b\mathfrak{f}$, s'appelle second fursolide ; tellement que 4 $b\mathfrak{f}$, signifient quatre second fursolide.

Le neuvième caractère qqq , denotte quartré quartré de quartré : comme $3 qqq$, signifient trois quartré de quartré de quartré.

Le dixième cc , signifie cube de cube ; tellement que $8 cc$, signifient huit cubes de cube. Et ainsi faut-il entendre des autres caracteres en l'ordre cy dessus, tous lesquels sont apelez signes ou caracteres cossiques.

Il y a encore ce caractère V , par lequel sont nottez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradaux, ou sourds, dont sera parlé cy apres : comme aussi de quelques autres signes ou caracteres.

Des nombres cossiques, ou denommez.

CHAP. II.

LEs nombres usitez en l'Algebre sont de trois genres : Ceux du premier, sont nommez nombres cossiques, ou denommez : ceux du second, sont appelez nombres radicaux, ou irrationnaux : & les troisièmes sont nommez nombres radicaux cossiques. Quant aux nombres cossiques, ou denommez, ce sont tous nombres de quelque progression Geometrique, commençant à l'unité : pour l'intelligence desquels doivent être diligemment considerées les deux progressions suivantes, au milieu desquelles sont posez les caracteres cossiques cy-dessus declarez.

O. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. &c.

N. R. q. c. qq. ss. qc. bss. qqq. cc. qss. cfs. qqc. &c.

1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.4096.&c.

Le premier ordre est la progression naturelle

des nombres commençant à 0, lesquels s'appellent exposans, tant des signes coſſiques décrits au deſſous, que des termes de la progreſſion Geometrique commençant à l'unité : tellement que le premier terme de ladite progreſſion naturelle, qui eſt 0, au deſſous duquel eſt N & 1, eſt expoſant du nombre ſimple & abſolu : Le ſecond terme 1, au deſſous duquel eſt R & 2, montre le ſecond terme de la progreſſion Geometrique, être la premiere denomination es nombres coſſiques, & s'appelle raciné : Le tiers terme 2, expoſe que le tiers nombre de la progreſſion Geometr. eſt la ſeconde denomination, & s'appelle quarré : ainſi pareillement 6, demontre la ſixième denomination être le nombre quarré de cube, & ainſi des autres.

Puis apres, les mêmes nombres expoſans de la progreſſion naturelle des nombres, enſeignent combien il y a de raiſons entre chacun nombre de la progr. Geometr. & l'unité, comme 1, qui eſt au deſſus de R & 2, ſignifie qu'entre 2, ou bien la racine de la progr. Geometr. & l'unité, il y a la ſeule raiſon de 2 à 1 : & 2, qui eſt au deſſus de q & 4, montre qu'entre 4, ou bien le quarré & l'unité, doivent être 2 raiſons, comme 4 à 2, & 2 à 1 : de même 3, qui eſt au deſſus de 6 & 8, montre qu'entre le cube, ou 8 & l'unité, ſont les trois raiſons 8 à 4 ; 4 à 2 ; & 2 à 1, & ainſi des autres.

Davantage, chaque deux nombres expoſans multipliez entr'eux, produiſent l'expoſant du caractere coſſique qui ſera compoſé des caracteres deſdits deux expoſans multipliez entr'eux, comme 2 étant multiplié par 3 fait 6, expoſant du caractere q c. qui eſt compoſé de q & de c. De mé-

me, 4 étant multiplié par 3 fait 12, exposant du caractère qqc , qui est composé de qq , & de c ; & ainsi des autres.

Pareillement étant divisé quelque nombre exposant par un autre moindre, le quotient montrera (s'il est nombre entier) l'exposant du caractère cossique qui restera, si du caractère du nombre exposant divisé, est ôté le caractère du nombre exposant par lequel est faite la division : comme si 6, exposant du caractère qc , est divisé par 2, exposant du caractère q , le quotient sera 3, exposant du caractère c , qui restera, si du caractère qc , exposant de 6, est ôté le caractère q de l'exposant 2. De même, si 12, nombre exposant du caractère qqc , est divisé par 4, exposant du caractère qq , le quotient sera 3, exposant du caractère c , lequel restera, si de qqc , est ôté qq ; & ainsi des autres.

Derechef, cette figure 2, qui est posée sur 4 & q enseigne que le quarré, ou bien la 2^e. denomination est produite de la multiplication de la racine deux fois posée : car si la racine 2 est posée deux fois, en cette maniere 2, 2, & soit faite la multiplication de 2 par 2, fera procréé le quarré 4; en la même maniere cette figure 3, qui est posée sur 8 & c , signifie que le cube, ou bien la 3^e. denomination est produite de la racine, trois fois posée & multipliée : Car si la racine 2 est posée trois fois, comme icy 2. 2. 2. & soit fait la multiplication de 2 par 2, & du nombre produit d'eux par 2, viendra le cube 8; & y a même raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est de-

mandé que c'est qu'un nombre second surfolide, nous dirons être un nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié ; comme 128, est engendré de la multiplic. de cette racine 2, posée sept fois en cette maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Semblablement le quarré de quarré sera un nombre, lequel est engendré par quelque nombre, quatre fois posé & multiplié ; comme 16 est procréé de la multiplication de la racine 2, quatre fois posée ainsi 2. 2. 2. 2. & ainsi des autres. Mais toujours le nombre tant de fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dit racine du nombre produit, comme 2 étant posé six fois en cette maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplié, fait ce nombre 64, qui est *qc.* partant 2. est dit racine quarrée cubique de ce nombre 64 ; & ainsi faut-il entendre des autres.

Or non seulement sont quelquesfois produits les nombres de la progression Geometrique, posez par la multiplication de la racine, comme est cy-dessus dit, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes cosmiques d'iceux demontrent : comme ce nombre quarré de surfolide 1024, est procréé de la racine dix fois posée en cette maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. ainsi que montre son exposant 10 : toutesfois pource que son signe cosmique *qss* est composé de ces deux signes cosmiques *q* & *ss*, les exposans desquels sont 2 & 5, si la même racine 2 est deux fois posée en cette maniere 2, 2, à cause de 2 exposant du signe *q*, & puis soit multipliée, afin que 4. soit produit, & ce produit cinq fois posé en cette maniere 4. 4. 4. 4. 4. (à cause de 5, expo-

fant du signe ss ,) soit multiplié, fera procréé le même nombre 1024. Par la même maniere, si la racine 2. est posée cinq fois, à cause du signe ss , & pareillement multipliée, & le nombre 32 produit, soit posé deux fois, à cause du signe q , sera encore procréé le même nombre : Car la racine ainsi posée 2, 2, 2, 2, 2, & puis multipliée fait 32; mais ce nombre cy 32 posé deux fois ainsi 32, 32, & multiplié procréé 1024. Le même doit être dit des autres, dont les signes cossiques sont composez de plusieurs signes cossiques.

Pareillement es superieures progressions, est bien considerable que l'addition des nombres de la progression Arithmetique répond à la multiplication des nombres de la progression Geometrique, & la subtraction à la division. Car pour exemple, ainsi que 2 & 5. (qui sont exposans de q & ss .) ajoutez ensemble font 7, ainsi aussi leurs correspondans 4 & 32, étans multipliez entr'eux produisent 128. c'est à dire $b\beta$, l'exposant duquel est 7. Item ainsi que 3 & 9. ajoutez ensemble font 12, ainsi aussi c & cc , c'est à sçavoir 8 & 512, les exposans desquels sont 3 & 9, multipliez entr'eux produisent 4096, c'est à dire qqc , duquel l'exposant est 12, & ainsi des autres.

Derechef, tout ainsi qu'en soustrayant 5 de 7 reste 2, ainsi en divisant $b\beta$, c'est à sçavoir 128, duquel 7 est exposant, par β , c'est à dire par 32, duquel l'exposant est 5. provient 4, c'est à sçavoir q duquel l'exposant est 2 : Semblablement, ainsi qu'en soustrayant 3 de 12 restent 9, ainsi aussi en divisant qqc , c'est à dire 4096, duquel l'exposant est 12. par c ; c'est à dire par 8, duquel l'exposant est 3, pro-

vient c ; c'est à sçavoir 512, duquel l'exposant est 9, & ainsi des autres.

Or ce qui a été dit jusques à present de la progression Geometrique en raison double qui commence à l'unité, le même doit être entendu en quelque autre progression Geometrique que ce soit, le commencement de laquelle est l'unité.

Reste à montrer par quelle raison tous les nombres proposez de quelconque progression Geometrique, commençant à l'unité, doivent être denommez, ou (ce qui est le même) quels signes cosmiques doivent être attribuez & inscrits ausdits nombres: ce que nous montrerons facilement, si premierement nous denommons les nombres, desquels les exposans sont nombres premiers, de laquelle sorte sont les suivans, avec leurs caracteres cosmiques.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. &c.
 $q.c.\beta. b\beta. c\beta. d\beta. e\beta. f\beta. g\beta. h\beta. i\beta. k\beta. l\beta. m\beta. n\beta. o\beta. p\beta. \&c.$

Or les lettres de l'alphabet aposées aux caracteres de β sont au lieu de chiffres, comme $b\beta$ signifie 2β ; $c\beta$, 3β ; $d\beta$, 4β , &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confusion.

Sçachant donc ainsi que dessus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouverons les caracteres des autres nombres cosmiques, desquels les exposans ne sont nombres premiers, ains composez, en resoluant l'exposant du nombre composé, dont la denomination & caractere est desirée en ses parties aliquotes incomposees, lesquelles étans multipliées par ordre entr'elles, constituent & produisent iceluy: ce que vous ferez en cette maniere.

Divisez premierement le nombre composé donné par le moindre nōbre premier, par lequel il se peut

diviser, semblablement le quotient, s'il est nombre composé; & derechef soit divisé ce quotient par le moindre nombre, & ainsi conséquemment soit faite continuellement la division, iusques à ce que le quotient soit nombre premier, c'est à sçavoir n'ayant aucune partie aliquotte; & tous les diviseurs, ensemble le dernier quotient, seront parties aliquottes incompesées, lesquelles étans multipliées par ordres entr'elles produiront le nombre composé donné, & les caractères de toutes lesdites parties aliquottes ioints ensemble, feront le caractère dudit nombre composé donné. Comme pour exemple, si vous voulez trouver le caractère de ce nombre composé 24, vous diviserez iceluy par 2, qui est le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diviserez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diviserez encore derechef par 2, & viendra 3, au quotient, qui est nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incompesées de 24, ces quatre nombres 2, 2, 2, 3, dont les caractères sont *q. q. q. c.* & partant le caractère appartenant à ce nombre composé 24 fera *qqqc.* Et c'est exposant 30 (duquel les parties incompesées sont 2, 3, 5,) fera ce signe *q c f s*, & ainsi des autres.

On fera encore la même chose, prenant deux quelconques nombres qui multipliez entr'eux, produisent le nombre exposant proposé: Car les signes cossiques d'iceux, composent le signe cossique dudit nombre exposant proposé. Comme 3 & 4, desquels les signes cossiques sont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produisent 12, dont le signe cossique sera *qqc.*

Or le contraire de ce que dessus, se fera rendant à chaque caractère imcomposé son exposant ; puis multipliant iceux exposés ensemble. Comme pour exemple, si nous voulons avoir l'exposant de $q q c$. nous rendrons à chaque caractère son exposant particulier, c'est à sçavoir, 2, 2, 3, lesquels multipliez ensemble font 12, qui sera l'exposant dudit signe colliques $q q c$, & ainsi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres cossiques.

C H A P. III.

LA numeration des nombres cossiques est facile, les choses cy-devant dites étans bien entendues: Car quand ils sont posez seuls, comme $5 R$, ou $8 q$. ou $20 c$. &c. ils s'expriment ainsi, 5 racines, ou 8 quarrez, ou 20 cubes, &c; mais quand ils sont proposez conioints entr'eux par ce signe + au milieu, ou par celui-cy — ; comme $5 R + 8 q$; ou $8 q - 5 R$; ou $20 c + 8 q - 5$; lesquels deux signes + & — ont leur signification contraire: car cettui-cy +, est dit signe d'adiouër, & signifie plus; mais celui-cy —, est appelé signe de soustraire, & denote moins: & les nombres ausquels est interposé le signe +, sont dits composez: mais ceux ausquels intervient le signe —, sont nommez diminuez: & finalement ceux ausquels l'un & l'autre signe est interposé, sont appelez mixtes: iacoit que tous pourroient être dits composez: Partant donc ce composé $5 R + 8 q$. s'exprime 5 racines plus 8 quarrez; mais ce diminué $8 q - 5 R$; 8 quarrez moins 5 racines: & ce mixte-cy $20 c + 8 q - 5$, 20 cubes plus 8 quarrez moins 5 unitez; car comme il a été dit,

Le nombre qui n'a point de caractère coſſique apres ſoy, ſignifie un nombre abſolu compoſé d'unitez.

Or ces ſignes $+$ & $-$ ſont toujours reſervez aux nombres qui les ſuivent, & le nombre qui precede n'eſt à l'un n'y à l'autre deſdits ſignes. Or le ſens des nombres compoſez, diminuez, ou mixtes eſt facile: car quand nous diſons $5x + 8q$, nous entendons 5 racines enſemble avec 8 quarez, c'eſt à dire 42 unitez, ſi la racine eſt 2, & le quarré 4: ainſi auſſi quand nous diſons $8q - 5x$, nous entendons que de 8 quarez ſont ôtez 5 racines; c'eſt à dire que le nombre propoſé eſt 22 unitez, ſi la racine eſt 2, & le quarré 4; & le même faut-il dire des autres.

De l'addition, & ſouſtraction des nombres coſſiques.

CHAP. IV.

QUand il faut ajouter un nombre coſſique à un nombre coſſique d'autre denomination ou caractère, l'addition ſe fait mettant ce ſigne $+$ au milieu, & vient un nombre compoſé: comme ces deux nombres $6x$ & 8 , ajoutez enſemble ſont $6x + 8$: de même $6x$ & $8c$, ſont $6x + 8c$. &c.

Mais quand il faut ajouter un nombre coſſique à un autre nombre coſſique de même appellation ou caractère, les nombres ſe doivent ajouter, & à la ſomme apoſer le même caractère coſſique: comme ces nombres $4q$ & $9q$ ajoutez enſemble, ſont $13q$, de même $5x$ & $4x$, ſont $9x$, &c.

Par même raiſon, quand il faut ſouſtraire un nombre coſſique d'un nombre coſſique d'autre denomination, la ſouſtraction ſe fait mettant ce

signe—au milieu, & fait un nombre diminué; comme pour exemple, ce nombre 6R ôté de 8q, reste 8j—6R; de même 12 de 6R, restent 6R—12. &c.

Mais quand il faut soustraire un nombre coslique d'un autre nombre coslique de même caractère, on doit soustraire le nombre du nombre, & au reste aposer le même caractère: comme 4R de 9R, restent 5R: & 9c de 20c, restent 11c.

Mais quand il faut ajouter des nombres cosliques cōposez, diminuez & mixtes, ou ôter l'un de l'autre il les faut poser l'un au dessous de l'autre, tellement que les nombres de même apellation se répondent entr'eux. Que si en l'un ou l'autre d'iceux n'est trouvé un nombre répondant à quelqu'un, au lieu de sa figure sera posé o avec le signe + & étans ainsi constituez, seront ajoutez les nombres de même apellation, ou ôtez l'un de l'autre, & les sommes, ou nombres restez, souscrits en leurs propres lieux, avec les mêmes signes + ou —, qui seront trouvez és nombres ajoutez, ou soustraits.

Exemples de l'adition.

R.	N.	q.	R.	N.	c.	N.	q.
6 +	8.	7 +	8 —	5.	7 +	8 —	3
7 +	10.	3 +	9 —	8.	4 +	11 —	5
13 +	18.	10 +	17 —	13.	11 +	19 —	8

$$\begin{array}{rcl} c. & q. & R. & N. \\ 4 + 11. & + 0 & - 6 \\ 3 + 0 & + 8 & - 4. \\ \hline \end{array}$$

$$7 + 11 + 8 - 10.$$

$$\begin{array}{rcl} s. & qq. & R. & N. & q. \\ 7 + 0 & + 8 & - 5 & + 4. \\ 4 + 9 & + 6 & - 9 & + 0. \\ \hline \end{array}$$

$$11 + 9 + 14 - 14 + 4.$$

Exemples de la soustraction.

$$c. \quad q. \quad R. \quad N.$$

$$7 + 11 + 8 - 10.$$

$$3 + 0 + 8 - 4.$$

$$4 + 11 + 0 - 6.$$

$$c. \quad N. \quad q.$$

$$11 + 19 - 8.$$

$$4 + 11 - 5.$$

$$7 + 8 - 3.$$

$$fs. \quad qq. \quad R. \quad N. \quad q.$$

$$11 + 9 + 14 - 14 + 4.$$

$$7 + 0 + 8 - 5 + 4.$$

$$4 + 9 + 6 - 9 + 0.$$

$$q. \quad R. \quad N.$$

$$10 + 17 - 13.$$

$$7 + 8 - 5.$$

$$3 + 9 - 8.$$

Quand il reste $+ 0$, ou $- 0$, il n'en faut tenir compte, comme au premier exemple, où il reste $4c + 11q + 0R - 6N$, se a seulement $4c + 11q - 6$.

Que si en l'addition ou soustraction, l'un des nombres avoit le signe $+$, & l'autre $-$, il faudroit changer d'espece: c'est à dire qu'en l'addition, il faut soustraire le moindre du plus grand, & au nombre restant donner le signe du plus grand nombre duquel a été faite la soustraction.

Exemples.

$$q. \quad R.$$

$$6 + 8.$$

$$1 - 10.$$

$$8 - 2.$$

$$qc. \quad fs. \quad qq. \quad c. \quad R. \quad N.$$

$$7 + 0 + 8 + 0 - 4 + 8.$$

$$7 + 5 - 11 - 11 + 0 + 0.$$

$$14 + 5 - 3 - 11 - 4 + 8.$$

Mais s'il falloit ajouter ces deux nombres $4c +$

6q—8Rz + 7. & 12Rz—5c—3q—9, il les faudroit poſer comme enſuit.

$$\begin{array}{r}
 c. \quad q. \quad Rz. \quad N. \\
 +12 + 6 - 8 + 7. \\
 - 5 - 3 + 12 - 9. \\
 \hline
 7 + 3 + 4 - 2.
 \end{array}$$

Mais en la ſouſtraction, il faut ajoûter les nombres enſemble, & donner à la ſomme le ſigne du nombre ſuperieur, duquel doit être faite la ſouſtraction.

Exemples.

q. Rz.	qc. β.	qq.	c.	Rz.	N.
8—2.	14 + 5—3—11—4 + 8.				
6 + 8.	7 + 0 + 8 + 0 + 4 + 8.				
2—10.	7 + 5—11—11—0 + 0.				

Que s'il avenoit qu'aux deux nombres de la ſouſtraction fuſſent même ſigne, & que le nombre à ſouſtraire fût plus grand que celui duquel il faut ſouſtraire, il faudroit ôter le moindre nombre du plus grand, & au reſte donner le ſigne contraire, comme il apert és exemples ſuivans.

q. Rz.	q. Rz.	N.	c. q. N.
6 + 8.	9 + 4—5.		6 + 5 + 3.
2 + 10.	4 + 7—8.		7—9 + 10.
4—2.	5—3 + 3.		—1 + 4—7.

Et d'autant que le signe— n'est pas bien disposé au premier nombre, le reste du dernier exemple doit être posé ainsi $49-10-7$.

Or tous les preceptes de l'addition & soustraction enseignez cy-dessus, au regard des signes $+$ & $-$, peuvent être retenus en mémoire par les deux règles suivantes.

1 *A mêmes signes on doit poser le même signe, sinon en la soustraction, quand les nombres sont posés à rebours : car alors le supérieur est soustrait de l'inférieur, & de $+$ est fait— : mais de— est fait $+$*

2 *Les signes divers changent l'espece de l'operation : & en l'addition est posé le signe du plus grand nombre : mais en la soustraction est posé le signe du nombre supérieur.*

Quand à la preuve de l'addition & soustraction, elle se fait en deux manieres : Pour la premiere, l'addition prouve la soustraction, & la soustraction l'addition, tout ainsi qu'on fait es nombres absolus.

Exemples de la preuve des trois dernieres additions & soustractions.

q.	R.	q.	s.	q.	c.	R.	N.	c.	q.	R.	N.
8	— 2.	14	+ 5.	— 3	— 11	— 4	+ 8.	7	+ 3	+ 4	— 2.
2	— 10.	7	+ 5	— 11	— 11	+ 0.	+ 0.	— 5	— 3	+ 12	— 9.
6	+ 8.	7	+ 0	+ 8	+ 0	— 4	+ 8.	12	+ 6	— 8	+ 7.

Preuve de la soustraction.

c.	.	R.	q.	R.	N.	c.	q.	N.
4	—	2.	5	—	3 + 3.	—	1 + 4	— 7.

$$2 + 10$$

$$4 + 7 - 8$$

$$+ 7 - 9 + 10$$

$$6 + 8$$

$$9 + 4 - 5$$

$$6 - 5 + 3$$

Pour faire autrement ladite preuve, il faut construire une table avec quelques progressions Geometriques, commençant à l'unité; comme il apert cy-dessous.

N	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

Par apres, il faut resoudre les nombres cossiques à adioûter selon aucunes d'icelles progressions en nombres absolus, puis les adioûter ensemble, ou soustraire l'un de l'autre, selon les signes + ou —; & puis apres soient semblablement resouls les nombres cossiques de la somme recueillie; & si l'addition a été bien faite, lesdits nombres resouls de la somme recueillie seront egaux aux nombres resouls proposez à adioûter; comme pour exemple, nous avons trouvé cy-devant que $69 + 89$ adioûtez avec $29 - 109$ font $89 - 19$: pour en faire donc la preuve, nous resoudrons en nombres

absolus

absolus les deux nombres à ajouter, sçavoir est $6q + 8R$, & $2q - 10R$; & prenant la resolution en la progression dont la racine est 2, $6q$ font 24, & $8R$ font 16, lesquels 24 & 16 joints ensemble, à cause du signe + font 40 : de même $2q$ font 8, qui ajoutez à 40 (car le signe + est toujours entendu être au nombre qui n'a nul signe aposé) font 48, & $10R$ font 20, qui soustraits de 48, à cause du signe —, reste pour la somme de l'addition 28 : & resoluant $8q - 2R$, qui est la somme recueillie de l'addition, viendront aussi 28 : & partant l'addition a été bien faite.

Quant à la preuve de la soustraction, elle se fait en la même maniere : car les nombres cossiques d'icelle étans reduits en nombres absolus, & les nombres à soustraire étans ajoutez aux restans, doivent être égaux aux nombres dont la soustraction a été faite : comme pour exemple, nous avons cy-devant trouvé que $7c - 9q + 10N$, soustraits de $6c - 5q + 3N$, laissent $4q - 1c - 7N$: donc $7c - 9q + 10N$, resouls en nombres absolus selon la progression dont la racine est 3, font 118 ; & $4q - 1c - 7$, font 2, qui ajoutez à 118, font 120 ; & $6c - 5q + 3N$ font aussi 120 : & partant la soustraction a été bien faite.

*De la multiplication & division des
nombres cossiques.*

CHAP. V.

Quand un nombre cossique est multiplié, ou divisé par un nombre absolu, le produit a

même dénomination cossique; comme pour exemple 4 R ou 8 q étans multipliez par 3 , proviennent 12 R , ou 24 q , &c. Item 12 q , ou 24 R étans divisez par 4 , viennent 3 q , ou 6 R .

Mais quand le nombre cossique est multiplié, ou divisé par un nombre cossique, le produit est d'autre denomination, sçavoir est de celle qui se fait des exposans joints ensemble, quant à la multiplication : comme pour exemple 4 R multipliez par 7 R font 28 q , car l'unité qui est exposant de ce caractere cossique R , étant ajoutée à l'unité, fait 2 , exposant de ce caractere q . Pareillement 4 R multipliez par 5 q font 10 c : car 1 est exposant de R , & 2 de q , lesquels ajoutez ensemble, font 3 exposans de c . Et quant à la division, le quotient à la denomination du nombre restant, l'exposant du diviseur étant ôté de l'exposant du divisé : Comme pour exemple, 36 q c , divisé par 4 q q , le quotient est 9 q : car 4 exposant de q q étant ôté de 6 exposant de q c , reste 2 exposant de q ; ainsi aussi 18 q q étans divisez par 3 c , vient 6 R ; & 8 q par 8 q , vient 1 N , &c.

Quand le nombre cossique composé, ou diminué est multiplié ou divisé par un nombre absolu ou cossique, tant simple que composé ou diminué, outre ce qui est dit cy-dessus, il faut sur tout avoir égard aux signes $+$ & $-$: Car quand les nombres se multiplians ou divisans ont un même signe, il faut aposer au produit le signe $+$: mais quand l'un d'iceux est $+$, & l'autre $-$, il faut donner au produit le signe $-$: ce qui est aisé à retenir en memoire par la regle suivante.

Aux signes semblables faut poser $+$; mais aux

dissemblables sans poser —.

Exemples de la multiplication.

$$\begin{array}{r} 7q - 4R. \\ 9. \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7q + 4R. \\ 9N. \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7q - 4R. \\ 9R. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63q - 36R. \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 63q + 36R. \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 63q - 36q. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8q + 9. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8q + 9. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8q - 9. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8q - 9. \\ \hline \end{array}$$

$$72q + 81.$$

$$-72q + 81.$$

$$\begin{array}{r} 6499 + 72q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6499 - 72q \\ \hline \end{array}$$

$$6499 + 144q + 81.$$

$$6499 - 144q + 81.$$

$$6q + 8R - 6N.$$

$$2q - 4N.$$

$$9q + 8N - 3R.$$

$$7c - 49q - 8q.$$

$$\begin{array}{r} -24q - 32R + 24N. \\ \hline \end{array}$$

$$129q + 16c - 12q.$$

$$-729q - 64q + 24c.$$

$$\begin{array}{r} -369c - 329q + 12fs \\ \hline \end{array}$$

$$129q + 16c - 36q - 32R + 24N. 63fs + 56c - 219q.$$

$$-369c + 75fs - 1259q + 80c - 64q.$$

Et d'autant que comme il a déjà été dit, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit de ce dernier exemple, ainsi qu'il ensuit.

$$75fs - 369c - 1259q + 80c - 64q.$$

Exemples de la division.

Diviser $36R + 24$ [$9R + 6$.

par R R

Item $48c + 36q + 27R$ [$5q + 4R + 3N$.
par $9R$ $9R$ $9R$

Item $45c + 36q - 27R$ [$5\frac{5}{8}q + 4\frac{1}{2}R - 3\frac{3}{8}N$.
par $8R$ $8R$ $8R$

Diviser encore $30q - 8R + 24$ [$6R - 8N$.
par $8R - 3N$.
 $8R - 3N$.

Item $12q + 16c - 36q - 32R + 24N$ [$6q + 8R$
— $6N$
par $2q + 0 + 4N$
 $2q + 0R - 4N$.
 $2q + 0R - 4N$.

Diviser encore $1c + 0q + 0R + 1$ [$1q - 1R + 1$.
par $1R + 1$.
 $1R + 1$
 $1R + 1$

Et convient noter qu'en routes divisions des nombres cosiques, les denominations doivent être continuées d'ordre : & partant quand il y a quelque denomination de manque, il faut poser 0 au lieu d'icelle, comme il'apert és deux precedentes exemples, la derniere desquelles j'ay fait en cette maniere. Premièrement j'ay posé le diviseur $1R + 1$ au dessous du dividande $1c + 0q$, & trouve que $1R$ est en $1c$; $1q$ que je pose au quo-

vient, & multiplie ledit 19 par mon diviseur, & vient, $10 + 19$, que j'ôte de $10 + 09$, & reste de tout le nombre à diviser $-19 + 08 + 1$: puis apres j'avance mon diviseur sous $-19 + 08$, & trouve qu'il y est -18 , que je pose au quotient, & multiplie ladite 18 par ledit diviseur, & vient $-19 - 18$, que je soustraits de $-19 + 08$, & reste de tout le nombre à diviser $18 + 1$, sous lequel je pose le diviseur, & trouve qu'il y est 1 N précisément.

Or quand le diviseur est nombre composé ou diminué, & qu'il ne peut diviser précisément, alors il il faut seulement interposer une ligne entre-deux, ainsi qu'és fractions, come és deux exéples suivans.

8/s divisez par $29 + 4$ N. $89 - 98$ divisez par $48 + 3$ N

Les quotiens sont

$$\begin{array}{r} 8/s \\ \hline 29 + 4 \text{ N.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 - 98. \\ \hline 48 + 3 \text{ N.} \end{array}$$

Il faut faire en la même maniere, quand un nombre cossique, simple ou composé doit être divisé par un nombre cossique simple de plus grande denomination: comme 89 divisez par 290 constituent cette fraction $\frac{89}{290}$. De même $98 + 4$ étans

divisez par 30 , sont $\frac{98 + 4}{30}$ &c.

Reste à enseigner à faire la preuve de la multiplication & division, laquelle se fait en deux manieres. Premièrement la division preuve la multiplication; & la division se preuve par la multiplication, tout ainsi qu'en l'Arithmetique vulgaire.

L'autre sorte de preuve se fait par la resolution des nombres cossiques, selon quelque racine des progressions Geometriques contenues au chapitre

precedent. Car les nombres cossiques resoulz, étans multipliez entr'eux, doivent produire un même nombre que le produit des nombres cossiques aussi resoult selon la même racine. & le nombre cossique qu'il faut diviser resoult, doit produire autant divisé par le diviseur resoult, que le quotient aussi resoult. Comme pour exemple, nous avons trouvé ci-devant que $69 + 82 - 6N$ multipliez par $29 - 4N$, produisent $1299 + 160 - 369 - 322 + 24N$. Pour donc en faire la preuve, nous resoudrons les deux nombres cossiques en nombres absolus, & viendront (selon la progression dont 2 est racine) 34, & 4, qui multipliez entr'eux produisent 136: mais la resolution du produit $1299 + 160 - 369 - 322 + 24N$, est aussi 136: & partant la multiplication a été bien faite. Nous avons aussi trouvé que $10 + 1$, divisez par $12 + 1$, le quotient est $19 - 12 + 1$, lequel quotient donne 3 par la resolution de la progression, dont la racine est 2: mais les deux nombres cossiques resolus par la même progression, sont 9 & 3; & 3 divisant 9, le quotient est aussi 3: & partant la division a été bien faite.

Des fractions des nombres cossiques.

C H A P. VI.

EN l'Algorithme des fractions cossiques, les operations sont presque semblables qu'és fractions vulgaires: il n'y a qu'à ajouter ce qui concerne les caracteres cossiques, & les signes $+$ & $-$. Et premierement quant à la numeration, cette

fraction $\frac{3}{8R}$ signifie 3 unitez être divisées par $8R$; & $\frac{7}{9}$ denote 7 quarez être divisez par 9 unitez : Item $\frac{99+8}{6}$ signifie que ce nombre $99+8$, est divisé par 6, &c.

Quant à l'abreviation elle se fait en deux manieres: Car ou les nombres seront abreviez, comme és fractions vulgaires, sans toucher aux caracteres cosmiques; ou bien seront aussi abreviez lesdits caracteres cosmiques: comme cette fraction; $\frac{15}{5R}$; quant aux nombres, elle sera reduite à cette-cy $\frac{3}{R}$: car la plus grande commune mesure des nombres d'icelle fraction est 5. Semblablement cette autre fraction $\frac{91+3}{81}$ sera reduite à cette-cy $\frac{11+4}{81}$ pource que la plus grande commune mesure est 9: Item $\frac{35R+28}{7+14}$ sera reduite à $\frac{5R+4}{2R+1}$: Item $\frac{181-9R}{R+39}$ sera reduite à $\frac{61-3R}{2R+13}$, &c.

Et quant à l'abreviation des caracteres cosmiques, elle est faite soustrayant l'exposant du moindre caractere, des exposans des autres caracteres; car si aux nombres restans sont aposez les propres caracteres, l'abreviation sera achevée, quant aux caracteres. Comme cette fraction $\frac{81}{24}$ quant aux caracteres, sera reduite en celle-cy $\frac{24}{24}$; car l'exposant du moindre caractere q , est 4, qui ôté de 6, exposant de l'autre caractere qc , reste le nombre absolu 8 au numerateur, & 4 pour l'exposant du denominateur, qui partant sera qq : puis apres quant aux nombres, elle sera reduite à cette-cy $\frac{4}{11}$: Item $\frac{119-9R}{6R+11}$ quant aux nombres & caracte-

res, sera reduite à $\frac{6R-3}{2+1R}$, &c.

Quant à la reduction des fractions cossiques à un même denominateur elle s'obtient multipliant en croix les numerateurs par les denominateurs; & les denominateurs entr'eux, tout ainsi qu'es fractions vulgaires: comme ces fractions $\frac{2R}{49}$ & $\frac{4c}{59}$ étans reduites en même denomination, seront $\frac{156}{2099}$ & $\frac{16}{2099}$, &c.

Qu'es il faut reduire quelque nombre entier, & une fraction à même denomination; il faudra supposer l'unité estre denominateur du nombre entier, & poursuivre ainsi que dessus. Comme 6 & $\frac{4R}{79}$, seront posez ainsi $\frac{6}{79}$ & $\frac{4R}{79}$, puis étans reduites comme dessus, elles feront $\frac{47}{79}$ & $\frac{4R}{79}$: Item $\frac{9}{1}$ & $\frac{4c}{39}$ seront reduites à $\frac{159}{39}$ & $\frac{4}{39}$, &c.

Mais si aux entiers est jointe quelque fraction, il faudra premierement reduire les entiers en icelle fraction; ce qui se fait multipliant les entiers par le denominateur de la fraction, & ajoutant au produit le numerateur. Comme si nous voulons reduire $49 + \frac{29R}{1c}$ & $\frac{3}{1c}$ à une même denomination, nous multiplierons premierement 49 par 1c, afin que nous ayons ces deux fractions $\frac{49c+29R}{1c}$ & $\frac{3}{1c}$, lesquelles nous reduirons à ces deux-cy $\frac{49c+29R}{1999}$ & $\frac{3}{1999}$; & ainsi des autres.

Quant aux autres quatre operations des fractions cossiques, sçavoir est, adition, soustraction, multiplication & division, elles ne different à cel-

les que nous avons enseignées es fractions de nôtre Arithmetique, sinon à raison des caracteres cossiques, & des signes + & — parquoy nous mettrons seulement icy des exemples de chaque operation,

Exemples de l'addition.

Ajoutant $\frac{3^N}{2^N}$ avec $\frac{7^N}{7^N}$, viendront $\frac{3^N+7^N}{7^N}$ car pour ce que les denominateurs sôt semblables il n'y-a qu'à ajouter les numerateurs entr'eux, & à la somme d'iceux souscrire le même dominateur. Item si on ajoute $\frac{3^N}{2^N}$ avec $\frac{4^N}{3^N}$ viendront pour leur sôme $\frac{9^N+8^N}{6^N}$, c'est à dire $\frac{9^N+8^N}{6^N}$: Item $\frac{4^N}{7^N}$ ajoutez avec $\frac{4^N}{12^N}$ font $\frac{192^N+576^N}{84^N}$, qui étans reduits tant au regard des nombres que des signes, font $\frac{64^N+192^N}{36^N}$. Item $\frac{9^N+2^N}{36^N}$ ajoutez avec $\frac{219^N-8^N}{36^N}$ font $\frac{289^N-6^N}{36^N}$ qui reduits comme dessus font $\frac{7^N-3^N}{36^N}$. Item $\frac{5^N-3^N}{7^N}$ ajoutez avec $\frac{3^N+3^N}{24^N}$ font $\frac{319^N-46^N}{24^N}$.

Exemples de la soustraction.

Ostant $\frac{3^N}{2^N}$ de $\frac{5^N}{2^N}$, resteront $\frac{2^N}{2^N}$: car d'autant que les dominateurs sont semblables, il n'y a qu'à soustraire le numerateur 3 du numerateur 5, & au reste 5-3, apôser le même denominator mais si on ôte $\frac{3^N}{2^N}$ de $\frac{99^N+2^N}{6^N}$ resteront $\frac{16^N}{6^N}$, c'est à dire $\frac{4^N}{3^N}$. Item $\frac{1^N}{4^N}$ de $\frac{3^N}{4^N}$, resteront $\frac{2^N}{4^N}$: Item $\frac{2^N-3^N}{2^N}$ de $\frac{4^N}{2^N}$, resteront $\frac{2^N-4^N}{2^N}$. Item $\frac{9^N+1^N}{2^N}$ de $\frac{1^N+6^N}{2^N}$, resteront $\frac{8^N-5^N}{2^N}$.

soit examinée selon la teneur de la question, iusques à ce qu'on ait trouvé quelque equation : Soit icelle réduite, s'il en est besoin ; puis apres, par le nombre du plus grand caractère cossique soit divisé l'autre nombre de l'equation : Car on le quotient sera le nombre qui estoit cherché, sçavoir est la valeur de la racine posée au commencement. ou bien quelque racine du quotient rendra connu le nombre cherché. Or le diviseur démontrera par son caractère cossique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.

Or il apert que cette regle a quatre parties, dont la première est l'invention d'une Equation ; la seconde, la réduction de l'Equation trouvée ; la troisième, la division d'un nombre de l'Equation par le nombre du plus grand caractère cossique ; & la dernière, l'extraction de quelque racine du quotient de ladite division. Mais de ces quatre parties il y en a seulement deux du tout nécessaires : sçavoir est la première & troisième : & quant aux deux autres, il n'en est pas toujours besoin. Et avant que de traiter particulièrement de chacune d'icelles, nous les exposerons icy, proposant ce probleme.

Trouver un nombre, duquel la tierce & quarte partie estans ostez, le nombre restant soit 10.

Je pose le nombre inconnu être $1x$; c'est à dire que ie pose $1x$ être egale au nombre inconnu que nous cherchons. J'examine donc $1x$ selon la teneur de la question, c'est à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, sçavoir est $\frac{1}{3}x$ & $\frac{1}{4}x$, qui font ensemble $\frac{7}{12}x$, que j'oste de $1x$, & restent $\frac{5}{12}x$. Maintenant ie ratiocine ainsi : puisque $1x$ est posée egale à tout le nombre inconnu ; $\frac{1}{3}x$ sera egal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}x$ egal au quart du même ; & puisque

la tierce & quarte partie du nombre total étant soustraite, le nombre restant est 10, il s'ensuit que $\frac{1}{3} R$ & $\frac{1}{4} R$, c'est à dire $\frac{7}{12} R$ étans ôtez de 1 R, le nombre restant $\frac{5}{12} R$ être egal au nombre restant 10, pource que si de choses egales sont ôtes choses egales, les restes sont egaux. Est donc trouvée equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12} R$, & ce nombre 10 : car equation n'est autre chose qu'une egalité de valeur entre deux quantitez, ou choses diversement dénommées : & voila quant à la premiere partie de la regle cy-dessus. Et pour le regard de la seconde partie, qui est la reduction, il n'en est besoin en l'equation de nôtre exemple : mais nous montrerons cy-apres, quand & comment l'equation se doit reduire. Et pour le regard de la division, qui est la 3^e partie de la reigle ; en nôtre equation trouvée entre $\frac{5}{12} R$ & 10 N, le plus grand caractere coëffique est R : c'est à dire que R a plus grand exposant que N : parquoy ie divise ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reste du caractere R, & vient au quotient 24, qui est le nombre cherché. Parquoy la 4^e partie de la regle d'Algebre n'a lieu en nôtre exemple : mais quand, & quelle racine du quotient manifestera le nombre inconnu, il sera enseigné cy apres. Maintenant si du nombre trouvé 24 on prend $\frac{1}{3}$, sçavoir est 8 : puis $\frac{1}{4}$, sçavoir est 6 : icelles deux parties sont ensemble 14, qui ôtez des 24, reste le nombre 10, ainsi qu'il étoit requis en la proposition.

De la reduction d'Equation.

CHAP. VIII.

POUR l'intelligence de la reduction des equations, est à noter, que si on ajoute ou soustrait choses égales de chèque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie ou divise par un même nombre, qu'il y aura pareillement equation entre les produits. Comme pour exemple, s'il y a equation entre $12x$; & 72 ; ôtant $4x$ de chèque terme, restera encore equation entre $8x$, & $72 - 4x$: car puisque $12x$ sont égales à 72 , $1x$ sera égale à 6 ; & partant $8x$ seront égales à 48 , & $4x$ à 24 , qui ôtez de 72 , restera aussi 48 . Item si à chèque terme de l'equation d'entre $8x$, $72 - 4x$, on ajoute 10 , viendra equation entre $8x + 10$, & $82 - 4x$. Car il est manifeste que chaque terme vaut 58 . Item s'il y a equation entre $3x + 12$, & $72 - 7x$; multipliant chèque terme par 2 , viendra aussi equation entre $6x + 24$, & $144 - 14x$: car l'un & l'autre terme fait 60 . Ainsi aussi si nous divisons par 6 chèque terme de cette dernière equation, fera produit equation entre $1x + 4$, & $24 - 2\frac{1}{3}x$: car l'un & l'autre terme fait 10 .

Maintenant quand en la solution de quelque questio on est parvenu à l'equation ; si le plus grand caractère cossique, par le nombre duquel (selon la reigle d'Algebre) on doit diviser l'autre terme de l'equation n'est posé seul en l'un & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'étant seul en l'un il ne le soit en l'autre, alors la division ne se peut faire.

Comme pour exemple, si l'equation est trouvée entre $9x + 12$, & $78 - 2x$, la division ne se peut faire, pource qu'en chaque terme est trouvé ce caractère x , & certui-cy N : Semblablement si l'equation est trouvée entre $9x - 12$, & 42 : tu vois que la division ne se peut aussi faire par 9 nombre du plus grand caractère cossique x , pource que $9x$ ne sont pas posées seules, ains $9x - 12$.

Ainsi aussi, si l'equation est trouvée entre $9x$, & $72 - 3x$: Item entre $19 - 3x$, & 108 : Item entre $19 - 48$, & $8x$: Item entre $108 + 8x$, & $29 - 12x + 60$ &c. en toutes lesquelles il est manifeste que la division ne se peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy advenant semblables equations, elles doivent être reduites en autres, esquelles le plus grand caractère cossique soit seul en un terme de l'equation, & ne soit repeté en l'autre, & esquelles aucun caractère cossique ne soit posé deux fois. Or cette reduction se fera ainsi qu'il ensuit.

Si une particule de l'equation a le signe $-$, il la faut transposer, c'est à dire adjoûter à l'autre terme: comme si une equation est trouvée entre $9x - 12$, & 42 , nous ajouterons 12 à chaque terme, & nous aurons l'equation entre $9x$, & 54 : Item une equation étant trouvée entre $9x$ & $72 - 3x$; ajoutant $3x$ à chaque terme, nous aurons l'equation entre $12x$, & 72 : Item une equation étant trouvée entre $29 - 3x$, & 104 ; ajoutant $3x$ à chaque terme, l'equation se a entre 29 , & $3x + 104$: Item une equation étant entre $59 - 40$, & $10x$; ajoutant 40, nous aurons une equation entre 59 & $10x + 40$. Mais quand une particule 2

le signe $+$, il la faut soustraire : comme si l'équation est trouvée entre $112 + 12$, & 78 , nous soustrairons $+ 12$, & restera l'équation entre 112 , & 66 : Item l'équation étant trouvée entre $32 + 6$, & 24 ; ôtant $+ 6$, restera l'équation entre 12 , & 18 : Item si une équation est trouvée entre $59 + 20$, & 100 , nous ôterons $+ 20$, & restera l'équation entre 59 & 80 : Item une équation étant entre $39 + 22$, & 56 ; ôtant $+ 22$, l'équation restera entre 39 , & $56 - 22$. Que si l'un & l'autre signe $+$ & $-$ sont en une équation, il faut ajouter la particule du signe $-$, mais soustraire celle du signe $+$: comme si une équation est trouvée entre $92 + 12$, & $78 - 22$, nous ajouterons premièrement $- 22$, & l'équation sera entre $112 + 12$, & 78 : puis soustrayant d'icelle $+ 12$, restera l'équation entre 112 , & 66 : Item si une équation est entre $59 - 32$, & $39 + 20$, nous ajouterons 32 , & l'équation sera entre 59 , & $39 + 32 + 20$: & ôtant de cette-cy 39 , restera l'équation entre 29 , & $32 + 20$: Item si une équation est trouvée entre $108 + 82$, & $29 - 122 + 60$: nous adjoûterons premièrement 122 , & l'équation viendra entre $108 + 202$, & $29 - 60$: & d'icelle étans ôtez 60 , restera l'équation entre 29 , & $202 + 48$. Que s'il advient quelque équation, comme entre $62 - 10$, & $102 - 34$, en laquelle les nombres 10 , & 34 ont même signe $-$, il faut ôter 10 de chaque terme, & restera l'équation entre 62 , & $102 - 24$: & d'autant qu'en icelle les nombres 62 & 102 ont aussi un même signe $+$, il faut ôter le moindre nombre 62 du plus grand 102 , & restera l'équa-

tion entre $6R$, & $4R - 24$: & ajoutant 24 à chaque terme d'icelle, viendra l'equation entre 24 , & $4R$. Soit derechef equation entre $54 + 4R$, & $19 - 6R + 30$: Premièrement pour ce que $+4R$, & $-6R$ ont signes divers, il faut ajouter $4R$ à $6R$, & viendront $-10R$, & sera equation entre 54 , & $19 - 10R + 30$: puis apres, d'autant que 54 & 30 ont un même signe, il faut soustraire 30 de 54 , & restera equation entre 24 & $19 - 10R$: Tiercement je transpõe $-10R$, afin que l'equation soit entre 19 , & $10R + 24$: & ainsi des autres.

Quant à la reduction des equations qui sont trouvées en fractions, elle se fait la reduisant en equation d'entier par la multiplication en croix. Comme si une equation est trouvée entre $\frac{3R+12}{369-198R}$ &

$\frac{369-198R}{3R}$: multipliant ces fractions en croix,

sçavoir est le numerateur de la première par le denominateur de la seconde, mais le numerateur de la deuxième par le denominateur de la première, sera fait equation entre $99 + 36R$ & $1809 - 990R$, c'est à dire entre $1R + 4$, & $20R - 110$, qui étant reduite, comme dit est cy-dessus l'equation sera entre $19R$, & 114 : Item une equation étant trouvée entre $\frac{4R+19}{1R}$, & $\frac{12R-58}{2}$: étant reduite par

la multiplication en croix, viendra equation entre $8R + 36$, & $129 - 58R$, qui reduite par transposition sera entre $66R + 36$, & 129 .

Que si une equation est trouvée entre une fraction, & quelque autre chose, comme entre $\frac{5}{4+1R}$

& un escu, ou un degré, ou une heure, ou une minute,

minute, &c. Il faut poser une unité pour cette chose ainsi $\frac{1}{7}$, afin que l'équation soit entre $\frac{5}{7}$

& $\frac{1}{7}$, laquelle par la multiplication en croix, sera reduite à l'équation d'entre 5 & $4 + 18$.

Quant à la réduction d'équation d'entre nombres cossiques irrationaux, & un nombre absolu, nous l'enseignerons à la fin du chapitre 22.

S'il se rencontre aussi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre absolu, il faudra abrevier les caractères cossiques : Comme pour exemple, l'équation d'entre $2q$, & $12 \sqrt{x}$ sera reduite à l'équation d'entre $2 \sqrt{x}$ & 12 : Item l'équation d'entre $1q$, & $1\sqrt{x} + 2qq$ sera reduite à l'équation d'entre $1q$, & $1 \sqrt{x} + 2$, &c. Mais cette réduction n'est du tout nécessaire devant l'extraction des racines des nombres cossiques simples, comme nous dirons au chap. 10.

De la division que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA réduction étant faite, la regle d'Algebre dit que par le nombre du plus grand caractère cossique (laissant iceluy caractère) on divise l'autre nombre de l'équation: comme si l'équation est trouvée entre $7 \sqrt{x}$ & 42 ; divisant 42 par 7 , nombre du caractère cossique $\sqrt{x}$, viendra au quotient 6 , qui sera la valeur d'une racine : Item une equation étant trouvée entre $12q$, & $66 \sqrt{x} + 36$: divisant $66 \sqrt{x} + 36$ par 12 , le quotient donnera $5 \frac{1}{2} \sqrt{x} + 3$, pour la valeur d'un quarté : Item si une equation est entre $\frac{1}{7}q$, & si $\sqrt{x} + 13 \frac{1}{7}$, nous diviserons $6 \sqrt{x} + 13 \frac{1}{7}$

par $\frac{1}{3}$, & le quotient donnera $18x + 40$, pour la valeur d'un quarré: Item une equation étant entre $39c$, & $9c + 120$, nous diviserons $9c + 120$ par 3 , & le quotient donnera $3c + 40$ pour la valeur d'un quarré de cube, &c.

De l'extraction des racines dont est fait mention en la regle d'Algebre.

C H A P. X.

AYant fait la reduction des caracteres cossiques, si le plus grand caractere cossique est x , le quotient de la division mentionnée cy-dessus manifestera le nombre que vaut une seule racine, comme il a été dit au chapitre precedent: ou bien routes & quantesfois qu'un nombre cossique de grande denomination sera egal à un nombre cossique de la prochaine moindre denomination; étant divisé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'une seule racine, encore que l'abreviation des caracteres ne soit faite. Comme si 5β sont egaux à $3099;30$ étans divisez par 5 , le quotient 6 sera la valeur d'une seule racine. Mais si le plus grand caractere cossique, étant seul d'une part de l'equation, est plus grand que racine, & de l'autre part soit un nombre absolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractere signifie: comme si le caractere est q , il faudra extraire la racine quarrée; si c , la cubique; si qq , la quarrée de quarrée, &c. laquelle sera la valeur d'une seule racine. Comme pour exemple, Si une equation est entre $5q$, &

720 ; ayant fait la division , il faudra chercher la racine quarrée du quotient 144 : Item si 10 c sont egaux à 270 , il faudra ayant fait la division extraire la racine cubique du quotient 27 : Semblablement si 8 qq sont egaux à 128 , il faudra trouver la racine quarrée de quarré du quotient. Et afin qu'on sçache generally quelle racine il faut tirer du quotient , quand deux nombres cossiques non colatéraux sont egaux entr'eux , desquels l'un ny l'autre n'est nombre absolu , il faut abrevier les caractères , afin que l'equation se fasse entre N , & nombre cossique ; comme si une equation est entre 10 qc & 80 q , soit reduite icelle à l'equation d'entre 10 c , & 80 : la division étant donc faite , il faudra tirer la racine cubique du quotient 8 , & ainsi des autres.

[Or la maniere d'extraire les racines des nombres absolus est suffisamment enseignée en nôtre Practique d'Arithmetique ; c'est pourquoy nous enseignerons seulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres cossiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'un nombre cossique simple soit prise la racine d'iceluy nombre , delaisant le caractère , l'exposant duquel soit divisé par l'exposant du caractère qui denomme la racine qu'il faut extraire , & viendra l'exposant du caractère , par lequel sera denommé la racine cherchée. Comme s'il faut trouver la racine quarrée de ce nombre 144 q ; ayant pris la racine quarrée d'iceluy nombre 144 , qui est 12 , soit divisé l'exposant de ce caractère q , par l'exposant du caractère q , sçavoir est 2 par 2 , & viendra 1 , qui est exposant du caractère 12 : 12 est donc racine quarrée du nombre 144 q . Car si ce nombre 12 q est multi-

multiplié en soy, fera produit le nôbre proposé 144 *q*.

Derechef, qu'il faille trouver la racine quarrée de 144 *q*; ayant pris la racine quarrée d'iceluy, qui est 12, soit divisé l'exposant de ce caractere *q*, sçavoir est 6, par l'exposant de racine quarrée, qui est 2, & viendra 3, exposant du caractere *c*: donc 12 *c* est racine quarrée du nombre 144 *q*. Ainsi aussi la racine cubique de ce nombre 64 *c*, sera 4 *c*. Car la racine cubique du nombre 64 est 4, & l'exposant du caractere cube, sçavoir est 3, étant divisé par 3, produit l'unité, exposant de *c*. Item la racine quarrée de ce nombre 25 *q*, sera 5 *q*. Et la racine quarrée de quarrée de ce nombre 16 *q*, sera 2 *q*. Semblablement la racine surfolide de ce nombre 32 *q*, sera 2 *q*. Mais la racine quarrée de quarrée de ce nombre 81 *q*, sera 3 *c*, &c.

Que si un nombre n'a la racine cherchée, ou que par la division des exposans ne soit pas produit un nombre exposant entier, le nombre coslique proposé n'a pas la racine désirée. Comme par exemple, ce nombre 16 *c*, n'a pas de racine quarrée ou cubique, car encore que le nombre 16 ait racine quarrée, sçavoir 4, si est-ce neanmoins qu'icelle racine ne se peut prendre, à cause que divisant 3, exposant du caractere *c*, par 2 exposant de la racine quarrée, provient $1\frac{1}{2}$, qui ne correspond à aucun caractere coslique. Derechef, encore ne divisant 3, exposant de ce caractere *c*, par 3, exposant de la racine cubique, provienne 1, exposant de ce caractere *c*, toutefois icelle racine cubique ne se peut prendre, parce que le nombre 16 n'est nombre cube, &c.

Quant à l'extraction des racines des nombres cosliques composez & diminuez, il est à noter qu'on

n'a point encore trouvé (au moins que ie sçache) de maniere certaine & universelle pour ce faire, sinon que les exposans des trois nombres cossiques de l'equation ayent un même excez entr'eux, c'est à dire qu'ils soient en proportion Arithmetique; & telles sont les equations suivantes.

9. 68 + 72.	les exposans sont 2.1.0.
19. 72 - 68.	les exposans sont 2.0.1.
19. 148 - 48.	les exposans sont 2.1.0.
199. 189 + 648.	les exposans sont 4.2.0.
199. 725 - 49	les exposans sont 4.0.2.
199. 4339 - 41616.	les exposans sont 4.2.0.
199. 2000 + 3456.	les exposans sont 6.3.0.
199. 5120 - 168.	les exposans sont 6.0.3.
199. 8000 - 156751.	les exposans sont 6.3.0.
1999. 200099 + 185076881.	les exposans sont 8.4.0.
1999. 214651701 - 2099.	les exposans sont 8.0.4.
1999. 2000099 - 78461119.	les exposans sont 8.4.0.
1999. 8099 + 39609.	les exposans sont 10.5.0.
1999. 7424 - 20099.	les exposans sont 10.0.5.
1999. 200099 - 999424.	les exposans sont 10.5.0.
&c.	

Quand les exposans gardant la progression Arithmetique sont tous plus grands que 0, il les faut abrevier par la soustraction du moindre nombre exposant; comme les suivantes equations.

1999. 725699 - 400.	les exposans sont 11.7.9.
1999. 200999 + 349699.	les exposans sont 11.8.5.
1999. 20099 - 143369.	les exposans sont 10.6.2.

Seront reduites à celles-cy.

199. 725—49. les exposans sont 4. 0. 2.
 190. 2096 + 3456. les exposans sont 6. 3. 9.
 1999. 20099 + 14336. les exposans sont 8. 4. 0.

Et ainsi faut-il faire de toutes autres, afin de connoître qu'elle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarrée des nombres coſſiques dont les exposans sont 2, 1, 0, ou bien 2, 0, 1, vous ferez ainsi qu'il ensuit.

Premierement, prenez la moitié du nombre des racines, puis au quarré d'icelle moitié, ajoutez-y le nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ôtez s'il a le signe —; & finalement a la racine quarrée de ce produit, ajoutez la moitié du nombre des racines, si elles ont le signe +, ou l'ôtez si elles ont le signe —; & ce qui viendra donnera l'estimation & valeur d'une seule racine quarrée.

Comme pour exemple, une équation étant trouvée entre 19, & 72—6R; la division étant faite de 72—6R, par 1: comme veut la regle d'Algebre, vient le même nombre pour la valeur d'un quarré, duquel il faut trouver la racine. Premierement donc ie prens la moitié du nombre des racines, ſçavoir 3; puis au quarré d'icelle moitié, ſçavoir est à 9, j'ajoute le nombre absolu 72; à cause du signe +, & viennent 81; dont ie prend la racine quarrée, qui est 9; & d'icelle j'ôte 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchée.

Soit derechef une équation trouvée entre 19, &

$6 R + 72$: & il faut trouver la racine quarrée de ce nombre $6 R + 72$. Je prends premièrement la moitié du nombre des racines, sçavoir est 3 : puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9, j'ajoute 72, à cause du signe +, & font 81, dont la racine quarrée est 9, à laquelle j'ajoute 3 moitié du nombre des racines, & font 12, qui est la valeur d'une racine.

Soit encore une equation entre 19 , & $18 R - 72$: & il faut trouver la racine d'iceluy nombre $18 R - 72$. Je prends donc la moitié des racines, sçavoir est 9 ; puis du quarré d'icelle moitié, qui est 81, ie soustrais 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarrée est 3, à laquelle j'ajoute la moitié des racines, sçavoir est 9, à cause du signe +, & font 12 pour la valeur d'une racine.

Mais il est à noter que tels nombres cossiques diminuez, esquels le nombre absolu à le signe —, ont double racine, sçavoir est, l'une grande & l'autre petite ; la grande est trouvée comme dit est cy-dessus : mais on aura la moindre, si la racine quarrée du reste de la soustraction est ôtée de la moitié du nombre des racines : comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarrée du reste 9, est ôtée de 9, moitié du nombre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cossique $18 R - 72$. Et faut noter que l'une & l'autre racine n'est pas toujours propre à la solution d'un probleme, ains seulement l'une ou l'autre : c'est pourquoy advenant tels nombres, si l'examen fait par l'une d'icelles racines ne répond à la question, il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore une autre maniere d'extraire la

racine quarrée de tels nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair, ou rompu, laquelle extraction se fait ainsi :

Au quarré du nombre des racines, ajoutez le quadruple du nombre absolu, s'il a le signe +, ou l'ostez, s'il a le signe — : puis à la racine quarrée de ce produit ajoutez ou soustrayez le nombre des racines, selon qu'il sera noté, & viendra l'estimation ou valeur du double de la racine quarrée, parquoy la moitié sera la valeur d'une seule racine.

Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique $72 - 6x$: Au quarré du nombre des racines, qui est 36, j'ajoute 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarrée est 18, de laquelle j'ôte le nombre des racines, sçavoir est 6, & restent 12 pour la valeur de deux racines, & partant une racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nombres cossiques, qui constituent equation, ayans les exposans constituez en telle progression Arithmetique que ceux-cy : 4, 2, 0 : ou 4, 0, 2 : ou 6, 3, 0 : ou 6, 0, 3 : ou 8, 4, 0 : ou 8, 0, 4 : ou 10, 5, 0 : ou 10, 0, 5, &c. esquels le plus grand caractere est toujours composé de q , & d'un autre caractere cossique : il faut premierement extraire la racine quarrée, à cause du caractere q , selon qu'il est enseigné cy-dessus, accommodant au nombre qui est affecté au caractere cossique, en cette partie là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous avons dit du nombre des racines, comme si l'equation étoit entre trois nombres cossiques af-

fectez aux caracteres $q, R, \& N$. puis apres de cette racine quarrée trouvée, soit qu'elle soit rationnelle ou irrationnelle, il en faut tirer une autre racine, selon l'autre partie du plus grand caractere coslique, ce caractere q étant ôté. Comme pour exemple, si une equation est trouvée entre $199, \& 18q - 648$: Il faudra extraire la racine quarrée de ce nombre $18q - 648$, à cause de la premiere partie du signe coslique q , tout ainsi que si l'equation étoit trouvée entre $1q, \& 18R - 648$, laquelle racine quarrée fera 36 : & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarrée qui sera 6 : parquoy 6 sera la racine du nombre coslique proposé.

En la même maniere, si une equation est entre $196, \& 5120 - 166$: il faudra prendre la racine quarrée du nombre $5120 - 166$, & de cette - cy prendre la racine cubique. Ainsi aussi si l'equation est entre $1999, \& 20000q - 7846119$, il faudra premicrement prendre la racine quarrée : & puis apres de cette-cy la racine quarrée de quarrée. Et ainsi des autres. •

Or afin de tant plus faciliter l'intelligence des regles & préceptes iusques icy enseignez, nous leur adjoindrons les 12. questions suivantes.

1. *Trouver deux nombres, desquels la difference soit donnée & en raison donnée.*

Qu'il faille trouver deux nombres, dont la difference soit 20 , & leur raison quintuple. Soit posé le moindre nombre être $1R$. Donc le plus grand sera $5R$, sçavoir est le quintuple d'iceluy : l'excez d'iceux est $4R$. Il y a donc equation entre $4R \& 20$: & divisant 20 par 4 , viendra 5 pour $1R$. Parquoy le moindre nombre requis sera 5 , & le plus

grand 25, qui est quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Trouver trois nombres continuellement proportionnaux en une raison donnée, desquels les quarrez ensemble fassent un nombre donné.*

Qu'il faille trouver trois nombres continuellement proportionnaux en raison sesquiterce, desquels les quarrez fassent 4329. Soient posez les nombres cherchez être 9 R, 12 R, 16 R, qui sont en proportion sesquiterce. Les quarrez d'iceux, sçavoir 81 q, 144 q, 256 q, font ensemble 481 q, egaux à 4329. Divisant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de 1 q, & par consequent 1 R sera 3. Donc le premier nombre posé 9 R, sera 27: le second 36, & le tiers 48, desquels les quarrez 729, 1296, 2304 font ensemble 4329.

3. *Trouver deux nombres en raison donnée, & qui multipliez entr'eux fassent un nombre ayant raison donnée à la somme d'iceux,*

Qu'il faille donc trouver deux nombres en raison sesquialtere, tels que leur produit soit dodecuple de la somme d'iceux. Soient posez les deux nombres être 2 R, & 3 R, qui est raison sesquialtere. Estans multipliez entr'eux ils font 6 q, & leur somme est 5 R. Afin donc que 6 q ayent raison dodecuple à 5 R, l'equation sera entre 6 q & 60 R. Divisant donc 60 par 6, viendront 10 pour la valeur de 1 R, pource que les denominations colliques q. & R. sont collaterales. Veu donc que le premier nombre a été posé 2 R, & le second 3 R, celui-là sera 20, & certui-cy 30: & iceux multipliez entr'eux font 600, qui est dodecuple de 50, somme d'iceux.

4. *Trouver deux nombres en raison donnée, tels*

que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, produise un nombre donné.

Qu'il faille trouver deux nombres en raison sesquiquinte, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand fasse le nombre 4860. Posons que les nōbres cherchez soient, $5x$ & $6x$, lesquels sont en raison sesquiquinte. Or le moindre $5x$ étant multiplié par le quarré du plus grand, sçavoir est par $36x$ fait $180x$, qui partant sont egaux au nombre donné 4860. Divisant donc 4860 par 180 , viendront 27 pour x , & prenant la racine cubique dudit nombre 27, à cause du caractère x , icelle racine sera 3. Parquoy le moindre nombre que nous avons posé être $5x$ sera 15: & le plus grand $6x$, sera 18. Or le quarré d'iceluy, qui est 324, étant multiplié par le moindre nombre 15, produit le nombre quarré 4860.

5. *Estans donnez deux nombres inegaux, en trouver deux autres en raison donnée, tels que le plus grand osté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les restes soient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100 & 60: & il en faut trouver deux autres, en raison septuple, & que le plus grand ôté de 100, & le moindre de 60, les restes soient egaux.

Soient posez pour les nōbres en raison septuple $17x$ & $7x$. Les nombres egaux restans seront $100 - 7x$ & $60 - 17x$. Ajoutant donc $7x$ à chacun, l'equation sera entre 100, & $60 + 6x$: & ôtant 60 de chacun, elle sera entre 40 , & $6x$. Et divisant 40 par 6, viendra pour x , $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le plus grand septuple de cettui-cy sera $46\frac{2}{3}$. Et ôtant celui-là de 60, & celui-cy de 100, les nombres re-

frans' seront egaux, sçavoir 53 $\frac{1}{3}$.

6. *Estant donnez deux nombres en trouver un autre, auquel étant ajouté l'un des donnez, & soustrait l'autre, la somme soit au reste en raison donnée.*

Les nombres donnez soient 100 & 20 : & il faut premierement trouver un nombre, auquel si on ajoute 100, & du même on ôte 20, la somme soit triple du reste. Soit posé ce nombre-là être $1x$; là somme sera $1x + 100$, & le reste $1x - 20$. Afin donc que cette somme-là soit triple de ce reste, l'equation sera entre $1x + 100$, & $3x - 60$. Et ajoutant à chacun 60, elle sera entre $1x + 160$, & $3x$; & ôtant $1x$, icelle equation sera entre 160 & $2x$. Divisant donc 160 par 2, sera trouvé 80 pour $1x$, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on ajoute 100, on aura 180 : mais si on en ôte 20, resteront 60 : & 180 est à 60 en raison triple.

Qu'il faille maintenant trouver un nombre, auquel si on ajoute 20, & du même on soustrait 100, cette somme-là soit triple de ce reste-cy. Soit posé ce nombre-là être $1x$, & sera fait la somme $1x + 20$, & restera $1x - 100$. Afin donc que cette somme soit triple de ce reste, l'equation sera entre $1x + 20$, & $3x - 300$. Et ajoutant 300 à chacun, elle sera entre $1x + 320$, & $3x$; & ôtant $1x$ de chacun, l'equation sera entre 320, & $2x$. Divisant donc 320 par 2, viendra 60 pour $1x$, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on ajoute 20, on aura 180, & si on en ôte 100, resteront 60 : & iceux deux nombres 180, & 60, sont entr'eux en raison triple.

7. *Trouver deux nombres en raison donnée, & que le quarre du plus grand soit au moindre aussi en raison donnée.*

Que les nombres cherchez aient raison triple, & le quarré du plus grand ait au moindre la raison sextuple. Soit posé le moindre $1R$, & le plus grand $3R$. Le quarré du plus grand, sçavoir $9q$, doit avoir raison sextuple au moindre $1R$: Donc l'equation sera entre $9q$, & $6R$. Et divisant 6 par 9 , viendra $\frac{2}{3}$ pour $1R$. pource que les nombres cossiques sont collateraux. Les nombres cherchez sont donc $\frac{2}{3}$ & 2 , ayans raison triple, & le quarré du plus grand, sçavoir 4 , est en raison sextuple au moindre, sçavoir à $\frac{2}{3}$.

8. Etant donn: un nombre composé de deux quarez, le diviser en deux autres quarez.

Soit le nombre donné 34 , composé des deux quarez 9 & 25 , qu'il faut diviser en deux autres quarez. Les côtez des quarez donnez sont 3 & 5 : soit posé le côté du premier quarré cherché être $1R + 3$, sçavoir une racine plus que le côté du premier quarré donné: mais le côté du second quarré cherché, soit posé quelconque nombre de racines moindre que le côté du second quarré dōne, sçavoir $2R - 5$. Les quarez d'iceux côtez seront $1q + 6R + 9$, & $4R - 20R + 25$, qui ajoûtez ensemble, sont $5q + 34 - 14R$ egal au nombre donné 34 : ajoutant dōc $14R$ à chacun, l'equation sera entre $5q + 34$, & $14R + 34$. & ôrant 34 de chacun, restera l'equation entre $5q$, & $14R$. Divisant donc 14 par 5 viendront $\frac{14}{5}$, pour $1R$, pource que les nombres cossiques sont collateraux. Donc le côté du premier quarré, lequel nous avons posé être $1R + 3$, sera $\frac{22}{5}$ & le côté du second quarré, lequel a été posé de $2R - 5$, sera $\frac{18}{5}$, c'est à dire $\frac{3}{5}$

Les quârez d'iceux côtez trouvez sont $\frac{241}{25}$ & $\frac{1}{25}$; qui sont ensemble $\frac{242}{25}$, c'est à dire 34 nombre donné.

9. *Esians donnez deux nombres . en trouver un autre qui ajouté à l'un d'iceux ; & la somme multipliée par iceluy trouvé ; produise le quarré de l'autre nombre donné.*

Soient les deux nombres donnez 10 & 12 ; & il en faut trouver un autre ; qui ajouté au premier 10, fasse un nombre, qui multiplié par iceluy ajouté, produise le quarré de l'autre nombre 12, sçavoir 144. Soit posé le nombre cherché x , l'ajoutant à 10, viendra $x + 10$, qui multiplié par x , fait $x^2 + 10x$, lequel doit être egal à 144. Ostant donc 10 x de chacun, l'equation sera entre x^2 & $144 - 10x$, laquelle se résoudra ainsi : La moitié du nombre des racines 5, fait le quarré 25, auquel ajoutant 144, vient 169, dont la racine quarrée est 13, de laquelle soit ôtée la susdite moitié 5, à cause du signe $-$, & restera la valeur de x , sçavoir 8, nombre cherché. Car iceluy étant ajouté à 10, fait 18, qui multipliez par 8, le produit est 144, quarré de l'autre nombre 12.

10. *Trouver un nombre, duquel le cube joint avec un nombre donné, fasse le quarré de cube d'iceluy.*

Soit donné un nombre 702 ; & il en faut trouver un autre, duquel le cube étant ajouté à iceluy nombre donné, fasse le quarré de cube d'iceluy nombre trouvé. Posons que le nombre cherché soit x : le cube d'iceluy sera donc x^3 , & le quarré de cube x^6 ; qui partant sera egal à $x^6 + 702$. Parquoy il faut prendre la racine censicubique de ce nombre composé $x^6 + 702$, en cette sorte. La

moitié du nombre affecté au caractère c , est $\frac{1}{2}$, dont le quarré est $\frac{1}{4}$; qui étant ajouté au nombre 702, à cause du signe —, vient 702 $\frac{1}{4}$ dont la racine quarrée est $\frac{11}{2}$ à laquelle soit ajoutée la susdite moitié du nombre affecté au caractère c , & viendront $\frac{13}{2}$, c'est à dire 27 : qui sera la racine quarrée dudit nombre $1c + 702$, prise à cause du caractère q , qui est joint au plus grand caractère cossique qc . Maintenant de cette racine quarrée 27, soit prise la cubique à cause de l'autre caractère c , & icelle sera 3 : qui est le nombre requis : Car le cube d'iceluy, sçavoir 27, étant ajouté au nombre donné 702, fait 729, qui est le quarré de cube dudit nombre 3.

II. *Trouver deux nombres tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux, estant divisé par leur difference, le quotient soit égal à un nombre donné.*

Qu'il faille trouver deux nombres, tels que leur produit étant divisé par leur difference, le quotient soit 30. Soit posé pour le moindre nombre, quelconque nombre moindre que le quotient donné 30, sçavoir est 20, & soit posé le plus grand entre 20 + 1 x , afin que la difference d'iceux, soit 1 x : de 20 en 20 + 1 x , sera fait le nombre 400 + 20 x , lequel divisé par 1 x difference d'iceux, le quotient est $\frac{400 + 20x}{1x}$, égal au nombre proposé

30. Cette equation sera reduite par la multiplication en croix, à l'égalité d'entre 30 x , & 400 + 20 x , ôtant donc 20 x de chacun, l'equation sera entre 10 x & 400 : & 400 étans divisez par 10, viendront 40 pour la valeur de 1 x , difference des nombres cherchez. Vù donc que le moindre est

20, le plus grand sera 60, c'est à sçavoir 20 + 40. Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui divisez par 40 difference d'iceux nombres, le quotient est 30.

12. *Diviser un nombre donné en deux parties, telles que la plus grande, divisée par la moindre, & la moindre par la plus grande, la somme des quotiens soit donnée.*

Qu'il faille donc diviser le nombre 10, en deux telles parties que chacune d'icelles divisée par l'autre, les deux quotiens fassent ensemble $4\frac{1}{4}$. Posons que l'une des parties soit 1 R : d'oc l'autre sera $10 - 1R$: cette-cy étant divisée par celle-là, le quotient sera $\frac{10}{1R} = \frac{10}{1R}$; & celle-là divisée par cette-cy,

le quotient est $\frac{1R}{10 - 1R}$. La somme de ces deux quotiens sera donc $\frac{10}{1R} + \frac{1R}{10 - 1R}$ qui doit être égale à $4\frac{1}{4}$.

Laquelle equation sera reduite par multiplication croisée à cette autre $8q + 400 = 80R$, & $170R - 17q$; tellement qu'ajoutant de part & d'autre $17q$, & $80R$; l'equation viendra entre $25q + 400$, & $250R$; mais ôtant 400, l'equation demeurera entre $25q$, & $250R - 400$; & chaque nombre étant divisé par le nombre 25 affecté au caractère q , l'égalité sera entre $1q$ & $10R - 16$; Parquoy la racine quarree en sera prise ainsi. La moitié du nombre des racines est 5, & le quarre 25, duquel ôtant le nombre 16, à cause du signe —, resteront 9, dont la racine quarree est 3, à laquelle soit ajoutée la susdite moitié des racines, sçavoir 5, & viendront 8, pour la valeur de 1R, qui est la plus grande partie cherchée, & partant l'autre sera 2.

ra 2. Ce qui est evident; car chaque partie divisant l'autre, les deux quotiens sont 4 & $\frac{1}{2}$, qui font ensemble le nombre donné 4 $\frac{1}{2}$.

Or és 12 questions cy-dessus expliquées les nombres sont abstraits de la matiere, mais à la fin de ce traité nous en joindrons quelques autres ou les nombres seront joints & appliquez aux choses materielles.

Des secondes racines.

C H A P. X I.

D'Autant qu'en plusieurs operations sont cherchez deux, ou trois, ou davantage de nombres sous une proportion incertaine, il est nécessaire pour eviter confusion, qu'ayant posé 1 R pour le premier nombre, on ne pose derechef 1 R pour le second, & encore 1 R pour le 3^e. C'est pourquoy on a excogité les secondes racines, lesquelles sont nommées & figurées diversement par les Auteurs: mais suivant Stifel, Pelletier & Clavius, nous retiendrons le nom de secondes racines, & les noterons ainsi: 1 A, signifie 1 R seconde; 1 B, denotte 1 R tierce; 1 C, signifie 1 R quarte, &c. Et quand un nombre a deux signes; il faut entendre que le nombre avec le premier signe a été multiplié par l'unité du signe posterieur. Comme 1 R A, signifie 1 R multipliée par 1 A; & 3 R A, signifie 3 R multipliées par 1 A: ainsi 1 q A q, montre que 1 q a été multiplié en 1 A q, &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, aussi bien que les premieres racines. Et première-

ment quant à l'addition, elle est aisée : car si elles sont de même genre, il faut seulement ajouter les nombres entr'eux, & au produit aposer le même caractère d'icelles racines. Comme 3 A, & 4 A, sont ensemble 7 A : Item 5 B, & 3 B, sont 8 B. Mais quand icelles racines ne sont de même genre, l'addition se fait par le signe + : comme 3 A, & 4 B, sont 3 A + 4 B : Item 3 B, & 4 A, sont 3 B + 4 A.

La soustraction est aussi aisée : Car quand les racines sont de même genre il n'y a qu'à soustraire un nombre de l'autre, & aposer au reste le même caractère. Comme 3 A ôtez de 5 A, restent 2 A : Item 2 B ôtez de 5 B, restent 3 B. Mais quand icelles sont de genres differens, la soustraction se fait par le signe — : comme 3 A ôtez de 4 B, restent 4 B — 3 A.

Pour le regard de la multiplication, elle se fait ainsi : Si un nombre de racine premiere, doit être multiplié par un nombre de racine seconde, ayant seulement la lettre A ou B, &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & aposer au produit les mêmes signes. Comme 2 B multipliées par 2 A, sont 4 B A, c'est à dire 4 B multipliées par 1 A : Item 2 A par 2 B, sont 4 A B ; c'est à dire 4 A multipliez par 1 B : Item 3 q multipliez par 4 B, sont 12 q B ; c'est à dire 12 q multipliez par 1 B.

Mais quand un nombre absolu est multiplié avec un nombre de seconde racine, il faut aposer au produit le signe de la seconde racine. Comme 6 multipliant 4 B, le produit est 24 B : Item 5 C multipliant 7, le produit est 35 C.

Que si un nombre de seconde racine doit

être multiplié par un nombre de seconde racine de même lettre; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit aposer la même lettre avec le caractère q . Comme; A multipliez par $4 A$, feront $12 A q$.

Quand un nombre de seconde racine est multiplié en soy quarrément, ou cubiquement, &c. Il faut aposer au produit la même lettre avec le caractère q , ou c , &c. Comme $2 A$ multipliez en soy quarrément, le produit est $4 A q$; mais cubiquement est produit $8 A c$: Item $2 \& A$ par $2 \& A$, font $4 q A q$; c'est à dire $4 q$ de premiere racine multipliez par $1 q$ de seconde racine.

Mais quand un nombre de seconde racine est multiplié en un autre de la même racine seconde, qui a aussi un caractère coëffique; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le signe coëffique $\&$. Comme $1 A$ multiplié par $1 A q$, le produit est $1 A c$; Item; $3 B$ par $4 B c$, font $12 B q q$.

Que si un nombre coëffique simple sans lettre de seconde racine doit être multiplié avec un nôbre marqué de lettre & signe coëffique; il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produit aposer les mêmes signes. Comme $2 c$ multipliez par $4 A q$, feront $8 c A q$; c'est à dire $8 c$ multipliez en $1 A q$: Item $1 c$ multiplié par $1 \& A q$, fait $1 q q A q$; c'est à dire $1 q q$ multiplié par $1 A q$: Autant fait aussi $1 q A$ multiplié en soy: Car $1 q$ multiplié en soy fait $1 q q$; & $1 A$ en soy fait $1 A q$.

Quand un nombre ayant apres la lettre de se-

conde racine un signe cossique est multiplié par un nombre qui a pareillement apres la lettre de seconde racine un signe cossique, le produit doit avoir outre la lettre, ou les lettres de seconde racine, le caractère cossique que donnent les exposans des caracteres. Comme 2 A q, en 3 A c, produisent 10 A β : Item 3 A q multipliez par 4 B c, feront 12 A B β .

Mais si un nombre ayant un caractère cossique apres la lettre de seconde racine, est multiplié par un nombre, qui apres le caractère cossique a aussi la lettre de seconde racine, il faut aposer au produit le dernier caractère cossique, suivy par la lettre de seconde racine, puis aussi du caractère cossique produit du premier caractère cossique multiplié par la lettre de seconde racine, comme si elle avoit ce signe α . Comme 1 A c multiplié par 1 q A, fera 1 q A q q, qui sera aussi produit de 1 α A q multipliée en soy : Item 3 A q multipliez par 4 c A, feront 12 c A c, c'est à dire 12 c multipliez par 1 A c.

Quant à la division des secondes racines : soit fait premierement reduction des signes cossiques par la soustraction des signes semblables. Comme pour diviser 8 c A q par 4 A q : Je soustrais les signes semblables A q, & restent 8 c, & 4 : puis je divise 8 c par 4, & viennent 2 c, pour le quotient de 8 c A q divisez par 4 A q : ainsi 8 c A q divisez par 4 c, le quotient est 2 A q.

Mais divisant un nombre α par un nombre de secondes racines, le quotient sera nombre rompu.

Comme 2 α divisées par 4 A, le quotient est $\frac{2}{4} A$.

Quant à l'extraction des secondes racines il faut

tirer la racine du nombre, s'il y en a, & aposer à icelle la lettre de seconde racine, rejetant le caractère coſſique. Comme la racine quarrée du nombre 25 Aq , est 5 A : Item la racine cubique du nombre 27 Ac , est 3 A ; & la racine quarrée du nombre 16 Dqq , est 2 D .

Mais ſi le nombre n'a telle racine, ou que le caractère ne ſoit de même apellation que la racine qu'il faut extraire : il faut ſeulement apofer à iceluy nombre, lettre & caractère, le ſigne radical. Comme la racine cubique du nombre 3 Aq , est $\sqrt[3]{3Aq}$. Item la racine quarrée du nombre 4 Ac est $\sqrt{4Ac}$.

Quant à la preuve des operations de cet Algorithme des ſecondes racines, elles ſe fera tout ainſi qu'és premieres racines ; ſçavoir eſt, que l'addition & ſouſtraction ſe prouveront l'une l'autre : comme auſſi la multiplication & diſiſion ; ou bien plus intelligiblement par les progreſſions Geometriques commençant à l'unité, miſe à la page 16, prenant celle de la raiſon double pour les premieres racines : mais celles de la raiſon triple pour les ſecondes racines : tellement que 12 vale 2 : mais 1 A , 33 19, 4 ; 1 Aq , 93 1 Ac , 27 ; 12 A , 6 ; 12 Aq , 8, &c.

Or comme au chapitre precedent nous avons ajouté pluſieurs queſtions pour faciliter par leur ſolution l'intelligence des regles & preceptes auparavant enſeignés, auſſi en ajouterons nous icy quelques unes appartenans aux ſecondes racines, afin de faire voir par leur ſolution le moyen de ſe ſervir & mettre en pratique les choſes enſeignées en ce chapitre.

1. *Diviſer un nombre donné en trois parties, telles*

que les deux moindres, soient ensemble egales à l'autre, & les deux plus grandes quintuples de la moindre.

Qu'il faille donc diviser le nombre 24, en trois parties, telles que les deux moindres ensemble fassent la plus grande, mais les deux plus grandes soient ensemble quintuple de la moindre. Posons que la moindre partie soit $1x$, & la moyenne $1A$: donc la plus grande sera $1x + 1A$, & partant la somme de ces deux-cy sera $1x + 2A$, qui doit être quintuple de la moindre partie; parquoy $1x + 2A$ seront egales à $5x$: ôtons de part & d'autre $1x$, & resteront $2A$ egales à $4x$, & conséquemment $2x$ egales à $1A$. Donc la moyenne partie sera double de la plus petite qui a été posée x , & la plus grande triple. Parquoy il n'y-a qu'à couper le nombre donné 24, selon cette proportion 1, 2, 3, quoy faisant la plus grande partie sera 12, la moyenne 8, & la plus petite 4.

2. *Il y-a trois nombres, tels que les deux derniers ajoutez avec 100, le produit est double du premier nombre, mais le premier & dernier ajoutez avec le même nombre 100, sont triples du second: & le premier & deuxième aussi avec 100 sont quadruple du troisième; à sçavoir quels sont ces trois nombres-là?*

Posons $1x$ pour le premier nombre, & $1A$ pour les deux autres ensemble. Or puis que les deux derniers avec 100 doivent être double du premier il y aura equation entre $2x$ & $1A + 100$: & ôtant 100 de part & d'autre restera $1A$ egal à $2x - 100$: partant la somme du second & troisième nombre, qui faisoit $1A$ sera $2x - 100$; & si on y ajoute le premier nombre, sçavoir $1x$, la somme de tous

les trois nombres sera $3x - 100$. Maintenant posons B pour le second nombre : donc le premier & troisième seront $3x - 100 - 1B$, puis que tous les trois faisoient ensemble $3x - 100$. Et puis que la somme du premier & troisième avec 100 fait le triple du second, il y aura equation entre $3x - 1B$, & $3B$: adjouons $1B$ de part & d'autre, l'equation viendra entre $3x$ & $4B$: donc aussi entre $\frac{3}{4}x$, & $1B$. Parquoy le second nombre que nous avons posé être $1B$, sera $\frac{3}{4}x$. Finalement pour le troisième nombre soit posé $1C$: Donc puis que tous les trois font ensemble $3x - 100$, la somme des deux premiers sera $3x - 100 - 1C$, qui avec 100, doit faire le quadruple du troisième. Il y aura donc equation entre $4C$, & $3x - 1C$: Ajoutons $1C$ de part & d'autre, & viendront $3x$ egales à $5C$; partant aussi $\frac{3}{5}x$ à $1C$. Parquoy le troisième nombre sera $\frac{3}{5}x$. Et puis que le premier nombre est $1x$, le second $\frac{3}{4}x$, & le troisième $\frac{3}{5}x$, la somme de tous les trois sera $\frac{47}{20}x$: Mais nous avons trouvé cy-dessus qu'ils faisoient aussi $3x - 100$. Il y a donc equation entre $3x - 100$, & $\frac{47}{20}x$: Ajoutant 100 de part & d'autre ; nous aurons $3x$ egales à $\frac{47}{20}x + 100$: ôtons-en $\frac{47}{20}x$, & resteront $\frac{13}{20}x$ egales à 100. Divisant donc 100 par $\frac{13}{20}$ viendront $153 \frac{1}{13}$, pour la valeur de $1x$, qui est le premier nombre, mais le second sera $115 \frac{5}{13}$, & le troisième $92 \frac{4}{13}$.

3. Il y a deux nombres, dont la somme des quarrés est 208, & multipliez entr'eux leur produit est les $\frac{4}{3}$ du plus grand quarré ; à sçavoir quels sont ces deux nombres-là ?

Posons que le plus grand nombre soit $1x$, & le

moindre $1 A$: leurs quarréz seront $1 q$, & $1 A q$, qui doivent faire ensemble 208 ; & partant $1 q$ fera $208 - 1 A q$; & $1 A q$ fera $208 - 1 q$. Mais les deux nombres $1 R$ & $1 A$ multipliez entr'eux font $1 R A$, qui est égal à $\frac{4}{9} q$, c'est à dire à $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré, qui est $1 q$. Si donc il y a equation entre $1 R A$ & $\frac{4}{9} q$, il y aura aussi equation entre les quarréz d'iceux nombres, c'est à sçavoir entre $1 q A q$, & $\frac{16}{81} q q$, laquelle equation sera reduite par multiplication en croix à $36 q A q$, & $16 q q$, & par depression du signe q de la premiere racine, l'equation viendra entre $36 A q$, & $16 q$: & par regle de trois si $16 q$, valent $36 A q$, $1 q$ vaudra $\frac{36 A q}{16}$, (pource qu'il faut laisser le signe q des premier & troisieme termes de la regle.) Et d'autant que cy-dessus $1 A q$ étoit égal à $208 - 1 q$, il y aura aussi equation entre $1 A q$, & $208 - \frac{36 A q}{16}$, puis que $1 q$ est égal à $\frac{36 A q}{16}$. Ajoutons donc à chacun $\frac{36 A q}{16}$, & l'equation viendra entre $1 A q + \frac{36 A q}{16}$ & 208 . Or veu que $1 A q$ fait $\frac{16}{81} A q$, ladite equation sera entre $\frac{52 A q}{81}$ & 208 . Parquoy divisant 208 par $\frac{52}{81}$, viendront 64 , pour la valeur de $1 A q$, la racine duquel nombre 64 , qui est 8 , sera le moindre nombre cherché, lequel nous avons posé être $1 A$; & pource que le quarré du plus grand étoit $208 - 1 A q$, si de 208 , on ôte la valeur de $1 A q$, sçavoir 64 , resteront 144 , pour le quarré d'iceluy plus grand nombre, qui par consequent sera 12 .

4. Il y a deux nombres, la somme desquels étant ôstée de la somme de leurs quarréz, restent 8 , mais

ajouté au nôbre produit de leur multiplication fait
 11. A sçavoir quels sont ces deux nombres-là.

Posons que le moindre nombre soit $1B$, & le plus grand $1A$: mais pour la somme d'iceux nombres posons $1B$. Or puis que la somme des deux nombres cherchez étant ôtée de la somme de leurs quarez, restent 8, iceux quarez seront $8 + 1B$. (Car si d'iceux on ôte $1B$, resteront 8.) Mais le quarré de $1B$, qui est le moindre nombre, est $1q$: donc le quarré de $1A$, qui est l'autre nombre sera $8 + 1B - 1q$. Et d'autant que la somme desdits nombres cherchez, c'est à sçavoir $1B$, étant adjoutée au produit de leur multiplication fait 11; iceluy produit sera $11 - 1B$. Et pource que $1B$ est coupé en deux parties, sçavoir $1B$ & $1A$, le quarré de $1B$, c'est à dire $1Bq$, sera egal aux deux quarez de $1B$, & $1A$, sçavoir $8 + 1B$, avec deux fois le produit d'iceux, sçavoir $22 - 2B$. Parquoy il y aura equation entre $1Bq$, & $30 - 1B$. Or la racine de ce nombre $30 - 1B$, se trouvera tout ainsi que de $30 - 1B$; car $1B$ tient icy lieu de B : & partant nous ajoûterons le quarré des racines, sçavoir 1, au quadruple du nombre 30, sçavoir 120, & viendront 121, dont la racine quarrée est 11, de laquelle ôtons 1, à cause du signe —, & resteront 10, dont la moitié 5, est la valeur de $1B$, c'est à dire la somme des deux nombres cherchez : & partant la somme de leurs quarez que nous avons trouvé être $8 + 1B$ fera 13. Il faut donc maintenant diviser en deux telles parties que la somme de leurs quarez fasse 13; ce que nous ferons ainsi qu'il ensuit.

Posons que l'un des nombres soit $1B$: donc l'autre

tre sera 5 — 1 R, & leurs quarréz seront 1 q, & 1 q + 25 — 10 R, tellement que leur somme, qui est 2 q + 25 — 10 R sera egale à 13. Ajoutons 10 R de part & d'autre, & l'equation viendra entre 2 q + 25, & 13 + 10 R; ôtons-en 25, & l'equation restera entre 2 q, & 10 R — 12, & consequemment entre 1 q, & 5 R — 6. Parquoy de 25, quarré des racines ôtons 24 quadruple du nombre 6, & restera 1, dont la racine quarrée est 1, à laquelle soit ajouté 5, nombre des racines, à cause de leur signe +, & viendront 6, dont la moitié 3 est la valeur de 1 R, qui est l'un des nombres cherchez, & partant l'autre sera 2.

Or j'estime que ces quatre questions avec celles que nous ajoûterons encore à la fin de ce Livre, suffiront pour l'intelligence des secondes racines; c'est pourquoy nous viendrons maintenant à traiter

Des nombres irrationnaux, ou sourds,

C H A P. XII.

NOmbres irrationnaux ou sourds, sont les racines des nombres, lesquelles ne se peuvent exprimer par nombres; tellement que pour expliquer telles racines on se sert de ces signes $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, &c. Comme la racine quarrée de 5, est dite sourde ou irrationnelle, pource qu'on ne peut trouver aucun nombre qui multiplié en soy produise 5; tellement que cette racine quarrée de 5, sera marquée ainsi $\sqrt{5}$, ou ainsi $\sqrt[4]{5}$. Item la racine cubique de 7, sera marquée ainsi $\sqrt[3]{7}$. Item la racine quarrée de quarrée de 12, ainsi $\sqrt{\sqrt{12}}$,

ou ainsi $\sqrt{9912}$; & ainsi des autres.

Est toutesfois à noter que tout nombre qui a le signe $\sqrt{}$ n'est pas pourtant irrationnel ; car quelquefois pour la commodité de l'opération, au lieu de tirer la racine de quelque nombre, on luy appose seulement le signe de la racine requise.

Or il y a deux genres de racines sourdes : car les unes sont simples, comme $\sqrt{q}$ de quelque nombre non carré : $\sqrt{c}$ de quelque nombre non cube, &c. & ces racines simples sont aussi appellées par quelqu'uns nombres mediaux. Les autres racines sourdes sont composées par l'interposition des signes $+$ & $-$: & icelles sont appellées par aucuns multinomies radicales ; & par d'autres, nombres irrationnaux composez, ou diminuez ; composez, quand les nombres sont liez par le signe $+$, comme $\sqrt{7} + \sqrt{10}$: mais diminuez, quand les nombres sont liez par le signe $-$, comme $\sqrt{5} - \sqrt{13}$, ou $\sqrt{10} - \sqrt{c7}$.

De la réduction des simples racines sourdes, à une mesme denomination,

CHAP. XIII.

A Fin que les simples racines sourdes se puissent multiplier & diviser entr'elles, il est nécessaire qu'elles soient reduites en une même denomination, si elles sont diverses, laquelle réduction se fait presque en la même maniere que la réduction des fractions de diverses denominations à une même : Car ayant posé les signes radicaux, chacun sous leur nombre, il faut multiplier un chacun

nombre en soy, selon le signe radical de l'autre : puis apres multiplier les exposans des signes entr'eux, afin d'avoir l'exposant du signe commun. Comme pour exemple, soient les deux racines $\sqrt{7}$, & $\sqrt[5]{c}$, qu'il faut reduire en racines de même espee. Ayant posé ces deux racines ainsi qu'il apert icy, ie multiplie 7 cubiquement à cause du signe c , & viennent 343 au lieu de 7; puis ie multiplie 5 quarrement à cause du signe $\sqrt{}$ du nombre 7, & viennent 25, pour & au lieu de 5 : & finalement ie multiplie les exposans des signes $\sqrt{}$ & $\sqrt[5]{}$ entr'eux : sçavoir est 2 par 3, & viennent 6, qui est exposant du caractere qc : tellement que $\sqrt{7}$, & $\sqrt[5]{c}$ seront reduites à $\sqrt[6]{qc343}$, & $\sqrt[6]{qc25}$. Ainsi aussi $\sqrt[5]{c2}$, & $\sqrt[4]{3}$ étans reduites à même espee ou denomination, seront $\sqrt[20]{16996}$ & $\sqrt[20]{27996}$, comme il apert en cette figure.

$$\begin{array}{r}
 343 \qquad 25 \\
 \hline
 \sqrt{} \quad \text{X} \quad \sqrt[5]{} \\
 7 \qquad \qquad \qquad 5 \\
 \sqrt{} \qquad \qquad \sqrt[5]{} \\
 2 \quad \hline \qquad 3 \\
 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16 \qquad 27 \\
 \hline
 \sqrt[5]{} \quad \text{X} \quad \sqrt[4]{} \\
 2 \qquad \qquad \qquad 3 \\
 \sqrt[5]{} \qquad \qquad \sqrt[4]{} \\
 3 \quad \hline \qquad 4 \\
 12
 \end{array}$$

Il y a quelques abreviations en cette operation, comme quand il faut reduire un nombre absolu, & un radical en même espee : car alors il n'y a qu'à multiplier en soy quarrement ou cubiquement, &c. le nombre absolu, & au produit apposer le signe radical de la racine. Comme 6, & $\sqrt[5]{5}$, étans reduits à même espee seront $\sqrt[5]{36}$, & $\sqrt[5]{5}$.

Item 2 & $\sqrt{c4}$, feront $\sqrt{c8}$, & $\sqrt{c4}$.

Item voulant reduire ces deux racines $\sqrt{c8}$, & $\sqrt{c25}$. Je prends de 8 la racine cubique 2 : puis apres la racine quarrée de 25, qui est 5, à laquelle j'apose le signe radical restant $\sqrt{}$, ainsi $\sqrt{5}$. J'ay donc maintenant pour les deux racines proposées un nombre absolu 2, & un nombre radical $\sqrt{5}$, qui reduits comme dit est cy-dessus, font $\sqrt{4}$ & $\sqrt{5}$.

Item, voulant reduire ces deux racines $\sqrt{c2}$ & $\sqrt{qc6}$ en même espee, ie multiplie 2 en soy quarrément, à cause du signe q , qui est en l'autre racine, outre le signe c , & fait 4, auquel j'apose le signe q , & fera faite la reduction à $\sqrt{qc4}$, & $\sqrt{qc6}$.

Item, voulant reduire $\sqrt{c9}$, & $\sqrt{3}$ en même denomination, ie multiplie le nombre de la moindre denomination, sçavoir est 3, en soy quarrément, à cause du signe $\sqrt{}$, qui est en la plus grande denomination, outre $\sqrt{}$, & viennent $\sqrt{c9}$, & $\sqrt{c9}$ pour la reduction en même espee des deux racines proposées. Ainsi $\sqrt{qc8}$, & $\sqrt{c9}$ feront reduites à $\sqrt{qc8}$, & $\sqrt{qc729}$, multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en soy cubiquement, à cause du caractère c , qui outre q , est en la plus grande denomination.

Or auparavant que venir à l'Agorithme d'icelles racines sourdes, il est necessaire que nous enseignions le probleme suivant.

Connoistre si deux racines sourdes sont commensurables ou incommensurables, & quelle raison elles ont entr'elles.

Soit divisé le nombre de la plus grande racine,

par celuy de la moindre, (icelles étans reduites en même espece, si elles n'y sont) & si au quotient vient un nombre qui ait la racine denotée par le signe radical d'icelles racines proposées, elles seront commensurables entr'elles, autrement non: & auront telle raison l'une à l'autre, que le quotient à l'unité: ou si le quotient est une fraction, elles seront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, sont commensurables entr'elles: Car 12 étans divisez par 3, le quotient est 4, dont la racine quarrée est 2, & seront l'une à l'autre comme 2 à 1. Item $\sqrt{320}$ & $\sqrt{135}$ sont commensurables; car 320 étans divisez par 135, le quotient est $2\frac{10}{27}$, ou $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$, c'est à dire $\frac{4}{3}$: & leur raison est comme 4 à 3. Item $\sqrt[3]{964}$ & $\sqrt[3]{27}$ sont commensurables, & leur raison est comme 3 à 2: car icelles étans reduites en même espece, seront $\sqrt[3]{964}$ & $\sqrt[3]{729}$, & la divisio faite, le quotient sera $\sqrt[3]{\frac{11}{64}}$, ou $\sqrt[3]{\frac{25}{64}}$, c'est à dire $\frac{5}{4}$.

Mais $\sqrt{5}$ & $\sqrt{30}$ sont incommensurables: car 30 étans divisez par 5, le quotient est 6, qui est nombre irrationel, pource qu'il n'a pas de racine quarrée; toutesfois ils ont même raison que $\sqrt{6}$ à 1. Item $\sqrt{32}$ & $\sqrt{24}$, seront aussi incommensurables: car divisant 32 par 24, le quotient sera $1\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{3}$, qui n'a point de racine cube; & toutesfois ils seront entr'eux comme $\sqrt[3]{4}$ à $\sqrt[3]{3}$, ou comme $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ à 1.

*De la mutiplication & division des simples
racines sourdes.*

CH A P. XIV.

Combien que l'adition & soustraction precedent ordinairement la multiplication & la

divisió, si est-ce toutes'ois qu'aux racines sourdes, on commence par la multiplication & division, à cause que l'addition & soustraction ne se peuvent parachever sans la multiplication. Quand donc deux racines de même genre doivent être multipliées, ou divisées entr'elles, il faut multiplier ou diviser les nombres entr'eux, & aposer au nombre produit le même signe radical. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{7}$, par $\sqrt{10}$, ie multiplie 7 par 10, & viennent 70, auxquels j'apose le signe radical, & sont $\sqrt{70}$. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{12}$, produit $\sqrt{36}$, c'est à dire 6. Ainsi $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{18}$. Ainsi $\sqrt{c3}$ par $\sqrt{c7}$, viennent $\sqrt{c21}$. Ainsi $\sqrt{V4}$, par $\sqrt{V8}$, viennent $\sqrt{V32}$. Mais pour diviser $\sqrt{70}$, par $\sqrt{10}$, ie divise 70 par 10, & viennent 7, auxquels j'apose le signe radical, & sont $\sqrt{7}$. Ainsi $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, le quotient sera $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$. Ainsi $\sqrt{c21}$ par $\sqrt{c3}$, le quotient sera $\sqrt{c7}$.

Mais quand les deux racines proposées sont de différente espece, il les faut reduire à une même, puis apres faire la multiplication, ou division comme dessus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{3}$ par 4; je reduits le nombre absolu 4, & sont $\sqrt{16}$, puis ie les multiplie comme dessus, & viennent $\sqrt{48}$. Ainsi $\sqrt{5}$ multipliée par $\sqrt{c10}$, le produit sera $\sqrt{qc12500}$. Ainsi aussi $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{V\frac{2}{3}}$, produit $\sqrt{V\frac{2}{12}}$, ou $\sqrt{V\frac{1}{6}}$. Mais divisant $\sqrt{48}$ par 4, le quotient sera $\sqrt{3}$. Ainsi $\sqrt{qc12500}$, divisée par $\sqrt{c10}$, le quotient sera $\sqrt{5}$.

Mais si quelque racine doit être multipliée en foy quarrément, ou cubiquement, &c. selon le signe radical qui luy sera apposé, il faut seulement

prendre le même nombre pour le produit, delais-
 sant le signe radical. Comme $\sqrt{3}$ étant multipliée
 quarrément, produira 3 : & $\sqrt{c5}$ multipliée en
 soy cubiquement, fera 5.

Et s'il falloit multiplier quelque racine en soy
 selon l'exigence d'un autre signe radical, il faudroit
 multiplier le nombre en soy selon que le requier-
 roit cet autre signe radical, & aposer au produit le
 signe radical du nombre multiplié. Ainsi de $\sqrt{6}$
 multipliée en soy cubiquement est fait $\sqrt{216}$; d'où
 advient que la racine cubique de ce produit sera
 $\sqrt{6}$. Item de $\sqrt{c}$ multiplié en soy quarrément est
 fait $\sqrt{c64}$, c'est à dire 4; d'où advient que la raci-
 ne quarrée de ce nomb. $\sqrt{c64}$, est $\sqrt{c8}$, c'est à di-
 re 2. Semblablement de $\sqrt{qc6}$ en soy quarrément
 est fait $\sqrt{qc36}$, c'est à dire $\sqrt{c6}$. &c.

De l'addition des simples racines sourdes.

C H A P. X V.

PRemierement, si deux ou plusieurs racines ega-
 les doivent être ajoutées ensemble, il n'y a qu'à
 les multiplier par 2, ou par 3, ou par 4, &c. se-
 lon le nombre d'icelles racines à ajouter : com-
 me par exemple, voulant ajouter $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$; ie
 double $\sqrt{6}$, & font $\sqrt{24}$, pour la somme d'icel-
 les deux racines. Item $\sqrt{c6}$, $\sqrt{c6}$ & $\sqrt{c6}$, font
 ensemble $\sqrt{c162}$, car $\sqrt{c6}$, triplée, c'est à dire
 multipliée par 3, qui font $\sqrt{c27}$, fait ledit nom-
 bre $\sqrt{c162}$. Semblablement $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$, a-
 jointes ensemble font $\sqrt{80}$, car le quarré de 4, est
 16, qui multipliant 5, font 80, &c.

Mais

Mais quand deux racines inegales doivent être ajoutées ensemble, icelles soient premierement reduites à même espece, si elles n'y sont; puis soit avisé, si elles sont commensurables ou incommensurables : Que si lesdites racines sont commensurables, ayant divisé la plus grande par la moindre, soit ajouté une unité au quotient rationel, & la somme étant multipliée par la moindre racine, sera donnée la somme de l'addition des deux racines proposées. Comme pour exemple, soient proposées ajouter $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$: divisant la plus grande par la moindre, le quotient est $\sqrt{2\frac{1}{2}}$, c'est à dire $\frac{3}{2}$, & ajoutant 1, c'est $\frac{5}{2}$, qui multipliez par $\sqrt{8}$, le produit est $\sqrt{50}$, pour la somme des deux racines proposées. Ainsi $\sqrt{12}$ ajoutée à $\sqrt{3}$, la somme est $\sqrt{27}$: Item $\sqrt{320}$, ajoutée à $\sqrt{135}$, fait la somme $\sqrt{1715}$: Item $\sqrt{4}$ ajoutée à $\sqrt{8}$, fait $\sqrt{12}$: Item $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ajoutée à $\sqrt{\frac{8}{9}}$, fait $\sqrt{\frac{18}{9}}$.

Que si les racines proposées sont incommensurables, il faut seulement interposer entre-deux le signe + ; comme $\sqrt{6}$ ajoutée à $\sqrt{11}$, fait $\sqrt{6 + 11}$.

Or il y a encore plusieurs autres manieres d'ajouter les racines commensurables, desquelles la suivante me semble aisée. Ayant trouvé la raison des racines proposées, soit posé au premier terme d'une regle de trois, l'un des nombres d'icelle raison ; au second terme, la somme d'iceux nombres de la raison ; & au troisième, la racine correspondante au terme de la raison ; posé au premier terme ; & faisant la regle comme il appartient, le quatrième nombre qui viendra sera la somme des racines proposées. Comme au premier exem-

ple cy-dessus, la raison des racines a été trouvée comme 3 à 2 ; posant donc 3 ou 2 au premier terme de la regle de trois, mais 5 au second, & $\sqrt{18}$, ou $\sqrt{8}$ au troisieme, le quatrieme sera $\sqrt{50}$; & se fait la regle de trois ; ainsi qu'il avert cy-dessous.

Si 3 donnent 5, que donneront 78? ou bien si 2 donnent 5, combien 78?

Y9.	Y25.	Y25	Y4	Y15
		—		8
		90		—
		36		100
		—		
		450		200 [Y50

De la soustraction des simples racines sourdes

CHAP. XVI.

Si les racines sont incommensurables, il n'y a qu'à interposer le signe —. Comme $\sqrt{3}$ ôtée de $\sqrt{10}$, restera $\sqrt{10} - \sqrt{3}$. Item $\sqrt{620}$, ôtée de $\sqrt{650}$, restera $\sqrt{650} - \sqrt{620}$.

Mais quand les racines sont commensurables, ayant divisé la plus grande par la moindre, soit été du quotient rationnel une unité ; puis le reste soit multiplié par la moindre racine, & le produit

sera le reste désiré. Comme pour exemple, qu'il faille soustraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Je divise donc 50 par 8, le quotient est $6\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée est $\frac{5}{2}$, de laquelle j'ôte un entier, & reste $\frac{3}{2}$, que je multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{18}$, pour le reste désiré. Item, qui de $\sqrt{27}$ ôte $\sqrt{3}$, reste $\sqrt{12}$. Semblablement qui de $\sqrt{1715}$ ôte $\sqrt{320}$, reste $\sqrt{135}$. Ainsi aussi qui de $\sqrt{\frac{49}{8}}$, ôte $\sqrt{\frac{1}{2}}$ reste $\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Cette operation se fait aussi par la regle de trois, mettant au premier & troisième terme les nombres specifiez au chapitre precedent; mais au deuxième la difference des termes de la raison, comme il apert cy-dessous.

Si 5 don. 3, que donne $\sqrt{50}$? ou si 2 don. 3, combien $\sqrt{8}$?

$\sqrt{25}$. $\sqrt{9}$ 9 $\sqrt{4}$. $\sqrt{9}$. 9

450

72

*
20 3
* 30 [$\sqrt{18}$ 72 [$\sqrt{18}$ reste; $\sqrt{8}$ étant ôté de $\sqrt{50}$.
233 **
2

De l'addition des nombres irrationaux composez,
& diminuez.

CHAP. XVII.

P Our ajouter nombres irrationaux composez & diminuez, il les faut disposer l'un au dessous de l'autre, puis ajouter chaque racines simples,

comme il a été dit en l'Algorithme precedent, observant les regles de $+\&-$, que nous avons enseignez au chapitre 4; c'est à sçavoir qu'aux signes semblables, il faut ajouter sans changer le signe; mais qu'aux dissemblables, il faut soustraire, & poser le signe du plus grand nombre.

Or d'autant qu'il ne se fait rien en cette opération, qui n'ait déjà été enseigné cy-devant, la chose sera assez manifeste par exemples sans davantage de discours.

$$\begin{array}{r}
 6 + \sqrt{18}. \quad \sqrt{27} + \sqrt{8}. \quad \sqrt{162} - 1. \quad \sqrt{50} + 3. \\
 4 + \sqrt{8}. \quad \sqrt{12} + \sqrt{2}. \quad \sqrt{200} - 3. \quad \sqrt{32} - 5. \\
 \hline
 10 + \sqrt{50}. \quad \sqrt{75} + \sqrt{18}. \quad \sqrt{722} - 5. \quad \sqrt{162} - 2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{50} - 3. \quad 8 - \sqrt{50}. \quad \sqrt{50} + 6. \\
 \sqrt{32} + 5. \quad \sqrt{242} - 12. \quad 24 - \sqrt{242}. \\
 \hline
 \sqrt{162} + 2. \quad \sqrt{72} - 4. \quad 30 + \sqrt{72}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{6216} - \sqrt{405} \quad \sqrt{256} - \sqrt{27}. \\
 \sqrt{64} - \sqrt{80}. \quad \sqrt{81} + \sqrt{8}. \\
 \hline
 10 - \sqrt{3125}. \quad 7 - \sqrt{1}.
 \end{array}$$

Et est à noter pour briéveté que les deux particules d'un nombre composé se rencontrents totalement egales aux deux particules d'un nombre diminué, il n'y a qu'à doubler la premiere particule de l'un d'iceux nombres. Comme pour ajouter $15 + \sqrt{8}$ à $15 - \sqrt{8}$: Je double seulement 15 & font 30 pour la somme de l'addition. Item $\sqrt{20} + 6$

ajoutez à $\sqrt{20} - 6$ font $\sqrt{80}$, & ce d'autant que les dernières particules se détruisent l'une l'autre, à cause des signes $+$ & $-$.

De la soustraction des nombres irrationaux composés, & diminuez.

CHAP. XVIII.

Pour soustraire tels nombres, il les faut disposer l'un au dessus de l'autre puis soustraire chaque racines, comme il a été dit au chap. 16. observant les regles des signes $+$ & $-$ enseignées au chap. 4. sçavoir est qu'aux signes semblables, il faut soustraire (si faire se peut) sans changer le signe: mais si on ne peut soustraire, il faudra ôter le supérieur de l'inférieur, & changer le signe. Mais aux signes dissemblables, il faut ajouter, & aposer le signe supérieur.

Cette operation peut être facilement entendue par les exemples suivans, sans autres preceptes.

$$\sqrt{50} - 5 \quad \sqrt{1875} + \sqrt{1250}. \quad \sqrt{50} + 2. \quad \sqrt{50} - 2.$$

$$\sqrt{8} - 2 \quad \sqrt{243} + \sqrt{162}. \quad \sqrt{18} + 4. \quad \sqrt{18} - 4.$$

$$\sqrt{18} - 3 \quad \sqrt{48} + \sqrt{32}. \quad \sqrt{8} - 2. \quad \sqrt{8} + 2.$$

$$\sqrt{162} + 2. \quad \sqrt{162} - 2. \quad \sqrt{72} - 4. \quad 30 - \sqrt{72}. \quad \sqrt{0} + 16.$$

$$\sqrt{50} - 3. \quad \sqrt{50} + 3. \quad 8 - \sqrt{50}. \quad \sqrt{50} + 6. \quad \sqrt{320} - 8.$$

$$\sqrt{32} + 5. \quad \sqrt{52} - 5. \quad \sqrt{242} - 12. \quad 24 - \sqrt{242}. \quad 24 - \sqrt{320}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{1401} - \sqrt{11} \quad \sqrt{11000} + \sqrt{3125} \quad \sqrt{180} + 6 \\
 \sqrt{256} - \sqrt{27} \quad \sqrt{216} - \sqrt{405} \quad \sqrt{320} - 8 \\
 \hline
 \sqrt{81} + \sqrt{8} \quad 4 + \sqrt{20480} \quad 8 - \sqrt{20}
 \end{array}$$

Et est à noter pour brièveté, que les deux particules d'un nombre composé se rencontraient du tout égales à deux particules d'un nombre diminué, il faut seulement doubler la dernière particule de l'un des nombres. Comme pour soustraire $\sqrt{12} - 5$, de $\sqrt{12} + 5$; je double la dernière particule 5, & vient le nombre 10, pour reste de la soustraction. Ainsi $10 - \sqrt{4}$, ôtez de $10 + \sqrt{4}$, resteront $\sqrt{16}$, c'est à dire 4 : Item $\sqrt{12} - \sqrt{5}$ ôtée de $\sqrt{12} + \sqrt{5}$, restent $\sqrt{20}$. Et ce d'autant que $+$ détruit $+$; mais $+$ & $-$ se doivent ajouter.

De la multiplication des nombres irrationnels composés & diminuez.

C H A P. XIX.

Pour faire cette operation, & aussi la suivante, il faut retenir la règle de $+$ & $-$ enseignée au chap. 5. sçavoir est qu'aux signes semblables faut poser $+$, mais aux dissemblables $-$. Ayant donc posé l'un des deux nombres aux dessous de l'autre, soit faite la multiplication comme es nombres absolus, observant toutesfois ce que nous avons dit au chap. 14. de la multiplication des racines simples, & au chap. 15. de l'addition & soustraction des mêmes racines. Ce qui sera enseigné es exem-

bles décrits cy-dessous. Comme en l'exemple suivant, — $\sqrt{45}$ en — $\sqrt{20}$, fait + $\sqrt{900}$, c'est à dire + 30, & — $\sqrt{45}$ par + 6, c'est à dire en + $\sqrt{36}$, fait

— $\sqrt{1620}$, &

— $\sqrt{20}$ par

+ 8, c'est à

dire par + $\sqrt{64}$, fait — $\sqrt{1280}$. Et finalement + 8

en + 6, fait + 48 : Et partant tout le nombre pro-

duit sera 48 — $\sqrt{1280}$ — $\sqrt{1620}$ + 30 ; qui re-

duit par addition de + 48 à 30 ; & de — $\sqrt{1280}$ à

— $\sqrt{1620}$: fera 78 — $\sqrt{5780}$.

Multiplicande 6 — $\sqrt{20}$.

Multiplicateur 8 — $\sqrt{45}$.

Pr. 48. — $\sqrt{1280}$ — $\sqrt{1620}$ + 30

qui par reduction sera 78 —

$\sqrt{5780}$.

En cet autre exemple, je multiplie — $\sqrt{\sqrt{648}}$ par — $\sqrt{\sqrt{162}}$, & vient + $\sqrt{\sqrt{104976}}$, c'est à dire + 18 : & + $\sqrt{\sqrt{288}}$ par — $\sqrt{\sqrt{162}}$, fait — $\sqrt{\sqrt{46656}}$, c'est à dire — $\sqrt{216}$: & — $\sqrt{\sqrt{648}}$ par + $\sqrt{128}$, fait — $\sqrt{\sqrt{82944}}$, c'est à dire — $\sqrt{288}$: & finalement + $\sqrt{\sqrt{288}}$ par + $\sqrt{\sqrt{128}}$ fait + $\sqrt{\sqrt{36864}}$, c'est à dire + $\sqrt{192}$; & partant tout le nombre produit de la multiplication sera $\sqrt{192}$ — $\sqrt{288}$ — $\sqrt{216}$ + 18, ou bien 18 + $\sqrt{192}$ — $\sqrt{288}$ — $\sqrt{216}$.

Multiplicande $\sqrt{\sqrt{288}}$ — $\sqrt{\sqrt{648}}$

Multiplicateur $\sqrt{\sqrt{128}}$ — $\sqrt{\sqrt{162}}$.

Produit $\sqrt{192}$ — $\sqrt{288}$ — $\sqrt{216}$ + 18

ou 18 + $\sqrt{192}$ — $\sqrt{288}$ — $\sqrt{216}$.

En ce troisieme exemple nous reduirons premierement $\sqrt{\beta 6}$, & $\sqrt{\gamma 3}$ en une même denomination, c'est à sçavoir à $\sqrt{\gamma 9\beta 36}$, & $\sqrt{\gamma 9\beta 243}$, & ces deux

nombres multipliez entr'eux, le produit est $+ \sqrt{9 \beta 8748}$:

puis apres

nous re-

duirons $\sqrt{}$

$c 7$, & $\sqrt{3}$

à $q c 49$, &

$\sqrt{q c 27}$ de même espece, & ces deux-cy étans

multipliez entr'eux, le produit est $\sqrt{q c 1323}$.

Au premier de ces deux exemples est multiplié un nombre composé en soy, dont le produit est

$7 + \sqrt{5}$	$7 - \sqrt{5}$
$7 + \sqrt{5}$	$7 - \sqrt{5}$
$49 + \sqrt{245} + \sqrt{245} + 5$	$49 - \sqrt{245} - \sqrt{245} + 5$

$49 + \sqrt{245} + \sqrt{245} + 5$, c'est à dire $54 + \sqrt{980}$, pource que 49 & $+5$, font 54 , & $\sqrt{245}$ avec $\sqrt{245}$, c'est à dire le double de $\sqrt{245}$, fait $\sqrt{980}$. Mais au 2^e exemple est multiplié un nombre diminué en soy, dont le produit est $49 - \sqrt{245} - \sqrt{245} + 5$, c'est à dire $54 - \sqrt{980}$. Or pour brièvement faire telle multiplication, c'est à dire multiplier un nombre composé de racines quarrées en soy, ou par un autre egal, il ne faut qu'ajouter ensemble les quarez des particules, puis à cette somme ajouter le double du produit d'une particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-dessus, les quarez des particules font 54 , & le produit d'une particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-dessus, les quarez des particules font 54 , & le produit d'une particule en l'autre est $\sqrt{245}$, ou $- \sqrt{}$

245, dont le double est $\sqrt{980}$, ou $-\sqrt{980}$. Tout le produit est donc $54 + \sqrt{980}$, ou $54 - \sqrt{980}$.

Mais multipliant un nombre composé ou diminué de racines quarrées, comme $6 + \sqrt{8}$ par son respondant contraire, c'est à dire par $6 - \sqrt{8}$, viendra au produit un

simple nombre 28,

$$6 + \sqrt{8}.$$

comme il apert en l'o-

$$6 - \sqrt{8}.$$

peration. Car $+$ $\sqrt{}$

288 ruine $-\sqrt{288}$; &

$$36 + \sqrt{288} - \sqrt{288} - 8.$$

partant reste $36 - 8$,

qui font 28. Ce produit sera encore trouvé plus facilement & promptement: car 8, quarré de la dernière particule $\sqrt{8}$, étant ôté de 36 quarré de la première particule 6, restera le même produit 28.

Ainsi aussi $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ étant multiplié par son respondant

$$\sqrt{10} + \sqrt{2}.$$

contra-

$$\sqrt{10} - \sqrt{2}$$

re $\sqrt{10}$

$-\sqrt{2}$,

$$10 + \sqrt{20} - \sqrt{20} - 2.$$

le pro-

duit sera $10 + \sqrt{20} - \sqrt{20} - 2$, c'est à dire 8:

lequel nombre 8 est aussi produit en ôtant 2, quarré de la dernière particule, de 10 quarré de la première particule.

Et si le nombre de la dernière particule est le plus grand,

sera produit

$$2 + \sqrt{16}$$

un nombre di-

$$2 - \sqrt{16}$$

minué, com-

$$\hline$$

me apert en

$$4 - 16$$

cet exemple,

où est multiplié $2 + \sqrt{16}$ par son respondant contraire $2 - \sqrt{16}$, & est produit $4 - 16$.

Mais si on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$, par son respondant $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$, où tu vois que le signe $+$ de la dernière particule est changé en $-$, le produit fera $4 + \sqrt{24}$: lequel produit étant derechef multiplié par son respondant contraire $-4 + \sqrt{24}$, viendra

un simple nombre

8. Cē dernier produit sera encore trouvé plus facilement & promptement comme ensuit. Soient

multipliées les deux premières particules $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ entr'elles, & viendra $\sqrt{6}$, qui

doublée sera $\sqrt{24}$; puis de la somme des deux nombres d'icelles particules, sçavoir est 5, soit ôté le nombre de la dernière particule, & restera 4, dont le quarré 16 soit ôté du nombre 24, & resterons 8 comme dessus.

Ainsi aussi, si on multiplie $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ par son répondant $\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$, sera produit $\sqrt{60} + 2$, qui multipliez par $\sqrt{60} - 2$, le produit sera simple nombre 56; lequel produit on aura aussi avec la même briéveté que dessus.

Et par cette maniere peuvent être reduits tous tels nombres composez ou diminuez en simple nom: sçavoir est multipliant toujours par le res-

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1.$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1.$$

$$- \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$$

$$+ \sqrt{6} + 2 + \sqrt{2}$$

$$3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

$$\text{produit } 4 + \sqrt{24}.$$

$$- 4 + \sqrt{24}.$$

$$- 16 - \sqrt{384} + \sqrt{384} + 24$$

pendant contraire, ainsi que dit est cy-dessus, jusques à ce que l'on soit parvenu à un simple nombre.

De la division des nombres irrationnels composés & diminués.

CHAP. XX.

Pour diviser un nombre irrationnel composé par un simple nombre radical, il faut diviser chaque particule par ledit simple nombre radical, observant la règle de $+$ & de $-$.

$$\sqrt{24} + \sqrt{9} \div [\sqrt{4} + \sqrt{1\frac{1}{2}}]$$

$$\sqrt{6} \quad \sqrt{6}$$

Comme pour diviser $\sqrt{24} + \sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, je divise chaque particule du dividande par le diviseur $\sqrt{6}$, & le quotient est $\sqrt{4} + \sqrt{\frac{9}{6}}$, ou $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$, comme il apert en cette formule.

Ainsi aussi divisant $\sqrt{208} + \sqrt{620}$, par $\sqrt{64}$, vient au quotient $\sqrt{c7} + \sqrt{c5}$.

Que s'il faut diviser un nombre irrationnel composé par un nombre simple & absolu. Comme pour exemple, $\sqrt{20} + \sqrt{c10}$ par le nombre absolu 3; il faut premierement réduire iceluy nombre 3 en l'espece de la premiere particule $\sqrt{20}$, & seront $\sqrt{9}$; par lesquels étant divisée ladite particule, viendra au quotient $\sqrt{2\frac{1}{3}}$: en apres il faudra aussi réduire ledit diviseur 3 en l'espece de la racine de la seconde particule $\sqrt{c10}$; & seront $\sqrt{c27}$, qui divisant icelle particule, le quotient sera $\sqrt{c\frac{10}{27}}$: tellement que tout le quotient de la division

fera $\sqrt{2} \frac{2}{3} - \sqrt{c} \frac{10}{7}$. Ainsi aussi pour diviser $\sqrt{V}8 + \sqrt{V}3$ par $\sqrt{2}$, il faut reduire iceluy diviseur en la même denomination que chaque particule du dividande, & on trouvera pour le quotient de la division $\sqrt{V}2 + \sqrt{q\beta} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$: Car $\sqrt{V}8$ & $\sqrt{2}$ étant reduites à même denomination, seront $\sqrt{V}V64$, & $\sqrt{V}V16$: & celle-là divisée par cette-cy donne $\sqrt{V}V4$, c'est à dire $\sqrt{V}2$. Et pour la seconde particule seront reduits $\sqrt{V}32$ & $\sqrt{2}$, à $\sqrt{q\beta}9V$ & $q\beta32$; & celle-là étant divisée par cette-cy, le quotient est $\sqrt{q\beta} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$.

Mais pour diviser un simple nombre par un composé ou diminué de racines quarrées, ou censcensifiques; comme pour exemple, 42 par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$, c'est à dire 7 ; il faut multiplier l'un & l'autre nombre par $\sqrt{25} - \sqrt{4}$, le correspondant contraire du diviseur, & viendront $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$, & 21 , ou $\sqrt{441}$: puis après soit divisé $\sqrt{44100} - \sqrt{7056}$ par $\sqrt{441}$, & viendront $\sqrt{100} - \sqrt{16}$, c'est à dire $10 - 4$ qui sera le quotient de 42 divisé par $\sqrt{25} + \sqrt{4}$. Qu'il faille encore diviser 54 par $2 + \sqrt{16}$, c'est à dire par 6 : soit donc multiplié le diviseur $2 + \sqrt{16}$, par $2 - \sqrt{16}$, & fera produit le nombre diminué $4 - 16$; pource que la dernière particule est plus grande que la première: parquoy soient transposées les particules dudit diviseur en cette maniere $\sqrt{16} + 2$, afin qu'étant multiplié par son répondant contraire $\sqrt{16} - 2$, soit fait un nombre simple 12 . En après soit aussi multiplié le nombre dividande 54 par le même nombre $\sqrt{16} - 2$, & viendra pour nouveau dividande $\sqrt{46656} - 108$, qui divisé par le nouveau diviseur 12 , le quotient sera $\sqrt{324} - 9$, c'est à dire $18 - 9$, qui sont 9 . Voulant encore diviser 20 par $\sqrt{V}16 +$

$\sqrt{5}$ Si, c'est à dire par 5 : seront premierement transposées les particules d'iceluy diviseur, afin que la plus grande soit la premiere: puis sera trouvé un nouveau diviseur & dividande, qui sera 5, & $\sqrt{5}$ 12960000 — $\sqrt{5}$ 2560000, & la division faite, le quotient sera $\sqrt{5}$ 20736 — $\sqrt{5}$ 4096, c'est à dire 12 — 8, c'est à sçavoir 4.

Que si tant le dividande que le diviseur, sont nombres composez, ou diminuez des racines quarrées, il faut reduire le diviseur en simple nombre, comme il a été dit au chap. precedent : puis multiplier le dividande par les mêmes nombres par lesquels on aura multiplié le diviseur pour le convertir à simple nombre, & ce qui viendra soit divisé par le simple nombre trouvé, comme dit est cy-dessus, & ainsi qu'il apert aux exemples suivans.

Estant proposé à diviser $18 + \sqrt{36}$, qui sont 24, par $7 - \sqrt{16}$, (c'est à dire par 3.) Il faut premierement multiplier le diviseur $7 - \sqrt{16}$ par son répondant contraire $7 + \sqrt{16}$, & viendront 33 pour un nouveau diviseur : puis par le même nombre $7 + \sqrt{16}$ soit aussi multiplié le dividande $18 + \sqrt{36}$, & viendront $198 + \sqrt{432}$, pour le nouveau dividande, qui divisé par les 33 trouvez, viendront au quotient $6 + \sqrt{4}$, c'est à dire 8.

Soit encore proposé à diviser $\sqrt{41} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$, par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Il faut donc premierement multiplier le diviseur $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ par son répondant contraire $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, & viendra un simple nombre 3 pour nouveau diviseur : en apres soit multiplié le nombre dividande $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$ par le même nombre $\sqrt{5} - 1$, afin d'avoir un nouveau dividande, & le produit sera $\sqrt{205} + \sqrt{15} - \sqrt{2}$.

10 — $\sqrt{81}$ — $\sqrt{6}$ + $\sqrt{4}$. Lequel il faut diviser par 3, c'est à dire par $\sqrt{9}$, & le quotient sera $\sqrt{22\frac{2}{3}}$ + $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ — $\sqrt{1\frac{1}{3}}$ — $\sqrt{9\frac{1}{3}}$ — $\sqrt{\frac{6}{3}}$ + $\frac{2}{3}$, ou bien $\sqrt{1\frac{2}{3}}$ + $\sqrt{\frac{1}{3}}$ — $\sqrt{\frac{10}{3}}$ — $\sqrt{\frac{22}{3}}$ — $\sqrt{\frac{2}{3}}$ + $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Que si le diviseur avoit deux parcelles de racines cubiques, il faudroit aussi trouver un diviseur simple, comme sera dit en cet exemple. Qu'il faille diviser 10 par $\sqrt[3]{65}$ + $\sqrt[3]{3}$. Premièrement il faut trouver suivant ce qui est enseigné en la 2. prop. 8. trois nombres continuellement proportionaux (à cause de 3 exposant du cube) en la raison des particules du diviseur, c'est à sçavoir de $\sqrt[3]{65}$ à $\sqrt[3]{3}$, & ce comme il ensuit. Premièrement soit multiplié $\sqrt[3]{65}$ en soy, & viendra $\sqrt[3]{425}$ pour le premier nombre; puis apres soit multiplié $\sqrt[3]{65}$ en $\sqrt[3]{3}$, & viendront $\sqrt[3]{195}$ pour le second nombre; tiercement soit multiplié $\sqrt[3]{3}$ en soy, & sera produit $\sqrt[3]{9}$ pour l'autre nombre: & par ainsi nous aurons ces trois nombres $\sqrt[3]{425}$, $\sqrt[3]{195}$, & $\sqrt[3]{9}$; continuellement proportionaux, en la raison de $\sqrt[3]{65}$ à $\sqrt[3]{3}$, comme il est démontré en la susdite 2. p. 8. Or étant aposé le signe + aux deux nombres extrêmes, & le signe — à celui du milieu, en cette sorte $\sqrt[3]{425}$ + $\sqrt[3]{195}$ + $\sqrt[3]{9}$ soit multiplié par ce nombre, tant le dividande proposé 10, que le diviseur $\sqrt[3]{65}$ + $\sqrt[3]{3}$, & viendra $\sqrt[3]{25000}$ — $\sqrt[3]{15000}$ + $\sqrt[3]{9000}$ pour le nouveau dividande; mais pour nouveau diviseur $\sqrt[3]{125}$ + $\sqrt[3]{27}$, c'est à dire 5; lequel simple diviseur on obtiendra aussi en ajoutant seulement les nombres des parcelles du diviseur 5, & 3.

Il faut procéder en la même manière lors que le diviseur est composé de deux racines censifcensi-

ques, surfolides, quarrées cubiques, &c. trouvant autant de nombres continuellement proportionnaux, en la raison des parcelles du diviseur qu'il y a d'unitéz en l'exposant du signe cossique qq, β, qc . &c. c'est à sçavoir quatre au diviseur des racines censicossiques; cinq pour le diviseur des surfolides, &c. Lesquels nombres étans trouvez, soit apposé le signe + au premier, & le signe — au second: mais au troisième derechef +, au quatrième encore —, & ainsi alternativement jusques au dernier; telle-

lement que

tous les

nombres des

lieux impairs

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{V}5 + \sqrt[4]{V}3 \\ \sqrt[4]{V}25 - \sqrt[4]{V}15 - \sqrt[4]{V}9 \\ \sqrt[4]{V}125 - \sqrt[4]{V}75 + \sqrt[4]{V}45 - \sqrt[4]{V}27 \end{array}$$

soient nottez du signe +, & ceux des lieux pairs, du signe —. Nous poserons pour exemple qu'il faille diviser 10 par $\sqrt[4]{V}5 + \sqrt[4]{V}3$. D'autant que l'exposant de qq est 4, il faut trouver quatre nombres continuellement proportionnaux en la raison de $\sqrt[4]{V}5$ à $\sqrt[4]{V}3$, en la sorte cy-dessus.

Maintenant, si par ce nombre de quatre particules on multiplie tant le dividande 10, que le diviseur $\sqrt[4]{V}5 + \sqrt[4]{V}3$, on trouvera pour nouveau dividande $\sqrt[4]{V}1250000 - \sqrt[4]{V}750000 + \sqrt[4]{V}450000 - \sqrt[4]{V}270000$: & pour nouveau diviseur $\sqrt[4]{V}625 - \sqrt[4]{V}81$, c'est à dire 2: lequel diviseur 2 on obtiendra aussi sans multiplication, en soustrayant seulement le nombre de la moindre particule du diviseur de la plus grande, c'est à sçavoir 3 de 5. Car les Algebraistes enseignent que quand le nombre exposant des racines est pair, comme $q, qq, \&c$. le simple diviseur est donné en ôtant le nombre de

la moindre particule de celuy de la grande: mais en les ajourant ensemble lors que ledit exposant est impair, comme c, β , &c.

Mais il est à noter que les particules du diviseur étans denommées de diverses racines, il les faut reduire à une même denomination auparavant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la division en fraction, faisant numérateur le nombre dividande: & denominateur le nombre diviseur. Comme le quotient de $\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$, divisé par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, se peuvent donner ainsi $\frac{\sqrt{41} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$. Semblablement s'il faut diviser $\sqrt{48} + \sqrt{63}$ par $\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{3}$, le quotient sera cette fraction $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{63}}{\sqrt{15} + \sqrt{6} - \sqrt{3}}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de connoître quel de deux nombres irrationaux composez est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composez $3 + \sqrt{8}$, & $8 - \sqrt{5}$, le plus grand desquels je desire sçavoir. Je soustrais 3 de chaque nombre, & restent $\sqrt{8}$, & $5 - \sqrt{5}$, desquels je prend les quarez, ce sont 8 & $30 - \sqrt{500}$, de chacun desquels j'ôte 8, & restent 0: & $22 - \sqrt{500}$: & à chacun d'iceux j'ajoute $\sqrt{500}$, & viennent $\sqrt{500}$, & 22, c'est à dire $\sqrt{484}$, qui sont moindre que $\sqrt{500}$: & partant je dis que $3 + \sqrt{8}$ est plus grand que $8 - \sqrt{5}$.

*Des fractions des nombres irrationnaux, &
de leur Algorithmes*

CHAP. XXI.

LA numeration d'icelles fractions est facile : Car quand le signe radical est posé devant le milieu de la fraction, iceluy signe est referé à l'un & à l'autre terme, c'est à sçavoir, tant au numérateur qu'au denominateur. Comme cette fraction $\sqrt{\frac{9}{16}}$, signifie $\sqrt{9}$ être divisée par $\sqrt{16}$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi $\sqrt{c \frac{8}{27}}$ signifie $\sqrt{c 8}$ être divisée par $\sqrt{c 27}$; & icelle equivalle à $\frac{2}{3}$. Ainsi aussi $\sqrt{\frac{6}{8}}$ denote $\sqrt{6}$ être divisée par $\sqrt{8}$.

Mais quand le signe radical est posé devant un nombre entier avec la fraction, il faut reduire tout le nombre à une seule fraction, afin de pouvoir exprimer sa valeur. Comme $\sqrt{c 1 \frac{6}{125}}$ sera réduit à $\sqrt{c \frac{192}{125}}$, & signifie $\sqrt{c 192}$ être divisée par $\sqrt{c 125}$, c'est à dire par 5 ; & peut être représentée ainsi $\sqrt{\frac{192}{125}}$, tellement qu'il signifie $\sqrt{c 192}$ être divisée

par 5. Que si les termes de cette fraction $\sqrt{c \frac{192}{125}}$ sont multipliez par un même nombre, c'est à sçavoir par $\sqrt{c 192}$, sera produit la fraction $\sqrt{c \frac{36864}{15625}}$

equivallant à la fraction $\frac{192}{125}$. Et si derechef les termes produits de la fraction sont multipliez par la même $\sqrt{c 192}$, sera produit la fraction $\sqrt{c \frac{7077888}{4608000}}$

c'est à dire $\sqrt{\frac{192}{14608000}}$, & signifie le cube 192 (qui est produit de $\sqrt{c 192}$ multipliée en soy cubiquement) être divisé par $\sqrt{c 4608000}$; pource que la racine

cubique du numerateur 7077888 est 192. Derezchef la fraction $\sqrt[3]{\frac{16}{8}}$, signifie $\sqrt[3]{16}$, c'est à sçavoir 4, être divisée par $\sqrt[3]{64}$, c'est à dire par 8; & est equivalente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\frac{16}{64}$ signifie $\sqrt[3]{16}$, c'est à dire 4 être divisé par 64; & est equivalente à $\frac{1}{16}$, ou $\frac{1}{2^4}$. Ainsi $\frac{16}{64}$, signifie que le nombre 16 est divisé par $\sqrt[3]{64}$, c'est à dire par 8: & est equivalente au nombre 2.

Quand la raison des numerateurs aux denominateurs est une même, les fractions sont egales, tout ainsi qu'és fractions vulgaires: Parquoy toutes ces fractions $\sqrt[4]{\frac{32}{4}}$, $\sqrt[4]{\frac{64}{12}}$, $\sqrt[4]{\frac{84}{156}}$ sont de même valeur: pource qu'en toutes, le numerateur est quadruple du denominateur.

Les fractions irrationnelles se reduisent à minimales termes (quand elles peuvent être reduites,) tout ainsi qu'és fractions vulgaires. Comme cette fraction $\sqrt[3]{96 \frac{1}{8}}$ se reduira à cette cy $\sqrt[3]{96 \frac{1}{2}}$ & $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$: Elles peuvent aussi être quelques fois reduites à moindres signes radicaux: Comme $\sqrt[3]{96 \frac{1}{8}}$ se rednit à $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Pource que le numerateur 4 a racine quarrée 2, mais il n'a pas racine cubique: Et le denominateur 8 a racine cubique 2, mais il n'a pas la quarrée.

Quant à l'addition & soustraction, elles se font en cette maniere. Si le denominateur est un même, soit ajoutez les numerateurs, comme il a été dit cy devant, ou soit soustrait l'un de l'autre, & à la somme, ou au reste, soit aposé le denominateur commun, ainsi qu'il apert és exemples suivans.

Addition.

$$\frac{1}{7} \text{ ajoutez à } \frac{2}{7}$$

$$\text{font } \frac{1+2}{7} \text{ ou } \frac{3}{7}$$
Soustraction.

$$\frac{1}{7} \text{ ôtée de } \frac{2}{7}$$

$$\text{reste } \frac{2-1}{7} \text{ ou } \frac{1}{7}$$

Mais quand les denominateurs sont divers, soit faire la reduction à un même denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'ès fractions vulgaires: puis soit fait ainsi que cy-dessus, & comme il apert en ces formules.

<i>Reduction.</i>	<i>Addition.</i>	<i>Soustraction.</i>
$\sqrt{144} \sqrt{196}$ $\sqrt{\frac{16}{49}} \& \sqrt{\frac{4}{9}}$ $\sqrt{441}$	$\sqrt{144} \& \sqrt{196}$ $\text{font } \sqrt{\frac{441}{49}}, \text{ ou } \sqrt{\frac{9}{4}}$	$\sqrt{144} \text{ de } \sqrt{196}$ $\text{reste } \sqrt{\frac{441}{49}}, \text{ ou } \sqrt{\frac{2}{25}}$

$$\sqrt{441}$$

En la même manière s'il faut ajouter $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ à $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$; on reduira premierement icelles fractions à même denomination, c'est à sçavoir à $\frac{2}{10} - \frac{1}{10}$ & $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$; puis apres ajoutant les numerateurs, on aura $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$. Mais si on soustrait la moindre d'icelles fractions de la plus grande, restera $\frac{1}{10}$.

Quand les numerateurs sont incommensurables, l'addition d'iceux se fait par l'interposition du signe +, mais la soustraction par l'interjection du signe —. Comme la somme de $\sqrt{\frac{7}{8}} \& \sqrt{\frac{5}{8}}$ est $\sqrt{\frac{7}{8}} + \sqrt{\frac{5}{8}}$. Et $\sqrt{\frac{5}{8}}$ ôtée de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reste $\sqrt{\frac{7}{8}} - \sqrt{\frac{5}{8}}$.

En la multiplication & division des fractions.

irrationnelles, il faut seulement les reduire à même signe radical, & achever comme es fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\sqrt[3]{2}$ par $\sqrt[6]{2}$ viendra $\sqrt[6]{2^3}$. Et $\sqrt[36]{2}$ divisée par $\sqrt[12]{2}$ fera $\sqrt[3]{2}$: & aussi $\sqrt[36]{2}$ divisée par $\sqrt[6]{2}$, viendra $\sqrt[6]{2^6}$, c'est à dire $\sqrt[6]{2^6}$.

Quant à la preuve de chacune de ces operations, elle se fait par la contraire, c'est à dire que l'addition se preuve par la soustraction : & la soustraction par l'addition, &c.

Or voila quant à ce qui concerne l'Algorithme des nombres sourds, reste que pour en montrer quelque usage nous ajoutons icy quelques questions en la solution desquelles on se sert desdits nombres sourds & irrationnels.

1. *Trouver deux nombres en une raison donnée, tels que l'un multiplié par l'autre produise un nombre donné.*

Qu'il faille trouver deux nombres en raison fescualtere, tels que le produit de leur multiplication soit 40. Posons qu'iceux nombres soient 2 & 3 : leur produit sera 6 q, qui doit être égal à 40. Divisant donc 40 par 6, viendront $\frac{40}{6}$ ou $\frac{20}{3}$ pour la valeur de 1 q, & consequemment 2, sera $\sqrt[3]{\frac{20}{3}}$: Et pour ce que le premier nombre a été posé 2 & le second 3, iceux nombres seront $\sqrt[3]{\frac{80}{3}}$ & $\sqrt[3]{\frac{180}{3}}$, lesquels multipliez entr'eux produisent $\sqrt[3]{\frac{14400}{3}}$, c'est à dire $\sqrt[3]{\frac{120}{3}}$ ou 40, ainsi qu'il étoit requis.

2. *Trouver deux nombres en raison donnèe, tels que le plus grand étant divisé par le moindre, le quotient*

& le quarré d'iceluy moindre, soient aussi en raison donnée.

Qu'il faille trouver deux nombres en raison quadruple, tels que le quarré du moindre aye raison double au quotient du plus grand divisé par iceluy moindre. Posons qu'iceux nombres soient 12 & 48 : Or le plus grand étant divisé par le moindre, le quotient sera 4 , & le quarré du moindre est 144 : & puis que ce quarré doit avoir raison double au quotient 4 : il y aura equation entre 144 , & 8 : parquoy 12 sera $\sqrt{8}$, qui est le moindre nombre, & par consequent le plus grand qui est en raison quadruple sera $\sqrt{128}$: & divisant iceluy par le moindre $\sqrt{8}$, le quotient est $\sqrt{16}$, c'est à dire 4 , auquel 8 quarré dudit moindre nombre à raison double.

3. *Trouver trois nombres en progression arithmetique, tels qu'étans multipliez entr'eux, le produit ait une raison donnée à la somme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouver trois nombres constituant une progression arithmetique, tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux soit triple de leur somme. Posons que les trois nombres cherchez soient 12 , 22 & 32 ayans un même excez 12 . De la multiplication d'iceux est fait le nombre 66 , lequel doit être triple de leur somme 66 ; & partant egal à 18 . Divisant donc 18 par 6 , viendra 3 pour 19 ; (car d'autant que le caractère q , est au milieu de c & 2 , il vient le même qu'en exprimant les signes. (Partant 12 sera $\sqrt{3}$, & par consequent les trois nombres cherchez seront $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, & $\sqrt{27}$, qui ont même excez $\sqrt{3}$, & multi-

pliez entr'eux font $\sqrt{972}$, qui est le triple de la somme des mêmes, c'est à sçavoir du nombre $\sqrt{108}$.

Notez que quand le denominateur de la raison que doit avoir le produit de la multiplication à la somme, est nombre quarré: la question se résout en nombres rationnaux. Comme les mêmes choses que dessus étans posées, si le nombre produit devoit avoir à la somme la raison quadruple, l'equation viendrait entre $6c$ & $24R$: parquoy divisant 24 par 6 , viendrait 4 pour $1q$, & conséquemment $1R$ seroit 2 ; & les trois nombres cherchez seroient 2 , 4 , & 6 , lesquels multipliez entr'eux produisent 48 , qui est le quadruple de leur somme 12 .

4. *Trouver trois nombres continuellement proportionnaux en une raison donnée, tels que la somme de leurs quarez fasse un nombre donné.*

Qu'il faille donc trouver trois nombres continuellement proport. en raison double, desquels la somme de leurs quarez fasse 600 . Posons que les trois nombres soient $1R$, $2R$, & $4R$, qui sont en raison double: leurs quarez seront $1q$, $4q$, & $16q$. Mais la somme d'iceux quarez sera $21q$, qui est égale à 600 . Divisant donc 600 par 21 viendront $\frac{200}{7}$ pour un quarré, & partant $1R$ sera $\sqrt{\frac{200}{7}}$, qui est le premier nombre cherché, & le second double d'iceluy sera $\sqrt{\frac{800}{7}}$: mais le troisiéme aussi double de certui-cy sera $\sqrt{\frac{3200}{7}}$, & leurs quarez font ensemble $\frac{4200}{7}$, c'est à dire 600 .

5. *Trouver un nombre, qui avec un nombre donné fasse son quarré.*

Le nombre donné soit 50, & il faut trouver un autre nombre qui ajouté avec 50, fasse son carré. Posons que le nombre cherché soit x : donc son carré sera x^2 , qui doit être égal à $x + 50$. Or le quadruple de 50 étant ajouté au carré des racines, fait 201, donc la racine carrée est $\sqrt{201}$: à icelle soient ajoutées les racines, & viendront $\sqrt{201} + x$, dont la moitié qui est $\frac{\sqrt{201} + x}{2}$, est la valeur de x , & conséquemment le nombre cherché : tellement que si à iceluy nombre on ajoute le donné 50, le nombre qui en proviendra, sçavoir $\frac{\sqrt{201} + x}{2} + 50$, sera le carré du même nombre $\frac{\sqrt{201} + x}{2}$, ainsi qu'il étoit requis.

6. *Diviser un nombre donné selon la moyenne & extrême raison.*

Le nombre donné soit 12, lequel il faut couper en deux parties telles que la moindre, la plus grande, & l'edit nombre 12, soient continuellement proportionnaux, c'est à dire que le carré de la plus grande partie soit égal au produit de tout le nombre 12 multiplié par la moindre partie. Posons que la plus grande partie soit x : donc la moindre sera $12 - x$, & partant ces trois nombres $12 - x$, x , & 12 seront proportion. tellement que le carré du moyen, sçavoir x^2 , sera égal au produit des deux extrêmes qui est $12(12 - x)$. Or la moitié du nombre des racines est 6, & son carré 36, auquel ajoutant le nombre 144 viendra 180, dont la racine carrée est $\sqrt{180}$, de laquelle étant ôtée la susdite moitié des racines, à cause du signe $-$, le reste sera $\sqrt{180} - 6$, qui est la plus grande

partie cherchée, laquelle ôtée du nombre donné 12, resteront 18 — $\sqrt{180}$ pour la moindre partie.

Or d'autant que nous rapporterons à la fin de ce livre beaucoup d'autres questions esquelles les nombres seront joints & appliquez aux choses matérielles, afin qu'au moyen d'icelles on voye mieux l'usage & pratique de tous les preceptes & documens enseignez en ce traité, nous ne nous arrêterons davantage sur semblables questions abstraites de la matiere.

*Des nombres coſſiques & irrationnaux, &
de leur Algorithme.*

C H A P. XXII.

TOut ainſi que les nombres abſolus ſe ſont irrationnaux, étans precedez de ſignes radicaux: comme de 5, ſe fait $\sqrt{5}$: Ainſi auſſi les nombres coſſiques ſe ſont irrationnaux, quand on leur propoſe quelqu'un d'iceux ſignes radicaux. Comme de 20 R, ſe fait $\sqrt{20 R}$, nombre coſſique irrationnel, qui ſe prononce, la racine quarrée de 20 racines: Item de 6 c, ſe fait $\sqrt{6 c}$: qui ſignifie la racine quarrée de 6 c. Item de 9 R, ſe fait $\sqrt{\sqrt{9 R}}$, &c. Or tels nombres peuvent être quelquefois rationnaux, & quelquefois irrationnaux ſelon la valeur d'une racine. Car ſi 1 R vaut 5, 20 R vaudront 100, duquel la racine quarrée eſt 10: partant $\sqrt{20 R}$ eſt un nombre rationnel equiſſallant 10: Et $\sqrt{6 c}$ 20 R ſera irrationnel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il eſt donc évident qu'on ne peut juger ſi tels nombres ſont rationnaux ou irrationnaux,

jusques à ce que l'estimation & valeur d'une seule racine apparaisse.

Or l'addition & soustraction d'iceux nombres se fait par l'interposition des signes $+$ & $-$. Comme $\sqrt{36}$ R. ajoutée à $\sqrt{12}$ q, fait $\sqrt{36}$ R. $+$ $\sqrt{12}$ q, ou $\sqrt{12}$ q. $+$ $\sqrt{36}$ R. Et 36 éans ôtez de $\sqrt{36}$ R., restera $\sqrt{36}$ R. $-$ 36 : & ainsi des autres.

Que si les signes cossiques sont semblables, & les nombres irrationaux (considérez sans leurs signes cossiques) commensurables, l'addition & soustraction se fera en la même manière que des simples racines sourdes, aposant apres l'opération le même signe cossique. Ainsi $\sqrt{8}$ R. ajoutée à $\sqrt{18}$ R., fera $\sqrt{50}$ R. Mais ôtant $\sqrt{8}$ R. de $\sqrt{18}$ R., restera $\sqrt{2}$ R.

La preuve sera facile & evidente, si on pose la valeur d'une seule racine être quelque nombre, comme 2. Car 8 R. seront 16, dont la racine quarrée est 4 : & 18 R. seront 36, dont la racine quarrée est 6 : Or 4 & 6 font 10 : comme aussi $\sqrt{50}$ R., puis que 50 R. sont 100, dont la racine est 10. Mais ôtez de 6, restent 2, valeur de $\sqrt{2}$ R., puis que 2 R. sont 4, dont la racine est 2.

Mais afin que les nombres cossiques irrationaux soient multipliez entr'eux, ou divisez, ils doivent être premierement réduits à même signe radical par multiplication en croix, comme nous avons enseigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier $\sqrt{4}$ R. par $\sqrt{8}$ R. iceux

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{40} \text{ 16 q.} \qquad \sqrt{40} \text{ 512 c.} \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 4 \text{ R.} & \times & 8 \text{ R.} \\
 \sqrt{4} \text{ c.} & & \sqrt{8} \text{ q.}
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cc}
 3. & 2. \\
 \hline
 6
 \end{array}
 \end{array}$$

les étans reduites à même signe radical, seront $\sqrt{9}$ & 169 , & $\sqrt{90512c}$, ainsi qu'il apert en cette formule : lesquels deux nombres multipliez entr'eux produisent $\sqrt{908192\beta}$: mais $\sqrt{90512c}$ divisée par $\sqrt{90169}$, le quotient sera $\sqrt{9032\beta}$. Item le nombre $\sqrt{90131072b\beta}$ étant divisé par $\sqrt{90512c}$, le quotient sera $\sqrt{9029699}$.

Semblablement pour multiplier 1β par $\sqrt{4}$, il n'y a qu'à quarrer 1β , & à son quarré preposer le signe radical, afin d'avoir $\sqrt{19}$: puis le multiplier par $\sqrt{4}$, & viendra pour le produit $\sqrt{49}$. Par même moyen 3β multipliées par $\sqrt{16}$, le produit sera $\sqrt{1449}$: c'est à dire la racine quarrée de 1449 , qui sera 24 , la racine étant 2 . Et tels produits $\sqrt{49}$, & $\sqrt{1449}$ sont apellez par Clavius Nombres des Racines, ainsi qu'il apert es 12 & 23 questions du 32. chap. de son Algebre.

Or la preuve de toutes ces operations se fera, posant la valeur d'une racine, comme dit est cy-dessus : ou bien chaque operation par sa contraire.

Quant aux fractions de ces nombres cossiques Irrationnaux, il n'est besoin d'en traiter particulièrement, pource qu'elles suivent l'Algorithme de leurs entiers, joint à celui des nombres communs.

Or est icy à noter qu'une equation se rencontrant entre un nombre cossique irrationnel, & un nombre absolu, il la faudra reduire en cette maniere. Soit pour exemple une equation entre $\sqrt{24\beta}$ & 12 . Il y aura pareillement equation entre leurs quarrés, sçavoir 24β & 144 : soit donc divisé 144 par 24 , & viendront 6 au quotient pour la valeur d'une racine. Item, s'il y a equation entre $\sqrt{109}$

& 10; il y aura aussi equation entre 109 & 400: divisant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'une racine. Finalement si une equation est trouvée entre $\sqrt{c 129}$, & 30: il y aura aussi equation entre 129 & 27000, les cubes d'iceux: parquoy divisant 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'une seule racine.

Que si quelqu'un proposoit une equation entre $\sqrt{c 8}$ & 3, il y auroit aussi equation entre leurs cubes 8 & 27: Ce qui est impossible. Parquoy en ces equations il est nécessaire que le nombre absolu soit la racine du nombre avec lequel est le signe radical: telle qu'est l'equation d'entre $\sqrt{c 8}$ & 2. Item entre $\sqrt{c 64}$ & 4: Item entre $\sqrt{81}$ & 9, &c. Autrement l'equation sera impossible.

*Des racines universelles, & de leur
Algorithmes.*

CHAP. XXIII.

LA racine d'un nombre composé ou diminué est appellée racine universelle: Comme la racine quarrée de ce nombre composé $\sqrt{9 + 22}$, est dire racine universelle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle sera 5; car $\sqrt{9}$, qui est 3, étant ajoutée à 22 fait 25, dont la racine quarrée est 5. Ainsi aussi par la racine universelle de cet autre nombre composé $10 + \sqrt{7}$, il faut entendre que la racine quarrée du nombre 7, si elle se peut avoir, étant ajoutée à 10, on doit prendre la racine de tout le nombre.

Or ces racines sont notées diversement par les

Autheurs : mais nous les figurerons apofant le figne radical $\sqrt{}$, ou $\sqrt{}c$ au devant du nombre dont la racine devra être extraite, & enfermant tout le-dit nombre entre deux parenthefes, en cette maniere, $\sqrt{(\sqrt{9} + 2)}$, ou ainfi $\sqrt{(22 + \sqrt{9})}$, qui eft le même. Item $\sqrt{c}(10 + \sqrt{7})$. Item $\sqrt{(49 + 12)}$. Item $\sqrt{(10 + \sqrt{16} + 3 + \sqrt{64})}$. Item $\sqrt{c}(\sqrt{25} - \sqrt{4} + 24)$. Item $\sqrt{(10 + \sqrt{36}) + \sqrt{(70 + \sqrt{121})}}$, laquelle vaut 13.

Or tout ainfi que le quarré d'une fimple racine quarrée fource eft le même nombre, delaiffant feulement le figne radical $\sqrt{}$, tellement que le quarré de $\sqrt{5}$ eft 5, & celui de $\sqrt{12}$ eft 12 : mais le cube d'une racine cubique fimple eft le même nombre, delaiffant le figne radical $\sqrt{}c$, tellement que le cube de $\sqrt{c}9$ eft 9, & le cube de $\sqrt{c}12$ eft 12 : Ainfi auffi, le quarré de la racine quarrée de quelque nombre composé, eft le même nombre, étant delaiffé le figne radical $\sqrt{}$. Comme le quarré de $\sqrt{(11 + \sqrt{9} + \sqrt{4})}$ eft $11 + \sqrt{9} + \sqrt{4}$, c'eft à dire 16; tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{c}216 + \sqrt{c}27)}$ eft $\sqrt{c}216 + \sqrt{c}27$, c'eft à dire 9, dont la racine eft 3. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{c}216 - \sqrt{c}27)}$ eft $\sqrt{c}216 - \sqrt{c}27$, c'eft à dire 3, & la valeur de fa racine eft $\sqrt{3}$. Et femblablement le cube de la racine cubique d'un nombre composé eft le même nombre, étant ôté le figne radical $\sqrt{}c$, comme le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25} + \sqrt{9})$ eft $\sqrt{c}25 + \sqrt{c}9$, c'eft à dire 8, tellement que cette racine-là valoit 2. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{25} - \sqrt{9})$ eft $\sqrt{c}25 - \sqrt{c}9$, c'eft à dire 2, & la racine d'iceluy eft $\sqrt{c}2$. Le cube de $\sqrt{c}(\sqrt{c}64 + \sqrt{c}27)$ eft $\sqrt{c}64 + \sqrt{c}27$, c'eft à dire 7, dont la

racine est $\sqrt{c} 7$. Et faut entendre le même de quar-
ré de quarez, & surfolides, &c. En cette manie-
re on multiplie la racine de quelconque nombre
composé en soy, c'est à dire qu'on a le produit de
son quarré, ou cube, &c.

Mais pour multiplier la racine d'un nombre
composé, par une racine simple, ou par un nombre
simple, ou composé, ou finalement par une au-
tre racine de nombre composé: il faut reduire l'un
& l'autre nom-

bre à quarré, ou
cube: puis fai-
re la multipli-
cation comme
dit est cy-des-

$$\begin{array}{r} 7 + \sqrt{3} \\ \underline{4} \\ 28 + \sqrt{48} \end{array}$$

sus. Comme pour exemple, soit $\sqrt{c} (7 + \sqrt{3})$ qu'il
faut multiplier par 2. Les quarez sont $7 + \sqrt{3}$, &
4. Multipliant donc 7 par 4 viendront 28; mais
 $\sqrt{3}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$ viendront $\sqrt{48}$.
Donc tout le nombre produit est $\sqrt{c} (28 + \sqrt{48})$.

Item $\sqrt{c}$

$c (\sqrt{c} 64$
 $+ \sqrt{c} 27)$
multi-

$$\begin{array}{r} \sqrt{c} 64 + \sqrt{c} 27 \\ \underline{8} \end{array}$$

pliée par
2, le pro-

$$\sqrt{c} 32768 + \sqrt{c} 13824$$

duit est $\sqrt{c} (\sqrt{c} 32768 + \sqrt{c} 13824)$, ou $\sqrt{c} (32$
 $+ 27)$ c'est à dire $\sqrt{c} 59$.

Item soit $\sqrt{c} (7 + \sqrt{4})$

(qu'il faut multi-
plier par $\sqrt{c} 9$. Les
quarez des nombres
sont $7 + \sqrt{4}$ & 9.

$$\begin{array}{r} 7 + \sqrt{4} \\ \underline{9} \\ 63 + \sqrt{324} \end{array}$$

Je multiplie donc $\sqrt{4}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$: puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit fera $\sqrt{(63 + \sqrt{324})}$, c'est à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

Soit aussi $\sqrt{(6 + \sqrt{9})}$ qu'il faut multiplier par le nombre composé $\sqrt{4} + \sqrt{16}$. Le quarré du premier nombre est 6 +

$\sqrt{9}$; & du postérieur 20 + $\sqrt{256}$:

étant donc faite la multiplication, comme il se void

icy, le produit fera $\sqrt{(\sqrt{9216}$

+ $\sqrt{3600} + \sqrt{2304} + 120)$, c'est à dire $\sqrt{324}$ ou 18.

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{(13 + \sqrt{9})}$ par $\sqrt{(5 + \sqrt{16})}$, c'est à dire 4 par 3. Les quarrés des nombres sont 13 + $\sqrt{9}$, & 5 + $\sqrt{16}$: & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, est fait

$\sqrt{144}$; & 13, c'est à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{1704}$; puis

après $\sqrt{9}$ par 5, c'est à dire par $\sqrt{25}$, est fait $\sqrt{125}$; & 13 par 5, donnent 65. Donc

tout le nombre produit est $\sqrt{(\sqrt{1704} + \sqrt{125} + 77)}$, c'est à dire 12.

Car la racine de $\sqrt{1704}$ est 52, & celle de $\sqrt{125}$ est 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 ajoutez ensemble font 141, dont la racine quarrée est 12.

Qu'il faille encore multiplier $\sqrt{(\sqrt{1800} + 30)} - \sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$ par $\sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$

$$\begin{array}{r} 6 + \sqrt{9} \\ 20 + \sqrt{256} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{9216} + \sqrt{2304} \\ 120 + \sqrt{3600} \end{array}$$

$$\sqrt{9216} + \sqrt{3600} + \sqrt{2304} + 120$$

$$\begin{array}{r} 13 + \sqrt{9} \\ 5 + \sqrt{16} \\ \hline \sqrt{1704} + \sqrt{144} \\ 65 + \sqrt{125} \end{array}$$

$$\sqrt{1704} + \sqrt{125} + 77$$

Ayant posé ces nombres comme tu vois icy, multiplie premierement $\sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$ en soy, & viendra son quarré $\sqrt{450} + 15$, auquel il faut preposer le signe — à cause que de + en — est fait —.

En apres,

$$\begin{array}{r} \text{de } \sqrt{(\sqrt{1800} + 30)} - \sqrt{(\sqrt{450} + 15)} \\ 1800 + \sqrt{(\sqrt{450} + 15)} + \sqrt{(\sqrt{450} + 15)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30) \text{ en } \sqrt{\quad} \\ (\sqrt{450} + 15) \text{ sera } \sqrt{4050000 + 450} - \sqrt{450 + 15} \\ \sqrt{810000} + \sqrt{4050000} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{fait } \sqrt{\quad} \\ 810000 \sqrt{810000 + 1620000 + 450} \end{array}$$

+ $\sqrt{1620000 + 450}$; (c'est à sçavoir en multipliant leurs quarréz entr'eux (c'est à dire $1350 + \sqrt{1620000}$, pource que $\sqrt{810000}$ vaut autant que 900, lequel nombre ajoûré à 450, fait 1350, & preposant le signe $\sqrt{\quad}$, le produit sera le nombre $\sqrt{(1350 + \sqrt{1620000})}$: Mais la racine de ce nombre sera $\sqrt{900} + \sqrt{450}$, comme il aparoitra au chapitre suivant) c'est à dire $30 + \sqrt{450}$; duquel nombre étant ôté le premier produit — $\sqrt{450} + 15$, fait de $\sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$ en soy, restera seulement 15 pour tout le produit de la multiplication proposée.

Et afin de rendre cecy plus manifeste, nous ajouterons encore un exemple en nombres ratiocaux. Soit proposé à multiplier $\sqrt{(\sqrt{4} + 14)} - \sqrt{(\sqrt{9} + 6)}$ par $\sqrt{(\sqrt{9} + 6)}$ c'est à dire 1 par 3, & viendront 3. Car de $\sqrt{(\sqrt{9} + 6)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9} + 6)}$ est fait son quarré $\sqrt{9} + 6$ avec le signe —, qui luy doit être preposé: puis apres, de $\sqrt{(\sqrt{4} + 14)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9} + 6)}$ est fait $\sqrt{144}$, c'est à dire 12: Car $\sqrt{36}$ est 6, & $\sqrt{144}$ est 12, & $\sqrt{1764}$ est 42; tous

lesquels nombres avec 84 font iceluy nombre 144, & luy preposant le signe $\sqrt{}$, sera le produit $\sqrt{144}$, c'est à sçavoir 12, duquel nombre étant ôté l'autre produit $\sqrt{9+6}$, sçavoir 9, restera 3 pour tout le nombre produit ainsi qu'il devoit être.

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{4} + 14)} - \sqrt{(\sqrt{9} + 6)} \\ \sqrt{(\sqrt{9} + 6)} + \sqrt{(\sqrt{9} + 6)} \\ \hline \sqrt{144} + 84 - \sqrt{9} + 6 \\ \sqrt{36} + \sqrt{1764} \\ \hline \sqrt{144} - 9 \end{array}$$

Or quand il faut multiplier la racine quarrée d'un nombre composé ensemble avec la racine quarrée d'un nombre diminué semblable, en soy-même, comme $\sqrt{(12 + \sqrt{6})} + \sqrt{(12 - \sqrt{6})}$; soit posé le nombre deux fois, ainsi qu'il apert icy, & soient pris les quarrés des parties, les-

$$\begin{array}{r} \sqrt{(12 + \sqrt{6})} + \sqrt{(12 - \sqrt{6})} \\ \sqrt{(12 + \sqrt{6})} + \sqrt{(12 - \sqrt{6})} \\ \hline 12 + \sqrt{6} + 12 - \sqrt{6} \\ \sqrt{138} \\ \sqrt{138} \\ \hline \sqrt{552} \\ 24 + \sqrt{552} \end{array}$$

quels seront $12 + \sqrt{6}$, & $12 - \sqrt{6}$, qui font ensemble 24: [car $4 - \sqrt{6}$ ruine $-\sqrt{6}$] Et soit multipliée une partie par l'autre, & sera fait $\sqrt{138}$, [pource que 6, quarré de $\sqrt{6}$, ôté de 144, quarré du nombre 12, reste 138, auquel faut aposer le signe $\sqrt{}$] dont le double est $\sqrt{552}$: & $24 + \sqrt{552}$ sera le nombre produit cherché. Or la racine de ce produit est aussi la somme des deux racines $\sqrt{(12 + \sqrt{6})}$

& $\sqrt{11 - \sqrt{6}}$ recueillie en une seule somme. Car quand la somme de deux nombres est multipliée en soy, la racine quarrée du nombre produit est la somme des mêmes deux nombres ; & partant puis que les deux racines proposées ensemble, multipliées en soy, sont $24 + \sqrt{552}$, la racine de ce produit, sçavoir est $\sqrt{24 + \sqrt{552}}$ sera la somme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeste par un autre exemple en nombres rationaux. Soit $\sqrt{10 + 36} + \sqrt{10 - \sqrt{36}}$ c'est à dire 6, qu'il faut multiplier en soy. Il est évident que le nombre qui sera produit doit être 36.

Soient donc trou-

vez les quarez des

parties, lesquels se-

ront $10 + \sqrt{36}$, &

$10 - \sqrt{36}$, qui ajou-

tés ensèble sont 20 :

& soit multipliée

une partie en l'autre,

& viendra $\sqrt{64}$, dont

le double sera $\sqrt{128}$,

c'est à dire 16 ; &

partant le nôbre produit est 20 + 16 c'est à dire 36 :

& la racine de ce nombre, sçavoir 6, est pareille-

ment la somme de l'addition de ces deux racines-

là proposées, comme il est manifeste.

Or quand il faut multiplier un nombre compo-
sé de racine simple, & de racine universelle, par
un nombre diminué semblable ; a aussi lieu le
compendium que nous ayons enseigné au chapitre
19. Comme pour exemple, s'il faut multiplier le
nombre $\sqrt{20 + \sqrt{10 - \sqrt{5}}}$ par le nombre $\sqrt{20 - \sqrt{10 - \sqrt{5}}}$

$$\begin{array}{l} \sqrt{10 + \sqrt{36}} + \sqrt{10 - \sqrt{36}} \\ \sqrt{10 + \sqrt{36}} + \sqrt{10 - \sqrt{36}} \end{array}$$

$$10 + \sqrt{36} + 10 - \sqrt{36}$$

$$\sqrt{64}$$

$$\sqrt{64}$$

$$\sqrt{128}$$

$$20 + \sqrt{128}$$

$\sqrt{20 - \sqrt{5}}$: Il n'y a qu'à soustraire $20 - \sqrt{5}$, quarré de la dernière particule du nombre composé ou diminué, de 20 quarré de la première particule, & le reste $\sqrt{5}$, sera le produit de la multiplication.

Mais s'il falloit multiplier $\sqrt{29 + 8} + 5$ en soy, il n'y auroit qu'à quarrer chaque particule, & viendroient $29 + 8$, & 25 : puis multiplier l'une par l'autre, & le double du produit étât ajouté avec les susdits deux quarrés des particules, donneroit $29 + 33 + \sqrt{(2009 + 800)}$ pour tout le produit de la multiplication.

Si on vouloit encor multiplier $\sqrt{59 - 48} + 3$ en soy, il ne faudroit aussi que prendre les quarrés de chaque particule, qui seroient $59 - 48$, & 64 , puis les ajouter au double du produit d'une particule en l'autre, & viendroient $59 - 48 + \sqrt{(12809 - 10248)}$ pour tout le produit de la multiplication.

¶ Semblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}\sqrt{99 + 19}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{99 - 19}$: Il n'y a qu'à soustraire le quarré de la dernière particule, du quarré de la première particule, sçavoir est $\frac{1}{4}99 + 19$, de $\frac{1}{4}99$, & le reste -19 , sera le produit de la multiplication.

Pour faire la division des racines universelles, soit réduit à quarré, tant le nombre dividande que diviseur : puis apres soit faite la division comme il a été enseigné cy-devant, &

la racine du nombre produit sera le quotient. Comme pour exemple, soit

$\sqrt{13 + \sqrt{7}}$ qu'il faut diviser par $\sqrt{5}$. Les quarrés des nombres, sont $13 + \sqrt{7}$, & 5 . Je divise donc 13 par 5 , & vient $2\frac{3}{5}$, & $\sqrt{7}$ par 5 , c'est à dire par $\sqrt{25}$,

& vient $\sqrt{2\frac{2}{7} + \sqrt{\frac{7}{17}}}$: tellement que tout le quotient est $\sqrt{2\frac{2}{7} + \sqrt{\frac{7}{17}}}$.

Item soit $\sqrt{}$

(432 + $\sqrt{7776}$) 27 288
qu'il faut diviser 432 + $\sqrt{7776}$ [12 + $\sqrt{6}$
par 6. Les quarrés 36 288
des nombres sont 3

432 + $\sqrt{7776}$, &

36 : le nombre 432 étant divisé par 36, vienent 12 ; & $\sqrt{7776}$ étant divisée par 36, c'est à dire par $\sqrt{1296}$, vient $\sqrt{6}$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{12 + \sqrt{6}}$.

Item soit $\sqrt{15}$, qu'il faut diviser par $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

Afin de trouver un nouveau diviseur nous multiplierons $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ par $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ & viendra un nouveau diviseur $\sqrt{4}$. Que si le dividande $\sqrt{15}$, est aussi multiplié par $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$, nous aurons un nouveau dividande $\sqrt{45 - \sqrt{1125}}$: le quarré d'iceluy sera $45 - \sqrt{1125}$, & le quarré du nouveau diviseur sera 4. Si donc on divise 45 par 4, le quotient sera $11\frac{1}{4}$: si nous divisons $-\sqrt{1125}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, le quotient sera $-\sqrt{70\frac{5}{8}}$. Donc tout le quotient est $\sqrt{11\frac{1}{4} - \sqrt{70\frac{5}{8}}}$.

Item soit divisé 20 par $\sqrt{10 - \sqrt{5}}$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $\sqrt{10 + \sqrt{5}}$, afin d'avoir un nouveau dividande $\sqrt{4000 + \sqrt{800000}}$, & un nouveau diviseur $\sqrt{95}$: les quarrés d'iceux nombres sont $4000 + \sqrt{800000}$, & 95. Si donc on partit 4000 par 95, seront donnez $42\frac{2}{19}$: & de la division de $\sqrt{800000}$ par 95, c'est à dire par $\sqrt{9025}$, sera produit $\sqrt{88\frac{2}{19}}$. Donc tout le quotient de la division est $\sqrt{42\frac{2}{19} + \sqrt{88\frac{2}{19}}}$.

Item soit divisée $\sqrt{c}$ [$\sqrt{632768} + \sqrt{613814}$] par 2.

Les cubes de ces nombres sont $\sqrt[3]{32768} + \sqrt[3]{13824}$, & 8. Je divise donc $\sqrt[3]{32768}$ par 8, c'est à dire par $\sqrt[3]{512}$, & vient au quotient $\sqrt[3]{64}$: & de la division de $\sqrt[3]{13824}$ par 8, c'est à dire par $\sqrt[3]{512}$, vient $\sqrt[3]{27}$. Tout le quotient est donc $\sqrt[3]{64 + \sqrt[3]{27}}$, c'est à dire $\sqrt[3]{7}$.

Item soit $\sqrt[3]{588 + \sqrt[3]{34848}}$, qu'il faut diviser par $\sqrt[3]{12 + \sqrt[3]{8}}$. Les quarrés des nombres sont $588 + \sqrt[3]{34848}$, & $12 + \sqrt[3]{8}$. Nous multiplierons l'un & l'autre nombre par $12 - \sqrt[3]{8}$, afin d'avoir nouveau nombre dividande, & diviseur: le dividande sera $\sqrt[3]{7056 + \sqrt[3]{5018112} - \sqrt[3]{276595} - \sqrt[3]{278784}}$, ou plutôt par reduction $\sqrt[3]{6528 + \sqrt[3]{332928}}$, & le diviseur sera 136. Si donc on divise 6528 par 136, viendront 48: & $\sqrt[3]{332928}$ par 136, c'est à dire par $\sqrt[3]{18496}$, viendront $\sqrt[3]{18}$: & partant tout le quotient sera $\sqrt[3]{48 + \sqrt[3]{18}}$.

Nous avons dit cy-dessus comment il faut ajouter une racine universelle à une semblable ayant le signe contraire: comme $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3}}$ avec $\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{3}}$ dont la somme est $\sqrt[3]{6}$. Mais telles racines se peuvent encore ajouter ensemble comme ensuit.

Le quarré de la dernière particule de l'une ou l'autre d'icelles racines soit ôté du quarré de la première particule, & à la racine quarrée du reste soit ajoutée la première particule; puis soit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double là, sera la somme de l'addition. Comme en l'exemple cy-dessus, le quarré de la dernière particule est 3, lequel j'ôte de 4, quarré de la première particule, & reste 1, que j'ajoute à icelle première particule, & font 3, dont le double est 6, & la racine de 6, est $\sqrt[3]{6}$, & autant est la somme de l'addition des deux racines proposées.

Mais quand les deux racines qu'il faut ajoûter sont dissemblables, il faut diviser la plus grande par la moindre, & au quotient ajoûter 1, [sinon que lesdites racines fussent incommensurables: car alors l'addition d'icelles se fera plus commodément par l'interposition du signe—] puis par le produit soit multipliée la plus petite racine; & le produit de la multiplication sera la somme de l'addition. Comme pour exemple: soit $\sqrt{8 + \sqrt{48}}$ à laquelle il faut ajoûter $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Je divise celle-là par cette-cy, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, auquel j'ajoûte 1, & font 3, par lesquels je multiplie $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, & vient $\sqrt{18 - \sqrt{243}}$ pour la somme des deux racines proposées à ajoûter.

Item soit $\sqrt{10 + \sqrt{36}}$, qu'il faut ajoûter à $\sqrt{11 + \sqrt{25}}$: Je divise cette-cy par celle-là, & vient 1 au quotient, auquel j'ajoûte une unité, & font 2, par lesquels ie multiplie $\sqrt{10 + \sqrt{36}}$, & vient $\sqrt{64}$, c'est à dire 8, pour la somme de l'addition des deux racines proposées.

Maintenant si d'une racine universelle de nombre composé, il en faut soustraire une autre semblable de nombre diminué: Le quarré de la dernière particule soit ôté du quarré de la première, & la racine du reste soit ôtée d'icelle première particule, puis soit doublé ce dernier residu, & la racine de ce double sera le reste requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{12 - \sqrt{6}}$. Le quarré de la première particule est 144, duquel j'ôte 6, quarré de la dernière particule, & reste 138, dont la racine est $\sqrt{138}$, que ie soustrais de la première particule 12, & reste $12 - \sqrt{138}$, que ie double, & viennent 24 — $\sqrt{552}$, dont la racine est $\sqrt{24 - \sqrt{552}}$, qui est le reste requis.

Mais si les racines sont dissemblables : pour faire la soustraction , il faut diviser la plus grande par la moindre , & du quotient ôter 1 ; [sinon que les racines proposées fussent incommensurables : Car alors la soustraction se fera plus commodément par l'interposition du signe —]. Puis par le reste soit multipliée la moindre racine , & le produit sera le requis. Comme pour exemple, soit $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ qu'il faut soustraire de $\sqrt{8 + \sqrt{48}}$. Je divise cette-cy par celle-là, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, dont j'ôte une unité, & reste 1, par lequel ie multiplie la moindre racine $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, & vient la même $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ pour le reste de la soustraction.

Item soit $\sqrt{486 - \sqrt{162}}$, de laquelle faut soustraire $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$: je divise celle-là par celle-cy, & vient au quotient $\sqrt{9}$, c'est à dire 3, dont j'ôte 1, & reste 2, par lesquels ie multiplie la moindre racine $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$, & vient au produit $\sqrt{\sqrt{96} - \sqrt{32}}$ pour le reste de la soustraction requis.

De l'extraction des racines de binomes, & residus.

C H A P. XXIIII.

QUand deux quelconques nombres sont joints par le signe +, ils sont ordinairement nommez Binome: comme $\sqrt{12} + \sqrt{3}$: & $\sqrt{18} + \sqrt{8}$. Mais étans accouplez par le signe —, ils sont appelez Apotome ou Residu : Comme $\sqrt{12} - \sqrt{3}$: & $\sqrt{18} - \sqrt{8}$. Et plus de deux nombres ainsi acouplez, sont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\sqrt{17} + \sqrt{10} - \sqrt{3}$: ou $\sqrt{17} - \sqrt{10} + \sqrt{3}$, sont dits Trinome : & $\sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ou $\sqrt{17} - \sqrt{10} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$, sont appelez Quatrinome, &c.

Mais Euclide au 10. livre, prop. 37 & 74 appelle seulement Binome, ou residu, quand les deux nombres conjoints par le signe + ou —, sont rationnels commensurables en puissance seulement: il constitué de six sortes de Binome, & autant de residu; chacun desquels il definit, & enseigne à trouver au même livre. Or pour extraire la racine quarrée d'iceux Binomes & residus, il y a diverses manieres, deux desquelles nous enseignerons icy, & au prealable le probleme suivant.

Couper un nōbre donné en deux parties. telles que le nombre produit d'icelles soit egal à un nombre donné, qui ne soit plus grand que le quarré de la moitié d'iceluy nombre proposé à diviser, ou [qui est le même] que la quatrième partie du quarré dudit nombre.

Qu'il faille couper le nombre 20 en deux parties, telles que multipliées entr'elles, leur produit soit 75, qui est moindre que 100, quart du quarré d'iceluy nombre proposé 20. Soit ôté 75 de 100, quarré de la moitié de 20, & resteront 25, dont soit pris la racine quarrée, laquelle sera 5, & soit icelle ajoutée à 10, moitié du nombre proposé à diviser, & viendra 15, qui sera le plus grand nombre cherché, mais icelle racine 5 étant ôtée d'icelle moitié 10, resteront 5, qui sera le moindre nombre requis; tellement donc que les deux nombres 15 & 5, sont parties du nombre 20, telles que multipliées entr'elles, elles produisent 75, ainsi qu'il étoit requis.

Maintenant soit le binomie $38 + \sqrt{288}$, duquel il faut extraire la racine quarrée. Soit coupé le plus grand nom. 38 en deux parties, telles que leur produit soit le nombre 72, quatrième partie du quarré

du moindre nom, ſcavoir de 288, leſquelles parties ſeront trouvées par le prob. cy-deſſus, être 36 & 2: d'iceux deux nombres ſoient priſes les racines quarrées, & icelles ſeront 6 & $\sqrt{2}$, qui conjointes par le ſigne + ſeront $6 + \sqrt{2}$ qui ſera la racine quarrée du binome propoſé. Mais icelles racines 6 & $\sqrt{2}$ étans acouplées par le ſigne - ſeront $6 - \sqrt{2}$ qui ſera la racine quarrée du reſidu 38 - $\sqrt{288}$. Item la racine quarrée du binome $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, ſera trouvée en la même maniere être $\sqrt{18} + \sqrt{2}$. Car $\sqrt{32}$ plus grand nom d'iceluy binome étant coupé en deux parties, telles que leur produit ſoit 6, quatrième partie de 24, quarré du moindre nom; icelles parties ſeront trouvées être $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont les racines conjointes par le ſigne +, ſont $\sqrt{18} + \sqrt{2}$.

Pour autrement extraire la racine quarrée du binome 38 + $\sqrt{288}$, il faut du quarré du plus grand nom, ôter le quarré du moindre nom, & reſteront 1156, deſquels ſoit pris le quart, qui ſera 289, duquel ſoit pris la racine quarrée, laquelle ſera 17, qu'il faut ajouter, & ſouſtraire de la moitié du plus grand nom, ſcavoir de 19, viendront 6, & 2 deſquels deux nombres ſoient priſes les racines quarrées, & ſeront 6, & $\sqrt{2}$, qui acouplées par le ſigne +, ſeront $6 + \sqrt{2}$ pour la racine quarrée du binome 38 + $\sqrt{288}$. comme devant. Par la même maniere la racine quarrée du reſidu $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, ſera trouvée être $\sqrt{(\sqrt{15} + \sqrt{12}) - (\sqrt{15} - \sqrt{12})}$.

Quant à la preuve, elle ſe fait comme en l'extraction des nombres abſolus, ſcavoir eſt, multipliant la racine trouvée par ſoy-même.

Or voila ſommairement les opérations plus ordinaires & viſitées en l'Algebre numeralle: Et afin

de donner aux apprentifs & peu versez en cette science, tant plus de connoissance de sa pratique, nous finirons ce traité par quelques problèmes ou questions, avec leurs solutions, au moyen desquelles & des preceptes cy-devant enseignez on en pourra souldre infinis autres.

Diverses questions & problemes, avec leurs solutions.

C H A P. XXV.

1. **E**N une armée de 24000 hommes, il y a de trois nations, sçavoir, François, Suisses & Alle-mans : mais le nombre des François & des Suisses ensemble est sextuple du nombre des Allemans : & le nombre des François joint à celui des Allemans est quintuple des Suisses : On demande quel est le nombre de chaque nation ?

Premierement posons $1x$, pour le nombre des Allemans : donc le nombre des François & des Suisses ensemble sera $24000 - 1x$; & partant $7x$ seront égales à $24000 - 1x$. Ajoutons donc $1x$ de part & d'autre, & nous aurons $8x$ égales à 24000 ; par consequent $1x$, qui est le nombre des Allemans sera 3000 : parquoy le nombre des François & des Suisses ensemble est 21000. Or posons $1x$ pour les Suisses : & les François seront $21000 - 1x$: Et puis que le nombre des François & des Allemans ensemble, est quintuple de celuy des Suisses, $24000 - 1x$ seront égales à $5x$: ajoutons de part & d'autre $1x$, & viendront $6x$ égales à 24000 : partant $1x$ vaudra 4000, qui est le nombre des Suisses : & par consequent il y a 17000 François.

2. Il y a une armée composée des François, Allemans & Anglois : les François sont 25000 : les Al-

lemans sont moitié des François & Anglois, & les Anglois sont huitième partie des François & Alle-mans: il faut trouver le nombre tant des Alle-mans que des Anglois, & combien il y a d'hommes en toute l'armée

Soit posé $18x$ pour les Alle-mans: donc les François & les Anglois ensemble seront $2x$, & toute l'armée sera $3x$. Et puis que les Anglois sont la huitième partie des François & des Alle-mans ensemble; & que les Alle-mans & François sont ensemble $1x + 25000$: les Anglois seront $\frac{1}{8}x + 3125$. Parquoy veu que les François sont 25000 , les Alle-mans $18x$, & les Anglois $\frac{1}{8}x + 3125$, toute l'armée sera $1\frac{1}{8}x + 28125$ égale à $3x$. Otant d'oc $1\frac{1}{8}x$ de part & d'autre, l'équation sera entre 28125 , & $1\frac{7}{8}x$: parquoy divisant 28125 par $1\frac{7}{8}$, viendra le nombre 15000 , pour la valeur de $1x$, qui est le nombre des Alle-mans; & partant les François & Alle-mans feront ensemble 40000 . dont la huitième partie est 5000 pour le nombre des Anglois: & par conséquent toute l'armée sera de 45000 hommes.

3. *il y-a une colonne quadrangulaire rectangle de laquelle la base a les costez en raison sesquitiere, & sa hauteur est au plus grand costé de la base en raison double superbi-partiente tierce. & la solidité d'icelle colonne contient 93312 toises: il faut trouver chacune des dimensions susdites.*

Le moindre côté de la base soit posé $3x$, & le plus grand $4x$: mais la hauteur $10\frac{2}{3}x$ afin qu'elle soit au plus grand côté $4x$, en raison double superbi-partiente tierce, & le plus grand côté au moindre en raison sesquitiere: Ces trois nombres multipliez entr'eux produisent $128x$, égaux à 93312 solidité de la colonne. Divisant donc 93312 par 128 , vien-

nent 729 pour 16, & 9 pour 18: donc le moindre côté de la base, lequel nous avons posé être 32, sera 27: & le plus grand 48, sera 36; & la hauteur $10\frac{2}{3}$ sera 96. Et ces trois nombres 27, 36, 96 multipliez entr'eux produisent la solidité proposée 9312.

4. *Il y a un rectangle, duquel l'aire est 30, & les côtez d'iceluy sont en raison sesquialtere: il faut trouver iceux costez, & le diametre.*

Soit posé le moindre côté 22, & partant le plus grand qui doit être sesquialtere à iceluy sera 32: de la multiplication des côtez entr'eux, sera produit 64 egaux à 30, aire donné. Divisant donc 30 par 6, viendront 5 pour 19; & partant 12, sera 15. Et pource que nous avons posé le moindre côté être 22, iceluy sera 12, nombre double de 15; & le plus grand côté 32 sera 15, nombre triple de 15. Et pource que les quarrés des côtez 20 & 45 sont ensemble egaux au quarré du diametre, le quarré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy diam. 12.

5. *Il y a un rectangle dont la difference des costez est 12, & leur raison triple: trouver tant iceux costez, que l'aire d'iceluy rectangle.*

Posons que le moindre côté soit 12: Donc l'autre sera 32, puis qu'ils sont en raison triple: Mais puis que leur difference est 20, & la donnée est 12: icelles 20 seront egales à 12; & consequemment 12 vaudra 12, qui est le moindre côté, & partant le plus grand qui luy est triple sera 32: Et puis que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant un côté par l'autre, si on multiplie 12 par 32, viendront 384, c'est à dire 24 pour l'aire du rectangle proposé.

6. *Il y a un rectangle duquel les costez sont en ra-*

son septuple. & les quarez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouver les costez. l'aire. & le diam. dudit rectangle.

Soit posé le moindre côté être 1^R , & le plus grand 7^R : donc la somme d'iceux côtés sera 8^R , & leurs quarez sçavoir 1^9 & 49^9 , ajoutez ensemble feront 50^9 , centuple de 8^R . Il y a donc equation entre 50^9 & 800^R . Et divisant 800 par 50 , viendront 16 pour 1^R , moindre côté: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112 , & l'aire sera 1792 , car c'est le produit d'un côté multiplié par l'autre: Mais le diametre sera $\sqrt{12800}$. Car les quarez des côtés sont 256 , & 12544 , la somme desquels est 12800 , centuple de 128 , qui est la somme d'iceux côtés, & partant le quarré du diametre sera 12800 , dont la racine quarrée, sçavoir $\sqrt{12800}$ sera ledit diametre.

7. Il y a un rectangle, duquel l'aire est 80 . & la difference des costez est 2 : trouver le diametre. & les costez d'iceluy rectangle.

Soit posé le moindre côté de 1^R ; & partant le plus grand sera $1^R + 2$. Ces côtés multipliez entr'eux donnent pour l'aire $1^9 + 2^9$, lequel est egal à l'aire donné 80 . Otant donc 1^9 de chacun, l'equation sera entre 1^9 , & $80 - 2^9$. La moitié du nombre des racines est 1 , dont le quarré est 1 , qui ajouté à 80 , sera 81 , dont la racine quarrée est 9 , de laquelle otant la fessdite moitié 1 restera 8 , estimation de 1^R , qui est pour le moindre côté: Donc le plus grand excédant iceluy de 2 sera 10 . Iceux côtés multipliez entr'eux produisent 80 aire donné, & les deux quarez des côtés sont 64 & 100 , egaux au quarré du diametre: & partant le quarré du diametre sera 164 , & iceluy diametre $\sqrt{164}$.

R. Il y a un rectangle duquel le diametre est 30. & la somme des costez 42: trouver iceux costez & l'aire du rectangle.

Soit posé un côté de 12, & partant l'autre sera 42 — 12: dont leurs quarréz seront 144, & 1764 — 8424 + 144 qui sont ensemble égaux au quarré du diametre. Parquoy l'équation sera entre 26 + 1764 — 8424 & 900. Et ajoutant 8424 à chacun elle sera entre 8424 + 900 & 27 + 1764. Et ôtant 900 de chacun restera équation entre 8424, & 27 + 864. Et derechef ôtant 864 de chacun, elle sera entre 27, & 8424 — 864. Parquoy divisant tout par 2, l'équation viendra entre 14 & 4224 — 432. La moitié du nôbre des racines est 21, dont le quarré est 441, duquel ôtant 432, resteront 9, dont la racine quarrée est 3, qui ajoutée à la susdite moitié 21, viendront 24 pour le plus grand côté: & partant resteront 18 pour le moindre: & iceux côtés multipliez entr'eux, produisent 432 pour l'aire du rectangle.

9. Il y a un quarré duquel le diametre & le côté ensemble font 6: trouver iceux côté & diametre.

Soit posé 12 pour le côté, & partant le diametre sera 6 — 12. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du côté; & le quarré du côté est 144; & le quarré du diametre est 36 — 1224 + 144: il y aura équation entre 24, & 36 — 1224 + 144: parquoy ôtant 144 de chacun, demeurera équation entre 144, & 36 — 1224: maintenant la moitié du nombre des racines est 6, dont le quarré est 36, qui ajoutez au nombre 36, viennent 72, dont la racine est $\sqrt{72}$, de laquelle étant ôtée la susdite moitié 6, restera $\sqrt{72} - 6$, pour la valeur de 12; & autant sera le côté du quarré; lequel étant ôté de

6, resteront $12 - \sqrt{72}$ pour le diametre.

10. Il y a un autre quarré duquel le diametre surpasse le côté de 3 : trouver lesdits côté, & diametre.

Pour le côté soit posé $1x$, & partant le diametre sera $1x + 3$. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du côté; lequel le quarré du côté est 19; le quarré du diametre sera $19 + 6x + 9$. L'equation sera donc entre 29, & $19 + 6x + 9$; & ôtant 19 de chacun, restera l'equation entre 19, & $6x + 9$. La moitié du nombre des racines est 3, dont le quarré est 9, qui ajouté au nombre 9, fait 18, dont la racine est $\sqrt{18}$, à laquelle soit ajoutée la susdite moitié 3, & sera fait $\sqrt{18} + 3$, valeur de $1x$; qui est pour le côté du quarré: & partant le diametre sera $\sqrt{18} + 6$.

11. Il y a un quarré duquel le costé multiplié par le diametre fait 10 : trouver lesdits costé, & diametre.

Soit posé le côté de $1x$: & puis qu'iceluy côté multipliant le diametre fait 10. par le contraire divisant 10, le quotient donnera ledit diametre, & par consequent iceluy diametre sera $\frac{10}{x}$. Et pour ce que le quarré du diametre est double du quarré du côté, sçavoir est de 19, & le quarré dudit diametre est $\frac{100}{x^2}$; il y aura equation entre 29, & $\frac{100}{x^2}$, laquelle par la multiplication croisée sera reduite à celle d'entre 299, & 100. Divisant donc 100 par 29, viendront 3 pour la valeur de $1x$; & partant sera $\sqrt{10}$, & tel est le côté du quarré proposé. Parquoy si on divise 10 par $\sqrt{10}$, viendront au quotient $\sqrt{10}$ pour le diametre dudit quarré.

12. Il y a un quarré duquel le costé multiplié par la difference d'entre iceluy costé, & le diametre fait 19:

trouver le diametre, & le costé dudit quarré.

Soit posé le côté être 18 , & partant la difference d'entre le côté & le diametre sera 15 , laquelle est trouvée divisant 15 par 18 , sçavoir est afin que le quotient multiplié par le diviseur 18 , produise le nombre divisé 15 . Et pource que le diametre excède le côté de cette difference, le diametre sera $18 + \frac{15}{18}$. Et d'autant que le quarré du diametre est double du quarré du costé : & le quarré d'iceluy côté est 19 , & le quarré du diametre est $\frac{19 + 307 + 225}{19}$

il y aura equation entre 29 , & $\frac{19 + 307 + 225}{19}$, qui par multiplication en croix sera reduite à l'equation d'entre 299 , & $199 + 307 + 225$. Ostant donc 199 de chacun, l'equation sera entre 199 & $307 + 225$. La moitié du nombre des quarez est 15 , dont le quarré est 225 , qui ajoûté à 225 , viennent 450 , dont la racine quarrée est $\sqrt{450}$. à laquelle ajoûtant la susdite moitié 15 , viendra $\sqrt{450} + 15$ pour 19 ; & partant sera $\sqrt{[\sqrt{450} + 15]}$: & autant est le côté requis, dont le quarré $\sqrt{450} + 15$ étant doublé donnera $\sqrt{1800 + 30}$, pour le quarré du diametre : & partant iceluy diametre sera $\sqrt{[\sqrt{1800 + 30}]}$, duquel étant soustrait le côté, restera la difference $\sqrt{[\sqrt{1800 + 30}]} - \sqrt{[\sqrt{450} + 15]}$, qui multipliée par le côté $\sqrt{[\sqrt{450} + 15]}$ sera produit le nombre 15 .

13. Il y a un triangle duquel les segmens de la base faits par la perpendiculaire sont 16 & 5 , mais l'agregé des deux costez est 33 : On demande combien est chacun desdits costez, & consequemment l'aire d'iceluy triangle?

Je pose que le moindre côté soit 12 : donc l'autre côté sera $33 - 12$, & partant les quarez d'iceux côtés seront 19 , & $19 - 66 + 1089$: du moindre d'iceux quarez soit ôté le quarré du moindre segment, & restera $19 - 25$ pour le quarré de la perpendiculaire. Mais du quarré du plus grand côté soit aussi ôté le quarré du grand segment, & resteront encore $19 - 66 + 833$ pour le quarré de la perpend. Partant il y a equation entre $19 - 25$, & $19 - 66 + 833$. Parquoy ajoutant & soustrayant de part & d'autre selon les preceptes des Equations, viendront 66 egales à 858 . Donc la valeur de 12 sera 13 , qui est le moindre côté requis, & partant l'autre sera 20 , & la superficie 126 .

14. Il y a un triangle rectangle, duquel un costé de l'angle droit est $\sqrt{18 + 3}$, mais l'autre costé & l'hypotenuse font ensemble $\sqrt{162 + 9}$: on demande combien est chaque costé.

Posons 12 pour le côté de l'angle droit requis ; & partant l'hypotenuse sera $\sqrt{162 + 9} - 12$: donc les quarez des deux côtés dudit angle droit seront $27 + \sqrt{648}$, & 19 , lesquels deux quarez ensemble sont egaux au quarré de l'hypotenuse, c'est à sçavoir à $243 - 18 + 19 + \sqrt{52488} - \sqrt{6489}$: Parquoy si on ôte de part & d'autre $\sqrt{648}$, viendra equation entre $19 + 27$, & $243 - 18 + 19 + \sqrt{52488} - \sqrt{6489}$: car ôtant $\sqrt{648}$ de $\sqrt{52488}$, qui sont commensurables, restera $\sqrt{41472}$ & si de chaque terme d'icelle equation on ôte 19 , & 27 , restera encore equation entre 0 , & $216 + 18 + \sqrt{41472} - \sqrt{6489}$: mais ajoutant de part & d'autre 18 , & $\sqrt{6489}$, l'equation viendra entre $\sqrt{6489} + 18$, & $216 + \sqrt{41472}$. Or d'autant que le nombre $\sqrt{6489}$

a été procréé multipliant deux fois $\sqrt{162}$ par 12 il doit être pris pour nombres de racines, suivant ce que nous avons dit en la page 91 : & partant tout ce nombre $\sqrt{6487+18}$ est le nombre des racines, & conséquemment il faut par iceluy nombre [delaisant les signes cossiques 9 & 12] diviser l'autre nombre de l'equation $216 + \sqrt{41472}$, afin d'avoir la valeur d'une racine : pour faire laquelle division il faut, suivant ce qui est enseigné au chap. 20. multiplier tant le diviseur $\sqrt{648} + 18$, que le dividande $216 + \sqrt{41472}$, par $\sqrt{648} - 18$: quoy faisant viendront 324 pour nouveau diviseur, & $\sqrt{3359232} + 1296$ pour nouveau dividande ; & la division faite, le quotient sera $\sqrt{32} + 4$; qui est la valeur de 12 : & autant est le côté cherché, que nous avons posé être 12 ; lequel côté étant soustrait de $\sqrt{162} + 9$, restera $\sqrt{50} + 5$ pour l'hypothénuse, puis quel'aggregé d'iceluy côté, & de la dite hypothénuse est $\sqrt{153} + 9$.

15. *Il y a un jardin rectangulaire ; dont la diagonale excède la longueur dudit jardin de 4 perches, & la largeur de 8. On demande combien est la longueur & la largeur dudit jardin ; & conséquemment l'aire d'iceluy.*

Je pose que la largeur du dit jardin soit 12 : dōc la diagonale sera $12 + 8$, & son quarré $19 + 16 + 64$, duquel étant ôté le quarré de la largeur, sçavoir 19 , restent $16 + 64$ pour le quarré de la longueur dudit jardin, & partant icelle longueur sera $\sqrt{16 + 64}$, qui ôté de la diagon. resteront $12 + 8$ — $\sqrt{16 + 64}$, qui sont egaux à l'excès donné 4 : ajoutant donc & soustrayant de part & d'autre ainsi qu'il appartient, viendra 19 egal à $8 + 48$.

Parquoy la valeur de 18 sera 19 & autant est la largeur du jardin, & conséquemment la diagonale d'iceluy sera 20, la longueur 16, & la superficie 192.

16 Il y a un autre jardin rectangulaire, dont les quatre costez avec la diagonale font ensemble 38. & la superficie d'iceluy est 48. Sçavoir combien est la longueur & la largeur dudit jardin.

Je pose 18 pour la somme de la longueur & de la largeur dudit jardin, & conséquemment les quatre côtez feront 28, & la diagon. 38. 28 par tant son quarré est $14 \times 14 = 192 + 49$ à iceluy quarré soit ajouté le double de la superficie donnée, (pource que par la 4. p. 2. le quarré de l'agregé des côtez comprenant l'angle droit d'un rectangle, est égal aux quarrés d'iceux côtez avec deux fois leur rectangle) & viendront 1540 $192 + 96$ qui sont égaux au quarré de la somme de la longueur & la geur, qui est 19. Ajoutons & soustrayons de part & d'autre ainsi qu'il appartient, & viendra 14 égal à $59 \frac{2}{3} \times 8 = 514 \frac{1}{3}$. Parquoy 18 vaut 14. Et autant est la somme de la longueur & de la largeur du jardin proposé. Parquoy les quatre côtez feront ensemble 28, & la diagonale 10. Nous avons donc maintenant l'agregé des deux côtez d'un rectangle, sçavoir 14, & la diagon. d'iceluy 10. Partant nous trouverons suivant ce qui est enseigné cy-devant en la 8. question que la longueur du jardin proposé est 8, & la largeur 6.

17. Il y a une piece de terre en forme de Rhombe, dont chaque coste est de 20 perches, & la difference des diagon. 4. Sçavoir combien est chacune desdites diag. & la superficie de ladite piece.

Je pose que la moitié de la moindre diagon soit $1\frac{1}{2}$. Donc la moitié de l'autre sera $18\frac{1}{2} - 2$: & partant les quarréz d'icelles moitez seront $1\frac{1}{4}$, & $19\frac{1}{4} + 48\frac{1}{4} + 4$, lesquels quarréz sont ensemble $27 + 48\frac{1}{2} + 4$, & sont egaux au quarré du côté donné, qui est 400. Parquoy procedant à la reduction de cette equation ainsi qu'il appartient, sera trouvé 19 egal à $198 - 2x$, & partant la valeur de $19\frac{1}{2}$ sera $\sqrt{199} + 1$, & par consequent la moindre diagon requise sera $\sqrt{796} - 2$, & y ajoutant la difference donnée, viendront $\sqrt{796} + 2$ pour la plus grande diagonale, laquelle multipliée par la susdite moitié $\sqrt{199} + 1$, donne 396 pour la superficie de ladite piece de terre.

18. Il y a une autre piece de terre en Rhombe, dont chaque costé est de 15 perches, & la superficie 216. On demande combien est chaque diagonale de ladite piece.

Je pose que la moitié de la petite diagonale soit $1\frac{1}{2}$: Donc son quarré est $1\frac{1}{4}$, qui ôté de 225, quarré du côté donné 15, restera $225 - 1\frac{1}{4}$ pour le quarré de la moitié du grand diametre, qui partant est $\sqrt{(225 - 1\frac{1}{4})}$, & icelle moitié étant multipliée par tout l'autre diam. sçavoir est par $2\frac{1}{2}$, viendra $\sqrt{(9009 - 499)}$ pour la superficie de la piece. Mais elle a été proposée de 216. Il y a donc equation entre 216, & $\sqrt{(9009 - 499)}$ & consequemment entre leurs quarréz 46656, & $9009 - 499$. Donc aussi entre 199 , & $2297 - 11664$: partant il vaut 9, & consequemment la moindre diagonale est 18, & la grande 24.

19. Il y a encore un Rhombe, auquel la somme des quatre costez & des deux diagonales est 68 ; & la

différence d'icelles diagonales 4 : On demande combien est chaque côté dudit Rhombe, chacune des diagonales, & la superficie.

Je pose que le côté dudit Rhombe soit $1x$: Donc les quatre côtés ensemble seront $4x$, & les diagonales ensemble $68 - 4x$. Et puis que la différence d'icelles est proposée 4, la moindre desdites diagonales sera $32 - 2x$, & la plus grande $36 - 2x$. Parquoy leurs moitiés seront $16 - 1x$, & $18 - 1x$, dont les quarrés font ensemble $27 - 68x + 580$, & sont égaux au quarré du côté dudit Rhombe, c'est à dire à $1x$. Parquoy ajoutant & soustrayant de part & d'autre, ainsi qu'il appartient, on trouvera 19 égal à $68x - 580$: & partant la valeur de $1x$ sera 10 , la moindre diagon. 12 , & la plus grande 16 . Mais multipliant l'une d'icelles diagonales par la moitié de l'autre viendront 96 pour la superficie dudit Rhombe proposé.

29. Trois marchands s'associans ensemble le premier met 140 livres plus que le second : mais le second & le troisième ensemble mettent 336 livres : Est avis qu'ils ont gagné 264 livres, dont le troisième en a eu 84 livres pour sa part. On demande combien ils ont mis chacun, & combien le premier & le second ont eu chacun du gain.

Posons que le second ait mis en la société $1x$: donc la mise du premier sera $1x + 140$, & celle du troisième $336 - 1x$; conséquemment la mise de tous les trois sera $476 + 1x$. Et puis que le gain du 3. est 84 livres, & le gain total 264 , posez les susdits nombres en ordre de règle de trois ainsi.

Si $476 + 1x$ donnent 264 , combien donneront $336 - 1x$? 84 .

Or d'autant que de quatre nombres proportionaux le produit du premier par le quatrième doit être égal au produit du second par le tiers ; il y aura equation entre $39984 + 84x$ & $88704 - 264x$; laquelle equation étant reduite ainsi qu'il appartient, viendra entre $348x$ & 48720 , & par consequent $1x$ vaut 140 livres, qui est la mise du second : partant la mise du premier sera 280 livres, & celle du troisième 196 : tellement que toute la mise sera 616 livres. Parquoy nous trouverons le gain du premier disant par règle de trois.

Si 616 donnent 264, combien donneront 280 ?

Et viendront 120 livres pour le gain du premier : qui avec celui du troisième fait 204 livres, & partant le gain du second sera 60 livres.

21. *Deux Marchands s'estans associez ensemble ont gagné 100 livres, & le premier, tant pour le principal qui a demeuré trois mois en la société, que pour son gain prend 100 livres. Et l'autre duquel le principal n'a demeuré que deux mois en ladite société prend 125 livres. Assavoir combien ils avoient mis chacun.*

Premierement, ajoutons les deux sommes qui ont été prises, & viendront 225 ; ôtons en tout le gain, & resteront 125 livres pour toute la mise. Posons $1x$ pour la mise du premier, & par consequent la mise de l'autre sera $125 - 1x$: Chacune de ces mises soit multipliée par son temps : viendra au premier $3x$ & à l'autre $250 - 2x$: mais l'agregé sera $250 + 1x$: Disons donc par règle de trois, Si $250 + 1x$ donnent 100 de gain, que donneront les $3x$ du premier ? & la règle faite on aura pour son gain $\frac{300x}{250 + 1x}$ tellement que l'agregé de

$\frac{300x}{250 + 1x} + 125 - 1x = 100$

la mise & gain sera $12x + \frac{300x}{250 + 1x}$, qui est egal à 100 : & par consequent $\frac{300x}{250 + 1x}$ seront egaux à $100 - 12x$, qui reduits par multiplication croisée, viendront 30 x egales à $25000 - 150x - 12x$: & partant $12x$ sera egal à $25000 - 450x$: parquoy prenant la racine quarrée dudit nombre $25000 - 450x$ on trouvera 50 pour la valeur de $12x$, qui est la mise du premier, laquelle ôtée de 125 resteront 75 pour la mise de l'autre.

Or est à noter que quand telles questions se font de trois marchands, elles tombent aux equations cubiques : de quatre aux quarrés de quarré ; & ainsi de suite : desquelles equations nous n'avons estimé être à propos de parler en ce sommaire & abrégé d'Algebre, mais les avons reservées pour être traitées amplement en un autre lieu.

22. *Un marchand étant allé trafiquer à trois foires, il a autant gagné à la premiere qu'il y avoit porté d'argent, tellement qu'après cette premiere negotiation il avoit le double de son argent, à la seconde son gain étoit 6 livres davantage que la racine quarrée de ce double ; mais à la troisieme son gain étoit 4 livres davantage que le quarré du gain fait à la seconde foire : & après toutes ces negotiations il trouve qu'il a gagné à ces trois foires 1786 livres. On demande quelle somme d'argent ce marchand avoit au commencement, & combien il a gagné à chaque foire.*

Supposons qu'à la seconde foire il aye gagné $12x$: donc puis que ce gain est 6 davantage que la racine quarrée du double de ce qu'il avoit porté ou gagné à la premiere foire ; si nous multiplions $12x - 6$ en soy, viendront $144x^2 - 12x + 36$, pour iceluy double ; & pourtant le gain de la premiere

foire sera $\frac{1}{2}q - 6R + 18$: mais le gain de la troisieme est 4. davantage que le quarré du gain de la seconde que nous avons posé être $1R$: donc iceluy gain sera $1q + 4$. Ajoutons ces trois gains ensemble $3q + 4, 1R, \& \frac{1}{2}q - 6R + 18$, & viendront $1\frac{1}{2}q - 5R + 2$ pour tous lesdits gains, qui partant sont egaux à 1786. Osons de part & d'autre 22, & l'equation viendra entre $1\frac{1}{2}q - 5R$, & 1764; ajoutons les $5R$, & nous aurons l'equation entre $1\frac{1}{2}q$, & $5R + 1764$. Puis à cause de la fraction, reduisons & multiplions en croix, & l'equation viendra entre $3q$, & $10R + 3528$: & divisons tout par 3, viendra equation entre $1q$, & $3\frac{1}{3}R + 1176$. Parquoy prenant la racine quarrée de ce nombre, nous trouverons 36 pour la valeur d'une racine : Et partant la somme du gain fait à la seconde foire sera 36 livres; & puis qu'elle vaut 6 livres davantage que la racine quarrée du double de la somme gagné à la premiere foire, ôtons 6 livres, & resteront 30 : dont le quarré 900, est le double de la somme, tant de l'argent porté à la premiere foire, que du gain fait à icelle, parquoy le marchand avoit porté 450 livres à ladite foire, & y gagna autant. Mais puis que le gain fait à la troisieme foire est 4. livres davantage que le quarré de la somme du gain fait à la seconde, multiplions le gain 36 en soy, & viendront 1296, à quoy ajoutons 4, & nous aurons 1300 livres pour le gain fait à ladite troisieme foire : & que cela soit, ajoutons ensemble tous ces trois gains 450, 36 & 1300 livres; viendront 1786 livres pour tout le gain fait aux trois foires susdites, ainsi que veut la proposition.

Que si on disoit qu'ayant gagné à la troisieme foire 4 livres davantage que le quarré de toute la somme

qu'il avoit au precedent ; tout son argent est 877036 :
 Nous poserions qu'apres la seconde foire il eut $1x$:
 Donc le gain de la troisieme foire seroit $19 + 4$: &
 partant tout ce qu'il auroit apres ces negociations
 seroit $19 + 1x + 4$, egaux à 877036 : Osons donc
 $1x$ & 4 de part & d'autre , & restera 19 egal à
 $877032 - 1x$. Or la moitié du nombre des racines
 est $\frac{1}{2}$, dont le quarré est $\frac{1}{4}$, qui ajouté à 877032,
 font $877032 \frac{1}{4}$, dont la racine quarrée est $936 \frac{1}{2}$, de
 laquelle soit ôtée la fufdite moitié du nombre des
 racines , & resteront 936 pour la valeur de $1x$. Et
 partant le marchand avoit autant d'argent apres
 la seconde foire : Mais ôtons en 6 qu'il avoit ga-
 gné plus que la racine de ce qu'il avoit apres la
 premiere foire ; & pour ce gain posons $1x$: Donc
 il avoit 19 apres ladite premiere foire : Parquoy
 $19 + 1x$ seront egaux à 930 ; & ôtant $1x$, l'equa-
 tion se trouvera entre 19 , & $930 - 1x$: & proce-
 dant à l'extraction , nous trouverons 30 pour la
 valeur de $1x$: partant 36 est le gain de la seconde
 foire, qui ôté des 936, restent 900 pour ce qu'il
 avoit apres la premiere foire, dont la moitié 450,
 est ce qu'il y avoit apporté , ainsi que devant.

23 *Deux hommes mettant leur argent ensemble , la
 somme est 200 écus , mais divisant l'argent du second
 par celui du premier , le quotient est $1 \frac{1}{2}$: Il faut trou-
 ver l'argent de chacun.*

Soit posé $1x$ pour le premier , & pour le second
 $1A$: il faut donc résoudre la seconde racine en pre-
 miere ainsi. Pource que les deux ensemble ont 200
 écus ; il y aura equation entre $1x + 1A$, & 200.
 Ostant $1x$ de chacun , restera l'equation entre $1A$,
 & $200 - 1x$: donc $1A$ sera reduite en $200 - 1x$.

Parquoy je pose d'erechef le nombre du premier être $1x$, & celui du second $200 - 1x$, qui font ensemble 200 écus. Je divise maintenant le nombre du second par celui du premier, & vient $\frac{200 - 1x}{1x}$

egal à $1 \frac{1}{2}$, laquelle equation, par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre $400 - 2x$, & $3x$. Et ajoutant $2x$ à chacun, l'equation sera entre 400, & $5x$: divisant donc 400 par 5, le quotient sera 80 pour le nombre du premier: & partant le second aura 120, qui divisez par 80, le quotient est $1 \frac{1}{2}$.

24. *Trois hommes ayans de l'argent, le premier dit aux deux autres, que s'il avoit encore 100 écus, il auroit autant qu'eux: le second dit aussi aux deux autres, que s'il avoit encore 100 écus il auroit le double de leur argent: pareillement le troisieme dit aux deux autres, que s'il avoit encore 100 écus, il auroit le triple de leur argent: sçavoir combien a chacun.*

Soit posé l'argent du premier être $1x$, donc avec 100, il aura $1x + 100$, & autant sera la somme du second & du troisieme, & tous les trois auront $2x + 100$. Or soit posé la somme du second être $1A$: Donc avec 100, il aura $1A + 100$, lequel nombre est double de la somme du premier & du tiers, laquelle est $2x + 100 - 1A$: (Pource qu'ayans tous trois $2x + 100$, si on ôte $1A$, c'est à sçavoir l'argent du second, restera $2x + 100 - 1A$ pour la somme du premier & du troisieme.) Partant il y aura equation entre $1A + 100$, & $4x + 200 - 2A$. Et ajoutant $2A$ à chacun, l'equation sera entre $3A + 100$, & $4x + 200$: & ôtant 100 de chacun, demeurera l'equation entre $3A$, & $4x + 100$. Si donc les tous sont divisez par 3, l'equation vien-

dra entre 1A & $\frac{1}{3} B + \frac{100}{3}$: & partant puis que le second est posé avoir 1A, la somme d'iceluy sera $\frac{4}{3} B + \frac{100}{3}$. Finalement la somme du troisieme soit posée être 1B. Donc avec 100, il aura $1B + 100$, qui est nombre triple de la somme du premier & du second, laquelle est $\frac{7}{3} B + \frac{100}{3}$, composée de 1B : somme du premier, & de $\frac{4}{3} B + \frac{100}{3}$ somme du second : Il y aura donc equation entre $1B + 100$, & $\frac{7}{3} B + \frac{100}{3}$; c'est à dire entre $1B + 100$, & $7B + 100$, & ôtant 100 de chacun, l'equation sera entre 1B, & 7B : & partant la somme du tiers, qui a été posée 1B, sera 7B. Parquoy puis que le premier a 1B, le second $\frac{4}{3} B + \frac{100}{3}$: & le tiers 7B : tous les trois ensemble auront $9\frac{1}{3} B + 100$. Mais tous les trois avoient aussi $2B + 100$: Il y a donc equation entre $9\frac{1}{3} B + 100$, & $2B + 100$: & ôtant 2B de chacun, restera equation entre $7\frac{1}{3} B + 100$ & 100 : & ôtant dorechef $\frac{100}{3}$, c'est à dire $33\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre $7\frac{1}{3} B$, & $66\frac{2}{3}$: divisant donc $66\frac{2}{3}$ par $7\frac{1}{3}$, viendra $9\frac{1}{11}$ pour 1B, somme du premier : & le second ayant $1\frac{1}{3} B + 33\frac{1}{3}$, aura $45\frac{5}{11}$: & le tiers ayant 7B, aura $63\frac{7}{11}$. Car ainsi le premier avec 100, aura $109\frac{5}{11}$, egale à la somme du second & tiers : & le second avec 100, aura $145\frac{5}{11}$, qui est le double de la somme du premier & tiers : & finalement le tiers avec 100, aura $163\frac{7}{11}$, qui est le triple de la somme du premier & second.

Fin du Sommaire de l'Algebre.



ELEMENT

DIXIEME.

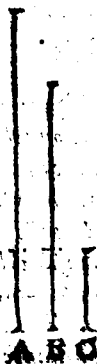
DEFINITIONS.

GRAND ÉVRS commensurables, sont celles-là qui sont mesurées par une même mesure.

Ainsi les deux lignes droites *A & B*, estans mesurées par une même ligne *C*, seront dites commensurables.

Ainsi aussi une ligne de 6 pieds est commensurable à une autre ligne de 7 pieds, pour ce qu'elles sont toutes deux mesurées tant par la ligne d'un pied, que par celle d'un demy pied, d'un tiers de pied, &c.

Semblablement les superficies, qui sont mesurées par une même superficie, sont dites commensurables. Item les corps



ou solides qui sont mesurez par un mesme corps, sont aussi dits commensurables.

2. Mais les grandeurs incommensurables, sont celles-là qui n'ont aucune commune mesure.

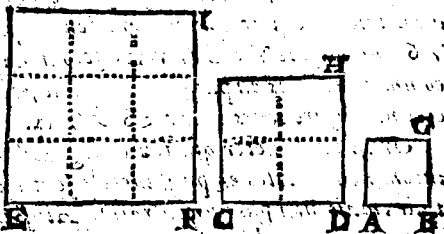
Telles grandeurs sont le diametre & le costé de quelconque quarré: car icelles grandeurs n'ont aucune commune mesure, comme il sera démontré à la dernière prop. de ce livre. Il y a encore plusieurs autres lignes incommensurables, sçavoir est ausquelles on ne peut donner aucune commune mesure, beaucoup desquelles seront expliquées en ce 12. livre; & enseigné par quelles manieres elles peuvent estre trouvez: de ceshef, les superficies sont dites incommensurables, & les solides incommensurables, qui n'ont aucune commune mesure.

3. Les lignes droites commensurables en puissance, sont celles-là desquelles les quarrés peuvent estre mesurez par une mesme superficie.

Les lignes droites sont considérées ou selon leur longueur, ou selon leur puissance; & en l'une & l'autre sorte elles sont dites commensurables, & incommensurables. Aux deux premières definitions Euclide a expliqué quelles sont les lignes commensurables, & incommensurables considérées selon leurs longitudes; mais en cette-cy, & en la suivante, il declare quelles sont celles dites commensurables, & incommensurables en puissance. Il dit donc icy que les lignes droites

dont les quarrez peuvent estre mesurez par une mesme superficie sont commensurables en puissance: Ainsi les lignes droites AB & CD seront dites comensurables en puissance, d'autant que leurs quarrez AG & CH peuvent estre mesurez par une mesme superficie AG : Item les lignes droites CD & EF , seront aussi dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez CH & EI peuvent estre mesurez par l'espace ou quarre AG . Semblablement, appliquant les nombres

aux lignes; une ligne de 3 pieds sera dite commensurable en puissance à



une autre ligne de 6 pieds: parce que leurs quarrez 9 & 36 peuvent estre mesurez par une mesme superficie: Ainsi aussi une ligne ayant deux pieds en longueur, & une autre $\sqrt{8}$ seront dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez 4 & 8 sont mesurez par un mesme espace superficiel: de mème, une ligne estant $\sqrt{20}$, & une autre $\sqrt{125}$ seront pareillement dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez $\sqrt{20}$ & $\sqrt{125}$ sont mesurez par une mesme superficie $\sqrt{5}$: car elle est deux fois en $\sqrt{20}$, & 5 fois en $\sqrt{125}$.

Or est à noter que toutes lignes droites commensurables en longueur, le sont aussi en puissance; car les quarrez d'icelles lignes sont mesurez par le quarre de

leur commune mesure, ainsi qu'il apert aux trois premiers exemples cy-dessus.

4. Mais les lignes droites incommensurables en puissance, sont celles-là desquelles les quarréz n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

Comme par exemple, une ligne estant de deux pieds. & une autre $\sqrt{6}$, icelles deux lignes seront dites incommensurables en puissance, pource qu'il n'y a aucune superficie qui mesure leurs quarréz 4 & $\sqrt{6}$: de mesme $\sqrt{8}$ & $\sqrt{12}$, seront aussi dites incommensurables en puissance, car nul espace superficiel ne mesure leurs quarréz 8 & $\sqrt{12}$.

Or est icy à noter que toutes lignes (ou nombres) incommensurables en puissance, le sont aussi en longueur: mais non pas au contraire. Ainsi une ligne de deux pieds sera bien incommensurable en longueur avec une autre ligne de $\sqrt{2}$: mais non pas en puissance: & 2 qui est incommensurable en puissance avec $\sqrt{2}$, l'est aussi en longueur.

5. Cela estant ainsi, il evident qu'à toute ligne droite proposée, on trouvera infinies lignes droites commensurables, & infinies incommensurables: les unes en longueur & puissance, les autres en puissance seulement. Or cette ligne droite proposée, est appelée rationnelle.

C'est à dire que quand on propose quelque ligne droite de grandeur connue & déterminée, icelle est

appelée rationnelle, pource que c'est selon elle que nous ratiocinons : & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poserons toujours d'un de ces nombres absolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

6. Et les lignes droites commensurables à cette ligne rationnelle, soit en longueur & puissance, soit en puissance seulement sont aussi appelées rationnelles.

7. Mais les lignes incommensurables à cette ligne rationnelle, sont dites irrationnelles.

Si comparant quelque ligne droite, à la ligne prise pour rationnelle, & sur laquelle nous ratiocinons, elle est trouvée commensurable à icelle rationnelle, soit en longueur, & puissance, soit en puissance seulement, cette ligne est aussi rationnelle : mais si elle est incommensurable à icelle ligne rationnelle proposée, tant en longueur qu'en puissance, cettedite ligne est appelée irrationnelle.

8. Le quarré décrit sur une ligne rationnelle proposée, est appelé rationnel.

Tout ainsi que cette ligne-là, laquelle est connue & déterminée de certaine quantité est dite rationnelle : ainsi aussi le quarré décrit sur icelle ligne, est appelé rationnel, pource qu'iceluy est certain & connu : & les superficies comparées à iceluy quarré, sont aussi dites rationnelles, ou bien irrationnelles, selon qu'elles seront trouvées commensurables ou incommensurables à iceluy quarré rationnel, ainsi qu'il est dit és deux définitions suivantes.

- 9 Les figures commensurables à ce carré rationel, sont aussi rationelles.
- 10 Mais celles qui luy sont incommensurables, sont irrationelles & sourdes.
- 11 Et les lignes droites qui peuvent icelles figures irrationelle, sont irrationelles & sourdes.

Or une ligne droite est dite pouvoir une figure quand le carré décrit sur icelle est égal à icelle figure, d'autant que tout carré est la puissance de sa racine ou de son costé. Ainsi il a été dit cy-dessus que deux lignes sont commensurables en puissance, lors que non pas les lignes, mais les carrés, d'icelles lignes, peuvent être mesurez par une même superficie.

Or à ces définitions nous ajouterons (après Clavius) une demande, & quelques communes sentences, dont l'usage sera trouvé en ce livre.

DEMANDE.

Qu'on puisse multiplier quelque grandeur tant de fois qu'elle excède quelque grandeur proposée de même genre.

COMMUNES SENTENCES.

1 Vne grandeur mesurant tant de grandeurs qu'on voudra, mesure aussi la composée d'icelles.

2 Vne

2 Vne grandeur mesurant quelconque grandeur, mesure pareillement toute grandeur que celle-là mesure.

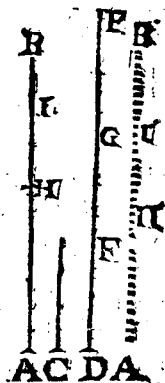
3 Vne grandeur qui mesure toute une grandeur, & une retranchée d'icelle, mesure aussi le reste.

THEOR. I. PROP. I.

Estans proposées deux grandeurs inegales, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & qu'en continuant cela se fasse toujours ainsi: Il demeurera enfin une grandeur plus petite que la moindre des deux proposées.

Soient proposées deux grandeurs inegales AB & C , desquelles AB est la plus grande: Je dis que si d'icelle AB on retranche plus de la moitié, & du reste encores plus de la moitié, & qu'on continuë toujours ainsi, il restera enfin quelque grandeur plus petite que C .

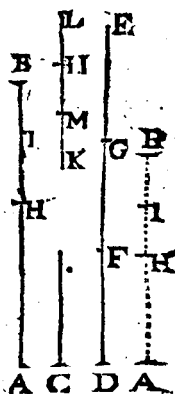
Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C multipliée tant de fois que le produit excede la plus grande AB , & la produite d'icelle multiplication soit DE , laquelle sera multipliée



ce de C, & plus grande que AB : qu'elle soit donc divisée en parties égales à C, cōme en DF, FG, GE : Item de AB soit retranché plus de la moitié, AH, & du reste HB encore plus de la moitié HI, & en continuant toujours cecy jusques à ce que AB soit divisée en autant de parties que DE, sçavoir AH, HI, & IB. D'autant que DE est plus grande que AB, & que le retranché DF n'est pas plus grand que la moitié de DE : comme le retranché AH, est plus grand que la moitié de AB, le reste FE sera plus grand que le reste HB : semblablement si du plus grand reste FE, on ôte FG qui n'est pas plus que la moitié, & du plus petit reste HB on ôte plus de la moitié HI ; le reste IB sera plus petit que le reste GE égal à C : & par conséquent IB dernière partie de AB, sera plus petite que C. Etans donc proposée deux grandeurs inégales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera semblablement que le même adviendra si de AB, on ôte la moitié AH, & du reste HB la moitié HI.

Autrement ayant fait la même construction que dessus, soit prise KL autant multiple de IB que DE est multiple de C. Donc icelle KL étant divisée en KM, MN, NL, parties égales chacune à IB, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE. Mais d'autant que AH est plus grande que HB, ou éga-



le si on ôte seulement la moitié de AB) & icelle HB plus grande que IB : aussi AH sera plus grande que IB, c'est à dire que KM. Derechef, puis que HI est plus grande que IB, (ou egale à icelle) & que icelle IB, est egale à MN; aussi HI sera plus grande que MN: (ou egale) & partant la toute AI sera plus grande que la toute KN. Ajoutant donc les egales IB, NL, la toute AB sera plus grande que la toute KL. Mais DE est encore plus grande que AB : Donc DE sera bien plus grande que KL. Et puis que comme DE est à C, ainsi KL est à IB; (car KL est prise autant multiple de IB, que DE de C) aussi C sera plus grande que IB par la 14. pr. 5. & partant le reste IB est moindre que C. Ce qu'il fa-
loit demontrer.

THEOR. 2.

PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales proposées on retranche toujours alternativement la plus petite de la plus grande, sans que le reste mesure la grandeur precedente: telles grandeurs seront incommensurables.

Soient proposées deux grandeurs inegales AB & CD, desquelles la moindre AB soit retranchée de la plus grande CD: puis le reste CD soit ôtée de AB, & qu'ainsi continuellement & alternativement la plus petite étant ôtée de la plus grande, le reste ne mesure jamais sa grandeur precedente, c'est à dire que le plus petit reste ne mesure jamais le plus grand reste: Je dis que AB & CD sont incommensurables.

Autrement, il faudra qu'elles soient commensurables : & partant qu'elles ayent une commune mesure, laquelle soit E, s'il est possible. Maintenant, de la plus grande CD soit retranchée CF égale à AB : Et s'il se peut faire, soit continué ce retranchement jusques à ce que le reste DF soit plus petit que AB. Donc E commune mesure, mesurera la toute CD & la retranchée CF, égale à AB, ou multiplie d'icelle, par la 2. com. sent. & elle doit aussi mesurer le reste DF par la 3. com. sent. Item soit retranchée DF de AB tant de fois que faire se pourra, jusques à ce que le reste GB soit plus petit que E, qui mesure FD, & par conséquent sa multipliee AG, par la 2. com. sent. donc aussi le reste GB, par la 3. comm. sent. ce qui est absurde. Partant AB & CD n'avoient point de commune mesure ; & par conséquent sont incommensurables. Parquoy si de deux grandeurs inégales proposées, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

Nous convertirons cette prop. ainsi.

Si de deux grandeurs incommensurables proposées l'on retranche toujours alternativement la plus petite de la plus grande, le reste ne mesurera jamais la grandeur précédente.

Soient proposées deux grandeurs incommensurables AB, DE, dont la moindre AB soit ôtée de DE, & le reste soit FE : Item de AB soit ôtée

FE, & le reste soit BC, & ainsi continuellement la plus petite de la plus grande : Je dis que le reste ne mesurera jamais la

grandeur prec. Car si

faire se peut que CB

mesure la preced. FE

Donc puis que CB

mesure FE, & icelle FE mesure AC, aussi CB me-

surera AC par la 2. com. sent. Mais elle mesure aussi

soy-même. Donc CB mesurera pareillement la toute

AB par la 1. com. sent. Mais AB mesure DF : Donc

par la 2. com. sent. CB mesurera la même DF : Et

puis qu'on a posé qu'elle mesure aussi FE, elle mesu-

rera la toute DE par la 1. com. sent. Mais il a été

demonstré qu'icelle CB mesure aussi AB ; elle mesure

donc AB & DE ; ce qui est absurde, puis qu'elles ont

été posées incommensurables.

A ce théor. Clavius ajoute cettuy-cy.

Si de deux grandeurs commensurables propo-

sées, on ôte toujours alternativement la moindre

de la plus grande, quelque grandeur restante me-

surera la precedente.

Car si jamais le reste ne mesuroit la grandeur

precedente, les proposées seroient incommensurables

par cette 2. prop. ce qui est absurde, puis qu'elles

sont posées commensurables.

Parquoy il est facile de connoître, si deux quel-

conques grandeurs proposées sont commensurables,

ou non : Car retranchant alternativement la moi-

ndre de la plus grande, si quelque reste mesure le prece-

dent, les grandeurs proposées seront commensurables,

comme il appert de la demonstration du premier theor-

me de Scholæ. Mais si le reste ne mesure jamais la grā-

deux précédentes, les grandeurs proposées seront incommensurables, comme Euclide a démontré en cette 2. prop.

PROBL. I. PROP. III.

Estans données deux grandeurs commensurables, trouver la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient données deux grandeurs commensurables AB, CD, & il faut trouver leur plus grande commune mesure. Or AB, qui est moindre que CD, mesurera icelle, ou elle ne la mesurera point; Si elle la mesure, il est evident qu'elle sera la plus grande commune mesure. Si elle ne la mesure point, soit alternativement retranchée la plus petite de la plus grande iusques à ce que le reste mesure le reste: (ce qui doit advenir, d'autant que les grandeurs données sont commensurables) donc que AB soit retranchée de CD, & que le reste ED mesure AB. Je dis qu'icelle ED sera la plus grande commune mesure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle mesure AB, elle mesurera aussi CE son égale: & se mesurant soy-mesme, elle mesurera aussi la toute CD, par la 1. com. sent. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune me-

sure, qu'on en trouve une autre plus grande, savoir G , (s'il est possible) donc par les communes sentences G mesurera AB , CD , & le retranché CE égal à AB , & par conséquent le reste ED , qui est plus petit ; ce qui est impossible : donc une plus grande magnitude que ED , n'est commune mesure d'icelles AB , CD : Parrant ED estoit la plus grande commune mesure. Estans donc données deux grandeurs commensurables, nous avons trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire,

C O R O L L A I R E.

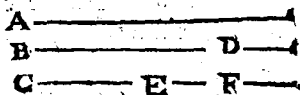
De cecy est manifeste que si une grandeur mesure deux grandeurs. qu'elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si G mesure AB & CD , qu'elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure ED .

P R O B L. 2. P R O P. III.

Trois grandeurs commensurables estans données, trouver la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient données trois grandeurs commensurables A , B , C , desquelles il faut trouver la plus grande commune mesure. Soit premierement trouvée D plus grande commune mesure de A & B par la 3. proposition 10. Or si D mesure aussi C , il est manifeste que D est la plus grande commune mesure de toutes les trois grandeurs A , B , C .

Car si une plus grande magnitude que D mesure les grandeurs A, B, C, par le Corollaire de la précédente prop. elle mesurera aussi la plus grande commune mesure d'icelles A & B, c'est à dire D, qui est moindre: grandeur, ce qui est impossible. Que si D ne mesure pas C, au moins D, C, seront commensurables: car veu que les grandeurs A, B, C sont commensurables, quelque commune mesure d'icelles mesurera, D plus grande mesure d'icelles A & B, par le Corol. de la 3. prop. 10. mais cette mesme mesure-



là mesurera aussi C: donc D & C, seront commensurables. Soit donc trouvée par la susdite 3. proposition 10. E plus grande commune mesure d'icelles D, C: & icelle E sera la plus grande mesure des grandeurs données A, B, C. Car d'autant que E mesure D & C; & D mesure A & B par la 2. com. sent. E mesurera aussi icelles A & B. Mais elle mesure aussi C. Donc E est mesure commune d'icelles A, B, C. Que si on nie qu'elle soit la plus grande commune mesure, qu'on en trouve une autre plus grande, sçavoir F, s'il est possible. Donc puis que F mesure A & B, par le susdit Coroll. de la 3. prop. 10. elle mesurera aussi leur plus grandé commune mesure D. Mais elle mesure aussi C: donc F mesurant D & C, mesurera pareillement E plus grande mesure d'icelles: ce qui est absurde. Donc une plus grande grandeur que E ne mesure pas les grandeurs A, B, C: Et partant E est la plus grande commune mesure d'icelles. Par-

quoy estans données trois grandeurs commensurables, nous avons trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il falloit faire,

C O R O L L A I R E.

Par cecy est evident que si une grandeur mesure trois grandeurs, qu'elle mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté démontré que si F mesure A, B, C , qu'elle mesurera pareillement E plus grande commune mesure d'icelles.

Par semblable maniere, estans données plus de trois grandeurs commensurables, nous trouverons leur plus grande commune mesure : & ce mesme Corollaire aura aussi lieu.

T H E O R. 3. P R O P. V.

Les grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.

Soient deux grandeurs commensurables A & B . Je dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.

Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront une commune mesure, laquelle soit C : & autant de fois

que C mesure

A , que l'unité

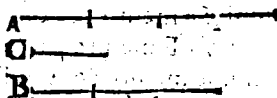
F mesure le

nombre D ; &

autant de fois

que C mesure B , que l'unité mesure aussi le nom-

bre E . Or puis que la grandeur C & l'unité F ,



$D. 4.$

$F. 1.$

$E. 3.$

mesurent également la grandeur A & le nombre D ; la grandeur A contiendra la grandeur C autant de fois que le nombre D contient l'unité F ; & partant comme A est à C, ainsi le nombre D est à l'unité F. Mais puis que la grandeur C mesure la grandeur B, & l'unité F le nombre E, également ; comme C est à B, ainsi l'unité F est au nombre E. Donc en raison égale, A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. p. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont l'une à l'autre comme nombre à nombre, elles seront commensurables.

Soient deux grandeurs A & B, qui soient l'une à l'autre comme le nombre C est au nombre D : Je dis qu'elles seront commensurables.

Car la grandeur A soit entendue être divisée en autant de parties égales qu'il y a d'unités au nombre C, & l'une d'icelles parties soit égale à E : donc E est à A, ainsi que l'unité F est au nombre C, Mais par l'hypothèse A est à B, comme le nombre C est au nombre D : donc en raison égale, E sera à B, comme l'unité F est à D, par la 22. prop. 5. Mais l'unité F mesure le nombre D : donc aussi E mesure B : mais E mesure pareillement A. Donc E est commune mesure de A & B : & partant par la première deff, de ce livre A & B sont commensurables. Parquoy si deux grandeurs sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

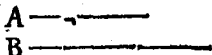
Par cecy est evident qu'estant proposez deux nombres comme $C \& D$, & une ligne droite comme A , qu'il sera aisé de trouver une autre ligne droite, à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D : Car divisant A en autant de parties egales qu'il y a d'unitéz au nōbre C , & on prend une ligne droite B , contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'unitéz au nombre D ; alors A sera à B , comme le nombre C au nombre D : ainsi qu'il est manifeste, par ce qui a esté dmecontré en cette prop.

De cecy apert dereehof, par quelle maniere on peut, étans donnez deux nombres, & une ligne droite, trouver une autre ligne droite, le quarré de laquelle soit au quarré de la dānée comme nombre à nombre. Car s'il faut trouver une ligne droite, au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A , comme le nombre C est au nombre D : Il faudra trouver ainsi que, dessus la ligne B , à laquelle soit A comme le nombre C est au nombre D : puis soit trouvée par la 13. prop. 6. la moyenne prop. entre icelles $A \& B$: & le quarré de A sera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D . Car le quarré de A sera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B : & partant comme le nombre C au nombre D .

T H E O R. 5. P R O P. VII.

Les grandeurs incommensurables, ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre.

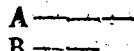
Soient deux grandeurs incommensurables $A \& B$: Je dis qu'elles ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre.



Ce qui est manifeste : car si elles estoient entr'elles comme nombre à nombre, elles seroient commensurables par la 6. prop. 10. ce qui est contre l'hypothese, ayans esté posées incommensurables. Parquoy les grâdeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demontret.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, elles seront incommensurables.

Que les grandeurs A & B ne  soient entr'elles comme nombre à nombre : Je dis qu'elles sont incommensurables.

Ce qui est evident : car si elles estoient commensurables, il faudroit qu'elles fussent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui est contre nostre hypothese, puis qu'elles ont esté posées n'estre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy si deux grandeurs ne sont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarez décrits sur lignes droites commensurables en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarez qui sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez commensurables en longitude. Mais les quarez décrits de

lignes droites incommensurables en longueur, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Et les quarez n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longueur.

Soient les lignes droites A & B commensurables en longueur: Je dis que leurs quarez sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Car puis que les lignes A & B sont commensurables en longueur, elles se-



C. 4. D 3.

E. 16. F 9.

ront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D: & les quarez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarez de A & B sont en raison doublée de leurs costez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarez E & F sont aussi en raison doublée de leurs costez, par la 11. prop. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F: C'est à sçavoir en raison doublée des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: Je dis que les lignes A & B seront

commensurables en longueur. Car par la 20. pr. 6. & 11. prop. 8. la raison des quarrés aux quarrés, est la raison doublée de leurs côtés: & partant comme le côté A au côté B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublées sont égales. Donc par la 6. prop. 10. A & B sont commensurables en longueur.

¶ Pour la troisième partie soient les lignes droites A & B incommensurables en longueur. Je dis que leurs quarrés ne sont entr'eux, comme nombre carré à nombre carré. Car si les quarrés de A & B étoient ainsi que nombre carré à nombre carré, icelles A & B seroient commensurables en longueur contre l'hypothèse.

Finalement, les quarrés de A & B n'étant entr'eux comme nombre carré à nombre carré. Je dis qu'elles sont incommensurables en longueur. Car autrement leurs quarrés seroient (par la première partie) comme nombre carré à nombre carré, contre l'hypothèse. Parquoy les quarrés décrits de lignes droites commensurables en longueur, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste par les choses cy-dessus démontrées, que les lignes commensurables en longueur, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur. Que les incommensurables en longueur, ne le sont pas pourtant en puissance: & que celles incommensurables en puissance, le sont aussi en longueur.

Car d'autant que les quarrés d'icelles lignes commens. en longueur, sont entr'eux comme nombre carré à nombre carré, c'est à dire simplement com-

me nombre à nombre : iceux quarrez, seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes commensurables en longueur le sont aussi en puissance.

Puis apres, veu que les lignes dõt les quarrez ne sont entr'eux comme nombre carré à nombre carré, ains seulement comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrez sont commensurables par la 6. prop. 10.) & non en longueur, comme il a été demontré : il apert que les lignes commensurables en puissance ne le sont pas pourtant en longueur, sinon que les quarrez d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre carré à nombre carré.

Derechef, puis que les lignes desquelles les quarrez ne sont entr'eux comme nombre carré à nombre carré, mais toutes fois comme nombre à nombre sont incommensurables en longueur, & commensurables en puissance: il apert que les lignes incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soient aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrez sont incommens. par la 8. prop. 10.

Finalemēt est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longueur: car si elles estoient commens. en longit. elles le seroient aussi en puissance, comme apert par la premiere partie de ce corollaire: ce qui est contre l'hypothese.

S C H O L I E.

Il est à noter qu'ès deux premieres parties de cette proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourveu qu'elles soient commensurables en longueur; comme si les quarrez de A & B étoient 12 & 3, leurs costez seroient $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, qui sont

inexplicables par nombres, toutesfois commens. Car par la 20. prop. 6, 12 seroit à 3 en raison doublée de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{3}$. Mais 12 est quadruple de 3: Ainsi le costé A sera double du costé B, par la 10. def. 9. Car la double raison doublée est quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

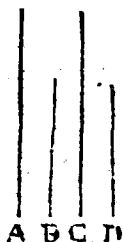
Si quatre grandeurs sont proportionnelles, & que la premiere soit commensurable à la seconde, la troisieme, sera aussi commensurable à la quatrieme. Que si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisieme sera aussi incommens. à la quatrieme.

Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D: & soit A₁, commensurable à B₂. Je dis que C₃ sera aussi commens. à D₄.

Car A estant commensurable à B, elles seront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. pr. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D; Partant C est à D, comme nombre à nombre: & par consequent commensurable par la 6. prop. 10.

Que si A estoit incommens. à B. Je dis que C seroit aussi incommensurable à D: Car A & B ne seroient pas comme nombre à nombre par la 7. pr. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nombre: & par consequent incommensurable par la 8. prop. 10.

Si



Si donc quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

L E M M E.

Trouver deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A 16. B 20. ré A , & un autre non quarré B . Je dis qu'iceux nombres A & B sont plans dissemblables. Car s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. pr. 8. & partant A estant nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24. pr. 8. contre l'hipothese. Donc A & B , ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

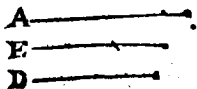
PROBL. 3. PROP. XI.

Trouver deux lignes droites incommensurables à une ligne rationnelle proposée, sçavoir une en longueur seulement, & l'autre en longueur & puissance.

Soit la ligne rationnelle proposée A , à laquelle il faut trouver deux autres lignes incommensurables, l'une seulement en longueur, & l'autre en longueur & puissance.

Soient trouvez par le lemme précédent deux nombres B , & C , qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: Item par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouvée la ligne D , de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A , comme le nombre C est au nombre B . Or d'autant qu'iceuy quatrez de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensurables entr'eux par

la 6. prop. 10. Mais n'étans pas comme nombre
quarré à nombre quarré, ils
n'auront pas les côtez A & D
commens. en longitude, par
la 9. prop. 10. Donc les li-
gnes droites A & D sont
commensurables en puissance seulement : la ligne
D est donc la premiere requise.



Maintenant soit trouvée la ligne E moyenne pr.
entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E sera la
seconde ligne demandée : car puis que par le co-
rol. de la 20. prop. 6. le quarré de A est au quarré
de E comme A est à D, & icelles A & D sont in-
commensurables en longitude, comme il a été de-
montré : le quarré de A sera aussi incommens. au
quarré de E, par la 10. prop. 10. Parquoy les lignes
A & E sont incommens. en puissance, & par le
corol. de la 9. prop. 10. elles sont aussi incommens.
en longitude. Nous avons donc trouvé deux lignes
droites incommensurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

*La ligne A soit 5 : donc la ligne D sera V 20 la-
quelle il apert estre incommensurable en longitude à
A, mais commensurable en puissance. Mais la ligne
E estant moyenne prop. entre A 5, & DV 20, elle
sera VV 500, qui est incommens. tant en longit. que
puissance à A 5.*

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à une au-
tre, sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commensu-
rables chacune à la grandeur C : Je dis qu'elles

sont commensurables entr'elles.

Car puis que A & C sont commensur. icelles seront comme nombre à nombre par la 5. prop. 8.

soit comme le nôbre D

au nombre E. Derechef

puis que C & B sont

commens. C sera à B,

comme nombre à nom-

bre, & soit comme le

nombre F au nombre

G. Soient pris par la 4.

prop. 8. les trois nom-

bres, H, I, K, les plus

petits continuellement

proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à

G : tellement que H soit à I comme D à E, e'est à

dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à

dire comme C à B. Donc puis que A est à C, com-

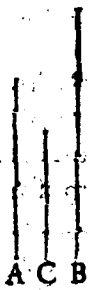
me H à I, & C à B, comme I à K, en raison egale,

A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nom-

bre à nombre : & partant A & B sont commens.

par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commensu-

rables à une autre, &c. Ce qu'il falloit demonst.



D 10, E 8.

F 2, G 3.

H 5, I 4, K 6.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'une est commensurable à une troisième, & l'autre incommensurable, icelles grandeurs seront incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B,

desquelles A soit commens. à C; &

B incommens. à la même C. Je dis

que A & B sont incommens. en-

A —————

C —————

B —————

tr'elles. Car si B étoit commens. à A, lequel A est posé aussi commens. à C, par la 12. pr. 10. B & C seroient commens. contre l'hypothese. Donc A & B ne sont commens. Parquoy si de deux grandeurs; &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commens. l'une est incommens. à une tierce grandeur, aussi sera l'autre à la mesme.

Soient deux grandeurs commensurables A & B, & que A soit incommensurable à la tierce C: Je dis que B & C sont aussi incommensurables.

Autrement, si B est commensurable à C, elle sera aussi commensurable à A, A. B C par la 12. prop. 10. contre nostre hypothese: donc B est incommensurable à C: Parquoy si de deux grandeurs commensurables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

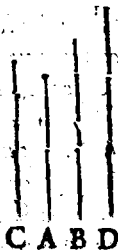
SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de cette prop. le theoreme suivant, utile aux choses démontrées en ce livre.

Les grandeurs commensurables à des incommensurables, sont aussi incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B incommensurables, auxquelles C & D soient commensurables, sçavoir est C à A, & D à B. Je dis que C & D sont incommensurables entr'elles. Car puis que A & C sont posées commensurables, & A incommensurable à B, l'autre

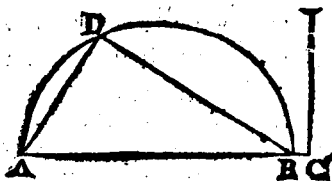
sera aussi incommensurable à A par la 14. prop. 10. De rechef, puis que D & B sont posées commensurables, & B a esté démontrée incommensurable à C; D sera aussi incommensurable à la mesme C par la 14. prop. 10. Ce qui estoit proposé.



L E M M E.

Estant données deux lignes droites inégales, trouver combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient données les deux lignes droites AB & C, desquelles AB est la plus grande: & il faut trouver combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit décrit sur AB le demy cercle ADB, & dans iceluy soit



accommodée AD égale à C, par la 1. prop. 4. & soit menée DB. Je dis que AB peut plus que C du carré de BD. Car d'autant que l'angle D est au demy cercle, il est droit par la 31. pr. 3. & par la 47. pr. 1. le carré de AB, sera égal aux carrés de AD, BD: & partant AB pourra plus que AD, c'est à dire que C, du carré de BD. Ce qui estoit proposé.

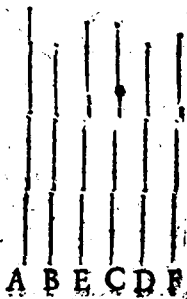
Semblablement estans données deux lignes droites, en trouver une autre pouvant icelles.

Soient données les deux lignes droites AD, BD : & faut trouver une ligne droite qui puisse icelles. Soient posées icelles AD, BD à angle droit D , & tiré AB . Il est evident qu'icelles AB peut les deux AD & BD , puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB , est egal aux deux quarréz de AD, BD ,

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles, & la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur ; aussi la troisième pourra plus que la quatrième du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longueur. Que si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur : aussi la troisième pourra plus que la quatrième du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longueur.

Soient 4. lignes droites proportionnelles A, B, C, D , & que A puisse plus que B du quarré de E ; & C plus que D du quarré de F . Je dis que comme A sera commensurable ou incommensurable en longueur à E , ainsi C sera commensurable ou incommensurable en longueur à F ,



Car puis que A, B, C, D, sont proportionnelles, comme le carré de A sera au carré de B, ainsi le carré de C sera au carré de D, par la 22. prop. 6. Mais le carré de A est égal aux carrés de B, E, par l'hypothèse, & le carré de C aux carrés de D, F: donc aussi les carrés de B, E, seront au carré de B, comme les carrés de D, F, au carré de D; & en divisant, comme le carré de E sera au carré de B, ainsi le carré de F au carré de D; & par la 22. pr. comme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F sera à la ligne D; & en changeant, comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F; en raison égale, comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. pr. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parquoy si quatre lignes droites sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commensurables sont conjointes, la composée sera commensurable à chacune de ses parties: Et si la composée est commensurable à une de ses parties, icelles seront commensurables entr'elles.

Soient jointes deux grandeurs commensur. A B & B C; Je dis que la composée A C, est aussi commens. à chacune d'icelles A B, & B C.

Car puis que A B & B C sont commensurables, elles auront une commune

mesure, laquelle soit D. Donc puis que D mesure AB & BC, elle mesurera aussi la toute AC, par la 1. c. sent. Partant la toute AC est commens. à ses parties.

Pour la seconde partie. Que la toute AC soit commens. à une de ses parties, sçavoir à AB: Je dis qu'icelles parties AB, BC seront commensurables entr'elles. Car puis que AC & AB sont commensurables, elles auront une commune mesure, comme D, laquelle mesurant la toute AC & la retranchée AB, elle mesurera aussi le reste BC par la 3. commune sent. Partant AB & BC seront commensurables entr'elles, puis qu'elles ont une commune mesure D. Parquoy si deux grandeurs commensurables, &c. Ce qu'il falloit prouver,

C O R O L L A I R E.

De cecy résulte que si une grandeur composée de deux, est commensurable à l'une d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC: Car par la seconde partie de cette prop. AB, BC sont commensurables: donc par la première partie AC sera commensurable à chaque partie, AB, BC,

S C H O L I E.

Soit AB $\vee$ 18, & BC $\vee$ 8, lesquelles sont commens. La composée AC sera $\vee$ 50, laquelle est commens. tant à $\vee$ 18, que à $\vee$ 8. Car $\vee$ 50 est à $\vee$ 18, comme 5 à 3: & à $\vee$ 8 comme 5 à 2.

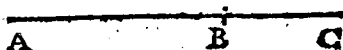
THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conjoint deux grandeurs incommensurables, la composée sera incommensurable à chacune de ses parties : Et si la composée est incommensurable à l'une de ses parties, icelles parties seront incommensurables entr'elles.

Soient conjointes deux grandeurs incommens. AB & BC : Je dis que la toute AC est incommens. à une chacune de ses parties AB & BC.

Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le seroit aussi à

BC : car la commune mesure qui mesurerait AC &



le retranché AB, mesurerait aussi le reste BC, par la 3. c. sent. Et partant AB & BC seroient commens. (ce qui est contre l'hypothese.) Donc AC & AB sont incommens. Il s'ensuivra le mesme inconvenient si on nie que AC & BC soient incommensurables.

Pour la seconde partie : Je dis que si AC & BC, sont incommens. que AB & BC seront aussi incommens. Autrement si elles estoient commensurables : La toute AC, seroit aussi commensurable à sa partie BC par la 16. propos. 10. contre nostre hypothese. Donc AB & BC sont incommensurables. Par mesme argument nous démontrerons que si AC & AB sont incommens. que AB & BC sont aussi incommens. Parquoy si on conjoint

deux grandeurs incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE

Il resulte de ces choses, que si une grandeur composée de deux, est incommensurable à l'une d'icelles, qu'elles le sera aussi à l'autre. Comme si AC composée de AB & BC est incommensurable à AB , elle le sera aussi à BC . Car si AC estoit commens. à icelle BC , elle le seroit aussi à AB , par le coroll. de la precedente prop. ce qui est contre l'hypothese. Donc AC & BC ne sont commensurables, mais incommensurables.

SCHOLIE.

Soit AB 8, & BC $\sqrt{28}$, lesquelles sont incommensurables. La composée AC sera $8 + \sqrt{28}$ incommensurable à chacune d'icelles AB 8, & BC $\sqrt{28}$.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droites inegales, & à la plus grande on applique un rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, defaillant d'une figure quarrée, & que le rectangle divise icelle plus grãde ligne en partie cõmens. en longit. la plus grãde ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera commensurable en longitude; Et si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longitude, étant appliqué un rectangle sur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant

d'une figure quarrée ; le rectangle divisera icelle plus grande ligne en parties commensurables en longueur.

Soient deux lignes inegales AB & C , & par la 28. prop. 6. sur la plus grande AB soit appliqué un rectangle égal au quart du quarré de C , défail-
lant d'une figure quarrée, c'est à dire d'une ligne égale à son autre côté. Et soit iceluy rectangle contenu sous AD & DB commensurables en longueur. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longueur.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la ligne AB coupée en deux également en E , & soit faite EF égale à ED : Il est évident que AF sera égale à DB , puis que les routes AE , ED sont égales, & aussi les retranchées EF , ED . Maintenant, puis que AB est coupée en deux également en E , & en deux inégalement en D , par la 3. pr. 2. le rectangle de AD & DB avec le quarré de ED , seront égaux au quarré de BE , lequel n'étant



par l'hypothese que le quart du quarré de AB quatre fois le rectangle de AD & DB , & quatre fois le quarré de ED , sont égaux au quarré de AB . Mais quatre fois le rectangle de AD , & DB valent le quarré de C , d'autant que par l'hypothese le rectangle de AD & DB est le quart du quarré de C . Donc le quarré de AB est plus grand que le quarré de C , de quatre fois le quarré de ED , ou du seul de FD égal à iceux par le Schol. de la 4. pr. 2. puisque FD est double de ED . Davantage, puis

que AD & DB sont posées commens. en longueur, la toute AB sera aussi commens. en longueur à sa partie DB par la 16. pr. 10. Et partant à son égale AF , & à toutes les deux jointes en une : & par conséquent au reste de la ligne FD par la même 16. pr. 10. Donc la ligne droite AB peut plus que C , du carré de FD , qui luy est commens. en longueur.

Pour la seconde partie, que AB puisse plus que C du carré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur, & qu'à icelle AB soit appliqué un rectangle égal au quart du carré de C , & détaillant d'une figure carrée, lequel rectangle divise AB en parties AD, DB : Je dis qu'icelles parties AD & DB seront aussi commens. en longueur. Car demeurant la même construction que dessus, il sera démontré comme là que AB peut plus que C du carré de FD . Mais AB a été posée pouvoir plus que C du carré d'une ligne qui luy est commens. en longueur : & partant AB sera commens. en longueur à icelle FD . Et puis que AB composée de FD, AF , & DB comme d'une, est commensurable en longueur à la partie FD ; la même AB sera aussi commensurable en longueur à l'autre partie composée de AF, DB par le coroll. de la 16. pr. 10. Mais icelles composées de AF, DB , est aussi commens. en longueur à DB , puis qu'elle est double d'icelle: donc puis que chacune d'icelles AB, DB est commens. en longit. à la composée de AF, DB ; aussi AB, DB seront commens. entr'elles en longit. par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB composée de AD, DB est commens. en longit. à icelle DB ; aussi, icelles AD, DB seront commens. en longit. entr'elles par la 16. pr. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droites inégales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

L'aplication mentionnée au commencement de la demonst. cy-dessus se fera bien plus brièvement par le 60. de nos Problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C , moyenne.

Quant à l'aplication des nombres soit AB 30. & C 24. donc les segmens AD & DB , seront 24 : & 6. desquels le produit, c'est à dire le rectangle, est 144. qui est egal au quart de 576, quarré de C 24. & deffaislant du quarré de DB 6 c'est à dire 36 : & sont icelles parties AD 24. DB 6, commens. en longitude : car l'une est quadruple de l'autre. Ainsi FD , qui peut avec C le quarré de AB , sera 18 : car le quarré AB est 900. & celuy de C 576 ; & partant reste pour le quarré de FD , 324, dont la racine quarrée est 18, commensurable en longitude à AB . L'autre partie sera aussi evidente par l'adaption des nombres cy-dessus.

La proposition suivante sera aussi facilement entendue, si on pose AB 12. & CV 96 : car les segmens AD , DB , seront $6 + \sqrt{12}$. & $6 - \sqrt{12}$: & FD $\sqrt{48}$, qui est à 12 incommensurable en longitude, &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y-a deux lignes droites inegales, & à la plus grande on applique un rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & deffaislant d'une figure quarrée, & qu'iceluy rectangle divise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude ; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy sera incommensurable en longitude.

Que si la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur, étant appliqué un rectangle sur la plus grande ligne, égale au quart du quarré de la plus petite, & de failant d'une figure quarrée, le rectangle divisera la plus grande ligne en parties incommensurables en longueur.

Soient deux lignes inégales AB & C , & sur la plus grande AB soit appliqué (par la 28. prop. 6.) un rectangle égal au quart du quarré de C , de failant d'une figure quarrée : & soit iceluy rectangle contenu sous AD , DB incommensurables en longueur. Je dis que AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur. Car ayant construit comme en la précédente prop. nous démontrerons semblablement que AB peut plus que C du quarré de FD . Il faut donc démontrer que AB & FD sont incommens. en longit. D'autant que les lignes AD , DB sont posées incommens. en longueur, la route AB sera aussi incommens. en long. à la partie DB par la 17. pr. 10. Mais DB est commensurable en longueur à la composée de AF , DB , veu que cette-cy est double de celle-là: donc puis que ces deux lignes commens. icelle DB est incommens. en longueur à AB ; la composée de AF , DB sera aussi incommens. en



long. à la même AB par la 14. prop. 10. Et d'autant que AB composée de AF, DB comme une, & de FD, est incommens. en longit. à la composée de AF, DB; la même AB sera aussi incommens. en long. à FD, par le corol. de la 17. pr. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy est incommensurable en longueur.

Maintenant, si AB peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est incom. en longueur, & sur icelle AB est appliqué un rectangle égal au quarré du quarré de C & defaillant d'une figure quarrée, lequel rectangle divise AB es parties AD, DB. Je dis qu'icelles AD, DB sont incommens. en long. Car nous demontrerons comme devant (les mêmes choses étans construites) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD sont incommensurables en longueur: & puis que AB est composée de FD, & de AF, DB jointes en une, icelle AB sera aussi incommens. en longueur à la composée de AF, DB par le corol. de la 17. pr. de ce livre. Mais la composée de AF, DB est commensurable en longueur à icelle DB, puis que celle-là est double de cette-cy. Donc puis que AB est incommensurable en longit. à la composée de AF, DB, icelle AB sera aussi incommens. en long. à DB, par la 14. pr. 10. Et partant puis que AB composée de AD, DB est incommens. en long. à DB: icelles AD, DB seront aussi incomm. en long. entr'elles par la 7. pr. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droites inegales, & sur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

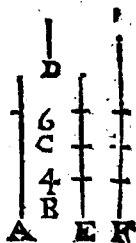
L E M M E.

Puis qu'il a esté démontré que les lignes com-

mensurables en longueur, le sont aussi en puissance, mais que celles commens. en puissance ne le sont pas toujours en longueur : il est manifeste que s'il y a quelque ligne commensurable en longueur à une proposée rationnelle : elle doit être appelée rationnelle & commensurable à icelle, non seulement en longueur, mais aussi en puissance : car les lignes commensurables en longueur le sont toujours aussi en puissance. S'il y a aussi quelque ligne droite commensurable en puissance & longueur à l'exposée rationnelle, elle sera aussi dite rationnelle commensurable en longueur & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commens. en puissance à icelle, mais incommensurable en longueur, elle sera aussi dite rationnelle commensurable à icelle en puissance seulement.

S C H O L I E.

Il apert par ce que dessus, qu'il y a de trois sortes de lignes rationnelles commensurables entr'elles en longueur. Car de deux lignes rationnelles commensurables entr'elles en longueur, ou l'une est égale à l'exposée rationnelle ; & partant l'une & l'autre commensurable en longueur à la rationnelle, ou l'une ny l'autre n'est égale à l'exposée rationnelle. & toutesfois commensurable en longueur à icelle : ou finalement l'une & l'autre est commensurable à l'exposée rationnelle en puissance seulement. Or nous trouverons ces trois genres de lignes rationnelles en cette manière. Soit une rationnelle proposée *A* divisée en quatre parties égales : c'est



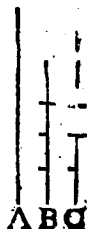
c'est à sçavoir en autant qu'il y a d'unités au nombre B : puis apres estant pris quelque autre nombre C, la ligne D soit une partie de A : & qu'autant de fois que D mesure A, autant de fois elle mesure quelque ligne E : Item autant de fois que l'unité est en C, qu'autant de fois la même D mesure quelque autre ligne F, Donc puis que A & E sont composées de parties égales en nombre, qui sont égales à D, elles seront égales. Derechef, puis que D mesure toutes les trois lignes A, E, F, elles seront commens. en longueur : parquoy E & F sont rationeles commens. en longueur à la rationele A ; mais elles ont été démontrées estre aussi commens. entr'elles en longueur. Nous avons donc trouvé deux rationeles E & F com. en long. tant entr'elles qu'à la rationele exposée A, & desquelles l'une sçavoir E est égale à A.

Or maintenant, que D mesure deux lignes C & E par deux nombres F & G différens de B tellement que l'une & l'autre ligne C & E soit inégale à A. Donc comme dessus les trois lignes A, C, E, ayans D pour mesure commune, seront commensurables en longueur : parquoy C & E sont rationeles commensurable en longueur à la rationele A : mais elles le sont aussi entr'elles. Nous avons donc trouvé deux rationeles C & E commensurable en longueur, tant entr'elles qu'à la rationele proposée A :



l'une ny l'autre desquelles n'est egale : icelle *A*.

Finallement par la 11. prop. 10. à l'exposée rationele *A* soit trouvée la ligne *B* incommensurable en longueur seulement, laquelle soit coupée en tant de parties egales qu'on voudra, & soit prise *C*, composée de quelconque nombre d'icelles parties de *B* : & icelles *B* & *C* seront commensurable en longueur. Je dis qu'elles sont aussi commensurable en puissance seulement à l'exposée rationele *A*. Car puis que *A* & *B* sont commensurable en puissance ; le quarré de *A* sera com. au quarré de *B*, mais au même quarré de *B* est aussi commens. le quarré de *C*, pource que *B*, *C* estans com. en longueur, elles le seront aussi en puissance. Donc par la 12. prop. 10. les quarrés de *A* & *C*, sont pareillement commensurable entr'eux. Parquoy *C* est commensurable en puissance à icelle *A*. Et pource que des deux lignes *B* & *C* commensurable en longueur, *B* est incommensurable en longueur à *A* : par la 14. prop. 10. *C* sera aussi incommensurable en longueur à la même *A*. Donc *C* est commensurable à *A* seulement en puissance. Et pource que *B* & *C*, commensurables en puissance à l'exposée rationele *A*, sont rationeles ; elles seront deux rationeles commensurable en longueur entr'elles, mais en puissance seulement à l'exposée rationele *A* : elles sont donc les deux lignes requises à trouver.



Que si quelqu'un desire trouver tant qu'on voudra de lignes rationeles commensurables en longueur entr'elles, cela se fera ainsi qu'il ensuit : Soit pris quelconque mesure *D*, (regardez la premiere figure de cette page) & soient composées autant qu'on voudra de

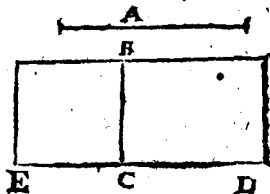
lignes A, C, E , d'autant de parties égales à icelle D ; qu'il y a d'unitéz en autant de nombres inégaux B, F, G ; car les lignes A, C, E , ayans la commune mesure D , seront commensurables en longueur.

Or il est aussi évident que toutes lignes rationelles, sont commensurables non seulement à une exposée rationelle, mais aussi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationelles sont telles qui sont commensurables à l'exposée rationelle, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement, & que par la 12. prop. 10. les commensurables à une même, sont aussi commensurable entr'elles; il est manifeste que toutes lignes rationelles, sont commens. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationelles commensurables en longueur selon quelqu'une des manieres cy-devant dites, est rationel.

Soit une exposée rationelle A , & le rectangle BD compris sous BC, CD rationelles commensurables en longueur, selon quelqu'une des manieres cy-dessus dites: Je dis qu'iceluy rectangle est rationel.



Car si sur l'une d'icelles BC, CD , sçavoir BC ,

on fait le quarré BE, il sera commensurable au quarré de la rationele A par la 3. def. 10. puis que BC est rationele commensurable à la rationele exposée A, ou en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Et puis que BC, ou CE, CD sont commensurable en longitude; (car BC, CD ont été posées rationeles commensurables en longitude entr'elles) & par la 1. prop. 6. comme EC est à CD, ainsi EB à BD, par la 10. proposition 10. EB, BD seront aussi commensurable, tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD sont commensurables au quarré EB; & partant commensurable entr'eux par la 12. prop. 10. Mais le quarré de A A est rationel par la 8. d. 10. Donc par la 9. d. 10 le rectangle BD sera aussi rationel: Parquoy le rectangle compris de deux ligne rationeles, &c. Ce qu'il falloit demont er.

S C H O L I E.

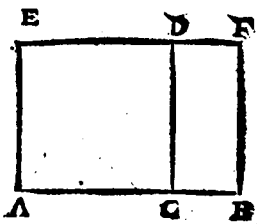
• Soit BC 3 & CD 4 : donc le rectangle BD sera 12
 Derechef soit BC 3 & CD 12 : Le rect. BD sera
 36. c'est à dire 6. Et derechef si BC est 8, &
 CD 18 : Le rectangle BD sera 144, c'est à dire
 12. Par ainsi iceluy rectangle est rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si un rectangle rationel a l'un des côtez rationel, il y aura aussi l'autre côté rationel: & iceux côtez seront entr'eux commensurables en longitude.

Soit le rectangle rationel DB ayant le côté CD rationel: Je dis que BC sera aussi rationel commensurables en longitude à CD,

Car sur DC, soit fait le quarré AD, lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle est au quarré, ainsi CB est à CA par la 1. prop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationaux, & partant commensurables.



Donc par la 10. prop. 10. CB & CA, ou CD son egale, seront rationeles & commensurables en longueur. Parquoy si un rectangle rationel à l'un des côtez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

S C H O L E.

Soit le rectangle DBG, & la ligne CDV₃: BC sera donc V₁₂, qui est commens. en longueur à V₃: Car elle est double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droite CDV₈, l'autre costé BC sera V₁₈, qui est commens. en longueur à CDV₈. Car si on divise V₁₈ par V₈, proviendra V_{2 1/2} c'est à dire V_{5/2} qui est 3/2: & partant V₁₈ est à V₈, comme 3 à 2, c'est à dire comme nombre à nombre; & par consequent commens. en longueur.

L E M M E.

Trouver deux lignes droites rationeles commens. en puissance seulement.

Soit trouvée par la 11^p. 10. quelque ligne droite incommens. en long. seulement à une ligne droite rationele proposée, & icelles seront les requises. car puis qu'elles sont commens. en puissance seulement par la construction elles seront aussi rationeles par la 6. definition 10.

Que si à la ligne trouvée, on en trouve encore une an-

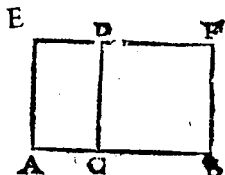
tre, moind. ou plus grande que la proposée rationnelle, il est manifeste par la 12. p. 10. que toutes les trois seront com. entr'elles en puissance seul. & partant rationnelles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationnelles commensurable en puissance seulement, est irrationnel: & la ligne droite qui peut iceluy est irrationnelle. Soit icelle apellée Mediale.

Soit le rectangle AD, compris de deux lignes rationnelles DC & CA commensurables en puissance seulement. Je dis que le rectangle est irrationnel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationnelle, qui doit être apellée Mediale.

Car si sur la rationnelle CD on décrit le quarré DB, il fera rationnel, & fera au rectangle AD, comme BC ou CD son egale, est à CA, par la 1. prop. 6. Mais DC & CA



sont incommensurable en longueur: donc par la 10. p. 10. le quarré BD, & le rectangle AD seront incommensurable. Or le quarré est rationnel: donc par la 10. definition 10. le rectangle sera irrationnel; & par la 11. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationnelle: & soit icelle ligne apellée Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationnelles DC, CA commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationnelles par la 17. prop. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droites rationnelles

commensurables, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Pour donc facilement definir la ligne Mediale, nous dirons icelle estre une ligne irrationnelle, moyenne proportionnelle entre deux lignes rationnelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut un rectangle contenu sous deux lignes rationnelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne Mediale, ou le rectangle irrationnel qu'elle peut, est aussi nommé Medial, pour ce qu'il est moyen prop. entre les quarrés d'icelles lignes rationnelles commensurable entr'elles en puissance seulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle Medial soit toujours contenu sous deux lignes droites rationnelles commensurables en puissance seulement, tel qu'est le Medial CF: car il en avient quelquesfois autrement, comme se verra cy apres.

La ligne DC soit 2, & BC 8. Le rectangle BD sera $\sqrt{32}$, qui est irrationnel; & sera dit Medial, mais la ligne pouvant iceluy est $\sqrt{\sqrt{32}}$, laquelle on appelle Mediale.

THEOR. 20. PROP. XXIII.

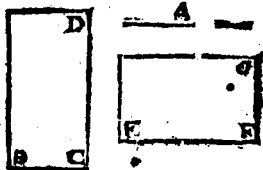
Le quarré d'une ligne mediale appliqué sur une ligne rationnelle fait l'autre côté rationnel commensurable en puissance seulement à la ligne à laquelle se fait l'application.

Auparavant que venir à ce qui est icy proposé, est à noter que pour apliquer sur une ligne rationelle un rectangle egal au quarré d'une ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. pr. Il faut en premier lieu poser quelconque ligne rationelle, en second lieu la mediale, & chercher la tierce proportionelle, laquelle sera l'autre costé du rectangle: car par la 17. proposition 6, le quarré de la moyenne est egal au rectangle des extrêmes.

Venons maintenant à la demonstration de la prop.

Soit la mediale A, le quarré de laquelle soit appliqué sur la ligne rationelle BC, faisant le rectangle BD; Je dis que BC & CD sont rationelles commens. en puissance seulement.

Car A étant mediale, elle peut un rectangle compris de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dite mediale: Soit donc iceluy rectangle EG,



contenu sous les rationelles EF, FG commensurables en puissance seulement. Et pour ce que A, par l'hypothese peut aussi le rectangle BD: Iceux rectangles BD, EG seront egaux, & par la 14. prop. 6. ils auront les côtez reciproques, sçavoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. pr. 6. les quarrés d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle est commens. au quarré de EF, aussi ligne rationelle: donc par la 10. proposition 10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD; & partant les lignes FG,

CD seroient commensurable au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel; & par consequent les lignes CB & CD seront rationelles. Or qu'icelles BC & CD soient commensurables en puissance seulement, il est evident parce qui a été démontré à la 21. prop. 10. Car si elles étoient commensurables en longueur, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'avons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD sont incommensurables en longueur. Parquoy le quarré d'une ligne mediale appliqué sur une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

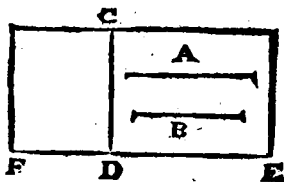
S C H O L I E.

Soit le quarré de AV 40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique V 40, l'autre costé CD sera V 10. qui est incommens. en longueur à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est V 5, CD sera V 8. aussi commens. en puissance seulement. Mais si la mediale A étoit VV 35, & BC V 5: le quarré de A seroit V 35: & CD V 7, commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Une ligne droite commensurable à une ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit commens. la ligne droite B. Je dis qu'icelle B est aussi mediale.



Car soit proposée la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la même rationelle CD soit

appliqué le rectangle CF égal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationelle CD, l'autre côté DE est rationel communurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B étans communurables, leurs quarréz (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi communurables. Mais par la 1. prop. 6 comme CE est à CF, ainsi la ligne droite ED est à la ligne droite DF : Donc par la 10. prop. 10. ED, DF, seront communurable en longueur. Mais la ligne ED est rationelle, & incommunurable en longueur à la ligne CD : donc aussi DF est rationelle & incommunurable en longueur à la même CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront communurables en puissance seulement, & par la 22. prop. 10. le rectangle CF compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale : Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E

De cecy resulte que toute figure communurable à une figure mediale, est aussi mediale, d'autant que les quarréz egaux à icelles figures seront aussi communurables, & par consequent communurables les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'une d'icelles estant mediale, l'autre qui luy sera communurable sera aussi mediale par cette proposition.

S C H O L I E.

Soit AVV_{200} , BVV_{128} , CD_4 . Donc DE sera $V_{12\frac{1}{2}}$ & DFV_8 , communurables entr'elles : car elles

sont comme 3 : 4 ; & DF est commensurable en puissance seulement à CD ; & par conséquent le rectangle CF , qui est $\sqrt{128}$, est medial & la ligne BV $\sqrt{128}$, qui peut iceluy , aussi mediale.

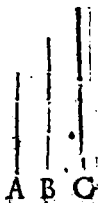
L E M M E 1.

Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. proposition de ce livre , nous le dirons aussi des mediales : sçavoir est que les lignes droites commensurables en longueur à une mediale : est dite mediale , & commensurable à icelle , non seulement en longueur , mais aussi en puissance. Car universellement les lignes droites commens. en longueur le sont aussi en puissance. Et s'il y a quelque ligne commensurable en puissance & longueur à une mediale , elle sera pareillement dite mediale ; & à icelle commensurable en longueur & puissance. Que si derechef il y a quelque ligne commensurable en puissance à une mediale , mais incommensurable en longueur , elle sera aussi dite mediale commensurable à icelle en puissance seulement.

L E M M E 2.

Trouver deux lignes mediales commensurables en longueur : Item deux commensurables en puissance seulement.

Soient trouvées les deux lignes A & B commensurable à la mediale C , c'est à sçavoir A en longueur & B en puissance seulement : & chacune d'icelles A & B seront aussi mediales par la 24. proposition 10. Veu donc que A & C sont commensurable en longueur , & B , C en puissance seulement , est manifeste ce qui estoit proposé.



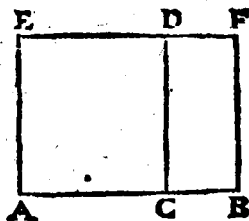
Or il est à noter qu'encore que toute ligne droite commensurable à une mediale, soit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'est pas commensurable à quelque mediale que ce soit. Car deux mediales se peuvent donner incommensurables en longueur & puissance, comme aparoitra par la 36. proposition de ce livre, où nous enseignerons aussi à trouver deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en longueur, est aussi medial.

Soit le rectangle DB, compris de deux mediales^s commens. en longueur DC & BC: Je dis qu'il est medial.

Car si sur la ligne DC on décrit le carré DA, il sera medial, étant décrit sur une ligne mediale: & par la 1. prop. 6. comme AC est à CB, ainsi AD est à DB: mais CD, ou CA son égale, est commensurable en longueur



à BC: Partant par la 10. prop. 10. le carré medial AD, sera commensurable au rectangle DB: & par le corollaire de la 24. prop. 10. iceluy rectangle sera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demon-

Si les mediales DC, CB commens. en longitude sont YY_2 & YY_3 : le rectangle d'icelles, sçavoir DB sera YY_6 , c'est à dire Y_8 , qui est medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, est rationel, ou medial.

Soient les deux mediales commens. en puissance seulement AB & BC, comprenant le rectangle AC. Je dis qu'iceluy rectangle est rationel ou medial.

Qu'ainsi ne soit : Sur AB & BC soient décrits les quarez AD & CE, lesquels étans faits sur lignes mediales seront mediaux. Maintenant soit proposée la ligne rationelle FG, & sur icelle soient décrits les trois rectangles FH, IK, LM, egaux aux

trois figures

AD, AC, CE,

par la 45. pr.

1. Et d'autant

que les quarez

AD &

CE sont me-

diaux : leurs

egaux recta-

gles FH, LM

seront mediaux : lesquels appliquez sur la rationelle

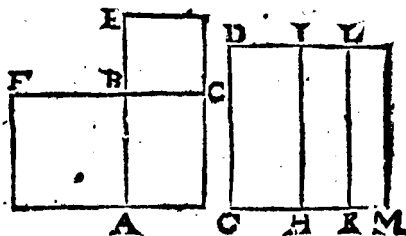
FG, leurs autres côtez GH & KM, seront rationaux

commens. en puissance seulement à FG par la 23. p.

10. Mais d'autant que les quarez AD & CE sont

commens. (étans faits sur lignes com. en puissance)

leurs egaux rectangles FH & LM seront aussi com.



mais par la 1. pr. 6. comme FH est à LM, ainsi la ligne droite GH est à la ligne droite KM : donc par la 10. prop. 10. GH & KM seront commensurable en longueur ; & par la 20. prop. 10. le rectangle de GH & KM sera rationel. Et pource que AB, BD sont égales, & BC, BE aussi égales, comme DB est à BC, ainsi AB à BE. Mais comme DB à BC, ainsi AD à AC par la 1. prop. 6. & comme AB est à BE, ainsi AC à CE : donc comme AD à AC, ainsi AC à CE : & partant AD, AC, CE sont proportionnaux : & par conséquent leurs égaux FH. HL, LM seront aussi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes HG, HK, KM sont entr'elles, comme les rectangles FH, HL, LM : elles seront donc proportionnelles : & par la 17. prop. 6. le rectangle de GH, KM, sera égal au carré de HK. Or le rectangle d'icelles GH, KM a été démontré rationel : donc aussi le carré de HK sera rationel : & par conséquent la ligne HK sera aussi rationelle : & par la 6. 10. elle sera pareillement commensurable à la rationelle proposée FG, ou à son égale HI, soit en longueur & puissance, ou en puissance seulement : Si en longueur, le rectangle HL contenu sous icelles HI, HK, ou le rectangle AC qui luy est égal, sera rationel par la 20 prop. 10. mais si HK est commensurable en puissance seulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC sera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris deux lignes mediales commensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Soient les mediales AB & BC, VV8, & VV2 : (desquelles les puissances sont commensurables, car

elles sont en raison double.) Le rectangle d'icelles AC sera $\sqrt{16}$, c'est à dire 2, qui est rationnel. Mais si AB est $\sqrt{12}$, & BC est $\sqrt{3}$, (desquelles les puissances sont commensurables estans en raison double.) Le rectangle AC sera $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, qui est un medial.

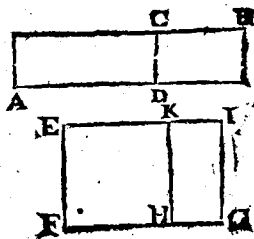
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale n'est pas plus grande qu'une figure mediale, d'une figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excède le medial AC du rectangle DB : je dis que DB n'est pas figure rationelle.

Qu'il ne soit ainsi: Sur une proposée rationelle EF soient faits les rectangles EG & EH , egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI sera egal à DB : partant iceux rectangles EG , EH seront mediaux, lesquels estans appliquez sur la rationelle EF , les autres côtez FG & FH seront lignes rationelles commensurable en puissance seulement à EF par la 23. prop. 10.

Maintenant si on dit que HI est rationel; étant appliqué sur la rationelle KH , l'autre côté GH sera rationel commens. en longueur à KH par la 21. prop. 10. mais FH est incommensurable en longueur à KH , ou EF : donc



par la 14. pr. 10. FH & GH seront incomm. en longueur : mais comme $\square$ GH, ainsi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. prop. 6. (car ils sont de même hauteur.) Partant par la 10. prop. 10 le quarré de GH est incommens. au rectangle de FH & GH. Il sera aussi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. prop. 10. Or le même quarré de GH est communurable au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG étans rationelles) & par la 16. pr. 10. les deux quarréz de FH & GH, ensemble seront communurables au seul quarré de GH : mais iceluy quarré est incommunurable à deux fois le rectangle de FH & GH : donc par la 13. prop. 10. les deux quarréz de FH & GH seront ensemble incommunurable à deux fois le rectangle de FH & GH. Mais iceux deux quarréz, & deux fois le rectangle de FH & GH sont égaux au quarré de FG par la 4. pr. 2. donc par la 17. prop. 10. le quarré de FG sera incommunurable aux deux quarréz de FH & GH ensemble : lesquels étans rationaux, (car ils sont faits sur lignes rationelles) le quarré de FG sera irrationel, par la 10. def. 10. & par conséquent la ligne FG irrationelle : Ce qui est absurde, car nous avons montré qu'elle est rationelle : donc le rectangle HI, ou son égal DB, n'étoit pas rationel. Parquoy une figure mediale n'est pas plus grande, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E,

Soit le rectangle medial $AB \sqrt{10}$, & le rectangle $AC \sqrt{18}$, le rectangle restant DB sera $\sqrt{8}$, qui est medial. Recherchez AB estant $\sqrt{32}$ & $AC \sqrt{10}$; le rectangle DB sera $\sqrt{32} - \sqrt{10}$, qui n'est pas rationel.

PROBL.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouver deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel.

Soient deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement A & B, (trouvées par le lemme qui precede la 22. prop. de ce livre) entre lesquelles (par la 13. prop.) soit trouvée la moyenne proportionelle C; puis (par la 12. prop. 6.) aux trois A, B, C, soit trouvée la quatrième proportionelle D: Je dis que C & D sont les deux mediales demandées.

Car puis que C est moyenne proportion entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 12. prop. 10. est medial) sera egal au quarré de C par la 17. prop. 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, est mediale: Item, puis que comme A à B, ainsi C à D, & que A est commensurable en puissance seulement à B, aussi le sera C à D par la 10. prop. 10. Mais C est ligne mediale: dont D qui luy est commensurable en puissance seulement sera aussi ligne mediale par la 24. prop. 10. Je dis en outre que le rectangle contenu d'icelles mediales C & D est rationel. Car d'autant que comme A est à B, ainsi C à D, en permurtant, comme A à C, ainsi B à D: mais comme A est à C, ainsi C à B. Donc C sera aussi à B, comme B à D par la 11. pr. 3.



parquoy B est moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B. sera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B, ligne rationele, est rationel: donc le rectangle compris de C & D est aussi rationel. Nous avons donc trouvé C & D mediales commens. en puissance seulement qui comprennent un rectangle rationel: Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

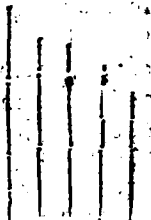
Soit AV 20. & BV 12. donc la moyenne prop. C sera VV 240. & puis que comme A à B, ainsi C à D; D sera VV 86 $\frac{2}{3}$. Or les puissances de VV 240. & VV 86 $\frac{2}{3}$ sont commensurab. car elles sont comme 5 à 2. & le rectangle contenu d'icelles est VV 20736. c'est à dire 12. egal au quarré de V 12. qui est aussi 12: & partant iceluy rectangle de C & D commens. en puissance seulement est rationel.

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouver deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle medial.

Soient trois lignes rationeles commensurables en puissance seulement A, B, C, trouvées comme il est enseigné au lemme qui precede de la 22. prop. 10 & par la 13. prop. 6. entre A & B soit trouvée la moyenne proportionele D:

puis par la 12. pr. 6. soit fait comme B à C, ainsi D à E: Jedis que D & E sont les



A D B C E

deux mediales demandées.

Car en premier lieu, il est evident que D est mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. proposition 6. elle petit le rectangle irrationnel de A & B : mais comme B à C, ainsi D à E, & B est commensurable en puissance seulement à C, aussi par la 10 pr. 10. D sera commensurable en puissance seulement à E : Et par la 24. pr. 10. D étant mediale, E sera aussi mediale commensurable en puissance seulement à D.

Davanrage, ie dis que le rectangle d'icelles deux mediales D & E est aussi medial. Car puis que comme B à C, ainsi D à E, en permutant B sera à D comme C à E : mais B est à D comme D à A ; partant comme D est à A, ainsi C est à E : & par la 16. prop. 6. le rectangle des extrêmes D & E sera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationnelles commens. en puissance seulement, est medial par la 22. propos. 10. Donc par le Corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Parquoy nous avons trouvé deux lignes mediales commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle medial : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Soit A 20, B V 200, & C V 80. Donc la moyenne prop. D, sera V V 80000. Et puis que comme B à C, ainsi D à E ; icelle E sera V V 12800. Or les puissances de D & E, sont commensurables, car elles sont comme 5 à 2. & le rectangle d'icelles est V V 1024000000, c'est à dire V 32000, egal au rectangle de A & C ; qui est V 32000.

Or es choses suivantes nous aurons besoin de ce probleme cy.

Trouver deux nombres plans semblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A, B, C, D , c'est à dire que comme A est à B , ainsi C soit à D . Mais A & B se multiplians entr'eux fassent

A 6.	C 12.
B 4.	D 8.
E 24.	F 96.

E : Item C & D se multiplians fassent F . Donc E & F seront nombres semblables, puis qu'ils ont les costez proportionnaux.

Or d'autant qu'il a esté démontré es 28 & 29 p. 9. que si on multiplie un nombre impair ou pair, par un pair, est produit un nombre pair: mais un impair, si on multiplie un impair par un impair: il aperi par quelle maniere peuvent estre trouvez deux plans semblables l'un & l'autre desquels soit pair ou impair ou un seul pair, & l'autre impair: Car si les costez pris sont nombres pairs, les plans d'iceux seront aussi pairs: mais si les nombres sont impairs, les plans d'iceux seront aussi impairs. Que si les costez de l'un sont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux-là sera impair, mais de ceux-cy pair: Semblablement les plans seront pairs, si chacun a un costé nombre pair, & l'autre impair. &c. LEMME 1.

Trouver deux nombres quarréz, tels que le compqé d'iceux soit aussi nombre quarré.

Soient trouvez par les choses cy-dessus dites deux plans semblables AB & C , chacun desquels soit pair ou impair. Et d'autant que par les 24 & 26 prop. 9. si d'un nombre pair on en oste un pair, ou bien un impair d'un impair, le reste est pair: estant osté BD egal à C de AB , le reste AD sera pair; & iceluy AD estant divisé en deux également en E : Je dis que le nombre fait

de AB en BD (qui est un quarré par la 1. pr. 9.) avec le quarré du nombre ED, fait un quarré. Car puis que le nombre AD est divisé en

deux également en E, &	A.....E.....D.....B
à iceluy est adjointé DB: le	C.....

nombre qui est fait de AB en BD, avec le quarré

du nombre DE, sera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theor. de ceux que nous avons démontré à la 1. p. 9. Parquoy les deux nombres quarez, sçavoir celuy fait de AB en DB, & celuy du nombre DE adjointez ensemble feront un quarré, sçavoir celuy qui sera produit de BE. Ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De ces choses est manifeste que quād AB & C sont semblables, estre trouvez en la même maniere les deux nōbres quarez des nōbres BE, ED, desquels l'excez, sçavoir le nōbre fait de AB en BD, est aussi quarré. Que si les nombres AB & C ne sont pris semblables, l'un & l'autre routefois pair, ou impair serōt trouvez en la même maniere les deux quarez des nombres BE, ED, desquels l'excez, sçavoir le nōbre fait de AB en DB n'est quarré. Car s'il étoit quarré, par la 2. prop. 9. les nombres AB, BD, c'est à dire AB & C, seroient plans semblables. Ce qui est absurde, puis qu'ils' ont esté posez disséblables.

S C H O L I E 2.

Parquoy s'il faut trouver deux nombres quarez, desquels l'excez soit aussi nōbre quarré, nous prendrons comme cy-dessus, deux plans semblables. l'un & l'autre desquels soit pair, ou impair, sçavoir AB & C, & acheverons comme il est dit au precedent lemme.

Que s'il faut trouver 2 quarez, desquels l'excez ne soit quarré, il faudra prōdre 2 nōbres plās disséblables.

Et parachever comme dessus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, divisant un nombre quarré en deux nombres, l'un desquels soit quarré. Et l'autre non: Comme 16 en 4 Et 12: ou 36 en 16 Et 20: Et ainsi des autres.

L E M M E 2.

Trouver deux nombres quarez, tels que le composé d'iceux ne soit nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables AB , & C pairs, ou impairs, Et soit

$A..H..I..E..F..G..D.....B$
$C.....$

fait mesme construction qu'au lemme precedant; tellement que la quarré fait de la multiplication des nombres semblables AB , DB entr'eux, avec le quarré de DE , soit egal au quarré de BE : en apres, de DE soit ostée l'unité EF . Donc le quarré de DF sera moindre que le quarré de DE , a cause de l'inegalité des costez. Je dis que le nombre composé des nombres quarez, desquels l'un est fait de AB en BD , Et l'autre de DF en fy , n'est pas quarré. Car si ce composé estoit nombre quarré, il seroit plus grand, ou egal, ou moindre que le quarré de BF : Soit premierement plus grand, s'il est possible; donc le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BF ; partant egal, ou plus grand que le nombre BE : (car il ne sera moindre, parce qu'entre BE , BF , nombres differens de l'unité, ne tombe aucun milieu, Et le susdit costé seroit milieu entre iceux, s'il estoit posé plus grand que BF , mais moindre que BE .) Si on dit qu'il est egal, tellement qu'au quarré de BE , soit egal le nombre quarré composé du quarré de AB

en BD. & du quarré de DF, puis qu'au même quarré de BE. a esté démontré au lemme precedent estre egal le nombre fait de AB en BD, avec le quarré de DE; aussi celuy fait de AB en BD, avec le quarré de DF, sera egal à celuy-là fait de AB en BD, avec le quarré de DE. Ostant donc le commun quarré fait de AB en BD, le reste quarré de DF, sera egal au reste quarré de DE; & partant le costé DF aussi egal au costé DE, la partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarez, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas egal au nombre BE. Mais il n'est pas plus grand. Car si faire se peut, le costé d'iceluy soit egal au nombre BI, qui est plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand costé, est plus grand que le quarré de BE moindre costé: pareillement le composé des quarez, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DF en soy, (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE. Mais au preced. lemme le quarré de BE a esté démontré egal au nombre fait de AB en BD, avec le quarré de DE; ostant donc le commun nombre fait de AB en BD, restera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE. & partant le costé DF plus grand que le costé DE, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le costé du quarré composé des quarez, desquels l'un est fait de AB en BD, & l'autre de DE en soy, n'est pas plus grand que le costé BF: mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BF.

Soit maintenant, si faire se peut, le nombre fait de AB en BD, avec le quarré de DF, egal au quarré de BF:

Et soit posé AH double de l'unité EF . Donc puis que le tout AD est double du tout ED , (car AD a été divisé en deux également en E) Et l'ôte AH double de l'ôte EF , aussi le reste HD sera double du reste FD par la 7. prop. 7. Et partant HD est divisé en deux également en F : Parquoy par la 6. theor. de ceux que nous avons démontré sur la 14. prop. 9. le nombre fait de HB en BD , avec le quarré de DF , sera égal au quarré de BF : Mais au même quarré de BF , est posé égal le nombre fait de AB en BD avec le quarré de DF . Donc le nombre fait de HB en BD , avec le quarré du nombre DF , est égal à celui fait de AB en DB , avec le quarré de DF . Otant donc le commun quarré de DF , restera le nombre fait de HB en BD , égal à celui fait de AB en DB . Parquoy puis que HB , AB multiplians le même BD , produisent nombres egaux, Et que par la 18. prop. 7. les multiplians ont même raison que les produits: HB sera égal à AB , la partie au tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en DB , avec le quarré de DF , n'est pas égal au quarré de BF .

Soit finalement, si faire se peut, le nombre fait de AB , en BD , avec le quarré de DF , moindre que le quarré de BF ; Et partant le côté d'iceluy, moindre que le côté BF , lequel soit BG , tellement que le nombre fait de AB en BD , avec le quarré de DF , soit égal au quarré de BG : Soit pris AI double d'iceluy EG . Donc puis que le tout AD est double du tout ED , Et l'ôte AI double de l'ôte EG , par la 7. prop. 7. le reste ID sera aussi double du reste GD : Et partant ID est divisé en deux également en G . Parquoy par le 6. theor. démontré sur la 14. pr. 9. le nombre fait de IB en BD avec le quarré de DG , est égal au quarré de BG ,

Mais au mesme quarré de BG a esté posé egal le nombre fait de AB en BD, avec le quarré de DF: Donc le nombre fait de IB en BD, avec le quarré de DG, est egal à celuy fait de AB en BD, avec le quarré de DF. Ostant donc les quarez de DG & DF, desquels celuy de DG est moindre, restera le nombre fait de IB en BD, plus grand que celuy fait de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc le nombre fait de AB en BD, avec le quarré de DF, n'est pas moindre que le quarré de BF: mais il a esté démontré qu'il n'est pas aussi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD, avec le quarré de DF, n'est pas quarré. Ce qui estoit proposé à demontrer.

S C H O L I E 3.

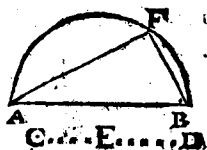
Par cecy nous trouverons facilement deux nombres, tels que le composé d'iceux ne soit à l'un ny à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si par le Lemme precedent on trouve deux quarez, tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ce composé non quarré ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le mesme, divisant quelconque nombre quarré en deux nombres non quarez: Car ainsi le quarré total ne sera à l'un ny à l'autre d'iceux nombres esquels il est divisé, en raison de nombre quarré à nombre quarré.

P R O B L. 6. P R O P. XXX.

Trouver deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soit proposée la rationele AB, & soient trouvées (côme il a été enseigné au 2. Scholie de la pr. pr.)

les deux nombres quarez CD, CE, l'excez desquels DE ne soit quarré : puis par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouuée AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre DE ; & après avoir décrit un demy cercle sur AB,



en iceluy soit accommodée la ligne droite AF : & joint BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes requises.

Car d'autant que le quarré de AB est au quarré de AF comme le nombre CD est au nombre DE, ils seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant aussi leurs costez AB & AF, au moins en puissance : mais AB est rationnelle, & par consequent aussi rationnelle AF qui luy est commensurable : mais les quarez de AB & AF n'étans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. pr. 10. les lignes AB & AF seront incommensurables en longueur : elles seront donc rationnelles commensurables en puissance seulement.

Maintenant, veu que l'angle E au demy cercle est droit par la 31. pr. 3. le quarré de AB sera egal aux deux quarez de AF & FB, c'est à dire que la ligne AB peut plus que la ligne AF du quarré de FB. Et d'autant que comme CD est à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AF, par conversion de raison, comme le nombre quarré CD sera au nombre quarré CE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de FB ; (car ainsi que CD excède DE du quarré de CE, ainsi aussi le quarré de AB surpasse le quarré de AF du quarré de FB.) Parquoy les li-

gnes droites AB, FB sont commensurables en longueur par la 9. pr. 10. Nous avons donc trouvé deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy est commensurable en longueur : Ce qu'il falloit faire.

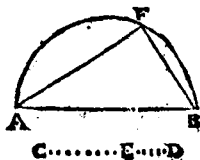
S C H O L I E.

La rationele AB soit 6 : AF sera $\sqrt{20}$: & par tant BF sera 4, commens. en longueur à AB.

P R O B L. 7, P R O P. XXXI.

Trouver deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longueur.

Soit exposée la rationele AB, & soient trouvez (comme il a esté enseigné au lemme 2. de la pr. 29. de ce livre) deux nombres quarréz tels que le composé d'iceux ne soit quarré, ou plûtoist soit divisé quelque nombre quarré CD, en deux nombres non quarréz CE, ED, afin que le tout CD ne soit à l'un ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré; puis sur AB soit décrit le demy cercle AFB; & par le corollaire de la 6. pr. 10 soit trouvée la ligne droite AF, au quarré de laquelle soit



le carré de AB, comme le nombre CD est au nombre CE : & finalement icelle AF étant accommodée au cercle soit menée BF. Je dis que AB & AF sont les deux lignes demandées.

Car on prouvera tout ainsi qu'à la précédente, que AB & AF sont rationeles commensurables en puissance seulement, (car leurs quarrés ne sont entr'eux comme nombre carré à nombre carré;) & que AB peut plus que AF du carré de BF. Et d'autant que comme CD est à CE, ainsi le carré de AB est au carré de AF : par conversion de raison comme CD sera à DE, ainsi le carré de AB sera au carré de BF. Mais CD n'est pas à DE comme nombre carré à nombre carré : donc aussi le carré de AB ne sera pas au carré de BF comme nombre carré à nombre carré. Parquoy les lignes droites AB, BF seront incommensurables en longueur, par la 9. prop. 10. Nous avons donc trouvé deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, telles que la plus grande AB peut plus que AF, du carré de la ligne BF, qui luy est incommensurable en longueur : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si la rationele AB est 3, AF sera $\sqrt{6}$, & BF $\sqrt{3}$.

PROBL. 8. PROP. XXXII.

Trouver deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du carré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soient trouvées par la 30. prop. de ce livre deux lignes rationeles A & B commensurables en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur: Item

A ———

C ———

B ———

D ———

par la 13. prop. 6. soit trouvée C moyenne proportionele entre A & B; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouvée la 4. proportionele D: Je dis que C & D sont les deux lignes demandées.

Car puis que A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 21. prop. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel; & la ligne C pouvant iceluy par la 17. pr. 6. (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D; & A est commensurable en puissance seulement à B, aussi C sera commensurable en puissance seulement à D, par la 10. proposition 10. Mais puis que C est mediale, par la 24. proposition 10. D sera aussi mediale. Et d'autant que comme A est à B, ainsi C à D: en permutât comme A sera à C, ainsi B sera à D: mais par la construction comme A est à C, ainsi C est à B: pareillement donc comme C sera à B ainsi B sera à D: & partant le rectangle de C & D sera egal au quarré de B, par la 17. pr. 6. & puis que le quarré de la rationele B est rationel, le rectangle cōpris sous C & D, qui luy est egal, sera aussi rationel. Et veu que comme A est à B, ainsi C D; & peut plus que B du quarré d'une lig. qui luy est com. en lōg. aussi par la 15. p. 10. C pourra plus que D du quarré d'une ligne

qui luy sera commensurable en longueur. Nous avons donc trouvé deux mediales C & D, commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle rationnel, C pouvant plus que D du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur : Ce qu'il falloit faire.

Que si on vouloit que C pût plus que D du quarré d'une ligne qui luy fust incommensurable en longueur, il ne faudroit que trouver A & B, telles qu'elles sont requises par la précédente proposition au lieu que cy-dessus elles ont esté trouvées par la 30. pr. 10. & achever le tout comme dessus.

S C H O L I E.

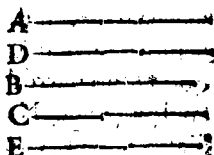
Soit AB , BY 28 : le rectangle d'icelles sera V 1792, & la ligne CV 1792, qui est mediale. Et puis que comme AB , est à BY 28, ainsi CV 1792 est à D , icelle sera V 343 : donc C & D sont deux mediales commens. en puissance seulement ; lesquelles contiennent un rationnel 28, & la plus grande C peut plus que la moindre D , d'une ligne qui luy est commens. en longueur. Car si du quarré d'icelle C on oste le quarré de D , restera V 567, & seront commens. en longit. les deux mediales V 1792 & V 567. Car elles sont comme 4 à 3. Derechef soit AB , & BY 20 : le rectangle d'icelles sera V 1280, & la ligne CV 1280, & partant D sera V 125, donc C & D sont mediales comprenant un rationnel. 20, & C peut plus que D du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur.

PROBL. 9. PROP. XXXIII.

Trouver deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un

rectangle medial, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur.

Soient trouvées trois lignes rationnelles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur: (ce qu'on obtiendra trouvant premierement par la 30. pr. 10. les deux rationnelles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit commensurable en longueur: puis à C & A soit trouvée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 12. pr. 10.) Item par la 13. pr. 6. soit trouvée D moyenne prop. entre A & B: puis par la 12. p. 6. soit fait comme D à B, ainsi C à E. Je dis que D & E sont les deux lignes demandées.



Car puis que D est moyenne prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui est irrationnel, & par conséquent D, est mediale par la 22. pr. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainsi C à E, en permutant comme A sera à C, ainsi D sera à E. Mais A & C sont commens. en puissance seulement: donc aussi D & E: & par la 14. p. 10. D estant mediale, E le sera aussi. Et derechef, puis que comme D à B ainsi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrêmes D & E sera egal au rectangle des moyennes B & C.

Mais par la 22 prop. 10. le rectangle de B & C rationeles commens. en puissance seulement est medial. Donc par le corol. de la 24. pr. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Finalement, puis que comme A à C, ainsi D à E; & A peut plus que C du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude, par la 15. prop. 10. D pourra aussi plus que E du quarré d'une ligne qui luy sera commens. en longitude. Nous avons donc trouvé deux mediales D & E commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que si on trouve A, B, C, rationeles comm. en puissance seulement, tellement que B puisse plus que C du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude, & on acheve de construire comme dessus; on démontrera semblablement que D & E sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

S C H O L I E.

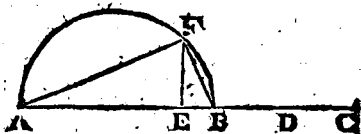
Soit^r AB, BV 48, & CV 28: le rectangle compris de A & B sera donc V 3072, & la ligne droite D VV 3072, qui est mediale, & A étant à C, comme D à E, icelle sera VV 588. donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude. Car si du quarré d'icelle D, on ôte le quarré de E, le reste sera V 972, qui luy est commensurable

surable en longitude à icelle $DVY 3072$. Derechef si A est 8, $BV 48$, & $CV 20$; D sera encore $VY 3072$, mais E sera $VY 300$. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent un medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

P R O B L. 10. P R O P. XXXIV.

Trouver deux lignes droites incommensurables en puissance, qui fassent le composé de leurs quarréz rationel, mais le rectangle contenu d'icelles, medial.

Soient deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommensurable en longitude



de; trouvée comme il a été enseigné en la 31. prop. 10. & après avoir coupé en deux également CB au point D, soit appliqué un rectangle sur BA égal au quarré de BD défailant d'une figure quarrée par la 28 pr. 6. & soit iceluy rectangle compris de AE & EB; & après avoir fait un demy cercle sur la ligne AB, & mené la perpendiculaire EF, soient menées BF & FA: Je dis qu'icelles lignes sont les requises.

Car puis que AB & BC sont inegales, & que la

plus grande AB peut plus que la moindre BC du
 quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en
 longitude, & que le rectangle de AE , EB appliqué
 sur AB , & defaillant d'une figure quarrée, est egal
 au quart du quarré de BC , (c'est à dire au quarré de
 DB ; car nous avons démontré au scholie de la 4. p.
 2. que le quarré de BC est quadruple du quarré de
 BD) les deux lignes AE & EB seront incommens.
 en longitude par la 19. pr. 10. Mais par le scholie
 de la 13. pr. 6. EF est moyenne proport. entre icel-
 les AE , & EB ; & partant comme il a été démontré
 à la 11. pr. 10. elle sera incommens. en puissance à
 EA . Mais comme FE à EA , ainsi BF à FA par la 4.
 pr. 6. (car iceux triangles sont equiangles par la 8.
 pr. 6.) donc puis que FE , EA sont incommensu-
 rables en puissance, par la 10. pr. 10. BF & FA seront
 aussi incommens. en puissance. Item le quarré de AB ,
 est egal aux deux de BF & FA par la 47. pr. 1. lequel
 quarré de BA est rationel, étant la ligne AB ratio-
 nelle; partant le composé des quarréz de BF & FA ,
 sera aussi rationel. Et d'autant que par l'hypothese
 le rectangle de AE , EB , est egal au quarré de BD , &
 qu'il est aussi egal au quarré de la moyenne prop.
 EF , par la 17 prop. 6. le quarré de EF sera egal au
 quarré de BD : partant la ligne EF est egale à BD : &
 par la 16. pr. 6. le rectangle de BF & FA sera egal
 au rectangle de BA & EF , ou BD son egale, (car par
 la 8. & 4. prop. 6. AB est à BF comme FA à EF .) Or
 par la 1. pr. 6. le rectangle de AB & DC est double
 du rectangle de AB & BD : (car la base BC est dou-
 ble de la base BD .) Mais le rectangle de AB & BC est
 medial par la 22. pr. 10. donc aussi sa moitié rectan-
 gle de AB & BD , & par consequent medial son egal

rectangle de BF & FA. Nous avons donc trouvé les deux lignes AF, FB, incommensurables en puissance, qui font le composé de leurs quarrés rationnel, mais le rectangle compris d'icelles, medial: Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si AB est 6, & BC $\sqrt{12}$ BD ou EF sera $\sqrt{3}$: & par consequent AE sera $3 + \sqrt{6}$, & EB $3 - \sqrt{6}$: & puis que le quarré de AF est égal aux quarrés de AB, EF, icelle AF sera $\sqrt{(18 + \sqrt{16})}$: mais BF sera $\sqrt{(18 - \sqrt{16})}$. Donc icelles AF, FB sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrés, sçavoir 36, est rationnel, mais le rectangle compris d'icelles, sçavoir est $\sqrt{108}$, est medial.

PROBL. II. PROP. XXXV.

Trouver deux lignes droites incommensurables en puissance, qui fassent le composé de leurs quarrés medial: mais qu'elles comprennent un rectangle rationnel.

Soient deux mediales commens. en puissance seulement (voyez la figure precedente) AB & BC, comprenant un rectangle rationnel, & que AB puisse plus que BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude, trouvées comme il a été enseigné en la 31. prop. 10. & soit achevé la construction comme en la precedente. Je dis que BF & FA sont les deux lignes demandées.

Car nous démontrerons ainsi qu'en la precedente pt. qu'icelles BF & FA sont incommens. en puissance; & que le quarré de BA est medial, étant décrit sur une ligne mediale; & égal aux deux de

BF & FA par la 47. pr. 1. Partant le composé des deux quarréz de BF & FA est medial. Et d'autant que le rectangle de AB, BC (comme il a été démontré en la preced. prop.) est double du rectangle de AB, BD; & qu'il est rationel par la construction, aussi iceluy rectangle de AB, BD sera rationel. Mais il a été démontré en la precedente qu'il est egal au rectangle de BF & FA: & par consequent iceluy est aussi rationel. Nous avons donc trouvé deux lignes AF & BF incommensurables en puissance, qui font le composé de leurs quarréz medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel: Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E,

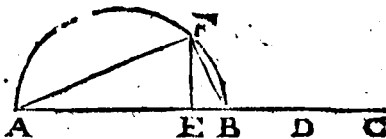
Si AB est $\sqrt{432}$, & BC $\sqrt{48}$: BD ou EF sera $\sqrt{3}$, & AF $\sqrt{108 + 72}$; mais BF est $\sqrt{108 - 72}$: & partant icelles AF, BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarréz sçavoir est $\sqrt{432}$: est medial: mais le rectangle compris d'icelles, sçavoir est $\sqrt{36}$, c'est à dire 6, est rationel.

P R O B L. 12. P R O P. XXXVI.

Trouver deux lignes droites incommensurables en puissance qui fassent, le composé de leurs quarréz medial, & aussi le rectangle d'icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarréz.

Soient deux mediales commensurable en puissance seulement AB & BC, comprenant un rectangle medial, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longitude, trouvées comme nous avons enseigné à la fin de la 33. prop. 10.

& apres avoir
achevé la cõ-
struction cõ-
me en la 34. p.
10. Je dis que
BF & FA sont
les lignes demandées.



Car premierement elles sont incommensurables en puissance, comme en la demonstration de la 34. pr. 10 & le quarré de BA étant medial, comme en la precedente, le composé des quarréz de BF & FA sera aussi medial : Item le rectangle de AB & BC étant medial par l'hypothese, le rectangle de AB, & BD (ou EF son egale) qui est sa moitié, sera aussi medial par le corollaire de la 24. pr. 10. & par consequent medial le rectangle de BF & FA qui luy est egal, comme il a été démontré en la 34. pr. 10. Et d'autant que par l'hypothese AB est incommensurable en longueur à BC, & qu'à icelle BC est commensurable en longueur sa moitié BD, par la 13. pr. 10. BD sera aussi incommensurable en longueur à AB, & par la 1. prop. 6. le quarré de AB sera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils sont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'est à dire incommensurable, par la 10. pr. 10. & par consequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BD, sera incommensurable au quarré de BA, c'est à dire au composé des quarréz de BF & FA. Nous avons donc trouvé deux lignes droites AF, BF incommens. en puissance, faisant le composé de leurs quarréz medial, & le rectangle contenu sous icelle medial & incom. au composé d'iceux quarréz ; Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB est $\sqrt{192}$, & $BC\sqrt{48}$; BD on sera
egale EF sera $\sqrt{3}$, & $AF\sqrt{48 + 24}$, & $BF\sqrt{48 - 24}$: Parquoy icelles AF , BF sont incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrés, sçavoir est $\sqrt{292}$ est medial incommensf. à $\sqrt{24}$, rectangle medial compris d'icelles AF , BF .

Or de ce probleme est manifeste le suivant.

Trouver deux mediales incommensurables en longueur & puissance.

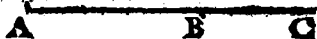
Car puis que tant le composé des quarrés des lignes AF , BF , que le rectangle compris d'icelles, est medial, & que celuy rectangle est incommensurable à ce composé, aussi les lignes pouvans iceluy composé, & rectangle, seront pareillement mediales incommensf. tant en longueur que puissance. Car si elles estoient commensurables en puissance, aussi les quarrés d'icelles, c'est à dire le composé des quarrés des lignes, AF , BF , & le rectangle sous icelles AF , FB , seroient commensf. ce qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouvant le composé des lignes AF , FB ; & une autre ligne pouvant le rectangle d'icelles AF , FB , c'est à dire une moyenne proportionnelle entre AF , FB , seront trouvées deux mediales incommensurables en longueur & puissance.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES
des lignes rationnelles par composition.

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationnelles commensurables
 en puissance seulement sont composées,
 la toute sera irrationnelle: & soit icelle
 appelée Binome.

Soient composées deux lignes rationnelles commen-



en puissance seulement AB & BC, trouvées par le
 lemme qui précède la 22. prop. 16. Je dis que la
 toute AC est irrationnelle.

Car par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & BC
 est au carré de BC, comme AB à BC: mais AB,
 BC sont incommens. en longit. par l'hypothèse.
 Donc par la 10. pr. 10. le rectangle de AB, BC sera
 incommens. au carré de BC: & partant par la 14.
 prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera
 incommens. au carré de BC. Mais d'autant que
 les lignes AB & BC sont rationnelles commens. en
 puissance seulement, leurs quarrés seront com-
 mensurables entr'eux; & le composé de tous deux
 sera commensurable au seul de BC, par la 16. prop.
 10. & partant par la 14. prop. 10. les deux quarrés
 d'icelles AB & BC seront incommens. à deux fois le
 rectangle de AB & BC, & par la 17. prop. 10. le com-

posé de deux fois le rectangle & des deux quarréz, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré est egal aux quarréz de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB, BC) est incommens. aux deux quarréz de AB & BC, lesquels estans rationaux, & le composé d'iceux rationel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel, par la 10. def. 10. & par consequent la ligne AC irrationele : Or icelle sera appelée binome, pource qu'elle est composée de deux noms; c'est à dire de deux lignes rationeles AB, BC, commensurables en puissance seulement. Si donc deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

Soit AB 2, BC $\sqrt{3}$: la toute AC sera $2 + \sqrt{3}$. & son quarré est $7 + \sqrt{48}$.

Or il apert de ce que dessus, que de deux lignes rationeles commens. en puissance seulement, sont produites deux lignes irrationeles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationeles est irrationele par la 22. prop. de ce livre, laquelle est appelée mediate. Et la composée d'icelles, par la 37. prop. 10. est une irrationele, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel sont composées, la toute sera irrationele : & soit icelle appelée bimediale premiere.

Soient com-
posées 2 media-
les AB & BC



commensura-

bles en puissance seulement, comprenant un re-
ctangle rationel trouvées, par la 28. prop. 10. Je
dis que la route AC est irrationelle.

Car puis que par là 1. prop. 6. comme AB est à
BC, ainsi le rectangle compris sous AB, BC est au
quarré de BC; & que AB, BC sont incommensu-
rables en longueur; par la 10. prop. de ce livre,
iceluy rectangle de AB, BC sera aussi incommen-
surable au quarré de AB. Mais le rectangle de AB,
BC est commensurable à deux fois iceluy: & au
quarré de BC est commens. le composé des quar-
rez d'icelles AB, BC (car puisque AB, BC sont
commensurables en puissance, leurs quarréz se-
ront commensur. & partant le composé d'iceux
quarrez sera aussi commensurable au quarré de
BC par la 16. prop. 10.) Donc le composé des deux
quarrez de AB, BC sera incommensurable à deux
fois le rectangle compris d'icelles lignes AB, BC
par la 14. prop. 10. Parquoy le composé d'iceux
deux quarréz & rectangles, c'est à dire le seul quar-
ré de AC, qui leur est egal par la 4. prop. 2. sera aussi
incommensurable à deux fois le rectangle de AB,
BC par la 17. prop. 10. Mais à deux fois iceluy
rectangle de AB, BC est commensurable un seul
rectangle d'icelles AB, BC: donc par la 13. prop. 10.
le quarré de AC sera incommensurable au rectan-
gle compris sous AB, BC: & iceluy rectangle
estant rationel par l'hypothese, iceluy quarré de

AC fera irrationnel par la 10. def. 10. & pource la ligne AC fera aussi irrationnelle par la 11. def. 10. Et icelle ligne soit appelée bimediale premiere, Si donc deux lignes mediales comm. en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonstrez,

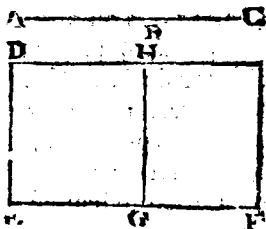
SCHOLIE.

Soit $AB \sqrt{54}$, & $BC \sqrt{24}$: La toute AC sera donc $\sqrt{54} + \sqrt{24}$, irrationnelle nommée bimediale premiere.

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle medial sont composées, la toute sera irrationnelle: & soit icelle appelée bimediale seconde.

Soient composées les deux mediale AB & BC commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle medial; trouvées par la 29. prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationnelle.



Car soit une ligne rationnelle proposée DE, sur laquelle soit appliqué le rectangle DF égal au carré de AC, & le rectangle DG égal au composé des carrés de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. pr. 2. le carré de AC, c'est à dire le rectangle DF, est égal aux deux carrés de AB, BC avec deux fois le rectangle d'icelles AB,

BC ; le rectangle HF sera egal à deux fois le rectangle de AB, BC : & puis que par l'hypothese le rectangle de AB, BC, est medial, par le corol. de la 24. prop. 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy est commensurable, c'est à dire le rectangle HF, sera aussi medial. Derechef, puis que les quarez des mediales AB, BC sont commens. le composé d'iceux, c'est à sçavoir le rectangle DG, sera aussi commensurable à un chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarez des mediales AB, BC, est medial : Donc par le corol. de 24. prop. 10. le rectangle DG sera aussi medial : Ainsi les deux rectangles DG & HF estans mediaux, & appliquez sur la rationele DE, (car GH est egale à la rationele DE,) leurs autres costez EG & FG seront rationaux commensurables en puissance seulement à DH, par la 23. pr. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC est au quarré de BC comme AB est à BC, par la 1. prop. 6. c'est à dire incommensurable par la 10. prop. 10. & par tant le double du rectangle de AB & BC sera aussi incommens. au quarré de BC : & les deux quarez de AB & BC estans commensurables entr'eux, les deux-ensemble seront commensurables au seul de BC, par la 16. prop. 10. & par la 14. prop. 10. les deux quarez de AB & BC seront incommensurables à deux fois le rectangle de AB & BC : & par consequent aussi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1. p. 6. & 10. p. 10. EG & FG lignes rationeles seront incommensurables en longitude: elles seront donc commensurables en puissance seulement ; (car autrement elles ne seroient rationeles si elles estoient incommens.) & par la 37. p. 10.

la toute composée EF sera irrationnelle: & le rectangle DF sera irrationnel: car s'il estoit rationnel la ligne DE estant rationnelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre costé EF fut aussi rationnel, ce qui n'est pas: DF est donc irrationnel: & partant aussi irrationnel son egal quarré de AC; & par consequent la ligne AC irrationnelle, qui sera appelée bimediale seconde. Si donc deux mediales commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par cecy que le rectangle compris d'une ligne rationnelle & d'une irrationnelle, est aussi irrationnel. Car il a esté démontré que le rectangle DF compris de la rationnelle DE, & irrationnelle EF, ne peut estre rationnel.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{18}$, & BC $\sqrt{8}$: La toute AC sera $\sqrt{18} + \sqrt{8}$, qui est irrationnelle, appelé bimediale seconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on ajoute ensemble deux lignes droites incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial; mais le composé de leurs quarrés soit rationnel; la toute sera irrationnelle: & soit icelle appelée ligne majeure.

Soient assemblées les deux lignes AB & BC incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationnel, trouvées par la 34.



prop. 10. Je dis que la toute AC est irrationele.

Car d'autant que le rectangle compris sous AB & BC est posé medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corol. de la 24. pr. 10. & partant irrationel. Mais par l'hypothese le composé des quarez de AB & BC est rationel: partant incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10. def. 10. Et par la 17 prop. 10. le composé des deux rectangles, & des deux quarez (qui est le quarré de AC par la 4. pr. 2.) sera incommens. au composé des deux quarez de AB & BC, qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel, & son costé AC aussi irrationel; lequel sera appelé ligne Majeure. Parquoy si on ajoute deux lignes droites incommens. &c. Ce qu'il falloit demontrer.

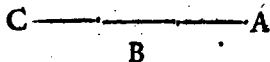
SCHOLIE.

Soit $AB \sqrt{18 + \sqrt{216}}$, & $BC \sqrt{18 - \sqrt{216}}$; la toute AC sera donc $\sqrt{18 + \sqrt{216}} + \sqrt{18 - \sqrt{216}}$, qui est irrationele nommée ligne majeure.

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droites incommensurables en puissance, comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial, sont assemblées; la toute sera irrationele: & soit icelle appelée ligne pouvant un rationel, & un medial.

Soient composées les deux lignes AB & BC,



telles que demande la

propof. & qu'enseigne à trouver la 31. prop. de ce Livre. Je dis que la toute AC est irrationele.

Car puis que le composé des quarez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel; deux fois iceluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. prop. 10. le composé des deux quarez; & des deux rectangles, sçavoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. sera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel: Ainsi par la 10. def. 10. le quarré de AC sera irrationel: & par conséquent la ligne AC aussi irrationele: laquelle sera appelée ligne pouvant un rationel & un medial. Parquoy si deux lignes droites incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouver.

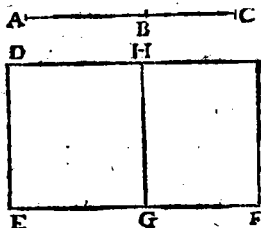
S C H O L I E;

Soit AB $\sqrt{108} + \sqrt{72}$, & BC $\sqrt{108} - \sqrt{72}$: La toute AC sera donc $\sqrt{(\sqrt{108} + \sqrt{72})^2 + (\sqrt{108} - \sqrt{72})^2}$.

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droites incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarez aussi medial, sont composées; la toute sera irrationele: Soit icelle appelée ligne pouvant deux mediaux.

Soient composées les deux lignes AB & BC, telles que demande la prop. & qu'enseigne à trouver la 36. prop. 10. Je dis que la route AC est irrationele.



Soit exposée la rationele DE, sur laquelle soit faite même construction qu'en la 39. prop. 10. sçavoir que le rectangle DF soit égal au quarré de AC, DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarrez, & incommensurable au rectangle HF, égal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a été démontré en la 39. pr. 10. & par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. EG & GF seront aussi incommensurables en longueur. Mais les deux rectangles DG & HF étant mediaux, & appliquez sur la rationele DE, seront les deux autres côtez EG & FG rationaux par la 23. prop. 10. Ainsi EG & FG seront rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. la route EF sera irrationele. Mais DE étant rationele, le rectangle DF sera irrationel par le coroll. de la 39. prop. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, sçavoir AC sera irrationele: laquelle on appellera ligne pouvant deux mediaux. Si donc deux lignes droites incommensurables en puissance, &c. C'est qu'il aloit démontrer.

S C H O L I E.

Soit $AB\sqrt{(\gamma_{48} + \gamma_{24})}$ & $BC\sqrt{(\gamma_{48} - \gamma_{24})}$
 De la route AC sera $\sqrt{(\gamma_{48} + \gamma_{24})} + \sqrt{(\gamma_{48} - \gamma_{24})}$.

Si une ligne droite est coupée en deux inégalement en un point, & derechef en deux inégalement en un autre point, & que les parties de l'une des divisions soient inégales aux parties de l'autre division, chacune à la sienne : les quarrés des deux parties de la plus inégale division seront ensemble plus grands que les quarrés des parties de la moins inégale.

Soit la ligne droite AC divisée inégalement



en B : & encores inégalement en E ; & les premières parties AB, BC soient plus inégales que les postérieures CE, AE : (c'est à dire que AE soit plus grande que BC .) Je dis que les quarrés de AB & BC sont plus grands ensemble que ceux de AE & EC ensemble.

Car si AC est coupée en deux également en D ; d'autant que AB, BC sont plus inégales que CE, AE ; & que AE est plus grande que BC ; il apert que ED sera plus petite que BD : or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC , avec le quarré de BD , est égal au quarré de DC : Item le rectangle de AE & EC , avec le quarré de DE , est aussi égal au quarré de DC : partant le rectangle de AE & EC avec le quarré de DE est égal au rectangle de AB & BC , avec le quarré de BD . Et en ostant les quarrés inégaux des lignes inégales, DE, BD , le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC ; & partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB & BC . Maintenant les deux quarrés de AB & BC , avec deux fois le rectangle

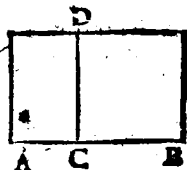
gle de AB & BC , sont egaux au quarré de AC par la 4. pr. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarréz de AE & EC , & deux fois le rectangle de AE & EC : & par consequent les composez des quarréz & rectangles sont egaux entr'eux : mais les deux rectangles de AE & EC , ont esté demontrez plus grands que les deux de AB & BC : partant les deux quarréz de AB & BC seront plus grands que les deux quarréz de AE & EC : Ce qui estoit proposé.

L E M M E 2.

Une figure rationelle excède une figure rationelle, d'une figure rationelle :

Soient les deux figures rationelles AE & AD , étant AE plus grande que AD de CE : Je dis que CE est figure rationelle :

Car AE & AD estans rationelles : elles seront aussi commens. & par la 16. prop. 10. AD & CE seront commensurables entr'elles, & par consequent rationelles.



THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre divisée en ses noms, qu'en un point seulement.

Soit le binome AB divisé en ses noms au point C : tellement que AC , CB soient rationelles commensurables en puissance seulement, comme veut la 37. prop. Je dis qu'on ne peut diviser AB en ses noms en un autre point,



ſçavoir eſt que les lignes ſoient rationeles communſ. en puiſſance ſeulement.

Car ſ'il ſe peut faire, ſoit diviſée derechef AB en ſes noms au point D . Or il apert que AB n'eſt coupée en deux également és points C & D . Car AC & CB , ou AD & DB , ſeroient communſ. en longitude contre l'hypothèſe : il faut donc que AB ſoit coupée inegalement eſdits point C & D ; & que les parties AD & DB ſoient inegales aux parties AC & CB , chacune à la ſienne : car ſi elles eſtoient egales, icelle AB ſeroit diviſée à la ſeconde diviſion au meſme point qu'à la premiere. Si donc AD & DB ſont parties moins inegales que AC & CB , par le Lemme qui ſuit la 42. prop. 10. le compoſé des quarrez de AC & CB ſera plus grand que le compoſé des quarrez de AD & DB : Et d'autant qu'iceux compoſez ſont rationaux (car ce ſont quarrez conſtruits ſur lignes rationeles) leurs excez ſera auſſi rationel par le Lemme preced. Or eſt-il que le compoſé des quarrez de AC & CB , avec deux fois le rectangle de AC & CB , eſt egal au compoſé des quarrez de AD & DB , avec deux fois le rectangle de AD & DB : (car iceux ſont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB , ſont plus grands que les quarrez de AD & DB , d'autant les rectangles de AC , CB ſoient plus petits que les rectangles de AD & DB : mais il a eſté demonſtré, que l'excez des quarrez eſt rationel: donc l'excez des rectangles ſera auſſi rationel : (puis que ces excez ſont egaux) qui eſt contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles par la 22. pr. 10. ſont mediaux, d'autant que les lignes AC

& CB: ou AD & DB, sôt rationeles comm. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a pû être divisé, en ses noms qu'en C: car en quelque autre point qu'on le divise, il s'ensuivra toujours la même absurdité. Ce qu'il falloit demontrer.

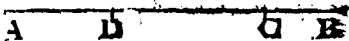
S C H O L I E.

Il est à noter qu'és cinq sortes de lignes irrationeles qui suivent. jamais les deux noms d'icelles ne peuvent estre egaux: car comme il a esté dit cy-dessus, ils seroient commensurables en longueur, & ils ont esté demonstrez incommensurables en longueur faut aussi remarquer que quand on dit qu'icelles lignes ne peuvent estre divisées en leurs noms qu'au point proposé, faut entendre que le contredisant apportant une autre division, les parties d'icelles doivent estre inegales aux parties de la proposée.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la bimediale premiere AB, divisée en ses noms au point C, tellement que AC & BC soient mediales comm. en puissance seulement, comprenant un rectangle



rationel, comme veut la 38. prop. 10. Je dis qu'on ne la peut diviser en ses noms en un autre point.

Car s'il se peut faire, soit AB derechef divisée en D, sçavoir que AD & DB soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel. Nous démontrerons tout

ainsi qu'en la precedente proposition, que deux fois le rectangle de AD & DB seront autant plus grands que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarez de AD & DB sont plus petits que les quarez de AC & BC : Or tous ces rectangles sont rationaux par l'hypothese. Donc leurs excez sera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par consequent l'excez des quarez sera aussi rationel, ce qui est absurde : car iceux quarez, estans decrits sur lignes mediales, sont mediaux, ainsi qu'il apert par la 16. proposition 10. & coroll. de la 24. proposition 10. partant l'excez d'iceux ne sera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bimediale premiere AB ne pouvoit être divisée en ses noms, sinon au point C. Ce qu'il falloit demontrer.

L E M M E.

Si une ligne droite est coupée inegalement, les quarez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne droite AB

coupée inegalement en C:

Je dis que les quarez de AC, CB, sont plus grands

que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.

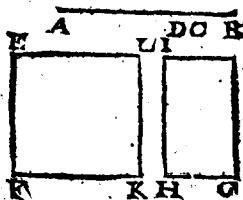
Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. prop. 2. les quarez AC. CD. c'est à dire de AC, CB, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) avec le quarré de AD : & partant les deux quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB : ce qui estoit proposé.

THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la bimediale seconde AB divisée en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient mediales commens. en puissance; seulement, comprenant un rectangle medial, comme veut la 37. prop. de ce livre: Je dis qu'elle ne peut être divisée en ses noms en un autre point que C.

Car si faire se peut qu'elle soit encore divisée en AD & DB en sorte que dessus: & soit une ligne rationelle proposée EF, sur laquelle (par la 45. prop. 1.) soit construit le rectangle EG, égal au carré de AB.



Item EH égal aux deux quarez de AC, CB: le reste IG fera égal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le carré de AB est égal aux deux quarez de AC, CB, avec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la même manière si sur EF on applique EK égal aux quarez de AD, DB: le reste LG fera égal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarez de AC, CB, sont inégaux aux quarez de AD, DB: leurs égaux rectangles EH, EK seront aussi inégaux: & partant les lignes FH, FK, seront inégales. Et de rechef puis que les quarez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme précédent; EH fera aussi plus grand que

IG: & partant EH plus grand que la moitié de EG: & conséquemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous démontrerons par mêmes raisons que FK, est aussi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, sont inégales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. Et pour ce que AC, CB sont mediales, & commensurables en puissance; les quarréz d'iceelles seront aussi mediaux & commensurables; & par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera aussi commensurable à un chacun d'eux; lesquels étans mediaux, leur composé, c'est à sçavoir le rectangle EH, sera aussi medial par le corol. de la 24. prop. 10. Par même raison EK sera démontré medial: parquoy EH, EK appliquez sur la rationele EF, auront les côtez FH, FK rationaux commensurables en puissance seulement à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le rectangle de AC, CB est posé medial; le double d'iceluy, sçavoir est IG, sera aussi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & étant appliqué sur la rationele HI, l'autre côté HG sera aussi rationel commensurable en puissance seulement à icelle HI, par la 23. prop. 10. Et puis que AC, CB sont incommensurables en longueur, & par la 1. prop. 6. comme AC est à CB, ainsi le quarré de AC est au rectangle de AC, CB: (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré sera incommensurable au rectangle: Mais au quarré de AC est commensurable le composé des quarréz de AC, CB; (car d'autant que AC, CB sont commensurables en puissance, & partant les quarréz d'iceelles commensurables, le composé d'iceux quarréz sera aussi commensurable au quarré de AC,

par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB est commensurable à son double. Donc aussi le composé des quarréz de AC, CB, c'est à dire le rectangle EH, est incommensurable au double du rectangle de AC, CB, c'est à dire à IG, par le scholie de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH est à IG, ainsi FH est à HG, par la 10. prop. 10. icelles FH, HG seront incommensurable en longueur. Mais elles ont été démontrées rationeles: Dont les lignes FH, HG sont rationeles commensurables en puissance seulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG sera binome, & divisées en ses noms au point H. En la même maniere nous démontrons aussi FG binome être divisée en d'autres noms à un autre point K; ce qui est absurde: car par la 43. prop. 10. elle ne peut estre divisées en ses noms qu'en un seul point. Donc AB bimediale seconde ne peut être divisée en ses noms qu'au point C. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne majeure, est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la ligne majeure AB; divisée en ses noms au point C; tellement que AC & BC soient incommensurables en puissance: & le composé de leurs quarréz soit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial, comme veut la 40. p. de ce livre. Je dis qu'on ne pourra diviser icelle AB en ses noms en un autre point que C.



Car si faire se peut, qu'elle soit divisée en ses noms en un autre point D. Donc en quelque lieu que soit le point D, nous démontrerons tout ainsi qu'en la 45. prop. de ce livre, que les composez des quarréz de AC & BC; & de AD & DB ont un même excez que les doubles rectangles de AC, BC: & de AD, DB. Mais d'autant que les composez quarréz sont rationaux par l'hypothese, & par consequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (lesquels sont mediaux par le corol. de la 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui est contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne majeure AB, ne sera divisée en ses noms en autre point qu'en C. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouvant un rationel & un medial, est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la ligne pouvant un rationel & un medial AB, divisée en ses noms au point C, en sorte que AB & BC soient incommensurables en puissance, comprenant un rectangle rationel, & que le composé de leurs quarréz soit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. prop. 10. Je dis qu'on ne pourra diviser icelle AB en ses noms en un autre point que C.

Car il s'en suivroit même absurdité qu'en la précédente prop. sçavoir que si on la divisoit encores

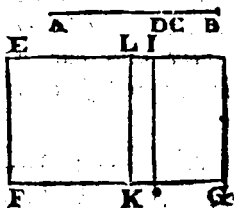
au point D, il s'ensuivroit comme là, que l'excez tant des quarrez, que des rectangles seroit rationnel, & medial. Parquoy la ligne pouvant un rationnel, & un medial, &c. Ce qu'il falloit demon-
trer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouvant deux mediaux, est divisée en ses noms en un point seulement.

Soit la ligne pouvant deux mediaux AB, divisée en ses noms au point C, en sorte que AC & BC soient incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial, comme veut la 42. prop. 10. Je dis qu'on ne peut diviser icelle AB en ses noms en un autre point que C,

Car si faire se peut, qu'icelle AB soit encore divisée au point D : & sur la rationelle proposée EF soit faite pareille construction qu'en la 45 prop. 10. sçavoir est le rectangle E-G égal au



quarré de AB, & EH égal aux deux quarrez de AC & CB : & partant IG, égal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a été démontré en l'adite 45. prop. 10.) & les deux rectangles EH & IG, qui sont mediaux par la susdite démonstration, seront les lignes FH & HG rationnelles : mais le composé des quarrez de

AC & BC est incommensurable au double de leur rectangle : (car par l'hypothese il est incommensurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant aussi les rectangles EG & EH seront incommensurables. Ainsi les lignes rationeles FH & HG seront commensurables en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. AB sera binome divisé en ses noms au point H. Que si on veut dire que AB peut encore être divisé en ses noms au point D : il s'ensuivra, comme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, divisé en ses noms au point H, se pourroit encore diviser en ses noms au point K, contre la 42. prop. 10. Ainsi AB ne pouvoit être divisées en ses noms qu'au seul point C. Ce qu'il falloit demontrer.

SECONDES DEFINITIONS.

Une ligne rationele estant proposée, & un binome divisé en ses noms ; lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longueur à la rationele proposée : toute la ligne soit apellée Binome premier.

2. Mais si le plus petit nom est commensurable en longueur à la rationele proposée : toute la ligne soit apellée Binome second

3. Que si ny l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne soit appelée Binome troisième.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne soit appelée Binome quatrième.

5. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposée : toute la ligne est appelée Binome cinquième.

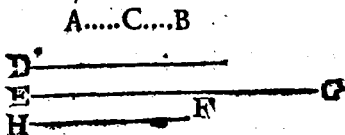
6. Que si l'un ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposée ; la toute soit appelée Binome sixième.

Il n'est rien dit icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposée : parce que telles lignes ne sont binomes : car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement,

PROBL. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouver un Binome premier,

Etant trouvez deux nombres quarez AB, CB
 (Comme nous
 avons enseigné
 au 2. scholie de
 la 29. prop. 10.
 desquels l'ex-
 cez AC ne soit
 quarré, afin que



que AB, CB soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré ; à une rationele proposée D, soit pris EF commens. en longit. & icelles D & EF feront rationeles commensurables en longitude. En apres, par le coroll. de la 6. prop. 10. soit fait que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG. Je dis que la toute EG est binome premier.

Car puis que les quarez de EF, FG, qui sont entr'eux comme les nombres AB, AC, sont commensurables par la 6. prop. 10. aussi les lignes EF, FG seront commensurables, au moins en puissance : Et d'autant que EF est rationele, aussi FG sera rationele. Mais pource que AB, AC ne sont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarez d'icelles rationeles EF, FG ne sont comme nombre quarré à nombre quarré ; & partant les lignes EF, FG sont incommensurables en longitude par la 9. pr. 10. elles sont donc rationeles commens. en puissance seulement : & par la 37. pr. 10. la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'il est premier. Car puis que les quarez de EF, FG sont entr'eux comme les nombres AB, AC : & AB est plus grand que

AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: que ce soit donc du quarré de H: (iceluy quarré sera trouvé par le Lemme qui fuit la 14. proposition 10.) Et puis que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi que le quarré de EF est au quarré de FG: par conversion de raison comme AB à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB est à CB comme nombre quarré à nombre quarré: donc le quarré de EF sera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes EF, H sont commens. en longitude par la 9. pr. 10. Veu donc que le plus grand nom EF est commens. en longitude à la rationele D, & peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est commens. en longitude; EG sera binome premier par la 1. des secondes def. Nous avons donc trouvé un binome premier: Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Soit la rationele proposée D 8. & EF 6; faisant donc que comme AB 9. est à AC 5. ainsi 36 quarré de EF, soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partant la toute EG, sera $6 + \sqrt{20}$, qui est binome premier: car le plus grand nom est commensurable à nombre absolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nombre d'un quarré dont la racine est commensurable en long. à iceluy plus grand nom. Iceluy binome premier sera trouvé plus brièvement que dessus, posant quelconque nombre pour le plus grand nom, & pour le moindre la racine quarrée des trois quarts de sa puissance. Ainsi posant 8 pour le plus grand nom, son quarré sera 64. dont le quart soustrait reste 48; & partant $8 + \sqrt{48}$ sera binome

PROBL. 14. PROP. E.

Trouver un Binome second.

Estant trouvez les deux nombres quarez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commensurable en

longitude à une ratio-

nele proposée D : icel-

les D & FG seront ra-

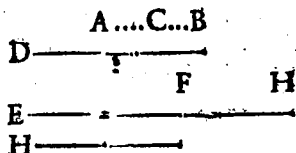
tioneles commensura-

bles : puis apres par le

corol. de la 6. pr. 10.

soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de FG soit au quarré de EF. Je dis que EG est binome second.

Car on demonstrera premierement tout ainsi qu'en la precedente que EG est binome. Et puis que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de FG est au quarré de EF, en changeant comme AB à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG. Mais AB est plus grand que AC : Donc aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG, & soit du quarré H. Nous demontrons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF sont commensurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy est commens. en longitude, & le moindre nom FG commensurable en longitude à la rationele D : & par les secondes definitions E G, sera binome second. Nous avons donc trouvé un binome second, ainsi qu'il estoit requis.



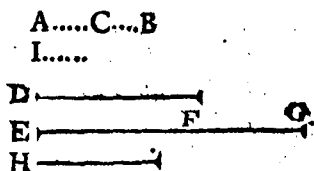
S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 7. & FG 5 : faisant donc que comme AC 5 est à AB 9, ainsi 25 quarré de FG soit au quarré de EF ; icelle EF sera $\sqrt{45}$: & partant la toute EG sera $\sqrt{45} + 5$, qui est binome second : pource que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'un quarré, dont la racine est commens. en longueur à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom est aussi commensur. au nombre rationel proposé. Or pour trouver plus brièvement que dessus iceluy binome second, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre. & au quarré d'iceluy ajouter le tiers, & la racine quarrée de ce qui en viendra sera le plus grand nom. Ainsi prenant pour le moindre nom 6, son quarré est 36, dont le tiers luy estant ajouté sera 48 : & partant $\sqrt{48} + 6$ sera binome second.

PROBL. 15 PROP. LI.

Trouver un Binome troisiéme.

Estans trouvez deux nombres AB, CB comme en la 49. p. 10. soit pris un autre nombre I qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré : (ce qui se fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'est quarré, il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Dere-



chef, puis qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'unité, ou par le binaire: & partant il ne tombera pas entre I & AC un moyen proportionel, comme nous avons demontré au scholie de la 8. pr. 8. Ils ne seront donc pas plans semblables: & partant ne seront entr'eux comme nombres quarez,) & apres avoir exposé la rationeile D, par le corol. de la 6. p. 10. soit fait que comme I à AB, ainsi le quarré de D soit au quarré de EF: par ainsi les quarez de D & EF, estans entr'eux comme nombre à nombre, seront commensurables par la 6. pr. 10. & partant les lignes D & EF le seront aussi, au moins en puissance. Parquoy D estant rationeile, EF le sera aussi. Mais parce que I n'est pas à AB, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF comme nombre quarré à nombre quarré: D & EF seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. Derechef soit fait par le susdit corol. que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG: & par la 6. prop. 10. iceux quarez de EF, FG, estans comme nombre à nombre, seront commensurables entr'eux: & partant les lignes EF FG aussi commensurables, au moins en puissance: & EF estant rationeile, FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est pas à AC, c'est à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG seront incommensurables en longitude par la 9. pr. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. la toute EG sera binome. Je dis aussi qu'elle est binome troisieme. Car d'autant que comme I est à AB,

ainsi

ainsi le quarré de D est au quarré de EF ; & comme AB à AC , ainsi le quarré de EF au quarré de FG : par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D sera au quarré de FG. Mais I n'est pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré: donc les quarrés de D & FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré : & partant les lignes D & FG , seront incommensurables en longueur par la 9. prop. 10. Et puis que comme AB est à AC , ainsi le quarré de EF est au quarré de FG; & AB est plus grand que AC , aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous démontrerons comme en la 49. prop. de ce livre , que EF & H sont commensurables en longueur. Donc le plus grand nom EF , peut plus que le moindre FG du quarré de H , qui luy est commensurable en longueur, & l'une ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longueur à la proposée rationelle D, comme il a été démontré : partant EG sera binome troisième par les secondes definitions. Nous avons donc trouvé un binome troisième. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle proposée D soit 6 : faisant donc que comme 16 , est à AB 9 , ainsi 36 quarré de D soit au quarré de EF ; icelle EF sera $\sqrt{54}$: & faisant que come AB 9 est à AC 5 , ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{30}$: & partant la toute EG sera $\sqrt{54} + \sqrt{30}$, qui est binome troisième, parce que l'un ny l'autre nom est commensurable en longueur au nombre rationnel proposé , & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré , du.

quel la racine est commensurable en longueur au plus grand nom. Or pour trouver ce binome plus promptement que dessus, on posera la racine quarrée de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom. & la racine quarrée des trois quarts du même nombre pour le moindre nom: Ainsi posant pour le plus grand nom $\sqrt{20}$, l'autre nom sera $\sqrt{15}$: & par là $\sqrt{20} + \sqrt{15}$ sera binome troisième.

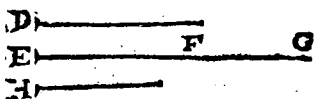
PROBL. 16. PROP. LII.

Trouver un binome quatrième.

Estans trouvez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit à l'un ny à l'autre comme nombres

quarrez (suivant ce que nous avons enseigné au 3. scholie de la 29. prop. de ce livre) soit exposé la

A... .C...B.



rationelle D, & pris EF commens. en longueur à icelle rationelle D; & par conséquent EF sera aussi rationelle: Et ayant construit le reste comme en la 29. pr. 10. Nous démontrerons comme là que la route EG est binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du quarré de H; & que par conversion de raison, comme AB est CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est à CB comme nombre quarré à nombre quarré: Donc le quarré de EF ne sera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré; & par la 9. prop. 10. les lignes EF & H, sont incommens. en longueur, parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui

luy est incommensurable en longueur, & qu'icelle EF est commensurable en longueur à la rationelle proposée D : EG sera binome quatrième par les def. secondes. Nous avons donc trouvé un binome quatrième : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle exposée D soit 8. & EF 6 : faisant donc que comme AB 9 est AC 6, ainsi le carré de EF, sçavoir 36, soit au carré de FG; icelle FG sera trouvée de $\sqrt{24}$: & partant la toute EG sera $6 + \sqrt{24}$, qui est binome quatrième : pource que le plus grand nom est commensurable en longueur au nombre rationnel proposé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'un carré, dont la racine est incommensurable en longueur à iceluy plus grand nom. On trouvera ce binome plus promptement que dessus posant pour le plus grand nom quelconque nombre : & pour le moindre la racine carrée de la moitié du carré d'iceluy. Ainsi posant 6 pour le plus grand nom, son carré sera 36, dont la moitié sera 18, & partant $6 + \sqrt{18}$ sera binome quatrième.

PROBL. 17. PROP. LIII.

Trouver un Binome cinquième :

Estans trouvez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la construction comme en la 50. prop. on démontrera comme en ladicte 50. prop. que EG est binome. Item que le carré de EF est plus grand que le carré de FG du carré de H : Et comme en la precedente, qu'icelles EF & H sont incommensurables en longueur : & partant par les secondes def. EG est binome cinquième. Nous avons donc trouvé un binome

me cinquième. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele proposée D soit 7, & FG 6 : donc faisant que comme AC 6 est à AB 9, ainsi le quarré de GF, sçavoir est 36, soit au quarré de EF; icelle EF sera trouvée de $\sqrt{54}$ partant la route EG sera $\sqrt{54} + 6$, qui est binome cinquième : car le moindre nom est commens. en longitude au nombre rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré dont la racine est incommens. en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouver tel binome, soit posé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy étant ajoutée au même quarré, la racine du tout sera le plus grand nom : Ainsi posant 4 pour le moindre nom, son quarré sera 16, dont la moitié 8 luy étant ajoutée seront 24, dont la racine sera $\sqrt{24}$; & partant $\sqrt{24} + 4$ sera binome cinquième.

PROBL. 18. PROP. LIV.

Trouver un binome sixième.

Soient trouvez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit : à l'un ny à l'autre comme nom-
bre quarré à
nombre quar-
ré (ce qu'on fe-
ra ajoutant en-
semble deux
nombres pre-
miers : Car par la 30. prop. 7. le total sera aussi

A.....C.... B

I.....

D—————

F

G

E—————

H—————

premier à chacun d'eux: & partant ne sera à l'un ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré par les choses démontrées à la fin du 8. livre) puis soit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne soit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres, soit une rationele proposée D: & par le corol. de la 6. prop. 10. soit fait que comme I est à AB, ainsi le quarré de D soit au quarré de EF: & ayant achevé comme en la 51. prop. 10. nous démontrerons comme là que EG est binome: Item que D & FG sont incommens. en longitude, & que le quarré de EF est plus grād que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous démontrerons comme en la 49. p. que par conversion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par conséquent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. prop. 10. les lignes droites EF & H, seront incommens. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy est incommens. en longitude: & que l'un ny l'autre d'iceux noms n'est commensurable en longitude à l'exposée rationele D, par les secondes def. EG fera binome sixième. Nous avons donc trouvé un binome sixième. Ce qu'il falloit faire.

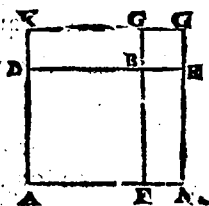
S C H O L I E.

La rationele proposée D soit 6: faisant comme 16 est à AB8, ainsi le quarré de D, c'est à sçavoir 36, au quarré de EF: icelle EF sera trouvée de 48: &

faisant que comme AB^2 est à AC^2 , ainsi 48 quarré de EE soit au quarré de FG : icelle FG sera trouvée de $\sqrt{30}$: partant la route EG sera $\sqrt{48} + \sqrt{30}$; qui est binome sixième. car l'un & l'autre nom est incommensurable en longueur au nombre rationnel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'un quarré, dont la racine est incommens. à iceluy plus grand nom. Or pour trouver plus promptement que dessus tel binome il n'y a qu'à prendre les racines quarrées de deux nombres non quarrés, dont l'un soit double de l'autre: Ainsi posant $\sqrt{12}$ pour le plus grand nom, l'autre sera $\sqrt{6}$; & partant $\sqrt{12} + \sqrt{6}$ sera binome sixième.

L E M M E

Les quarrés AB , BC étans conjoints à l'angle B , tellement que les côtes DB , BE fassent une seule ligne droite DE ; & par conséquent les côtes FB , BG aussi. une seule ligne droite FG : étant achevé le parallélogramme HK : Je dis qu'iceluy est quarré; & le rectangle FE moyen proportionnel entre les quarrés AB , BC ; & DC moyen proportionnel entre les quarrés AC , BC .



Car d'autant que DB est égale à FB , & BE à BG : la route DE sera égale à la route FG . Mais par la 34. prop. 1. la ligne DE est égale à l'une & à l'autre d'icelles AH , KC & FG à AK , HC : & par conséquent chacune d'icelles AH , KC est égale à l'une & à l'autre AK , HC , donc le parallélogramme HK est équilateral. Mais par la 19. pr. 1. il est aussi re-

Triangle. & partait quarré. Derechef, puis que DB, BE, sont egales à FB, BG, chacune à sa correspondante, comme DB est à BE, ainsi FB à BG. Mais par la 4. pr. 6. comme DB à BE, ainsi AB à FE: & comme FB à BG, ainsi FE, à BC: donc comme AB à FE, ainsi FE à BC: & partant FE est moyen prop. entre AB, BC. Et finalement, veu que comme AD à DK, ainsi KG à GC, icelles estans egales chacune à la sienne; en composant comme AK à DK, ainsi KC à GC. Mais comme AK à DK, ainsi AC à DC; & comme KC à GC, ainsi DC à BC: par la 11. prop. 6. Donc comme AC à DC, ainsi DC à BC, & par conséquent DC est moyen prop. entre AC, BC.

Or voila comme Commandin propose & demonstre ce Lemme: mais Clavius le propose ainsi.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra, le rectangle contenu sous les parties, est moyen proportionnel entre les quarréz d'icelles. Item le rectangle contenu sous la route, & une des parties, est moyen prop. entre le quarré de la route, & le quarré de ladite partie.

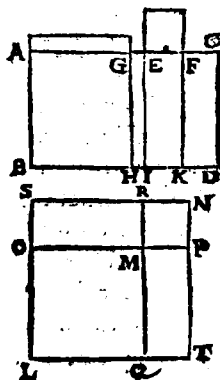
Ce qui est la même chose que dessus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationelle, & d'un binome premier; la ligne pouvant iceluy rectang. est binome. Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: Je dis, que la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationelle appelée binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom soit AE: donc par la def. AE, EC sont rationeles com-

menf. en puiffance feulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eft comm. en longitude, & auffi AE fera commenfurable en l'ogitude à la rationelle propofée AB. Soit coupée EC en deux également en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy eft commenfurable en longitude, fi fur icelle AE on applique un rectangle egal au quart du quarré de EC, c'est à dire au quarré de EF, & de'aillant d'une figure quarrée, il divifera icelle AE en parties commenf. en long. par la 8. prop. 10. foient donc icelles parties AG, GE : & par les poin s G, E, F foient menées GH, EI, FK parall. les à icelles AB, CD : puis par la 14. prop. 2. foient décrits les quarez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & difpofez en forte que OM, MP faffent une ligne droite : puis soit achevé le rectagle ST, lequel fera quarré par le lemme preced.



Maintenant, d'autant que par la construction le rectangle de AG, GE est egal au quarré de EF; les lignes AG, EF, GE seront proport. par la 17. prop. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI seront auffi proportionaux : parquoy EK fera moyen proport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarez LM, MN. Mais par le Lemme precedent OR est auffi moyen prop. entre iceux quarez LM, MN : donc OR, EK seront egaux. Mais par

la 43. prop. 1. OR, QP sont aussi égaux : & par la 36. prop. 1. EK est égal à FD : donc QP sera aussi égal à FD : & par conséquent tout le quarré LN égal à tout le rectangle AD : & par ainsi la ligne OP peut le rectangle AD : Je dis donc qu'icelle OP est binome.

Car puis que AG, GE ont été démontrées commens. en longit. la route AE sera aussi commens. en longit. à chacune d'icelles par la 16. p. 10. Mais AE est aussi cōmens. en longit. à AB, dōc'par la 12. pr. 10. icelle AB est aussi commens. en longit. à chacune d'icelles AG, GE : & partant AB étant rationele, AG, GE seront aussi rationeles : & par la 20. pr. 10. les rectangles AH, GI contenus sous icelles rationeles, seroient rationaux : donc aussi rationaux leurs égaux quarez LM, MN : & par conséquent les lignes OM, MP seront aussi rationeles. Et d'autant que AE est incommens. en longit. à EC, mais comm. à AG, & EC à sa moitié EF, par le scholie de la 14. pr. 10. AG, EF seront incomm. en longit. parquoy AH, EK qui ont mesme raison que AG, EF par la 1. prop. 6. sont aussi incommensurables par la 10. prop. 10. & par conséquent leurs égaux LM, QP : donc par la 10. prop. 10. les lignes OM, MP sont aussi incommensurable en longueur puis que par la 1. prop. 6. elles sont en même raison que LM, QP. Mais OM, MP, ont été démontrées rationeles : & partant elles sont rationeles commensurables en puissance seulement : donc la route OP pouvant le rectangle AD est binome par la 37. p. 10. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binôme premier, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & $AC 4 + \sqrt{12}$. Donc le rectangle AD sera $20 + \sqrt{300}$: Et puis que AE plus grand nom du binome est 4, Et EF moitié du plus petit nom EC , est $\sqrt{3}$, AG sera 3, GE 1. Donc le rectangle AH sera 15, & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera $\sqrt{15}$: Ainsi GI est 5, & $MP \sqrt{5}$. Mais EF est $\sqrt{3}$, & EI égale à AB : donc EK sera $\sqrt{75}$, & son double $ED \sqrt{300}$. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produit $MT \sqrt{75}$, égal à EK . Mais à iceluy MT est égal MS , dont MS, MT ensemble seront aussi $\sqrt{300}$. Or les quarrés LM 15 MN 5, font ensemble 20 : Partant tout le quarré LN est $20 + \sqrt{300}$, & son côté OP ou LY 15, $+ \sqrt{5}$, qui est binome sixième.

THEOR. 38. PROP. LVI.

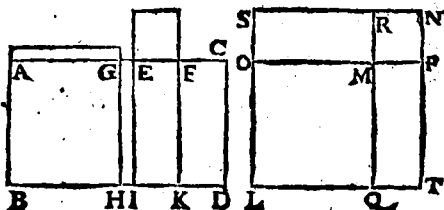
Si un rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD , compris de la rationele AB & du binome second AC : Je dis que (apres avoir fait pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD , est l'irrationele apelée bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommens. en longit. à la rationele AB : Item AG & EG (qu'on prouvera être commensurable en

longitude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. prop. 10. à leur toute AE seront par la 14. pr. 10. aussi incommensurables en longueur à icelle AB, laquelle estant rationele, icelles AG, GE

seront aussi rationeles: & par consequent commens.



en puis-

sance seulement à icelle rationele AB. Donc par la 22. pr. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux: & leurs egaux quarez LM, MN aussi mediaux: Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouvera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et d'autant que EC est commens. en longueur à la rationele AB, le rectangle ED sera rationel par la 20. prop. 10. aussi sera sa moitié EK: & par consequent son egal QP compris des deux mediales OM, MP: & par la 38. prop. 10. OP est bimediale premiere. Si donc un rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

• S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & ACV 48 + 6: donc le rectangle AD sera V 12000 + 30. Et puis que AE est V 48, & EC 6: EF sera 3, & son quarré 9.

auquel estant posé egal le rectangle de AG , GE , icelles seront $\sqrt{27}$, & $\sqrt{3}$: parquoy le rectangle AH sera $\sqrt{675}$, & par consequent la ligne OM , qui peut iceluy sera $\sqrt{675}$: ainsi GI sera $\sqrt{75}$, & MP $\sqrt{7}$. Or EC est 6 : partant ED double de MS $\sqrt{5}$ 625 , c'est à dire 15 , est 30 ; & par consequent MS , MT , seront aussi 30 . Parquoy tout le quarre LN composé des quarrez LM $\sqrt{675}$, MN $\sqrt{7}$, & des deux rectangles MS , MT 30 , sera $\sqrt{1200} + 30$, & son coste OP ou LT $\sqrt{675} + \sqrt{75}$, qui est bimediale première.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome troisiéme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationele nommée bimediale seconde.

Soit le rectangle AD , compris de la rationele AB & du binome troisiéme AC ; (apres avoir construit comme aux precedentes.) Je dis que la ligne OP , qui peut iceluy rectangle AD , est l'irrationele appelée bimediale seconde.

Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM , MP sont mediales commens. en puissance seulement: Item, d'autant que AC est binome troisiéme, EC est commensurable est puissance seulement à la rationele AB ; & par la 22. p. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EK : Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM , MP sont deux mediales commensura-

bles en puissance seulement, comprenant un rectangle medial, & par la 39. p. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 5, & ACV 32 + V 24 :
 Donc le rectangle AD sera V 800 + V 600. Mais
 d'autant que AE est V 32, & ECV 24; EF sera
 V 6, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle
 de AG, GE; & partant AG sera V 18, & GE V 2.
 Parquoy le rectangle AH sera V 450, & GI V 50;
 & par consequent la ligne OM est VV 450, & MP
 VV 50. Et puis que EI est 5, & ECV 24, le rectangle
 ED sera V 600, lequel est double de MT
 V 150. Donc tout le quarré LN, qui est composé des
 quarrés LM V 450, MN V 50, & des rectangles
 MS, MTV 600; sera V 800 + V 600 : & partant
 son costé OP est VV 450 + VV 50, qui est bi-
 mediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si un rectangle est compris d'une ligne
 rationele, & d'un binome quatriéme;
 la ligne qui peut iceluy rectangle est
 ligne Majeure.

Soit le rectangle AD, compris du binome quatriéme AC, & de la rationele AB : (apres avoir construit & démontré comme en la 55. prop.) Je dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD,

est l'irrationelle qu'on appelle ligne majeure.

Car puis que AC est binome quatrième, le plus grand nom AE est commensur. en longitude à la rationelle AB, & peut plus que EC du quarré d'une ligne qui luy est incomm. en longitude, & par la 19. pr. 10. le rectángle defaillant compris sous AG, GE, (qui est égal au quart du quarré de EC) divisera AE en AG. & EG incommens. en longitude : & les rectangles AH & GI seront incommens. par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Donc aussi incommens. leurs egaux quarrés LM & MN : & par conséquent les lignes OM, MP seront incommens. en puissance. Mais le rectángle AI compris des rationelles AB, AE, (qui est égal aux quarrés LM, MN) est rationel par la 20. prop. 10. Et le rectángle QP compris d'icelles lignes OM, MP est medial, car son égal EK est medial, comme son double EC par la 22. prop. 10. étant ED rationelle commens. en puissance seulement à AB : & par la 40. prop. 10. OP est ligne majeure. Si donc un rectángle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC $4 + \sqrt{8}$. Donc le rectángle AD sera $20 + \sqrt{200}$. Et puis que AE est 4, & EC $\sqrt{8}$: EF sera $\sqrt{2}$, au quarré de laquelle, sçavoir 2, ayant esté posé égal le rectángle de AG : GE : la ligne AG sera $2 + \sqrt{2}$, & GE $2 - \sqrt{2}$. partant le rectángle AH sera $10 + \sqrt{50}$, & GI $10 - \sqrt{50}$: & par conséquent OM est $\sqrt{10 + \sqrt{50}}$, & MP $\sqrt{10 - \sqrt{50}}$. Or EC estoit $\sqrt{8}$: donc ED double du rectángle MT $\sqrt{50}$, sera $\sqrt{200}$. La somme des

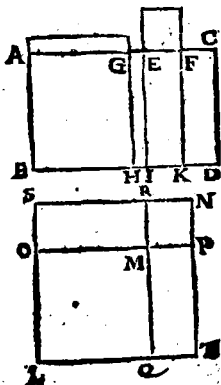
quarrez LM , MN , sera donc 20, à laquelle si on ajoute les plans $TMS \vee 200$, on aura pour tout le quarré LN $20 + \vee 200$: & partant son costé OP sera $\vee (10 + \vee 50) + \vee (10 - \vee 50)$, ou $\vee (20 + \vee 200)$ qui est ligne majeure.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome cinquième; la ligne qui peut iceluy rectangle, est ligné irrationele pouvant un rationel & un medial.

Soit le rectangle AD , compris de la rationele AB , & du binome cinquième AC : Je dis, (apres avoir construit & démontré comme en la 55. p.) que OP qui peut iceluy rectangle AD , est ligne irrationele, pouvant un rationel & un medial.

Car puis que AC est binome cinquième, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longit. & côme en la precedente, AG & GE seront incommens. en long. Et les lignes OM , MP seront incommens. en puissance, & l'égal au composé de leurs quarrés, sçavoir le rectangle AI , est medial par la 22. pr. 10. car les li-



gnes AB & AE sont rationeles commens. en puissance seulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, sont commens. en longit. par la 20. p. 10. ED est rationel: aussi sera sa moitié EK, & son egal QP compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP est ligne irrationele pouvant un rationel, & un medial. Si donc un rectanglé est compris d'une ligne rationele & d'un binome cinquième, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & ACV 8 + 2. Donc le rectangle AD sera V 200 + 10. Et d'autant que AE est V 8, & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle étant egal le rectangle de AGE, le costé AG sera V 2 + 1, & GE V 2 - 1: & partant le rectangle AH sera V 50 + 5, & la ligne OM V [V 50 + 5]: & MP V [V 50 - 5], puis que GI est V 50 - 5. Et pource que EI est 5, & EC 2; le rectangle ED sera 10: & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarréz LM, MN est V 200, à laquelle adjoûtant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN sera V 200 + 10: & par consequent son costé OP, est V [V 50 + 5] + V [V 50 - 5], ou bien V [V 200 + 10], qui est ligne pouvant un rationel, & un medial.

THEOR. 42. PROP. LX.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un binome fixième la ligne pouvant iceluy rectangle, est ligne qui peut deux mediaux.

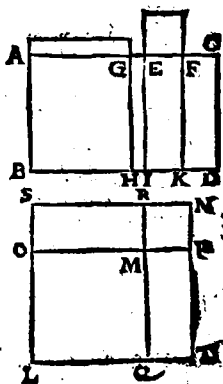
Soit.

Soit le rectangle AD, compris de la rationele AB, & du binome sixième AC: (apres avoir construit & démontré comme en la 55. prop. que OP peut iceluy rectangle AD.) Je dis qu'icelle OP est ligne pouvant deux mediaux.

Car puis que AC est binome sixième, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & si les

deux noms sont incommens. en longueur à la rationele AB: Et comme il a esté démontré à la 58. prop. 10. OM, MP seront incommensurables en puissance: aussi par la 22. prop. 10. le rectangle AI, qui est egal au composé de leurs quarrés est medial: Item ED qui est compris de deux rationeles commensurables en puissance seulement, est aussi medial par la mesme propos. aussi medial

sa moitié EK, & son egal QP compris d'icelles lignes OM. MP. Et de plus, iceluy rectangle QP, ou son egal EK, est incommens. au composé des quarrés LM, MN, sçavoir AI: car les lignes AE & EC estans incommens. en longueur, aussi AE & EF le seront: & partant par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AI & EK seront incommens. & par la 42. pr. 10. OP sera ligne pouvant deux mediaux. Parquoy, si un rectangle est compris, &c. Ce qu'il falloit prouver.



SCHOLIE.

La rationele AB soit 5 , $ACV 12 + V 8$. Donc le rectangle AD sera $V 300 + V 200$. Et pource que AE est $V 12$, & $ECV 8$: EF sera $V 2$, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE ; le côté AG sera $V 3 + 1$, & le costé $GEV 3 - 1$: Parquoy le rectangle AH sera $V 75 + 5$, & la ligne $OMV (V 75 + 5)$: & GI estant $V 75 - 5$, MP sera $V (V 75 - 5)$. Mais EC estant $V 8$, le rectangle ED , qui est double de $MTV 50$, sera $V 200$. Donc les quarez LM, MN , feront ensemble $V 300$, & les rectangles $SM, T V 200$: & partant tout le quarré LN sera $V 300 + V 200$: & par consequent son côté OP sera $V (V 75 + 5) + V (V 75 - 5)$, ou bien $V (V 300 + V 200)$, qui est ligne pouvant deux medians.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

Le quarré d'un binome appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé binome premier.

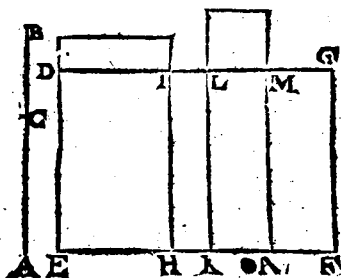
Soit le binome AB , le plus grand nom duquel est AC ; & sur la rationele DE soit appliqué par la 43. prop. 1. le rectangle DF egal au quarré de AB : Je dis que l'autre costé DG est binome premier.

Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC : & sur HI un autre rectangle IK egal au quarré de CB : Il est donc evident par la 4. prop. 2. que le reste LF est egal à

deux fois le rectangle de AC, CB : & en divisant LG également en M, & en menant MN parallele à DE, chaque rectangle LN, MF sera egal au rectangle de AC, CB. Et d'autant que AB est binome, AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement ; & leurs quarez seront rationaux, & leurs egaux rectangles DH & IK aussi rationaux : & par la 21. prop. 10. les costez DI & IL seront rationeles commens. en longueur à la rationele DE, & entr'elles par la 12. prop. 10. Et par la 16. pr. 10. toute DL sera commens. en longueur à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle sera rationele & commens. en longueur à DE rationele : Et d'autant que par la 12. prop. 10. le rectangle de AC, CB est medial, son double LF sera aussi medial : & par la 23. prop. 10. iceluy medial LF estant appliqué sur la rationele LK, l'autre costé LG sera aussi rationel incommens. en longueur à icelle LK, c'est à dire à DE, à laquelle DL estant commens. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG sont incommens. en longit. mais elles sont rationeles : elles seront donc commens. en puissance seulement ; & par la 37. prop. 10. DG est binome. Je dis en outre que c'est binome premier.

Car il apert par le lemme de la 54. prop. de ce livre, que le rectangle de AC, CB est moyen proportion. entre les quarez d'icelles AC, CB : donc aussi LN moyen prop. entre DH, IK : & par consequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle DI, IL sera egal au quarré de LM : Et d'autant que les quarez de AC, CB sont commens. (car icelles AC, CB sont posées commensurables

en puissance) leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi commens. Donc aussi commensurables en longueur des lignes DI, IL par les 1. pr. 6. & 10. pr. 10. Et d'autant que les deux quarrés de AC & CB sont plus grands



que deux fois leur rectangle, par le lemme qui suit la 44. prop. de ce Livre : DK. sera plus grand que LF ; & par conséquent DL plus grand nom que LG : car icelles lignes sont entr'elles comme DK à LF, par la 1. p. 6. Et puisque le rectangle de DI, IL appliqué sur DL, est égal au quarré de LM, c'est à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, & que les parties DI, IL sont commens. en longueur : icelle DL peut plus que IG du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant esté démontrée commens. en longit. à la rationele DE, par les secondes def. DG sera binome premier. Donc le quarré d'un binome appliqué sur une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Le binôme AB soit $\sqrt{45} + 3$, & la rationele DE 6 : d'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{45}$, son quarré est 45 ; lequel appliqué sur DE 6, fait l'autre

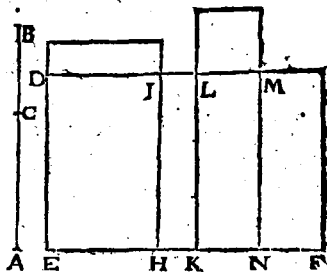
costé DI de $7\frac{1}{2}$: Et le moindre nom CB étant 3, son quarré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de $1\frac{1}{2}$, & partant la toute DL est 9. Or le rectangle de ACB est $\sqrt{45}$, & son double LF $\sqrt{1620}$. Donc la ligne FG sera $\sqrt{45}$: & par consequent la toute DG sera $9 + \sqrt{5}$, qui est binome premier.

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'une bimediale premiere appliqué sur une ligne rationnelle, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB divisée en ses noms en C , dont le plus grand soit AC : (apres avoir construit comme en la precedente). Je dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. prop. 10. AC , CB , sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationnelle commens. en longueur à DE . Mais icelles deux lignes AC & CB étant mediales, leurs quarrés sont mediaux : & partant leurs egaux rectangles DH ,



IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK, par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial: Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longueur à la rationelle DE: & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. DG sera binome. Je dis davantage qu'il est binomé premier. Car il se prouvera comme en la precedente, que DL est le plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur. Nous avons aussi montré que LG plus petit nom, est commens. en longueur à la rationelle DE: & partant par les secondes def. DG est binome second. Parquoy le quarré d'une bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

La bimediale AB soit $\sqrt{108} + \sqrt{12}$. & la rationelle DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est $\sqrt{108}$, son quarré est 108, lequel estant appliqué sur la rationelle DE 4. le costé DI sera $\sqrt{6\frac{3}{4}}$. Ainsi aussi le moindre nom estant $\sqrt{12}$, son quarré est 12: & par consequent IL, est $\sqrt{\frac{1}{4}}$, & la toute DL $\sqrt{12}$. Or le rectangle de ACB est 6: & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le costé LG 3. Donc la toute DG sera $\sqrt{12} + 3$, qui est binome second.

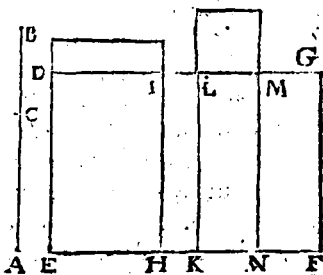
THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'une bimediale seconde appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre costé binome troisième.

Soit la bimediale seconde AB , divisée en ses noms en C , desquels AC soit le plus grand. (Après avoir construit comme en la 61. pr.) Je dis que DG est binome troisième.

Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 10. AC , BC sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle medial; partant les quarrés d'icelles AC , CB seront commens. & mediaux: & aussi leurs egaux rectangles DH , IK : & par la 16. prop. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH , IK : donc par le coroll. de la 24. pr. 10. DK sera aussi medial, & étant appliqué sur la rationelle DE , par la 23. pr. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longueur à icelle DE . Derechef, puis que le rectangle de AC , CB est medial, son double LF le sera aussi: & iceluy LF étant appliqué sur la rationelle LK , son autre costé LG sera rationel incommens. en longueur à LK : c'est à dire à DE . Donc l'une & l'autre d'icelles lignes DL , LG , est rationelle & incommens. en longit. à la rationelle DE . Et d'autant que comme AC à CB , ainsi le quarré de AC au rectangle de AC & CB , par la 1. prop. 6. Il est evident par la 10. pr. 10. que le quarré sera incomm. au rectangle (estans les deux lignes incommens. en longit.) Mais par la 16. prop.

10. au quarré de AC est commens. le composé des quarez de AC, CB : & au rectangle de AC, CB est commensur. son double : Donc le composé des quarez de AC, CB, c'est à dire le rectangle DK, est incommens. au double du rectangle de AC, CB : c'est à dire au rectangle LF, par le scholie de la 14. prop 10. parquoy les lignes DL, LG qui sont en mesme raison que DK, FL sont incomm. en long, par la 10. p.



10. mais elles sont rationeles, & partant comm. en puissance seulement : & par la 37. prop. 10. DG est binome.

Je dis davantage, qu'il est binome troisieme. Car il a esté démontré que les deux noms sont incommensurables en longueur à la rationele DE : Et se prouvera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur : & par les secondes def. DG est binome troisieme. Donc le quarré d'une bimediale seconde, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

AB soit $\sqrt{72} + \sqrt{8}$, & DE 4. Donc DH sera $\sqrt{72}$, IK $\sqrt{8}$, & LN ou MF $\sqrt{24}$, qui appliquez sur DE ; DI sera $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, IL $\sqrt{\frac{1}{2}}$ & LM ou MG,

$\sqrt{1\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{8}$, & LG $\sqrt{6}$.
Parquoy la toute DG est $\sqrt{8} + \sqrt{6}$, qui est binome
troisième.

THEOR. 46. PROP. LXIV.

Le quarré d'une ligne majeure appliqué sur
une ligne rationele, fait l'autre costé
binome quatriéme.

Soit la ligne majeure AB, divisée en ses noms
en C, dont le plus grand soit AC : (apres avoir
construit comme en la 61. p. de ce livre) je dis que
DG est binome quatriéme.

Car puis que AB est ligne majeure, par la 40.
p. AC, & CB sont incommens. en puissance,
comprenant un rectangle medial, & le composé
de leurs quarréz rationel ; le rectangle DK egal
au composé d'iceux quarréz est aussi rationel, le-
quel étant appliqué sur la rationelle DE, son autre
costé DL sera aussi rationel commens. en longit. à
icelle DE par la 21. pr. 10. Item le rectangle LF,
double du rectangle de AC, CB, sera medial, le-
quel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele
DE, par la 23. pr. 10. LG sera rationele incommens.
en longit. à DE. Et partant par la 13. pr.
10. les rationeles DL & LG seront incommensurables
en long. Donc commens. en puissance seulement : & par la 37. p. 10. DG est binome.

Je dis d'avantage qu'il est binome quatriéme.
Car puisque les lignes AC & CB sont incommens.
en puissance, leurs quarréz seront incommens.
partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, &
les lignes DL, IL incommens. Et d'autant que l'on

demonstrera comme en la 61. prop. que DL est plus grande que LG, & que sur icelle DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'une figure quatrée, lequel divise icelle DL à I en parties incomm. en long. par la 19. p. 10. DL, qui est commens. en longit. à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longit. & par les secondes def. DG est binome quatrième. Donc le quarré d'une ligne majeure, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

La ligne majeure AB soit $\sqrt{10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}} + \sqrt{10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}}$, & la rationele DE soit 5. Donc le rectangle DH sera $10 + \sqrt{37\frac{1}{2}}$, IK $10 - \sqrt{37\frac{1}{2}}$, & LN ou ME $\sqrt{62\frac{1}{2}}$; qui appliquez sur DE, le costé DI sera $2 + \sqrt{1\frac{1}{2}}$, IL $2 - \sqrt{1\frac{1}{2}}$ & LM, ou MG $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. Parquoy DL sera 4, & LG $\sqrt{10}$: & par consequent la toute DG est $4 + \sqrt{10}$, qui est binome quatrième.

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'une ligne pouvant un rationel & un medial appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé binome cinquième.

Soit la ligne pouvant un rationel & un medial AB, divisée en ses noms au point C, dont le plus grand est AC: [apres avoir construit comme en la 61. prop.) Je dis que DG est binome cinquième.

Car puis que AB est ligne pouvant un rationel & un medial, AC, CB, par la 41. pr. 10. sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial: Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi medial, lequel étant appliqué sur la rationelle DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB étant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF étant appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationelle DE, son autre costé LG sera ligne rationelle commens. en longit. à icelle DE: & par la 13. prop. 10. les rationelles DL, LG seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. DG sera binome. Je dis de plus, qu'il est binome cinquième. Car LG est commensurable en longueur à la rationelle DE, & si on prouvera comme aux precedentes, que DL peut plus que LG, du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur, & par les secondes definitions DG est binome cinquième. Donc le carré d'une ligne pouvant un rationel & un medial, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{125+5} + \sqrt{125-5}$, & la rationelle DE 5. Donc le rectangle DH sera $\sqrt{125+5}$, IK $\sqrt{125-5}$, & LN ou MF 10, qui appliquez sur DE, le costé DI sera $\sqrt{5+1}$, IL $\sqrt{5-1}$, & LM ou MG 2. Parquoy DL sera $\sqrt{20}$, & LG 4, & par consequent la toute DG est $\sqrt{20+4}$, qui est binome cinquième.

THEOR. 48. PROP. LXVI.

Le quarré d'une ligne pouvant deux mediaux apliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé binome sixième.

Soit la ligne pouvant deux mediaux AB, divisée en ses noms au point C, dont le plus grand est AC. (Après avoir construit comme aux preced.) je dis que DG est binome sixième.

Car puis que AB est ligne pouvant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarréz aussi medial: par ainsi il est evident que DK. & LF sont mediaux & incommens. & par la 23. p. 10. iceux rectang. estans appliquez sur lignes rationelles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commens. en puissance seulement à la rationele DE. (*Voyez la figure de la page 248.*) Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF lesquels sont incommens. seront aussi incommens. en longitude, par la 10. pr. 10. Donc les rationeles DL, LG seront commens. en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longitude à la rationele DE; & comme il a esté démontré aux precedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longitude, & par les secondes def. DG est binome sixième. Parquoy le quarré d'une ligne pou-

vant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demon-
trer.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{252} + \sqrt{72})} + \sqrt{(\sqrt{252} - \sqrt{72})}$, & DE 6. Le rectangle DH sera donc $\sqrt{252} + \sqrt{72}$, IK $\sqrt{252} - \sqrt{72}$, & LN, ou MF $\sqrt{180}$, qui appliquez à DE, le costé DI est $\sqrt{7} + \sqrt{2}$, IL $\sqrt{7} - \sqrt{2}$, & LM ou MG $\sqrt{5}$. Partant DL est $\sqrt{28}$, & LG $\sqrt{20}$; & par consequent la route DG est $\sqrt{28} + \sqrt{20}$, qui est binome sixième.

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six.6.

La ligne commensurable en longitude au binome, est aussi binome de mesme ordre.

Soit quelconque binome AB divisé en ses noms au point C, desquels AC est le plus grand, & CB le moindre: soit la ligne droite DE commensurable en longitude au binome AB. Je dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que A B.

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la route AB est à la route DE, ainsi la retranchée AC, soit à la retranchée DF, par la 19. p. 5. le reste CB sera au reste FE, comme la route AB à la route DE. Et

pource que AB, DE, sont commens. en long. par la 10. pr. 10. AC, DF, & CB, FE, seront aussi commens. en longitude. Mais par la 37. pr. 10. AC, CB, sont

rationeles. Donc aussi DF, FE sont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE, en permutant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement: donc aussi DF, FE seront rationeles commens. en puissance seulement. Et partant par la 37. prop. 10. DE est binome. Maintenant je dis qu'il est aussi binome de mesme ordre que AB.

Car si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit commens. en longueur, aussi par la 15. prop. 10. DF pourra de mesme plus que FE. Et si AC est commensurable en longueur à la rationele proposée, aussi sera DF par la 12. prop. 10. vû que l'une & l'autre est commensurable en longueur à la mesme AC; & partant chacune d'icelles AB & DE sera binome premier. Que si CB est commensurable en longueur à la rationele proposée, aussi sera FE: ainsi AB & DE seront binome second: mais si AC & CB sont incommens. en longueur à la rationele, aussi seront DF & FE: & par les def. AB & DE seront binome troisieme. Que si AC peut plus que CB du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longit. aussi par la 15. pr. 10. DF pourra de même plus que FE. Parquoy nous demontrerons comme dessus, que AB, DE seront binome 4^e. ou 5^e. ou 6^e. Partant AB, DE, seront binomes de mesme ordre. Donc la ligne commens. en longueur, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

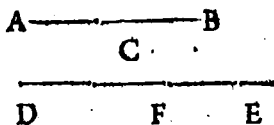
La ligne commensurable en longueur à

une bimediale, est aussi bimediale de
mesme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, divisée en ses
noms au point C, desquels AC est le plus grand,
& CB le plus petit; & à icelle AB soit commens.
en longitude la ligne DE. Je dis qu'icelle DE est
aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

Car (apres avoir construit comme en la prece-
dente) le reste CB sera au reste FE, comme la tou-
te AB à la toute DE: & partant par la 10. p. 10.
AC sera commensurable en longitude à DF; & CB
à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la
24. pr. 10. DF, FE commensurables à icelles, sont
aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ain-
si CB à FE: en permutant, comme AC à CB, ainsi
DF à FE. Mais AC, CB sont commens. en puis-
sance seulement, par la 38. p. 10. Donc aussi DF,
FE seront commens. en puissance seulement, par
la 10. p. 10. mais elles

sont aussi mediales: &
partant par la 38. ou 39.
prop. 10. DE sera bime-
diale. Davantage je dis
qu'elle est en mesme or-



dre que AB. Car d'autant que comme AC est à
DF, ainsi BC à FE, par la 22. pr. 6. le quarré de AC
sera au quarré de DF, comme le rectangle de AC,
EC est au rectangle de DF, FE: (érans iceux re-
ctangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez
proport.) Mais le quarré de AC est commensura-
ble au quarré de DF, (pource que les lignes AC,
DF ont été démontrées commens. en long.) Donc

par la 10. prop. 10. les rectangles feront aussi commens. Que si l'un est rationel, l'autre le sera aussi: & par ainsi AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que si l'un des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & consequemment AB & DE feront bimediales secondes, par la 39. prop. 10. Ainsi DE fera bimediale, & en même ordre que AB. Parquoy la ligne commensurable en longueur à une bimediale, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commensurable à une ligne majeure est aussi ligne majeure.

Soit la ligne majeure AB, divisée en ses noms en C, & à icelle soit commensurable DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne majeure.

Car (apres avoir construit comme aux precedentes) AC sera à CB comme DF à FE, & AC commensurable à DF, & CB à FE: mais par la 41. prop. 10. AC & CB sont incommens. en puissance; les lignes DF & FE le seront donc aussi. Item puisqu'icelles lignes AC, CB, DF, FE sont proport. par la 22. prop. 6. leurs quarez seront proportionaux: & en composant, les deux de AC & BC seront au seul de CB, comme les deux de DF & FE sont au seul de FE: & en permutant, les deux quarez de AC & CB, seront aux deux de DF & FE, comme le seul de CB est au seul de FE. Mais les lignes CB, FE étans commens. leurs quarez seront aussi commensurables; & partant les deux de DF & FE, seront par la 10. prop. 10. commens. aux deux

deux de AC & BC : & seront rationaux comme iceux. Item, on prouvera comme en la precedente, que le rectangle de DE & FE est commensurable au rectangle de AC & BC ; lequel étant medial par la 40. prop. 10. aussi sera celuy de DF & FE par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE sera ligne majeure. Donc la ligne commens. à une ligne majeure, est aussi majeure. Ce qu'il falloit demontrer.

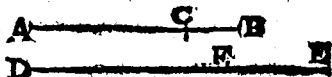
THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commensurable à une ligne pouvant un rationel & un medial, est aussi ligne pouvant un rationel & un medial.

Soit la ligne AB pouvant un rationel & un medial, divisée en ses noms en C, & à icelle soit commensurable la ligne DE. Je dis qu'icelle DE est aussi ligne pouvant un rationel & un medial.

Car (apres telle construction qu'aux precedentes) on prouvera que comme AC & BC sont incommensur. en puissance, aussi le seront DF & FE. Item que le composé des quarrez de AC & BC sera commens. au

composé des quarrez de DF & FE : & le rectangle de AC & BC aussi com-



mensur. au rectangle de DF & FE. Mais par la 41. p. 10. le composé des quarrez de AC & BC est medial, & leur rectangle rationel : Parrant le composé des quarrez de DF & FE sera aussi medial, & leur rectangle rationel : & par ainsi la route DE sera ligne pouvant un rationel & un medial, par

la fufdite 41. prop. de ce livre. Parquoy la ligne commenſ. à une ligne pouvant un rationel , &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commenturable à une ligne pouvant deux mediaux , eſt auſſi ligne pouvant deux mediaux.

Soit la ligne AB pouvant deux mediaux , diviſée en ſes noms au point C , & à icelle ſoit comm. DE. Je diſ qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouvant deux mediaux.

Car (apres avoir conſtruit comme aux precedentes) on prouvera tout de meſme que DF & FE ſont incommenſ. en puiſſance; que le compoſé de leurs quarrez eſt medial , & leur rectangle auſſi medial: Mais on prouvera auſſi comme en la 69. pr. que le compoſé des quarrez de AC & BC , eſt au compoſé des quarrez de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE : & encore comme en la 68. p. que le quarré de CB eſt au quarré de EF , comme le rectangle de AC & BC, eſt au rectangle de DF & FE: donc par la 11. prop. 5. le compoſé ſera au compoſé , comme le rectangle au rectangle : Et en permutant , comme le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſ. à leur rectangle , auſſi le compoſé des quarrez de DF & FE eſt incommenſ. à leur rectangle , & par la 42. pr. 10. DE eſt ligne pouvant deux mediaux. Parquoy la ligne commenſ. à une ligne pouvant deux mediaux , &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

THEOR. 54. PROP. LXXII. Six. 7.

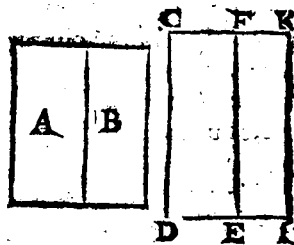
Si une ſuperficie rationele , & une mediale

sont jointes; la ligne qui peut tout le composé est binome, ou bimediale première, ou ligne majeure, ou ligne pouvant un rationel & un medial.

Soient jointes deux superficies A rationele, & B mediale: je dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale première, ou ligne majeure, ou ligne pouvant un rationel & un medial.

Car premièrement les deux superficies ne scauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales.) Soit donc premièrement A plus grande que B: Et sur la rationele CD soit appliqué le rectangle CE egal à A: & sur EF un autre rectangle FI egal à B, afin que tout le rectangle CI soit egal aux deux superficies proposées A & B. Et puis que A est rationele, & B mediale, aus-

si le rectangle CE sera rationel, & FI medial, lesquels étans appliquez à la rationele CD; CF sera rationele commens. en longueur à icelle CD par la 21. prop. 10. & FK aussi ratio-



nele, mais incommens. en longueur à la mesme CD par la 23. pr. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK seront incommens. en longueur: donc commensurables en puissance seulement: & par la 37. pr. 10. CK fera binome divisé en ses noms en

F. Mais puis que A a été posée plus grande que B, aussi CE sera plus grand que FI; & partant CF sera plus grande que FK par la 1. p. 6. Parquoy CF fera le plus grand nom du binome CK. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'une ligne qui luy est commensurable, ou incommensurable en longitude. Si commens. (étant CF commens. en longitude à la rationelle CD) CK sera binome premier par la 1. des secondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est binome. Si incommens. CK sera binome quatrième, par la 4. des secondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI est ligne majeure.

Que si la figure A étoit plus petite que B, aussi le rectangle CE seroit plus petit que le rectangle FI; & CF seroit le plus petit nom commens. à la rationelle CD: & par ce moyen CK seroit binome second, ou cinquième: si binome second, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est bimediale première. Si binome cinquième, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI est ligne pouvant un rationel & un medial. Si donc une superficie rationelle, & une mediale, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

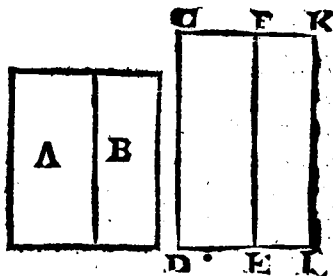
Si la superficie rationelle A est 7. & la mediale B $\sqrt{48}$, la ligne pouvant icelles ajoutées ensemble sera $2 + \sqrt{3}$, qui est binome premier: si A & B sont 21 & $\sqrt{432}$, la ligne pouvant icelles sera $\sqrt{12} + 3$, qui est binome second: mais elle sera $\sqrt{8} + \sqrt{6}$ qui est binome troisième, si A est 14 & B $\sqrt{192}$: mais si A est 6, & B $\sqrt{32}$, elle sera $2 + \sqrt{2}$, qui est binome quatrième: si A est 3 & B $\sqrt{8}$, elle sera $\sqrt{2} + 1$ qui est bino-

me cinquième : & si A est 3, & $B \sqrt{24}$ la ligne pouvant le composé d'icelles sera $\sqrt{3} + \sqrt{24}$, qui est binome 6 : mais si A est 4, & $B \sqrt{18}$, la ligne pouvant la superficie composée d'icelles sera $\sqrt{16} + \sqrt{18}$, qui est mediale premiere : mais si A est 6, & $B \sqrt{12}$, la ligne pouvant le composé d'icelles sera $\sqrt{36 + 12}$ ou $\sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt{3 - \sqrt{3}}$: & finalement si A est 2, & $B \sqrt{8}$, la ligne pouvant icelles sera $\sqrt{4 + 8}$ ou $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}$, qui est ligne pouvant un rationnel & un medial.

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux superficies mediales incommensurables sont jointes, la ligne qui peut le composé d'icelles est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.

Soient jointes ensemble deux superficies mediales incommens. A & B : Je dis que la ligne droite qui peut le composé d'icelles superficies A & B est bimediale seconde, ou ligne pouvant deux mediaux.



Ayant fait sur la rationelle CD pareille construction qu'en la pree. prop. les rectangles CE & FI seront mediaux & incomm. Et par la 23. p. 10. CF , FK seront rationelles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationelle CD : & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus

grand nom: Car CF & FK ne ſçauroient eſtre egales, d'autant qu'elles ſont incommenſ. en longit. Donc CF peut plus que CG du quarre d'une ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. Si commenſ CK eſt binome troiſième par la 3. d. ſec. [étans les deux noms CF, FK incomm. en long. à la rationele CD) & par la 57. prop. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale ſeconde: Si incommenſ par la 6. des ſec. def. CK ſera binome ſixième: & la ligne qui peut le rectangle CI eſt par la 60. p. 10. ligne pouvant deux mediaux, Parquoy ſi deux ſuperficiës mediales incommenſ. ſont jointes, &c. Ce qu'il ſaloit démonſtrer.

S C H O L I E.

Si A eſt $\sqrt{50}$, & B $\sqrt{48}$: la ligne pouvant le compoſé d'icelles ſera $\sqrt{V18} + \sqrt{V8}$, qui eſt bimediale ſeconde; mais ſi A eſt $\sqrt{12}$, & B $\sqrt{8}$: la dite ligne pouvant icelles ſera $\sqrt{V12 + V8}$, ou bien $\sqrt{V3 + 1} + \sqrt{V3 - 1}$, qui eſt ligne pouvant deux mediaux.

C O R O L L A I R E.

De toutes ces choſes on peut facilement colliger que la binome & les autres lignes irrationeles qui ſurvent icelle ſont différentes entr'elles & à la mediale. Car le quarre d'une ligne mediale, appliqué ſur une ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele, à laquelle il eſt appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarre d'un binome, fait l'autre coſté binome premier par la 61. p. 10.

Le quarre d'une bimediale premiere, fait l'autre coſté binome ſecond, par la 62. p. 10.

Le quarre d'une bimediale ſeconde, fait l'autre coſté binome troiſième, par la 63. pr. 10.

Le carré d'une ligne majeure, fait l'autre costé binome quatriéme, par la 64. p. 10.

Le carré d'une ligne pouvant un rationel & un medial fait l'autre costé binome cinquiéme, par la 65. p. 10.

Le carré d'une ligne pouvant deux mediaux, fait l'autre costé binome sixiéme, par la 66. p. 10.

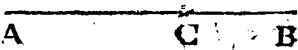
Mais il faut toujours entendre qu'ils soient appliquez sur une ligne rationele. Et puis que tous ces costez sont differens entr'eux, il est manifeste que toutes icelles lignes irrationeles sont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES
des lignes irrationeles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'une ligne rationele, est retranchée une ligne rationele commensurable en puissance seulement à la route; le reste est irrationel: & soit apelé Residu.

Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en sorte que AB & AC, soient rationeles commensurables en puissance seulement:

Je dis que le reste CB  B est irrationel.

Car par la 1. p. 6. comme AB est à AC, ainsi le carré de AB est au rectangle de AB & AC: mais AB est incommens. en longitude à AC. Donc par la 10. pr. 10 le carré de AB est incommens. au rectangle de AB & BC: Partant aussi à son double: mais les quarez de AB & AC, sont posez commens. Donc par la 16. prop, 10, les deux ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que

le quarré de AB est incommens. au double du rectangle de AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarréz de AB & AC, seront aussi incommens. à deux fois le rectangle de AB & AC, lesquels avec le quarré de CB, étans egaux aux deux quarréz de AB & AC par la 7. pr. 2. il s'ensuivra que le quarré de CB avec deux fois le rectangle de AB & AC seront incommens. à iceux deux rectangles. Et par le coroll. de la 17. pr. 10. deux fois le rectangle avec le quarré de CB, (ou les deux quarréz de AB & AC) seront incommens. au quarré de CB : Mais iceux quarréz de AB, AC, étans rationaux ; (car ils sont décrits sur lignes rationeles) le quarré de CB sera irrationel ; Partant la ligne CB sera aussi irrationele : Et icelle soit apelee Apotome ou Residu. Si donc d'une ligne rationele est retranchée, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

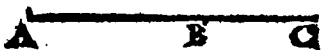
La rationele AB soit 2., & AC $\sqrt{3}$: Donc le reste BC sera $2 - \sqrt{3}$. Or en cette prop. & es 3 suivantes. où Euclide montre l'origine des Apotomes ou residus, il ne veut dire autre chose, sinon que si des lignes dont il s'agit es prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. on retranche le plus petit nom du plus grand, le reste sera irrationel, qu'on appellera Apotome, ou residu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'une ligne mediale, est retranchée une mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant avec icelle un rectangle rationel; le reste est irrationel : Soit apelé residu medial premier. Soit la bimediale AC, de laquelle est retranchée

La mediale AB, en sorte que AB & AC sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel : Je dis que le reste BC est irrationel.

Car puis que AB & AC sont mediales, leurs quarez



seront mediaux, & partant incommens. au double du rectangle de AB & AC, lequel est rationel, un seul rectangle ayant été posé rationel. Mais par la 7. prop. deux fois le rectangle de AB & AC, avec le quarré de BC sont egaux aux quarez de AB & AC : donc aussi deux fois le rectangle de AB, AC, avec le quarré de BC seront incommens. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. prop. 10. le quarré de BC sera incommens. au double du rectangle de AB & AC : mais iceluy double est rationel : donc le quarré de BC sera irrationel ; & partant la ligne BC aussi irrationele, qu'on appellera residu medial premier. Parquoy si d'une ligne mediale, &c. Ce qu'il faloit prouver.

S C H O L I E.

La mediale AC soit $\sqrt{54}$, & la retranchée AB $\sqrt{24}$: donc le reste BC sera $\sqrt{54} - \sqrt{24}$.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'une ligne mediale est retranchée une ligne mediale commensurable en puissance seulement à la route, comprenant avec icelle un rectangle medial ; le reste.

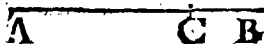
est irrationnel : Soit appelé résidu medial second.

Soit là mediale AB , de laquelle est retranchée la mediale AC , en sorte que AB & AC soient commens. en puissance seulement, comprenant un rectangle medial: Je dis que le reste CB est irrationnel.

Car puis que les quarez de AB & AC sont commensurables par la

16. prop. $\bullet$. le composé

d'iceux sera aussi commens. à un chacun d'eux: & chacun d'iceux étant medial, (pource que les lignes AB , AC sont posées mediales) aussi le composé d'iceux quarez est medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme aussi le double du rectangle de AB , AC , puis que le seul rectangle de AB , AC est posé medial. Veu donc que par la 7. prop. 2. le composé des quarez de AB , AC , est égal au double du rectangle de AB , AC , avec le carré de CB : le composé des quarez de AB , AC , qui est medial, excèdera le double du rectangle de AB , AC , qui est aussi medial, du carré de CB . Mais par la 27. prop. 10. un medial n'excède pas un medial, d'un rationnel: donc le carré de CB n'est pas rationnel, & parant il est irrationnel: & conséquemment la ligne BC aussi irrationnelle, qu'on appellera résidu medial second. Parquoy si d'une ligne mediale on retranche une ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouver,



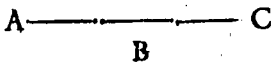
SCHOLIE.

La mediale AB soit $YY18$, & $ACY8$: donc le reste CB sera $YY18 - YY8$.

THEOR 39. PROP. LXXVII.

Si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, faisant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarrés rationel; le reste sera irrationel: Soit appellé ligne mineure.

Soit la ligne droite AC, de laquelle est retranchée AB incommens. en puissance à la toute AC, comprenant avec icelle un rectangle medial, & que le composé de leurs quarrés soit rationel: Je dis que le reste BC est irrationel.



Car puisque le composé des quarrés de AB, & AC est rationel, il est incommens. au rectangle de AC & AB, lequel est medial: partant aussi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le composé des quarrés de AB, AC est egal au double du rectangle de AB, AC, ensemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le composé d'iceux quarrés de AB, AC sera aussi incommens. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy composé est posé rationel, par la 10. def. le quarré de BC est irrationel, & la ligne BC irrationele, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

S C H O L I E.

Soit la ligne $ACV(18 + \sqrt{108})$, & $ABV(18 - \sqrt{108})$: le reste BC sera donc $\sqrt{108}$ — $\sqrt{18 - \sqrt{108}}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, faisant avec icelle un rectangle rationnel, & le composé de leurs quarrés medial: le reste sera irrationnel: Soit appelé ligne faisant avec superficie rationelle un tout medial,

Soit la ligne droite $A \text{ ————— } C$
 AC , de laquelle est re- B
 tranchée AB incommens.

en puissance à la toute, comprenant, avec icelle un rectangle rationnel, & que le composé de leurs quarrés soit medial: Je dis que le reste BC est irrationnel.

Car puis que le rectangle de AB & AC est rationnel, aussi sera son double, & partant par la 10. def. il sera incommens. au composé des quarrés d'icelles AB , AC , lequel est medial, c'est à dire irrationnel. Mais le composé d'iceux quarrés par la 7. prop. 2. est égal au double du rectangle de AB , AC , avec le quarré de BC . Donc aussi le double du rectangle de AB , AC est incommensurable au double d'iceluy rectangle avec le quarré de BC : Et par la 17. prop. 10. iceluy double rectangle sera

aussi incommens. au carré de BC. Et puis qu'iceluy double rectangle est rationel, par la 10. definit. le carré de BC sera irrationel, & la ligne BC aussi irrationele, laquelle soit apellée ligne faisant avec une superficie rationele, un tout medial : & ce d'autant que le carré d'icelle ligne étant ajouté avec une superficie rationele fait un tout medial, comme il aparoitra à la 109. prop. 10. Parquoy si d'une ligne droite est retranchée, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Si AC est $\sqrt{16 + 72}$, & AB $\sqrt{16 - 72}$;
le reste BC sera $\sqrt{16 + 72} - \sqrt{16 - 72}$.

THEOR. 61. PROP. LXXIX.

Si d'une ligne droite, est retranchée une ligne droite incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & incommensurable au composé de leurs quarrés aussi medial; le reste est irrationel: soit apellé ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Soit la ligne droite AB, de laquelle est retranchée la ligne AC incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial incomm. au composé de leurs quarrés aussi medial: Je dis que le reste BC est irrationel,

Car puis que par la 7. p. 2. le composé des quarrés de AB, AC, est égal au double du rectangle de AB,

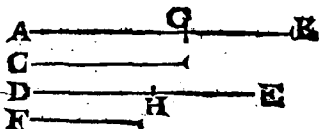
AC avec le quarré de BC: iceluy composé des quarréz excedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. prop. 10. un medial n'excede pas un medial d'un rationel: Donc le quarré de BC n'est pas rationel; & partant est irrationel, & la ligne BC aussi irrationelle; laquelle on appellera ligne fai ànt avec une superficie mediale un tout medial; parce que le quarré d'icelle ligne avec une superficie mediale fait un tout medial. Parquoy si d'une ligne droite est retranchée une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit demontrer

S C H O L I E.

Si AB est $\sqrt{(\sqrt{180} + \sqrt{60})}$, & AC $\sqrt{(\sqrt{180} - \sqrt{60})}$, le reste CB sera $\sqrt{(\sqrt{180} + \sqrt{60})} - \sqrt{(\sqrt{180} - \sqrt{60})}$.

L E M M E.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F , & que GB excez d'entre AB & C soit egal à HE excez d'entre DE & F ; aussi en permutāt l'excez d'entre AB & DE sera egal à l'excez d'entre C & F . Car puis que GB est l'excez d'entre AB & C , AG sera egal à C : En la même maniere DH sera egal à F . Donc l'excez d'entre AG & DH sera egal à l'excez d'entre C & F , puis que ces grandeurs cy sont



egales à celles-là, chacune à la sienne, & partant ajoutant à AG & DH choses egales GB & HE , l'excez d'entre les toutes AB & DE sera toujours egal à l'excez d'entre C & F . Ce qui estoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De ces choses apert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles seront aussi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au residu ne peut convenir qu'une seule ligne droite rationele commensurable en puissance seulement à la route.

Soit le residu AB, auquel convienne la ligne droite BC, rationele commens. en puissance seulement à la route AC : Je dis qu'à icelle AB ne peut convenir autre ligne en la même sorte.

Car s'il est possible, soit une autre ligne BD, s'accordant avec icelle AB, en sorte que AD & BD soient rationeles commens. en puissance seulement. Maintenant par la 7. prop. 2. les deux quarrés de AC, BC sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrés de AD, & BD sont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du même quarré de AB; & en permutant, par le lemme precedent les quarrés ex-

—————
A B C D

céderont autant les quarrés, que les rectangles excèdent les rectangles: & d'autant que les quarrés sont rationaux, leur excez sera rationel, par le lemme qui precede la 43, prop. 10. & partant les rectangles étans mediaux,

(pour ce que par la 22. prop. 10. un seul d'iceux rectangles est medial, & par le coroll. de la 24. prop. 10. son double est aussi medial) leur excez sera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut convenir autre ligne que BC, rationele communf. en puissance seulement à la toute. Parquoy au residu ne peut convenir, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

THEOR 63. PROP. LXXXI.

Au residu medial premier, ne s'acorde qu'une seule ligne mediale communf. en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle un rectangle rationel.

Soit le residu medial premier AB, auquel la mediale BC s'acorde en sorte que AC & BC, soient mediales communf. en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel: Je dis qu'à icelle AB ne peut convenir autre ligne droite que BC en la même sorte.

Car si faire se peut, en
soit un autre BD. Main- 
tenant par la 7. prop. 2.

il se prouvera comme en la preced. que l'excez d'entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, est tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles est rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux est rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui sont mediaux, (étans décrits sur lignes mediales)

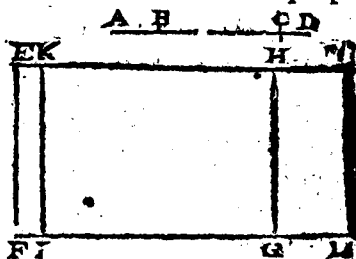
les) feroit auffi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc à AB ne peut convenir autre ligne mediale que BC, qui foit commens. en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle un rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au residu medial second, ne peut estre conjointe qu'une seule ligne mediale commensurable en puissance seulement à la toute, & comprenant avec icelle un rectangle medial.

Soit conjointe au residu medial second AB la mediale BC, écommensurable en puissance seulement à la toute AC, & faisant avec icelle un rectangle medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut pas convenir une autre ligne que BC, en la même sorte.

Car si faire se peut, en soit conjointe une autre BD en la sorte requise. Et sur la rationele proposée EF, soit appliqué le rectangle EG égal aux deux quarrés de AC, BC; & à la même EF soit encore appliqué EL égal au quarré



de AB : parquoy par la 7. pr. 2. le reste KG sera égal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item sur la même rationele soit encore appliqué le rectangle EL égal aux 2. quarrés de AD, BD : Et puisque le rectangle EL est égal au quarré de AB, aussi KL sera égal à

deux fois le rectangle de AD , BD , par la susdite
17. prop. 2.

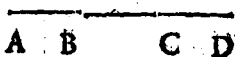
Maintenant les quarez de AC & BC sont mediaux (étans faits de lignes mediales) & si le double rectangle de AB & BD doit estre medial : partant leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux : lesquels appliquez sur la rationele EF , auront les autres costez EH & KH rationaux comm. en puiss. seulement à EF par la 23. p. 10. en apres, le quarré de AC étant au rectangle de AC & BC , par la 1. p. 6. comme AC est à BC , qui sont incommens. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC & BC : & partant aussi à son double KG . Item le quarré de BC est commens. au quarré de AC , & par la 16. p. 10. le rectangle EG egal à iceux quarez, sera incomm. au seul quarré de AC , auquel KG est incommens. Et par la 14. p. 10. EG & KG seront incommens. aussi seront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10. pr. 10. lesquelles étans rationeles seront incommens. en puissance seulement : & par la 74. p. 10. EK fera residu & KH sa convenable. Par même discours (si on maintient que DC soit aussi adjointe à AB selon le requis) EK se trouvera residu, & KM sa convenable : ce qui seroit contre la 80. pr. 10. Donc au residu medial AB ne peut s'adjindre autre convenable que BC . Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, convient une seule ligne droite incommens. en puissance à

la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & le composé de leurs quarez rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle convienne BC incommens. en puissance à la toute AC, & faisant le composé de leurs quarez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut être adjointe autre ligne que BC qui fasse le mesme.

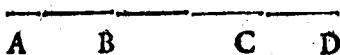


Car si faire se peut en soit ajouté une autre BD, qui soit pareillement incommens. en puissance à la toute AD, & faisant le composé des quarez de AD, BD rationel, & le rectangle compris sous icelles AD, BD, medial. Il se prouvera comme en la 80. prop. 10. qu'il y a même excès entre le composé des quarez de AC, BC, & le composé des quarez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excès d'entre les quarez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pour ce que l'un & l'autre composé est rationel : donc aussi l'excès d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles étans mediaux, l'excès d'iceux ne peut être rationel. Donc à la ligne mineure AB on ne peut ajouter autre ligne convenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde une seule ligne, &c. Ce qu'il fa-
loit prouver.

THEOR. 66. PROP. LXXXIV.

A la ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, s'accorde une seule ligne incommens. en puissance à la toute, & faisant avec icelle un rectangle rationel; mais le composé de leurs quarez medial.

Soit la ligne AB faisant avec une superficie rationelle un tout medial, à laquelle AB s'accorde la ligne



BC, incommens. en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle un rectangle rationel, mais que le composé de leurs quarez soit medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui fasse la mesme chose.

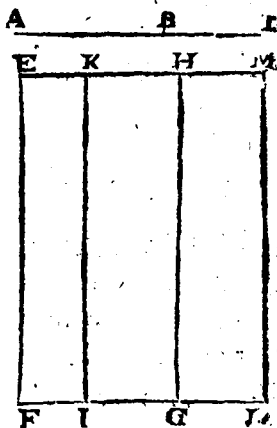
Car s'il est possible, en soit encore une autre BD : il se prouvera comme en la 80. proposition 10. que les quarez de AC, & BC, excèdent les quarez de AB & BD d'un mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excèdent deux fois le rectangle de AB & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel, si à la ligne AB on pouvoit encore joindre BD incommensurable en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à une ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, se conjoint une seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant avec icelle un rectangle medial, & incommens. au composé de leurs quarez qui est aussi medial.

Soit la ligne AB faisant avec une superficie mediale un tout medial, à laquelle AB s'accorde BC incommensurable en puissance à la toute AC, & comprenant avec icelle un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarez, qui est aussi medial. Je dis qu'à icelle AB ne peut s'adjoindre autre ligne que BC, qui fasse le proposé.

Car si faire se peut, en soit ajoutée une autre BD. Puis soit fait même construction qu'en la 81. prop. 10. Donc le composé des quarez de AC & BC étant medial, & incommens. à deux fois le rectangle de AC & BC, aussi medial, leurs egaux rectangles EG & KG seront mediaux & incomm. Et par la 23. p. 10. étans appliquez sur la rationelle EF, leurs autres côtes EH & KH seront lignes rationelles, & par la 1. proposition 6. & 10. prop. 10.



commens. en puissance seulement; (puis que leurs rectangles sont incommens.) & par la 74. prop. 10. EK sera residu auquel KM sera convenablement ajoutée: Par même discours [si on dit que BD soit aussi convenable à AB, & fasse ce qui est proposé] EK se trouvera residu, & KM sa convenable: ainsi le residu EK n'auroit pas une seule convenable, contre la 80. prop. 10. On ne pouvoit donc pas adjoindre à AB, autre ligne convenable que BC, incommensurable en puissance à la toute, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

DEFINITIONS TROISIE'MES.

Estant proposée une ligne rationele, & un residu: Lors que la toute composée du residu & de sa convenable ou ajoutée, peut plus que la convenable, du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur.

1. Si la toute est commensurable en longueur à la rationele proposée; le residu soit apelé residu premier.
2. Mais si la convenable ou ajoutée est commensurable en long, à la rationele proposée; soit apelé residu second.
3. Que si l'une ny l'autre n'est commensurable en longueur à la rationele proposée; soit apelé residu troisième.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'ajoutée, du quarré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur.

4. Si la toute est commensurable en longueur à la rationele proposée ; soit apelé residu quatrième.

5. Mais si l'ajoutée est commensurable en longueur à la rationele ; soit apelé residu cinquième.

6. Que si ny l'une ny l'autre n'est commensurable en longueur à la rationele ; soit apelé residu sixième.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouver un Apotome ou residu premier.

Estans trouvez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous avons enseigné au second scholie de la 29. prop. de ce livre) desquels l'excez AC ne soit carré, soit posée la rationele D, à laquelle EF soit commens. en

longit. & partant icelle

EF sera aussi rationele;

puis apres par le corol.

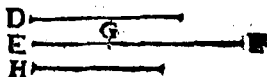
de la 6. prop. 10. soit fait

que comme le nombre

AB est au nombre AC, ainsi le carré de EF soit au carré de GF. Je dis que EG est residu premier.

Car puis que les quarrez de EF, GF, qui sont comme nombre à nombre, sont commens. par la 10. pr. aussi les lignes EF, GE seront commens. au

A.....C.....B



moins en puissance : & EF étant rationele, GF le sera aussi. Mais d'autant que les deux nombres AB, AC ne sont entr'eux comme nombres quarréz : aussi les quarréz de EF, GF ne seront entr'eux comme nombres quarréz : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF sont incommens. en longit. elles sont donc rationeles commens. en puissance seulement : & partant le reste EG sera résidu par la 74. pr. 10.

Je dis davantage qu'il est résidu premier : car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle CF : soit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB est au nombre AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de GF, par conversion de raison, comme AB sera à CB, ainsi le quarré de EF sera au quarré de H. Mais AB, CB sont nombres quarréz : Donc les quarréz de EF & H sont entr'eux comme nombres quarréz ; & partant par la 9. p. 10. les lignes EF & H sont commens. en longitude. Par ainsi la toute EF commensurable en longitude à la rationele D, peut plus que la convenable GF, du quarré de la ligne H, qui luy est commensurable en longitude ; & partant par la 1. des troisièmes def. EG sera résidu premier. Nous avons donc trouvé un résidu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D soit 9, EF 6 : AB 9, CB 4, & par conséquent AC est 5 : faisant donc que comme 9 est à 5, ainsi le quarré de EF, c'est à dire 36, soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{20}$: & partant le reste EG sera 6 — $\sqrt{20}$, qui est résidu premier.

Or il apert par les def. preced. que Apotome ou residu n'est autre chose que ce qui restera si de deux nombres posez rationaux commensurables en puissance seulement on soustrait le moindre du plus grand ; ce qui se fait par l'interposition du signe — : & par ainsi il n'y-a aucune difference entre le binome & le residu, sinon qu'en celuy-la les deux noms sont joints par le signe +, & en cettuy-cy, l'un est soustrait de l'autre par le signe —. Parquoy pour promptement trouver un residu de quelque espece que ce soit, il n'y-a qu'à trouver le binome de même espece, ainsi qu'il a été dit cy-devant, puis au lieu du signe + aposer le signe —. Comme au scholie de la 49. prop. nous avons trouvé ce binome premier $8 + \sqrt{48}$ mais en changeant seulement le signe nous aurons $8 - \sqrt{48}$. pour residu premier : & ainsi des autres.

PROBL. 20. PROP. LXXXVII.

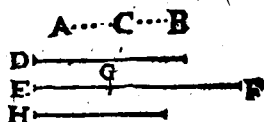
Trouver un residu deuxième.

Estant trouvez deux nombres quarez AB, CB. (comme en la precedente proposition) & l'exposée rationele D, soit prise GF, commens. en longueur à icelle D, laquelle sera aussi rationele: puis soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. prop. 10. Je dis que EG est residu second.

Car puis que les quarez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commensur. par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF seront aussi commens. au moins en puissance : & GF étant rationele, EF le sera aussi. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarez de

GF, ne font entr'eux comme nombres quarez, par la 9. prop. 10. GF, EF, seront incommens. en longueur; donc les rationeles GF, EF, sont commensurable en puissance seulement: & partant par la 74. prop. 10. le reste EG est residu.

Je dis aussi qu'il est residu second. Car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est à AB, ainsi le quarré de GF au quarré



de EF; en changeant, comme AB sera à AC, ainsi le quarré de EF sera au quarré de GF. Maintenant nous demontrreron comme en la precedente que la ligne H est commensurable en longueur à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'ajoutée GF, du quarré de H, qui luy est commens. en longueur, comme aussi à la rationele proposée D: par les troisièmes def. EG sera residu second. Nous avons donc trouvé un residu second, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D soit 9. FG 5: AB 9, CB 4: & par consequent AC 5: faisant donc que comme AC 5 est AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF: icelle EF sera $\sqrt{45}$; & partant EG sera $\sqrt{45}-5$, qui est residu second.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouver un residu troisième.

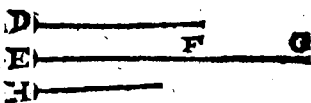
Ayant trouvé les deux nombres quarez AB

CB, comme en la proposition 86, soit pris un autre nombre I, (comme nous avons enseigné en la 51. prop. de ce livre) qui ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: puis

étant exposée la ratione D, soit fait que comme I est à

AB, le quarré de D soit au quarré de EG, lesquels quarez par la 6. prop. 10.

A....C....B
I.....



seront commensurables: & partant les lignes D & EG aussi commens. au moins en puissance. Donc D étant ratione, aussi EG sera ratione. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarez de D & EG, ne sont en raison de nombres quarez, par la 9. prop. 10. les lignes D & EG seront incommens. en longitude. Derechef, soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Je dis que EF est residu troisieme.

Car puis que les quarez de EG, GF, étans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF seront aussi commens. au moins en puissance. Mais EG étant ratione, GF le sera aussi. Et puis que AB, AC, & partant aussi les quarez de EG, GF, ne sont entr'eux comme nombres quarez; par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF seront incommens. en longitude. Donc EG, GF sont rationeles commensurables en puissance seulement: & partant puis que de EG est ôtée GF commens. en puissance à icelle, par la 74. prop. 10. le reste EF sera residu.

Je dis qu'il est aussi résidu troisiéme : Car puis que comme I est à AB, ainsi le quarré de D est au quarré de EG, & comme AB à AC, ainsi le quarré de EG au quarré de GF ; en raison egale, comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne sont entr'eux comme nombres quarez, ny par consequent aussi les quarez de D & GF : parquoy par la 9. prop. 10. les lignes D & GF sont incommens. en longueur. Donc l'une & l'autre d'icelles EG, GF est incommens. en longueur à la rationele proposée D. Et comme en la 86. prop. on prouvera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy est commens. en longueur : Et par les tierces def. EF sera résidu troisiéme, qu'il falloit trouver.

S C H O L I E.

La rationele D soit 6, & soit fait que comme le nombre 16, est à 9, ainsi le quarré de D, sçavoir 36, soit au quarré de EF. & iceiuy sera 54, & par consequent la ligne EF $\sqrt{54}$. Mais faisant que comme AB 9, est à AC 5, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG ; icelle FG sera $\sqrt{30}$, & par consequent EG sera $\sqrt{54} - \sqrt{30}$, qui est résidu troisiéme.

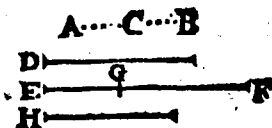
PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouver un résidu quatriéme.

Estans trouvez (comme nous avons enseigné au 3. scholie de la 29. prop.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'un ny à l'autre AC, CB, come nombre quarré à nom-

bre carré: soit proposé la rationelle D, à laquelle soit commensurable en longitude EF, laquelle sera par conséquent aussi rationelle. Que si on acheve de construire comme en la 86. prop. on démontrera comme là que EG est résidu: & d'avantage, je dis qu'il est résidu quatrième.

Car EF étant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, soit du carré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le carré de EF au carré de GF; par con-



version de raison, comme AB à CB, ainsi le carré de EF au carré de H. Mais les nombres AB, CB, ne sont comme nombre carré à nombre carré: donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H seront incommens. en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'ajoutée GF du carré de H, qui luy est incommens. en longitude, & la même EF est commensurable en longitude à la rationelle D: partant par les 3. def. EG sera résidu quatrième. Nous avons donc trouvé un Apotome ou résidu quatrième. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle D soit 9, EF 6: faisant donc que comme AB 9 est à AC 6, ainsi 36 carré de EF soit au carré de FG, icelle sera $\sqrt{24}$, & par conséquent le reste EG sera $6 - \sqrt{24}$, qui est résidu quatrième.

PROBL. 23. PROP. XC.

Trouver un résidu cinquième.

Etans trouvez les deux nombr. AC, CB comme en

la prop. precedente soit fait même construction qu'en la 87. puis soit démontré comme en icelle que GE est residu. Je dis en outre qu'il est residu 5^e. Car FE peut plus que GF du quarré de H: Et comme en la 86. prop. nous démontrerons par conversion de raison, que comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H; & comme en la precedente, les lignes EF & H seront incommensurables en longueur: & la convenable GF commensurable en longueur à la rationelle D. Parquoy par les 3. def. EG sera residu cinquième. Nous avons donc trouvé un residu cinquième. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationelle D soit 9, FG 6, faisant que comme AC 6, est à AB 9, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF, iceluy sera 54, & par consequent la ligne EFV 54; & le reste EGV 54—6, qui est residu cinquième.

PROBL. 24. PROP XCI.

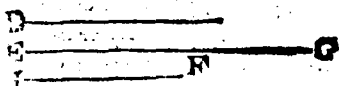
Trouver un residu fixième.

Etans trouvez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. tels que AB ne soit à l'un ny à l'autre d'iceux AC, CB: & I à l'un ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: soit exposée la rationelle D, & achevée la construction comme en la 88. prop. Nous démontrerons donc comme là, que D & EG sont incommensurables en longueur, & que EF est residu:

en après, que D & FG feront aussi incommens. en longitude; & partant l'une & l'autre d'icelles EG, FG est incommensurable en longitude à la rationele proposée D. Maintenant, que EG puisse plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous démontrerons comme en la 89. prop. être incommensurable en longitude à icelle EG.

A.....C.....B

I.....



Donc puis que la toute EG peut plus que la convenable FG, du quarré de H qui luy est incommensurable en longitude, & que EG ny FG n'est commens. en longitude à la rationele proposée D, par la dernière des 3. def. EF sera residu sixième. Nous avons donc trouvé un residu sixième. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La rationele D soit 9; & soit fait que comme 19 est à AB 12, ainsi 81 quarré de D soit au quarré de EF; lequel sera trouvé de 108. & par consequent icelle EF sera $\sqrt{108}$; & faisant que comme AB est à AC 7, ainsi 108 soit au quarré de FG; icelle FG sera $\sqrt{63}$. & par consequent le reste EG sera $\sqrt{108} - \sqrt{63}$, qui est residu sixième.

Or nous trouverons encores (comme enseigne Theon) les six residus susdits, ainsi qu'il ensuit.

S'il faut trouver pour exemple le residu premier: soit trouvé par la 49. prop. 10. le binome premier AD, du

quel le plus grand nom est AC , & le moindre CD ; puis soit coupé de AC la ligne CB égale à CD . Je dis que AB est residu premier. Car d'autant que AC, CD sont rationeles commens. en puissance seulement. Aussi AC, BC seront rationeles commens. en puissance seulement : Donc par la 74. pr.

10. AB est residu. Espource A —————
que AC peut plus que CD . ou $B \quad C \quad D$

CB du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longit. & AC est commens. en longitude à la rationele proposée par la def. du binome premier, AB sera residu premier par la 1. des tierces def. Par la même maniere seront trouvez tous les autres residus, sçavoir est le 2^e. si du second binome nous ôtons le moindre nom du plus grand, &c.

Ainsi ayant trouvé le binome premier $AD9 + \sqrt{45}$, si du plus grand nom $AC9$, on ôte le moindre nom, restera le residu AB de $9 - \sqrt{45}$, & ainsi des autres.

THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

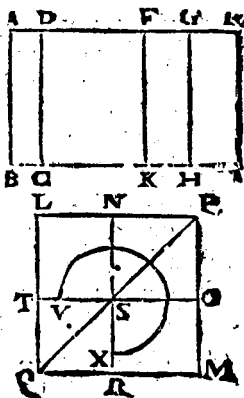
Soit le rectangle AC compris de la rationele AB , & du residu premier AD : Je dis que la ligne qui peut iceluy rectangle est residu.

Au residu AD soit la convenable DE , laquelle soit coupée en deux également au point F , puis sur la ligne AE soit appliqué un rectangle defaillant d'une figure quarrée, & égal au quart du quarré de DE , qui est le quarré de FE , & soit iceluy rectangle compris sous AG, GE : En apres, soient

menées

ménées les lignes FK, GH, EI parallèles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongée en K, H & I : puis soit fait le quarré LM égal au rectangle AH, & le quarré NO égal au rectangle EH, ayant avec LM l'angle LPM commun. Donc les quarez LM, NO, par la 26. prop. 6. seront au long d'un même diamètre, lequel soit PQ : soient continuées les lignes NS, OS, afin d'achever le gnomon VX. Maintenant, FE est moyenne proport. entre AG & GE, par la 17. pr. 6. car par l'hypothese le quarré de EF est égal au rectangle de AG & GE, & par la 1. pr. 6. le rectangle KE sera milieu proport. entre les deux rectangles AH & HE: il le sera aussi entre leurs égaux quarez LM & NO. Mais par le lemme de la 34. pr. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarez : Donc KE, ou DK son égal, sera égal au rectangle LO: & par conséquent KG à LS, (étant HE égal à NO.) Iceluy GK sera aussi égal à SM : par ainsi le rectangle DH sera égal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM est égal au rectangle AH. Donc le rectangle AC sera égal au quarré TR. Maintenant je dis que la ligne TS, qui peut le rectangle AC est residu.

Car puis que AD est residu premier, & DE sa convenable: les deux lignes AE & DE sont ratio-



neles commens. en puissance seulement, étant la toute AE commens. en longueur à la rationelle AB, & pouvant plus que l'ajoutée DE, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: Et par la 18. pr. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG GE commens. en longit. & par la 16. pr. 10. ils seront commens. en longit. à la totale AE, laquelle étant commensurable en longit. à la rationelle AB, par la 12. prop. 10. AE, AG, GE, AB, seront toutes rationelles commens. en longueur: & par la 20. pr. 10. les rectangles AH & HE seront rationaux, & par conséquent leurs egaux quarrés LM & NO aussi rationaux, & les lignes TO & SO rationnelles. Pareillement, les deux lignes DF & FE étans égales & commens. elles le seront aussi à leur toute DE, par la 16. pr. 10. laquelle DE étant rationelle, DF & FE seront aussi rationelles commens. en puissance seulement à AB, comme leur toute DE: & par la 22. pr. 10. leurs rectangles CF & KE seront mediaux. Mais le rectangle LO est égal au medial KE, partant aussi medial & incommens. au quarré rationel NO, donc par la 1. p. 6. & 10. p. 10. leurs côtez TO & SO seront incommens. en longit. & pour autant qu'ils sont rationaux, ils seront commens. en puissance seulement, & par la 74. pr. 10. TS est residu. Si donc un rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

La rationelle AB fait 8, & AD 9— $\sqrt{45}$: DE est donc $\sqrt{45}$, & sa moitié DF $\sqrt{11\frac{1}{4}}$: mais AG sera $7\frac{1}{2}$, & GE $1\frac{1}{2}$. Donc le rectangle BE est 72, AH 60, HE 12, CF $\sqrt{720}$ & AC $72\sqrt{5}-1880$, & le

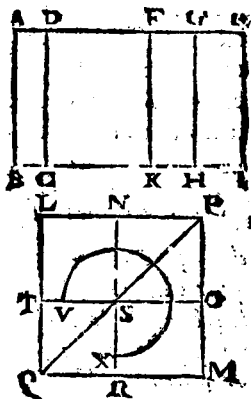
rectangle de AG, GE est $11 \frac{1}{4}$. Parquoy le quarré LM sera 60, & NO 12: & partant la ligne LP est $\sqrt{60}$, & NP $\sqrt{12}$: & par consequent LN , ou TS sera $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, qui est residu; & son quarré TR est $72 - \sqrt{2880}$, egal au rectangle AC .

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est residu medial premier.

Soit le rectangle AC , compris de la rationele AB , & du residu second AD . Je dis (apres avoir construit comme en la precedente, & démontré comme là que le rectangle AC est egal au quarré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC , est residu medial premier

Car puis que AD est residu second, & DE sa convenable, les deux lignes AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, la convenable DE étant commensurable en longueur à la rationele AB : & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longueur; & par la 18. p. 10. le rectangle defaillant aura les deux costez AG & GE commensurables en longueur, & par la 16. prop. 10. ils seront



aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. prop. 10. icelle totale étant commensurable en longueur à la rationelle AB, aussi le seront AG & GE, qui sont rationelles [car elles sont commensurables à leur totale AG, qui est rationelle] commens. en puissance seulement à la rationelle AB, & par la 22. pr. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux: partant mediaux leurs égaux q̄arrez LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales. Pareillement DE étant commensurable en longueur à la rationelle AB, aussi le sera sa moitié FE, & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel: partant aussi rationel son égal rectangle LO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommensurables en longueur: (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. pr. 10.) & par la 75. pr. 1. TS est residu medial premier. Si donc un rectangle compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

La rationelle AB soit 4. $AD \sqrt{45} - 5$: DE est donc 5, & sa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est $6\frac{1}{4}$, auquel étant égal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$ parquoy le rectangle HE, ou le quarré NO sera $\sqrt{20}$: & partant son costé SO est $\sqrt{\sqrt{20}}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{\sqrt{500}}$: de laquelle étant osté SO, restera TS $\sqrt{\sqrt{500}} - \sqrt{\sqrt{20}}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720} - \sqrt{20}$. Mais le rectangle AC est

autant : car multipliant AB 4 par AD $V45 - 5$, viendra aussi $V720 - V20$ Donc ST residu medial premier peut le rectangle AC .

THEOR. 70. PROP. XCIV.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu troisieme; la ligne pouvant iceluy rectangle, est residu medial second,

Soit le rectangle AC , compris de la rationele AB , & du residu troisieme AD : (apres avoir construit comme en la 92. prop. 10.] Je dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC , [comme nous avons demontré en la susdite prop.) est residu medial second.

Car puis que AB est residu troisieme, & DE fa convenable, les lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement, tant entr'elles, qu'à la rationele AB : mais AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est commensurable en longitude, & par la 18. pr 10. AG & GE seront commens. en longitude, & à leur totale AE par la 16 pr. 10. Et seront rationeles comme icelle: mais AE est commens. en puissance seulement à la rationele AB , & par la 14. pr. 10 AG & GE seront commensurables en puissance seulement à AB : Et par la 22. proposition 10, les rectangles AH & HE seront mediaux: donc aussi mediaux leurs egaux quarrés LM & NO , & leurs costez TO & SO seront lignes mediales. Pareillement DE étant incomm. en long. à la rationele AB , aussi le sera sa

moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF étant rationele comme sa double DE, le rectangle KE fera medial, partant aussi medial son egal LO, compris des deux mediales commens. en puissance seulement TO & SO : car leurs quarréz LM, NO sont commens. l'étans leurs egaux rectangles AH & HE. Or ils ne scauroient être commens. en longueur : car il faudroit par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. que LO & NO fussent aussi commensurables & par consequent leurs egaux rectangles KE & HE : ce qui n'est pas. Donc par la 76. p. 10. TS est residu medial second. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il fa-
loit demontrer.

S C H O L I E.

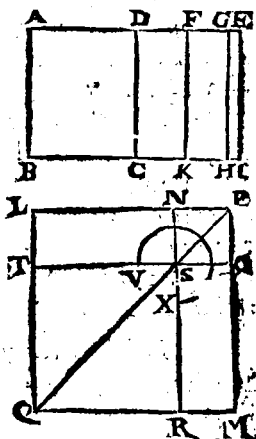
La rationele AB soit 4, & AD $\sqrt{54} - \sqrt{30}$: donc DE est $\sqrt{30}$; sa moitié DF $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, & son quarré $7\frac{1}{2}$: lequel étant appliqué sur la ligne AE $\sqrt{54}$, & de saillant d'une figure quarrée, les costez du rectangle appliqué, sçavoir AG, GE, seront $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, & $\sqrt{1\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $\sqrt{864} - \sqrt{480}$, BE $\sqrt{864}$, CE $\sqrt{480}$, AH $\sqrt{600}$, DK $\sqrt{120}$, & HE $\sqrt{24}$. Mais le quarré LM tant egal à AH, il sera aussi $\sqrt{600}$, NO egal à HE $\sqrt{24}$: & partant les costez d'iceux quarréz, sçavoir TO, SO sont $\sqrt{\sqrt{600}}$, $\sqrt{\sqrt{24}}$: & par consequent TS est $\sqrt{\sqrt{600}} - \sqrt{\sqrt{24}}$, & son quarré TR $\sqrt{864} - \sqrt{480}$, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu quatriéme, la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationelle AB, & du residu quatrième AD: (apres avoir construit comme en la 92. p. 10. & démontré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC). Je dis qu'icelle ligne TS est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatrième, & DE sa convenable, les lignes AE & DE sont rationelles commens. en puissance seulement; & AE qui est commens. en longit. à la rationelle AB, peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incomm. en long. & par la 19. p. 10. AG & GE seront incommens. en longueur: partant par la 1. pr. 6. & 10. p. 10. les rectangles AH & HE seront incommensurables, aussi seront donc leurs egaux quarrés LM & NO: partant les lignes



TO & SO seront incommens. en puissance: Mais AE étant commens. en longit. à la rationelle AB, par la 20. p. 10. le rectangle AI sera rationel: partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrés LM & NO. Pareillement DE étant commensurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. prop. 10. aussi sera sa moitié KE: & par conséquent son egal LM sera aussi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales, (car

elles sont incommensur. en puissance.) & le composé de leurs quarrés étant rationel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 6. AD 9 — $\sqrt{54}$: donc DE est $\sqrt{54}$. & sa moitié DF $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, son quarré $13\frac{1}{2}$, lequel appliqué sur AE 9, & defaillant d'une figure quarrée, les costez AG, GE seront $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$, & $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{2}}$. Parquoy le rectangle AC sera $54 - \sqrt{1944}$. BE 54, AH 27 + $\sqrt{243}$ DK $\sqrt{486}$, & HE 27 — $\sqrt{243}$. Mais le quarré LM étant égal à AH, sera aussi 27 + $\sqrt{243}$, & NO égal à HE 27 — $\sqrt{243}$; & partant leurs costez TO, SO sont $\sqrt{(27 + \sqrt{243})}$, & $\sqrt{(27 - \sqrt{243})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(27 + \sqrt{243})} - \sqrt{(27 - \sqrt{243})}$, & son quarré TK $54 - \sqrt{1944}$, égal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. XCVI.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele & d'un residu cinquième, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du residu cinquième AD : [apres avoir construit comme en la 92. pr. 10. & démontré comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). Je dis qu'icelle TS est ligne faisant avec une superficie rationele, un tout medial.

Cat puis que AD est residu cinquième, & DE sa convenable, les lignes AE & DE sont rationeles commensurables en puissance seulement, & DE est

commensurable en longitude à la rationelle AB, & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longit. & par la 19. prop. 10. les lignes AG & GE sont incommens. en longitude, & comme en la precedente TO & SO seront incommens. en puissance. Mais AE étans incommensurables en longitude à la rationelle AB, le rectangle AI sera medial par la 22. prop. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarréz LM & NO. Pareillement, DE étant commensurable en longitude à la rationelle AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi le sera sa moitié KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommens. en puissance TO & SO, desquelles le composé de leurs quarréz fait un tout medial, & par la 78. prop. 10. TS sera ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

La rationelle AB. soit 4. AD $\sqrt{54-6}$. donc DE est 6. & sa moitié DF 3. son quarré 9. auquel étant egal le rectangle de AGE : AG sera $\sqrt{12\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{2}}}$. & GE $\sqrt{12\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{2}}}$. Mais le rectangle AC sera $\sqrt{864-24}$. BE $\sqrt{864}$. AH $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$. DK 12. & HE $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$. NO $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$. & leurs costez TO, SO, $\sqrt{(\sqrt{216 + \sqrt{72}})}$. & $\sqrt{(\sqrt{216 - \sqrt{72}})}$ & par consequent TS est $\sqrt{(\sqrt{216 + \sqrt{72}}) - \sqrt{(\sqrt{216 - \sqrt{72}})}}$. & son quarré TR sera $\sqrt{864-24}$.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si un rectangle est compris d'une ligne rationele, & d'un residu fixiéme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu fixiéme AD : (apres avoir construit comme en la 92. prop. 10.) Je dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme il a été démontré en la susdite prop.) est ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Car puis que AD est residu fixiéme, & DE sa convenable, AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele AB; & AE peut plus que DE du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur. Et par la 19. pr. 10. AG, & GE seront incommens. en longit. Et comme en la 95. prop. 10. TO & SO seront incommens. en puissance; & tout ainsi qu'en la precedente, le rectangle AI étant medial, le composé de leurs egaux quarez LM & NO, sera aussi medial; Item DE étant commens. en puissance seulement à la rationele AB, par la 22. prop. 10. le rectangle CE sera medial : aussi le sera donc sa moitié KE, & son egal LO. Et AE, DE étans incommens. en longit. par la 1. prop. 6. & 10. p. 10. les rectangles AI, CE, seront incommens. & puis que CE est commens. à sa moitié KE, par la 14. prop. 10. KE sera incommens. à AI : & partant le medial LO (egal à KE.) compris des lignes TO & SO incommens. en puissance, est incommens. au com.

posé des quarez d'icelle TO & SO (egal à AI) medial : Parquoy par la 79. prop. 10. le reste TS sera ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial. Parquoy si un rectangle est compris d'une ligne rationele , &c. Ce qu'il falloit prouyer.

S C H O L I E.

La rationele AB soit 6 , AD $\sqrt{108} - \sqrt{63}$, donc DE est $\sqrt{63}$, & sa moitié DE $15\frac{3}{4}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, AG $\sqrt{27} + \sqrt{11\frac{3}{4}}$, GE $\sqrt{27} - \sqrt{11\frac{3}{4}}$: mais le rectangle AC sera $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, DK $\sqrt{56}$, & HE $\sqrt{972} - \sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972} + \sqrt{405}$, NO $\sqrt{972} - \sqrt{405}$, & leurs costez TO , SO , seront $\sqrt{(\sqrt{972} + \sqrt{405})}$, & $\sqrt{(\sqrt{972} - \sqrt{405})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(\sqrt{972} + \sqrt{405})} - \sqrt{(\sqrt{972} - \sqrt{405})}$, & son quarré TR $\sqrt{3888} - \sqrt{2268}$.

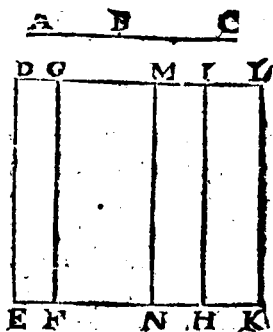
THEOR. 74. PROP. XCVIII. Six.5.

Le quarré d'un residu appliqué sur une rationele , fait l'autre côté residu premier.

Soit le residu AB , & BC fa convenable , tellement que AC , BC , soient rationeles commensurable en puissance seulement : & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Je dis que l'autre côté DG est residu premier.

Car à la même rationele DE soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC : & sur IH un autre rectangle IK egal au quarré de BC , tellement que le total DK est egal au composé des quarez de

AC, BC : lequel étant egal par la 7. prop. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB, ensemble avec le quarré de AB, si on ôte le quarré de AB, & le rectangle DF ; restera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB : partant GL étant coupée en deux également en M, & tiré MN parallele à DE : MK sera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs quarrés seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16. pr. 10. le composé d'iceux



quarrez est commens. à un chacun d'eux : & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationel, lequel étant appliqué à la rationele DE, par la 21. prop. 10. DL sera rationele commens. en longueur à icelle DE. Derechef, puis que AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial ; & iceluy étant appliqué à la rationele GF, par la 23. prop. 10. GL sera rationele incommens. en longueur à GF, ou DE : Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incomm. par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longueur. Parquoy puis qu'elles ont été démontrées rationeles, elles seront commens. en puissance seulement : & partant par la 74. prop. 10. le reste DG sera aussi

residu. Je dis d'avantage qu'il est residu premier.

Car puis que le lemme de la p. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen pr. entre les quarez de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK: DH, MK, IK seront continuellement proportionaux: & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL, est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. p. 2. Et puis que les quarez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, LG sont inegales, & à la plus grande de DL est appliqué le rectangle de DI, IL, egal à la quarte partie du quarré de LG, & defaillant d'une figure quarrée, par la 18. prop. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude: & par la 1. des 3. def. DG sera residu premier. Parquoy le quarré d'un residu appliqué sur une rationele, &c Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Le residu AB soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & BC $\sqrt{12}$: donc la toute AC est $\sqrt{60}$: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est $72 - \sqrt{2080}$, l'autre costé DG sera $9 - \sqrt{45}$: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9, & GL $\sqrt{45}$, & GM $\sqrt{11\frac{1}{2}}$: Ainsi le rectangle DK sera 72, DH 60, IK 12, GN $\sqrt{720}$, GK $\sqrt{2880}$, & DF $72 - \sqrt{2880}$.

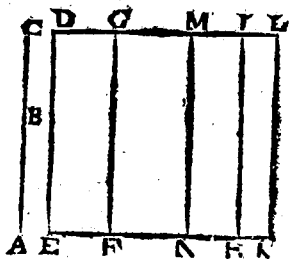
THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'un residu medial premier, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre côté residu second.

Soit le residu medial premier AB, duquel la convenable soit BC, tellement que AC, BC, soient mediales commensurables en puissance seulement, & contiennent un rectangle rationel: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Je dis que l'autre côté DG est residu second.

Car soit construit ainsi qu'en la précédente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrés de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles li-

gnes AC, BC, & partant MK egal à une fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement: les quarrés d'icelles, ou leurs



egaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commensurables, & partant par la 16. prop. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le coroll. de la 14. prop 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationele commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. prop. 10. GL sera rationele commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK étans incommensurable (car l'un est rationel, & l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu

lequel je dis être aussi second. Car on prouvera de même qu'en la précédente, que la toute DL, peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est commens. en longitude; & partant par les tierces definitions, DG est residu second. Parquoy le quarré d'un residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E .

Le residu medial premier AB soit $VV500 - VV20$, & B $VV20$: la toute AC sera donc $VV500$: & étant appliqué sur la rationele DE 4, le quarré de AC, qui est $V500$, l'autre costé DI sera $V31\frac{1}{4}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est $V20$, IL sera $V1\frac{1}{4}$: ainsi la toute DL sera $V45$. Derechef appliquant à DE le rectangle GN egal au rectangle de ACB, qui est 10, l'autre costé GM sera $2\frac{1}{2}$, & son double GL 5: parquoy DG sera $V45 - 5$, qui est residu second.

THEOR 76. PROP. C.

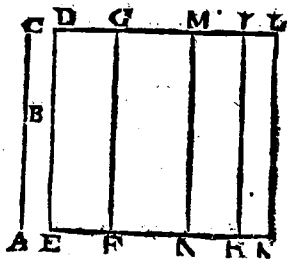
Le quarré d'un residu medial second, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre côté residu troisième.

Soit le residu medial second AB, auquel convienne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent un rectangle medial: Et sur la rationele DE, soit appliqué le rectangle DF. Je dis que l'autre côté DG est residu troisième.

Car ayant construit comme en la 98. prop. on

demontrera comme en la precedente que le rectangle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10.

son autre côté DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC, étant medial, aussi le sera son double GK, & par la 23. prop. 10. GL sera aussi ratio-



nele commens. en puissance seulement à la rationele DE: Et puis que AC, BC sont incommens. en longueur, le carré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. partant aussi à son double GK: Mais le carré de AC est aussi commensurable au carré de BC: (pource qu'iceux quarez sont déceints sur lignes commens. en puissance:) & partant par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarez, c'est à dire DK, sera aussi commens. au carré de AC, auquel est incommens. GK; dont par la 13. prop. 10. DK sera incommens. à GK: & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant même raison que DK, GK seront incommens. en longueur. Mais étant rationeles, elles seront commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. BG sera residu. Mais ny DL, ny GL ne sont commens. en longueur à la rationele DE, & si on prouvera comme en la 98. prop. que DL peut plus que GL du carré d'une ligne qui luy est commens. en longueur: Et par les tierces des. DG est residu troisième. Parquoy le carré d'un residu,

residu medial second, &c. Ce qu'il falloit démon-
trer.

S C H O L I E.

Le residu medial second AB soit $VV600 - VV24$ & BC $VV24$: la toute AC sera donc $VV600$: & appliquant sur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC , qui est $V600$, l'autre côté DI sera $V37\frac{1}{2}$, mais appliquant à la mesme DE le rectangle IK egal au quarré de BC , l'autre côté IL sera $V1\frac{1}{2}$: & partant la toute DL sera $V34$; & si derechef on applique sur la mesme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB , qui est $V120$, l'autre côté GM sera $V7\frac{1}{2}$, & son double GL $V30$: parquoy DG est $V34 - V30$, qui est residu troisieme.

THEOR. 77. PROP. CI.

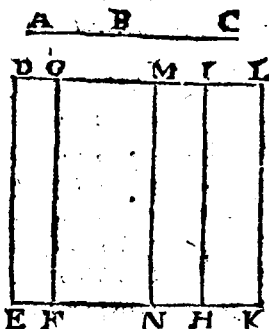
Le quarré d'une ligne mineure, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre côté residu quatrieme.

Soit la ligne mineure AB , à laquelle BC convienne, en sorte que AC , BC , soient incommensurables en puissance, comprenant un rectangle medial; & le composé de leurs quarrés rationel: & le quarré d'icelle AB soit appliqué à la rationele DE : je dis que l'autre côté DG est residu quatrieme.

Car apres avoir construit comme en la 98. pr. le rectangle DK sera rationel, & GK medial, par le discours des precedentes: & par la 21. pr. 10. DL sera rationele comm. en longitude à la rationele DE : & GL , par la 23. p. 10. sera rationele comm. en puissance seulement à icelle rationele DE : & puis que DK est rationel, & GK medial, il sera incomm. & par la 10.

prop. 10. les lignes DL, GL, qui sont en même raison que DK, GK, seront incommensurables en longueur. Mais elles sont rationnelles : elles seront donc comm. en puissance seulement : & par la 74. p. 10. DG sera résidu.

Je dis davantage qu'il est résidu quatrième. Car puis que les lignes AC, BC sont incomm. en puissance, leurs quarrés seront incommens. Aussi incommens. leurs égaux rectangles DH, IK, & & par conséquent incommens. les lignes DI, IL, costez du rectangle de failant d'une figure quarrée égale au quarré de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a été démontré en la 98. prop. & par la 19. prop. 10. DL (qui est commens. en longueur à la rationnelle DE) peut plus que la convenable GL, du quarré d'une ligne qui lui est incommens. en longueur : & par les tierces définitions DG est résidu quatrième. Donc le quarré d'une ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

La ligne mineure AB soit $\sqrt{27 + \sqrt{243}} - \sqrt{27 - \sqrt{243}}$. & BC $\sqrt{27 - \sqrt{243}}$: la somme AC sera donc $\sqrt{27 + \sqrt{243}}$, le quarré de laquelle appliqué sur la rationnelle DE 6 n'autre costé DE sera $4\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{1}{2}}$ mais

étant appliqué sur la mesme DE, le rectangle IK, égal au carré de RC, qui est $27 - \sqrt{143}$, l'autre côté IL sera $4\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{3}{4}}$: & partant la toute DL sera 9. Qu'on si à la mesme DE on applique le rectangle GN, égal au rectangle de ACB, qui est $\sqrt{486}$, l'autre côté GM sera $\sqrt{12\frac{3}{4}}$, & son double GL $\sqrt{54}$: & partant DG est $9 - \sqrt{54}$, qui est résidu quatrième.

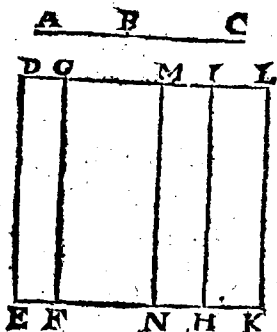
THEOR. 78. PROP. CII.

Le carré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle, un tout medial, appliqué sur une ligne rationelle, fait l'autre côté résidu cinquième.

Soit la ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial AB, de laquelle le carré soit appliqué sur la rationelle DE : Je dis que l'autre côté DG est résidu cinquième.

Car (après avoir construit comme en la 98. prop. 10.) AB étant ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial, & BC fa convenable, les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance; comprenant un rectangle rationel, & le composé de leurs quarez medial : partant le rectangle DK sera medial, & GK rationel, & par la 23. prop. 10. DL sera rationelle incommens. en longueur à la rationelle DE : & par la 21. prop. 10. GL sera aussi rationelle, mais commens. en longueur à la rationelle DE : Item les rectangles DK, GK étans incommensurables [car l'un est rationel, & l'autre medial] les lignes DL, GL seront aussi incommensurables en logit Mais icelles sont rationelles : elles sont donc commensur. en puissance

seulement, & par la 74. proposition DG sera résidu. Mais il a été démontré que GL est communurable en longueur à la rationelle DE, & on prouvera comme en la précédente, que la toute DL peut plus que la convenable GL, du carré d'une ligne qui luy est incommensurable en longueur: & partant par les tierces des. DG est résidu cinquième. Donc le carré d'une ligne faisant avec une superficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$ — $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$. & BC $\sqrt{216 - \sqrt{72}}$; la toute AC sera donc $\sqrt{216 + \sqrt{72}}$. le carré de laquelle soit appliqué sur la rationelle DE 4. & l'autre côté DI sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$: mais étant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK égal au carré de BC, qui est $216 - \sqrt{72}$, l'autre côté IL sera $\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{54}$: Que si à la mesme rationelle on applique le rectangle GN ou NK, égal au rectangle de ACB, qui est 12, l'autre côté ML sera 3, & son double GL 6: Parquoy DG sera $\sqrt{54} - 6$, qui est résidu cinquième.

THEOR. 79. PROP. CII.

Le carré d'une ligne faisant avec une su-

perficie mediale un tout medial, appliqué sur une ligne rationele, fait l'autre costé residu fixiéme.

Soit la ligne AB, faisant avec une superficie mediale un tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationele DE: Je dis que l'autre côté DG est residu fixiéme.

Car (apres avoir construit comme en la 98. pr.) AB étant ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, & BC la convenable à icelle AB; les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant un rectangle medial, incommens. au composé de leurs quarrés aussi medial: partant les deux rectangles DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. prop. 10. DL GL seront rationeles incommens. en longueur entr'elles, & à la rationele DE: & par conséquent commens. en puissance seulement: & par la 74. prop. BG sera residu. Mais on peut prouver comme en la 101. prop. 10. que la toute DL peut plus que sa convenable GL, du quarré d'une ligne qui luy est incommens. en longueur, & partant par les tierces def. GD est residu fixiéme. Donc le quarré d'une ligne faisant avec une superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{972} + \sqrt{405}) - \sqrt{(\sqrt{972} - \sqrt{405})}}$. Or BC $\sqrt{(\sqrt{972} - \sqrt{405})}$: donc la toute AC sera $\sqrt{(\sqrt{972} + \sqrt{405})}$. au quarré de

laquelle soit égal le rectangle DH , appliqué à la rationelle DE & l'autre costé DI sera donc $\sqrt{27} + \sqrt{11\frac{1}{4}}$; mais étant appliqué à la mesme rationelle, le rectangle IK égal au quarre de BC , qui est $\sqrt{972} = \sqrt{405}$ l'autre costé IL sera $\sqrt{27} - \sqrt{11\frac{1}{4}}$: & partant la toute DL sera $\sqrt{108}$: Si derochaf on applique la mesme rationelle le rectangle MK , ou GN , égal au rectangle de ACB , qui est $\sqrt{567}$, l'autre costé GM sera $\sqrt{15\frac{3}{4}}$ & son double $\sqrt{63}$: parquoy DG sera $\sqrt{108} - \sqrt{63}$, qui est residu sixième.

THEOR. 30. PROP. CIII. Six. 6.

La ligne droite commensurable en longueur à un residu est aussi residu, & de même ordre.

Soit le residu AC , auquel soit commensurable en longueur la ligne droite DF . Je dis que DF est residu de même ordre que AC .

Car CB soit la convenable au residu AC , tellement que AB , CB soient rationelles commens. en puissances seulement, & par la 12. prop. 6, soit fait que comme AC est à DF , ainsi CB soit à FE . Donc par la 12. prop.

g. la toute AB sera à la toute DE , comme AC à DF , ou CB à FE : & par la 10.



p. 10. comme AC est commens. en long. à DF , ainsi AB à DE , & BC à FE . Et en permutant, comme AB à BC , ainsi DE à FE . Maintenant, comme AB & BC sont rationelles, aussi seront DE & FE : [car

elles sont commens. à icelles, par la 10. p. 10.] Mais AB & BC sont commens. en puissance seulement: partant DE & EF seront aussi rationeles comm. en puissance seulement, & par la 74. p. DF est residu.

Je dis davantage qu'il est residu de même ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longueur: si commensur. aussi DE pourra plus que FE de même façon par la 15. p. 10 (étans les quatre lignes proport.) Que si AB est commensurable en longueur à une ligne rationele proposée, aussi DE qui luy est commens. en longueur sera commens. en longueur à la même rationele proposée par la 12. pr. 10. Parquoy AC & DF seront residus premiers: Que si BC est commens. en longit. à la rationele, aussi sera FE; & AC, DF seront residus seconds: Et si AB & BC sont incomm. en longueur à la rationele, aussi seront DE & FE; & AC, DF seront residus troisièmes. Que si AB peut plus que BC du quarré d'une ligne qui luy soit incommens. en longueur aussi DE pourra plus de même que FE par la 15. pr. 10. Et si AB est commens. en longueur à la rationele, aussi sera DE: & AC, DF seront residus quatrièmes. Mais si BC est commens. en longueur à la rationele, aussi sera FE: & AC, DF seront residus cinquièmes. Si AB & BC sont incommensurables en longueur à la rationele, aussi seront DE & FE: partant AC & DF seront residus sixièmes: par ainsi DF est residu de même ordre que AC. Parquoy la ligne commensurable en longueur en un residu, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

SCHOLIE.

Le residu AC soit $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, & $DF \sqrt{15} - \sqrt{3}$,
 lesquelles sont commens. en longueur l'une étant dou-
 ble de l'autre, & la convenable CB soit $\sqrt{12}$: Donc
 la toute AB est $\sqrt{60}$: & puis que comme AC est à
 DF , ainsi $CB \sqrt{12}$ est à FE : icelle FE sera $\sqrt{3}$: &
 la toute $DE \sqrt{15}$, commens. seulement en puissance
 à DF .

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne droite commensurable à un residu
 medial, est aussi residu medial de même
 ordre.

Soit la ligne DF commens. au residu medial
 AC : je dis qu'icelle DF est aussi residu medial, &
 de même ordre que AC .

Car ayant fait même construction qu'en la pree.
 prop. AB & BC seront commens. à DE, EF lesquel-
 les sont mediales. commens. en puissance seule-
 ment, & par la 24. p. 10. DE & FE seront mediales
 commensurables en puissance seulement, par la
 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. prop. DF est
 residu medial: Je dis davantage qu'il est de même
 ordre que AC .

Car par la 1. p. 6. le quarré de AB est au rectan-
 gle de AB, BC comme AB à BC : Item le quarré de
 DE est aussi au rectangle de DE, FE comme D à
 FE . Mais le quarré de AB est commens. au quarré
 de DE , étant AB & DE commens. & par la 10. pr.
 10. les deux rectangles seront aussi comm. & comme

l'un sera rationnel ou medial, aussi l'autre sera rationnel ou medial : partant si les rectangles sont rationaux, AC & DF seront residus mediaux premiers : & si les rectangles sont mediaux, AC & DF seront residus mediaux seconds. Donc la ligne commens. à un residu medial, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

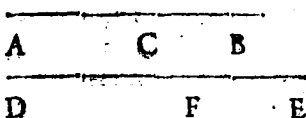
Le residu medial AC soit $VV_{500} - VV_{20}$, & DF $VV_{1\frac{1}{4}} - VV_{1\frac{1}{4}}$: BC sera VV_{20} , & la tot. $AB VV_{500}$: mais FE sera $VV_{1\frac{1}{4}}$, & la toute DE $VV_{31\frac{1}{4}}$.

THEOR. 32. PROP. CVI.

La ligne droite commensurable à une ligne mineure, est aussi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commensurable à une ligne mineure AC : Je dis qu'icelle DF est aussi ligne mineure. Car CB étant convenable à icelle AC, apres avoir fait même construction qu'en la 104. prop. 10. AB & BC seront incommensur. en puissance, comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel. Mais comme AB à CB, ainsi DE à FE, & par la 10. prop. 10. DE & FE seront incommens. en puissance. Item puis que comme AB à BC, ainsi DE à FE, par la 22. prop. 6. leurs quarrez seront proportionaux : & en composant, comme le composé des quarrez de AB, BC sera au carré de BC, ainsi le composé des quarrez de DE, FE, sera au carré de FE : & en permutant, comme le composé des quarrez de AB, BC sera au composé

des quarréz de DE, FE, ainsi le quarré de CB sera au quarré de FE: lesquels quarréz de CB & FE sont commens. (car les lignes BC & FE sont commensurabl. comme AC & DF, ainsi qu'il a été démontré à la 104. prop.) & par-



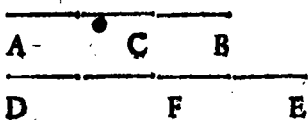
tant par la 10. prop. 10, le composé des quarréz de AB & BC, (lequel est rationel) sera commensurable au composé des quarréz de DE & FE, lequel sera aussi rationel. Pareillement, puis que comme à la prop. precedente le quarré de AB est au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE est au rectangle de DE & FE: en permutant, comme le quarré au quarré, ainsi le rectangle au rectangle: c'est à dire commensurable. Car les lignes AB & DE sont commens. par la 10. prop. 10. & par le corol. de la 24. prop. 10. le rectangle de AB & BC étant medial, celui de DE & FE sera aussi medial: partant DE & FE étant incommens. en puissance comprenant un rectangle medial, & le composé de leurs quarréz rationel, par la 77. prop. 19. DF sera ligne mineure. Donc la ligne commensurable à une ligne mineure est aussi ligne mineure. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne droite commensurable à une ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial, est aussi ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Soit la ligne DF commensurable à la ligne AC, faisant avec une superficie rationele un tout medial. Je dis que DF est aussi ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Car soit CB convenable à AC, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & fassent le composé de leurs



quarrez medial : mais le rectangle compris d'icelles, rationel : Et étant fait même construction qu'en la 104. prop. on démontrera comme en la précédente que les lignes DE, & FE sont incommens. en puissance ; & que le composé des quarrez de DE, FE. Mais celuy-là est medial : aussi sera donc cettuy-cy, par le corol. de la 24. prop. 10. Derechef, comme nous avons démontré en la 105. prop. le rectangle de AB, CB est commensurable au rectangle de DE, FE : mais cettuy-là est posé rationel : aussi sera donc cettuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, sont incommens. en puissance, & font le composé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 73. prop. 10. DF sera ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial. Parquoy la ligne commens. à une ligne, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR 84. PROP. CVIII.

La ligne commensurable à une ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, est aussi ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial,

Soit la ligne DF commens. à la ligne AC, faisant avec une superficie mediale un tout medial : Je dis que DF est aussi ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

Car à AC soit CB convenable, tellement que AB, CB soient incommens. en puissance, & fassent le composé de leurs quarréz medial, & leur rectangle aussi medial & incommens. au composé de leurs quarréz : & ayant fait semblable construction qu'aux precedentes, on prouvera comme en la 106. prop. que les lignes DE, FE, sont incommens. en puissance, & que le composé des quarréz de AB & BC, est commens. au composé des quarréz de DE & FE : & comme en la 105. prop. que le rectangle de AB & BC, est commens. au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB & CB, est medial, & incommensurable au composé des quarréz de AB & CB, aussi medial : partant par le scholie de la 14. prop. 10. le rectangle de DE & FE, sera medial, & incommens. au composé des quarréz de DE & FE aussi medial : & DF sera ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial. Donc la ligne commens. à une ligne faisant avec une superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'une superficie rationele, est retranchée une superficie mediale : la ligne qui peut le reste est residu, ou ligne mineure.

Soit la superficie rationele AB, de laquelle soit retranchée la mediale A : Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu, ou ligne mineure.

Car sur une rationele proposée CD soit décrit le

rectangle CE égal à A, & sur FE le rectangle FI égal à B. Il est évident que CI égal au rationel AB, fera aussi rationel, & par la 21 prop. 10. son autre côté CK sera rationel commens. en longit. à CD.

Item par la 23. prop.

10. CE étant medial,

CF sera rationele com.

mensur. en puissance

seulement à CD ; &

par la 13. prop. 10. CK

& CF seront ratione-

les commens. en puis-

sance seulement ; &

partant par la 74. pr. 10. FK sera residu, & FC sa

convenable. Parquoy CK peut plus que CF du

quarré d'une ligne qui luy est commens. ou incom-

mens. en longitude. Si commensurable, FK sera

residu premier ; & partant la ligne qui peut le re-

ctangle FI (ou son egal B) est residu par la 92. pr.

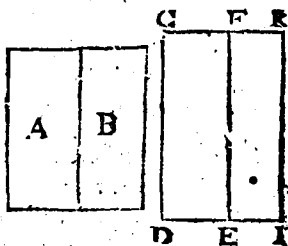
10. Si incommensurable, FK est residu quatrieme ;

& consequemment la ligne qui peut le rectangle

FI (ou son egal B) est ligne mineure par la 95. pr.

10. Parquoy si d'une superficie rationele, &c. Ce

qu'il falloit demontrer.



SCHOLIE.

Si l'espace rationel AB est 32, le medial AV 320,

& la ligne rationele CD 6, sur laquelle est décrit le

rectangle CE égal à A, & FI égal à B : les côtes

CF, & FK, seront $\sqrt{80}$, & $5\frac{1}{3} - \sqrt{80}$: & partant

la route CK sera $5\frac{1}{3}$: & le rectangle CI 32, duquel

estant CE, qui est $\sqrt{320}$, le reste rectangle FI sera

$32 - \sqrt{320}$: & la ligne pouvant iceluy sera $\sqrt{(16 +$

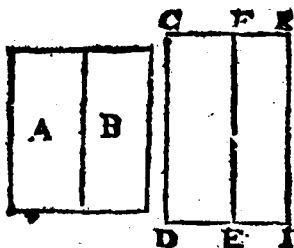
$\sqrt{176}) - \sqrt{(16 - \sqrt{176})}$, qui est ligne mineure.

THEOR. 36. PROP. CX.

Si d'une superficie mediale est retranchée une superficie rationele, la ligne qui peut le reste, est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Soit la superficie mediale AB, de laquelle soit retranchée la rationele A. Je dis que la ligne qui peut le reste B, est residu medial premier, ou ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial.

Car, ayant construit comme en la precedente, puis que la superficie totale AB est mediale, aussi la totale CI est mediale, & par la 23. prop. 10. le côté CK est rationel commens. en puissance seulement à la rationele CD. Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son egal CE, & par la 21. prop. 10. CF sera rationele commens. en longitude à la rationele CD : & par la 13. prop. 10. CK & CF seront rationeles commens. en puissance seulement ; &



partant par la 74. prop. 10. FK sera residu, & FC sa covenable. Donc CK peut plus que CF du quarre d'une ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude, & consequemment

FK sera residu fecond, ou residu cinquième. Si residu fecond ; la ligne qui peut le rectangle FI (ou fon egal B) est residu medial premier par la 93. pr. 10. Si residu cinquième, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faifant avec une fuperficie rationele un tout medial, par la 96. prop. 10. Parquoy fi d'une fuperficie mediale, &c. Ce qu'il faloit prouver.

S C H O L I E.

Si la fuperficie mediale AB eft $\sqrt{800}$, & la rationele A_1 : le refte B fera $\sqrt{800}-12$, & la ligne pouvant iceluy fera $\sqrt{(\sqrt{200} + \sqrt{164}) - \sqrt{[\sqrt{200} - \sqrt{164}]}}$, qui eft ligne faifant avec une fuperficie rationele un tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'une fuperficie mediale, eft retranchée une fuperficie mediale incommenfurable à la toute ; la ligne qui peut le refte eft ou residu medial fecond, ou ligne faifant avec une fuperficie mediale un tout medial.

Soit la fuperficie mediale AB, de laquelle foit retranchée la fuperficie mediale A, incommenf. à la toute AB. Je dis que la ligne qui peut le refte B, eft residu medial fecond, ou ligne faifant avec une fuperficie mediale un tout medial.

Car ayant fait même construction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE feront mediaux & incommenfurables entr'eux ; & par la 21. prop. 10. les lignes CK, CF feront rationeles incom-

menf. en longitude à CD. Et puis que CI, CE font incommenf. les rationeles CK, CF, qui par la 1. pr. 6. font en même raifon que GI, CE, feront auffi incommenf. en longitude, par la 10. pr. 10. & par confequent elles font feulemenr commenf. en puiffance : Donc FK fera refidu par la 74. prop. 10. & FC fa convenable. Parrant CK peut plus que FK, du quarré d'une ligne qui luy eft commenfurable ou incommenf. en longitude : fi incommenf. FK fera refidu troifième, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI [ou font egal B] eft refidu medial fecond, par la 94. prop. Si incommenf. FK fera refidu 6e. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B font egal) eft ligne faifant avec une fuperficie mediale un tout medial, par la 97. prop. Si donc d'une fuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Si la fuperficie mediale AB eft $\sqrt{279}$. & $\sqrt{40}$: la fuperficie reftante B fera $\sqrt{279} - \sqrt{40}$: & la ligne pouvant icelle fera $\sqrt{(\sqrt{279}^2 + \sqrt{40}^2)} - \sqrt{(\sqrt{279}^2 - \sqrt{40}^2)}$, qui eft apelée ligne faifant avec une fuperficie mediale un tout medial.

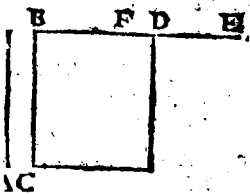
THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne apelée refidu, n'eft pas la mefme que Binome.

Soit quelconque refidu A. Je dis qu'elle n'eft pas même ligne que binome.

Car foit la rationele propofée BC, fur laquelle foit appliqué le rectangle CD egal au quarré du refidu

Residu A : par la 98. prop. BD sera residu premier, auquel si on ajoute sa convenable DE ; BE & DE seront rationeles commens. en puissance seulement : & BE commens. en longitude à la rationele BC.



Maintenant si on pose A être binome ; BD sera binome premier par la 61. pr. 10. lequel étant divisé en ses noms au point F ; (étant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commens. en puissance seulement, & BF commensurable en longitude à la rationele BC : & par la 12. pr. 10. BE & BF, seront commens. en longitude. Vu donc que la route BE est commens. en longitude à la partie BF, par le coroll. de la 16. pr. 10. l'autre partie FE sera aussi commens. en longit. à BE : partant aussi rationele comme icelle BE. Mais DE qui est aussi rationele, n'est pas commensurable en longitude à BE, & par la 14. pr. 10. FE, DE sont rationeles commens. en puissance seulement : & partant par la 74. p. 10. FD est residu, & par consequent irrationele ; ce qui est absurde : car elle a été prouvée rationele : donc le residu A sera differend du binome. Parquoy la ligne apelée residu n'est pas la même que binome. Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E.

De ces choses on peut facilement colliger que la ligne apelée residu, & les cinq sortes de lignes irratio-

neles suivantes, sont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale apliqué à une ligne rationele, fait l'autre costé rationel commensurable en puissance seulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du residu, fait l'autre costé residu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du residu medial premier, fait l'autre costé residu second, par la 99. p. 10.

Le quarré du residu medial second, fait l'autre costé residu troisiéme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre costé residu quatriéme, par la 101 p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec une superficie rationele un tout medial, fait l'autre costé residu cinquiéme : par la 102 p. 10.

Le quarré de la ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial, fait l'autre costé residu sixiéme par la 103. pr. 10.

Puis donc que tous ces costez, (qui sont les latitudes des rectangles) sont differens ; les lignes qui les peuvent seront aussi differentes. Mais les quarréz des binomes, & des cinq lignes irrationeles suivantes, étans appliquez à une ligne rationele font l'autre costé binome de quelque ordre : partant le binome, & les cinq suivantes sont differentes du residu, & des cinq suivantes.

Ainsi toutes les lignes irrationeles cy-devant dites sont treize : sçavoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale seconde.
5. Ligne majeure.

6. Ligne pouvant un rationel & un medial.
7. Ligne pouvant deux mediaux.
8. Residu.
9. Residu medial premier.
10. Residu medial second.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faisant avec une superficie rationelle un tout medial.
13. Ligne faisant avec une superficie mediale un tout medial.

THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'une ligne rationelle étant appliqué à un binome, fait l'autre côté residu, les noms duquel sont proportionnaux & commens. aux noms du binome: en outre le residu est de même ordre que le binome.

Soit la rationelle A, & le binome BC, duquel le plus grand nom soit BD: & à icelle BC soit appliqué le rectangle BE egal au quarré de la rationelle A. Je dis que l'autre côté CE est residu duquel les noms, c'est à dire la ligne totale & sa convenable, sont proportionnaux & commens. aux noms BD, DC du binome BC: & en outre qu'iceluy residu est de même ordre que ledit binome.

Car au moindre nom CD soit appliqué le rectangle DF aussi egal au quarré de la rationelle A: donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par la 14. p. 6. leurs côtez seront reciproques, sçavoir que comme BC à DC, ainsi CF à CE; & en divisant, comme BD à DC, ainsi FE à EC. Mais BD est plus grande que CD: donc aussi FE sera aussi plus grande que EC. Maintenant de EF soit retranchée EG, egale à EC, & soit fait que comme FG à GE, ainsi BC

soit à CH par la 12. pr. 6. & en composant, comme FE sera à EG, (ou EC son egale) ainsi EH à CH, &

par la 12. pr. 5 les

deux antecedens

FEH seront aux

deux consequens

ECH comme l'un

des antecedens EH

à l'un des conse-

quens CH : & par

tant les trois lignes FH, EH, CH, seront conti-

nuellement proportioneles en la raison de FE à

EC, ou BD à DC : & par la 22. prop. 6. & 10. pr.

10. comme le quarré de BD est commens. au quar-

ré de DC, [car iceux quarréz sont commens. puis

que BD, DC sont les noms du binome BC] ainsi

le quarré de EH sera commens. au quarré de CH :

& par le coroll. de la 10. p. 6. & 10. p. 10. CH sera

commens. en longitude à la troisieme proportio-

nele FH, & par la 16. p. 10. CH & GF seront com-

mens. en longitude: Et d'autant que le rectangle

DF est rationel [étant egal au quarré de la ligne

rationele A] & DC ligne rationele: CF sera aussi

ligne rationele commens. en longitude à CD par

la 21. p. 10. Et CH sera aussi rationele commens.

en longitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10.

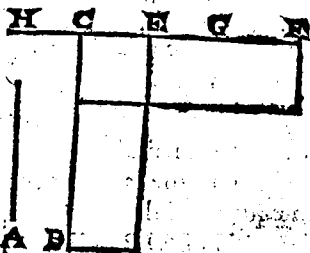
pr. 10. comme CD & DB sont rationeles commens.

puissance seulement, aussi CH, EH, seront ratio-

nelles commens. en puissance seulement : & partant

par la 74. p. 10. CE sera residu, duquel les noms

EH, CH sont proportionaux, & commens. aux



noms BD, DC, du binome BC : Car il a esté démontré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH. & partant en permutant comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont été démontrées commens. en longueur par la 10. p. 10. BD, EH seront donc aussi commens. en longueur.

Reste donc à prouver que le residu CE est de même ordre que le binome BC : Or les noms de l'un étans proportionaux, & commens. aux noms de l'autre : par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'une ligne qui luy sera commens. ou incommens. en longueur : aussi le plus grand nom du residu pourra plus de même. Que si le plus grand nom du binome est commens. en longueur à la rationele, aussi sera le plus grand nom du residu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longueur à la rationele, aussi sera le plus petit du residu; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'un ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele: semblablement l'un ny l'autre nom du residu ne sera comm. à la même rationele par la 14. p. 10. & partant ils seront binome, & residu troisième : & ainsi des autres. Parquoy le quarré d'une ligne rationele étant appliqué sur un binome, &c. Ce qu'il falloit démontrer,

S C H O L I E.

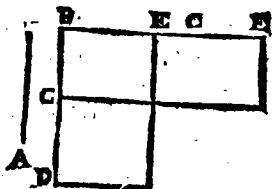
Si la rationele A est 8. le binome BC $9 + \sqrt{45}$, tellement que BD soit 9, & CD $\sqrt{45}$: Le quarré de A étant appliqué sur BC, l'autre costé du rectangle CE sera $16 - \sqrt{144 \frac{2}{3}}$, qui est residu : & puis que comme

DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera $\sqrt{91\frac{1}{4}}$ & EF $\sqrt{460\frac{2}{7}}$ — 16. Mais EG étant égale à CE, est 16 — $\sqrt{142\frac{2}{3}}$; GF $\sqrt{1115\frac{1}{4}}$ — 32 : & d'autant que comme FG est à GE, ainsi EC à CH, icelle sera $\sqrt{142\frac{2}{3}}$, & EH 16 : Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportion. aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIV.

Le quarré d'une ligne rationele, étant appliqué à un residu, fait l'autre costé binome. les noms duquel sont proportionaux, & commensurables aux noms du residu: En outre le binome est de même ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le residu BC, auquel convienne CD, & sur BC soit décrit le rectangle CE égal au quarré de la rationele A: Je dis que l'autre côté BE est binome, dont les noms sont proportion. & comm. à BD, CD, noms du residu BC; & en outre qu'iceluy binome BE est de mesme ordre que ledit residu BC.



Car sur BD soit décrit le rectangle DF égal au même quarré de la rationele A: Donc les rectangles CE & DF seront égaux, & ayans les côtez reciproques par la 14. pr. 6. BD sera à BC comme BE à BF; & par conversion de raison, BD sera à CD comme BE à FE. Maintenant soit coupée EF en G, par la 10. prop. 6. tellement que comme BE est à FE, ain-

si EG soit à GF: Vû donc que comme la toure BE est
 à la toute FE, ainsi EG retranchée de BE, est à GF
 retranchée de FE, aussi par la 19. p. 5. le reste BG
 sera au reste EG, comme la toute à la toure, c'est
 à dire comme la retranchée EG à la retranchée GF:
 & partant EG est moyenne proportionele entre
 BG & GF. Parquoy: comme BG sera à GF, ainsi
 le quarré de BG sera au quarré de EG, par le corol-
 laire de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD,
 ainsi BE à FE, c'est à dire BG à GE; & BD, CD noms
 du residu BC sont rationeles commens. en puissan-
 ce seulement: par la 10. p. 10. BG, GE seront aussi
 commens. en puissance seulement: & partant les
 quarez d'icelles BG, GE sont commens. & par con-
 sequent les lignes BG, FG qui ont même raison
 qu'iceux quarez, sont commens. en longit. par la
 même 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10.
 BG, BF seront aussi commens. en longit. Et d'au-
 tant que BD plus grand nom du residu BC est ra-
 tionele, & le rectangle DF egal au quarré de la
 rationele A, est rationel; par la 21. p. 10. BF sera
 aussi rationele commens. en longit. à BD. Donc par
 la 12. p. 10 BG sera aussi rationele comm. en long. à
 la même BD. Et puis que BG, GE, ont été démontrées
 comm. en puissance seulement, & BG rationeles; GE
 sera aussi rationele. Donc BG, GE sont rationeles
 com. en puissance seulement. Et partant par la 37. p.
 10. BE est binome: duquel les noms BG, GE, sont
 proport. & comm. aux noms BD, CD, du residu BC.
 Car il a été démontré que comme BD à CD, ainsi
 BG à GE: & partant en permutât, comme BD à BG,
 ainsi CD à GE: mais BD a été démontré comm. en
 long. à BG: donc aussi CD sera comm. en longitude
 à GE, par la 10. prop. 10. Reste donc à prouver que

BE est binome de même ordre que le residu BC; ce qu'on fera procedant tout ainsi qu'en la precedente. Parquoy le quarré d'une ligne rationele étant apliqué sur un residu, &c. Ce qu'il falloit demonst. er.

S C H O L I E.

Si la rationele A est 4, & le residu BC 9 — $\sqrt{45}$, CD $\sqrt{45}$, & BD 9, le rectangle DF sera 16, & aussi CE 16: ainsi le costé BF sera $1\frac{1}{3}$, & BE $4 + \sqrt{8\frac{8}{9}}$: & par consequent FE sera $\sqrt{8\frac{8}{9}} + 2\frac{2}{3}$; & GE $8\frac{8}{9}$; FG $2\frac{2}{3}$, BG 4: ainsi est evident que BE est binome. en mesme ordre que le residu BC, & que les noms d'iceux sont proportionnaux.

THEOR. 91. PROP. CXV.

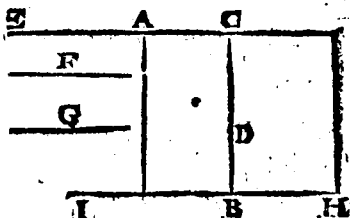
Si un rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, desquels les noms sont proportionaux & commensurables; la ligne droite pouvant iceluy rectangle est rationele.

Soit le rectangle AB compris sous le residu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB soient proportionaux; & commensurables aux noms CE, AE, du residu AC: & soit la ligne droite F pouvant iceluy rectangle AB. Je dis que F est rationele.

Car soit une rationele proposée G, le quarré de laquelle étant apliqué sur le binome CB, fasse le rectangle CH. Donc par la 113. p. l'autre côté BH sera residu, duquel les noms HI, BI sont comm. & proportionaux aux noms CD, DB, sçavoir est que comme HI à BI, ainsi CD à DB, & partant ainsi CE à AE; & en permutant, comme la route

HI à la toute CE, ainsi la retranchée BI à la retranchée AE; & par la 19. p. 5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la

toute à la toute. Mais icelles toutes sont comm. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'une & l'autre est commens. à CD: donc aussi BH, AC se-



ront commensurables en longitude par la 10. prop. 10. & par conséquent les rectangles HC & BA étans par la 1. prop. 6. en même raison que BH, & AC, ils seront aussi commensurables. Mais HC, égal au quarré de la rationelle G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & partant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationelle. Si donc un rectangle est compris d'un residu, & d'un binome, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste qu'un rectangle rationel, peut être compris de lignes irrationelles.

S C H O L I E.

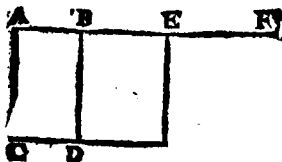
• Si le residu AC est $4 - \sqrt{8\frac{2}{3}}$, tellement que les noms d'iceluy CE, & AE soient 4, & $\sqrt{8\frac{2}{3}}$, mais le binome BC soit $9 + \sqrt{45}$, le rectangle AB sera 16, qui est rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy est 4, & par conséquent rationelle. Or la rationelle G étant 8, le rectangle CH sera 64, & le costé BH $16 - \sqrt{142\frac{2}{3}}$, HI 16, & BI $\sqrt{142\frac{2}{3}}$.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naissent infinies lignes irrationeles , toutes differentes des devant dites.

Soit la lignemediale AB: ie dis que d'icelle naissent infinies lignes irrationeles toutes differentes des treize lignes devant dites.

Car si sur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui soit rationele , & on acheve le rectangle AD , iceluy rectangle sera irrationnel par le corol. de la 39. prop. 10. & par la



11. def. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle est irrationele, soit icelle BE laquelle sera differente de toutes les lignes devant dites. Car son quarré appliqué à une ligne rationele AC , fait l'autre côté AB medial: Ce que ne faisoit pas une des 13. lignes devant dites. Item si on acomplit le rectangle DE , il sera aussi irrationnel par le même coroll. & la ligne qui le peut , aussi irrationele : & soit EF , laquelle sera differente de toutes les lignes devant dites. Car le quarré de pas une d'icelles , appliqué à une ligne rationele , ne fait l'autre côté tel que BE : & procedant de cette façon , on trouvera infinies autres lignes irrationeles differentes entr'elles & des precedentes. Parquoy de la ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

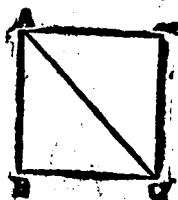
Si la mediale AB est VV_2 , & la rationele AC_2 , le rectangle AD sera VV_3 , & la ligne BE qui peut iceluy sera VVV_3 : Ainsi le rectangle DE sera VVV_5 , & la ligne EF qui peut iceluy sera $VVVV_5$, & ainsi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au carré, la diagonale est incommensurable en longueur au côté.

Soit le carré ABCD, duquel AC soit diagonale. Je dis qu'icelle diagonale AC est incommensurable en longueur au côté AB.

Car par la 47. proposition 1. le carré de AC est double du carré de AB: mais toute grandeur double d'une autre est comme deux à un, ou quatre à deux, ou huit à quatre, &c. Donc le carré de AC est au carré de AB, comme deux à un, ou quatre à deux, ou huit à quatre, &c. qui n'est pas comme nombre carré à nombre carré, comme nous avons démontré au corollaire de la 24. proposition 8. & partant par la 9. proposition 10. la diagonale AC, & le côté AB,



sont Incommensurable en longit. Donc au quarré, la diagonale est incommensurable en longueur de au côté. Ce qu'il falloit demontrer,

S C H O L I E.

Si AB costé du quarré est 1. la diagonale AC sera $\sqrt{2}$: tellement que la raison du costé au diametre est comme 1 à $\sqrt{2}$. c'est à dire incommensurable en longueur.

Fin du dixième Element.





ELEMENT

UNZIE'ME.

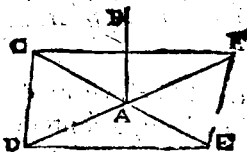
DEFINITIONS.

1.  **S**olide, est ce qui a longueur, largeur & profondeur.

2. Mais les termes d'un solide, sont superficies.

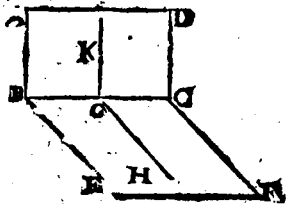
3. Une ligne droite est perpendiculairement eslevée sur un plan, quand toutes les lignes droites constituées sur iceluy plan, & menées vers elle la rencontrent en angles droits.

Soit la ligne droite AB eslevée au dessus du plan CDEF, sur lequel soient menées tant de lignes droites que l'on voudra CA, DA, EA & FA, qui rencontrant en A ladite ligne AB fassent les angles droits CAB, DAB, EAB & FAB, Nous dirons donc qu'icelle ligne AB est perpendiculaire, ou eslevée d'angles droits sur ledit plan proposé CDEF.



4. Un plan est élevé perpendiculairement sur un plan, quand les lignes menées sur l'un d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

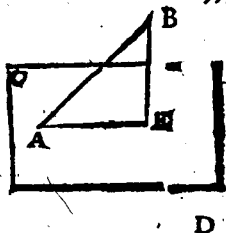
Soit le plan $ABCD$ élevé sur le plan $BECF$, tellement que la ligne AD soit en l'air, & la ligne BC leur commune section : mais au plan $BECF$, soit tirée la ligne droite GH perpendiculaire à icelle commune section BC . Maintenant si la même ligne GH est aussi perpend. à l'autre plan $ABCD$, c'est à dire qu'ayant mené en iceluy du point G , quelque ligne droite, comme GK , l'angle HGK soit droit : iceluy plan $ABCD$ sera élevé perpendiculairement ou à angles droits sur l'autre plan $BECF$. Par-



tant lors qu'un plan est élevé à angles droits sur quelque autre plan, aussi les lignes droites menées en l'un d'iceux à angles droits à leur commune section, seront perpendiculaires à l'autre plan, tellement que si on dit que le plan $ABCD$, est élevé à angles droits sur le plan $BECF$, & qu'en celuy-là soient menées les lignes droites AB , KG , DC perpendic. à la commune section BC , nous conclurons qu'icelles lignes sont aussi perpendic. à l'autre plan $BECF$, & font les angles ABE , KGH , DCF droits.

5. L'inclination d'une ligne droite à un plan, est l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'une autre ligne droite menée au plan de l'inclinante, par le point auquel tombe une perpendiculaire tirée du sommet d'icelle, inclinante sur ledit plan.

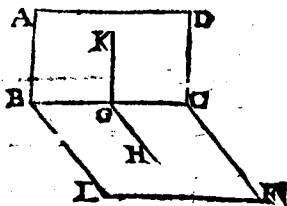
Soit la ligne droite AB inclinée au plan CD , & du point du sommet B , soit menée BE perpendiculaire au même plan CD , & tirée AE l'angle aigu BAE sera l'inclinaison de ladite ligne AB au plan CD .



D

6. Un plan est incliné sur un plan, quand les lignes menées sur l'un & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune section, & vers un même point d'icelle, ne sont point perpendiculaires les unes aux autres : & l'inclinaison d'iceux plans, est l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

Soit le plan $ABCD$ élevé au dessus du plan $BCFE$, tellement que la ligne AD est en l'air, & BC leur commune section : mais de quelque point d'icelle comme G , soient menées GH au plan CE , & GK au plan AC , chacune perpendiculaire à ladite BC . Or si lesdites perpendiculaires GH & GK , ne sont perpendiculaires entr'elles, c'est à dire que l'angle

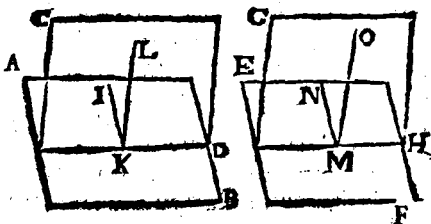


KGH ne soit droit, le plan $ABCD$ sera incliné au plan $BCFE$, & l'angle aigu KGH contenu sous icelles perpendiculaires GH , GK sera l'inclinaison d'iceux plans.

7. Un plan est dit estre semblablement incliné à un plan, & un autre à un autre, lors que les susdits angles d'inclinaisons sont égaux entr'eux.

Soient deux plans AB, CD , inclinez entr'eux, & deux autres plans EF, GH , aussi inclinez entr'eux; mais que l'angle d'inclinaison de ceux

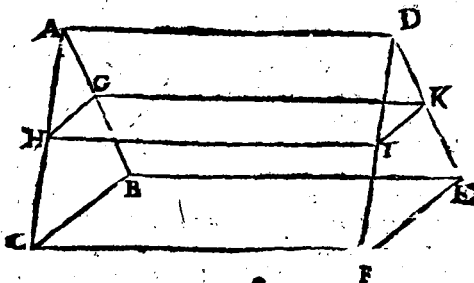
là, qui est IKL , soit égal à l'angle d'inclinaison de ceux cy, qui est MNO : Le plan AB sera semblablement incliné au plan CD , que le plan EF au plan



GH , c'est à dire que l'inclinaison de ces deux plans là sera semblable & égale à l'inclinaison de ces deux-cy.

§. Plans parallèles, sont ceux lesquels étans continuez ne se rencontrent point.

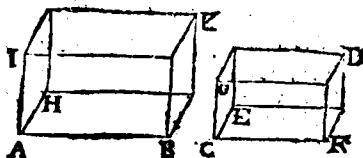
Comme si les deux plans ABC, DEF , étans prolongez de part & d'autre, ne se rencontrent point; iceux plans seront parallèles entr'eux. Item les deux plans $BCFE, GHIK$



ne se pouvant jamais rencontrer étans prolongez, seront aussi dits plans parallèles, mais non pas les deux plans $GHIF, BGKE$, lesquels étans continuez se rencontrent en AD .

9. Solides semblables, sont ceux qui sont compris de plans semblables, egaux en nombre.

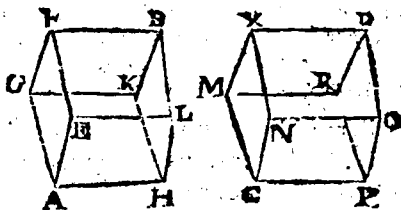
Comme les solides AK , & CD ; chacun desquels est contenu & environné de six plans ou superficies semblables, seront dits solides semblables.



10. Solides egaux & semblables, sont ceux qui sont compris & environnez de semblables plans, egaux en nombre & grandeur.

C'est à dire que si les plans semblables, qui suivant la précédente

définition contiennent les corps semblables, sont egaux chacun au sien; tels solides ne seront pas seulement dits

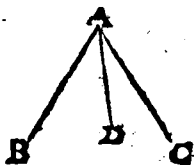


semblables, mais aussi egaux: Comme chacun des corps AB , CD , étant contenu de six plans semblables & egaux, chacun à son correspondant, seront dits corps ou solides egaux & semblables.

11. Angle solide, est l'inclination ou rencontre de plus de deux lignes, qui se touchans en un même point, ne sont constituées sur un même plan, ou bien, Angle solide, est celui qui est contenu sous plus de deux angles plans, qui se rencontrans à un même point sont constituez sur plans différens.

Nous avons dit au premier livre que quand deux lignes droites constituées à un même plan se rencontrent indire-

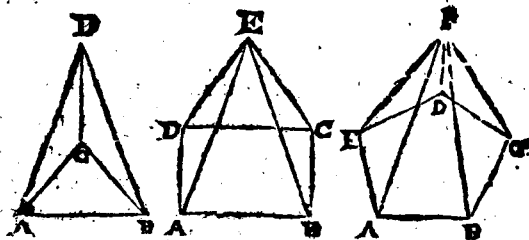
cement à un point, elles font un angle plan, tel qu'est l'angle BAC contenu des deux lignes AB , AC , constituées en un mesme plan: Mais s'il y intervient une troisième ligne comme AD qui ne soit constituée au mesme plan, ains que le point D soit en l'air hors le plan d'icelles, sera fait au point A un angle solide: Lequel est aussi constitué par les trois angles plans BAC , BAD , & CAD , qui se rencontrent au mesme point A , & sont constitués sur plans differens.



Mais est icy à noter que cette def. ne comprend que les angles solides qui sont contenus sous plus de deux lignes droites, ou plus de deux angles plans rectilignes: car elle ne comprend pas l'angle du cone, qui est contenu d'une seule superficie courbe; ny celui fait de deux superficies l'une plane & l'autre courbe, tel qu'est l'angle fait lors qu'un Cone est coupé par le sommet. Comme est aussi à noter que les angles solides contenus d'angles plans egaux en multitude & grandeur, sont egaux entr'eux.

11. Pyramide, est un solide compris de plusieurs plans, se rencontrans en un même point, & ayans un autre plan pour base.

Comme la figure solide $ABCD$ constituée sur le plan ABC avec les trois autres plans ADB , ADC , & CDB , qui se



rencontrent & terminent au point D , est appelée Pyramide. Comme aussi la figure solide $ABCEDE$ constituée sur la base $ABCD$, les autres plans se rencontrans au sommet E : Item

la figure solide $ABCDEF$: Chacune desquelles Pyramides prend sa denomination selon la figure de sa base : cellement que celle qui a un triangle pour base, comme la premiere des trois cy-dessus, s'appelle Pyramide triangulaire : celle qui a un quadrangle comme la 2^e se nomme Pyramide quadrangulaire : celle qui a un pentagone pour base, comme la 3^e s'appelle Pyramide pentagonale, &c.

13. Prisme, est un solide compris de plusieurs plans, desquels deux qui sont opposez sont egaux, semblables & parallels, & les autres sont parallelogrammes.

Comme la figure solide $ABCDEF$ s'appelle prisme, car elle est consue de deux triangles opposez ABC , DEF qui sont egaux semblables & parallels, & de trois parallelogrammes $BCFE$, $BADE$, $ACFD$. Semblablement la figure

solide ABC

$DHEFG$, en

laquelle les

plans oppo-

sez, egaux,

semblables

& parallels

sont les qua-

drilateres

$ABCD$,

$EFGH$, &

les autres

plans sont

parallelo-

grammes, est

nommee Prisme :

Comme

aussi l'autre

figure solide

$ABCDEKFG$

HC , dont 2.

des plans qui la contiennent sont opozes, egaux semblables

& parallels, sçavoir les pentagones $ABCDE$, $FGHIK$,

& les autres plans sont parallelogrammes, est nommee Prisme.

Parquoy un prisme n'est autre chose qu'une colonne

à égale grosseur qui a les bases opposées égales, semblables & parallèles, soit qu'icelles bases soient triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, &c. ainsi qu'il apert es figures cy-dessus.

14. Sphere, est une figure contenuë de la superficie décrite par un demy cercle, lors que son diametre demeurant immobile, iceluy demy cercle est tourné jusques à ce qu'il revienne où il a commencé de mouvoir.

Encore que nous ayons suppléé quelque chose en ceste description de la sphere, si est-ce toutesfois que celle de Theodoze rapportée en nostre Cosmographie scble plus claire & intelligible: & des deux nous en avons fait un autre, qui est au commencement de nostre Geometrie pratique, laquelle est telle qu'il ensuit,

La sphere, est un corps compris d'une seule superficie à laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont au dedans d'iceluy corps sont égales entr'elles: & icelle sphere est décrite par un demy cercle tournant un tour sur son diametre immobile.

15. L'axe de la sphere, est iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

16. Le centre de la sphere, est le même que celui du demy cercle.

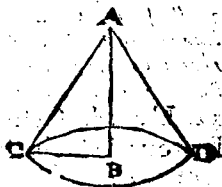
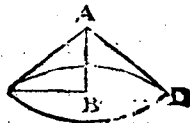
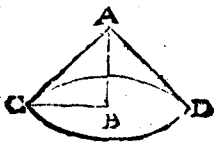
17. Mais le diametre de la Sphere, est une ligne droite, laquelle passant par le centre d'icelle, est terminée à la superficie de la sphere.

18. Cone, est un solide compris sous deux superficies décrites par un triangle rectangle, lors que l'un des côtez qui comprennent l'angle droit demeurant immobile, le triangle fait un tour à l'entour d'iceluy côté. Et si ledit côté immobile est égal à l'autre côté comprenant l'angle droit, le cone sera rectangle: mais si plus petit; il sera ambligone: & si plus grand; il sera oxigone.

Soit le triangle ABC, dont l'angle B est droit, & le costé AB

demeurant fixe, soit imaginé le dit triangle ABC estre venu à l'entour du dit costé AB jusques à ce qu'il ait fait une entière revolution; alors sera décrite une figure solide contenüe sous deux superficies, l'une plane & circulaire décrite par le costé BC , & l'autre courbe & convexe décrite par le côté AC opposé à l'angle droit: laquelle figure est apelée Cone par Euclide & autres Geometres; mais plusieurs l'apellent aussi Pyramide rōde.

Que si le costé immobile AB est égal à BC autre côté de l'angle droit, cōme en la premiere figure, le Cone sera dit Orthogonal ou rectangle, pource que l'angle au sommet A sera droit chacun des deux CAB & DAB , qui le composent étant demy droit, à cause que l'angle B est droit, & les côtés AB & BC égaux. Mais si le costé immobile AB est moindre que l'autre costé de l'angle droit BC , cōme en la 2. figure, le Cone décrit sera dit Ambli-



gone, pource que l'angle au sommet A sera obtus, attendu que chacun des angles égaux BAC & BAD , qui le composent, est plus grand qu'un demy droit, l'angle ACB qui fait un droit avec BAC étant moindre qu'iceluy. Et finalement si le costé immobile AB est plus grand que l'autre costé BC , cōme en la 3. figure, le Cone décrit sera apelé Ovigone, parce que l'angle au sommet A sera aigu, puis que l'angle ACB sera plus grand qu'un demy droit & chacun des angles BAC , BAD qui composent le dit angle A , moindre qu'un demy droit.

19. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

Comme en chacun des trois Cones décrits cy-dessus, l'axe est la ligne droite immobile AB :

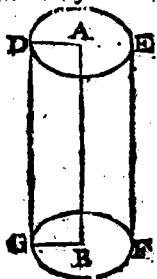
20. Mais la base du cone, est le cercle décrit par l'autre costé comprenant l'angle droit qui tourne.

Comme es Cones cy-dessus, la base est le cercle décrit par le costé BC .

21. Cylindre, est un solide compris de trois superfi-

cies décrites par un parallelogramme rectangle, lors que l'un des côtez demeurant immobile, le parallelogramme fait un tour à l'entour d'iceluy côté.

Soit un parallelogramme rectangle $ABCD$, & le costé AB demeurant fixe & immobile soit conceu ledit parallelogramme estre men allentour dudit costé AB , iusques à ce qu'il soit revenu au lieu où il a commencé de mouvoir : alors sera décrite une figure solide $CDEF$ contenue sous trois superficies, c'est à sçavoir deux planes & circulaires décrites par les côtez AD , BC , & l'autre courbe & convexe décrite par le costé DC : laquelle figure $CDEF$ est appelée *Cylindre* par Euclide & plusieurs autres Geometres ; mais quelques-uns l'appellent *Colonne ronde*.



21. L'axe du Cylindre, est icelle ligne mobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

Comme en la figure precedente la ligne droite AB qui est demeurée immobile est dite *Axe* du Cylindre $CDEF$.

22. Mais les bases du Cylindre, sont les cercles décrits par les deux costez opposez, meus allentour.

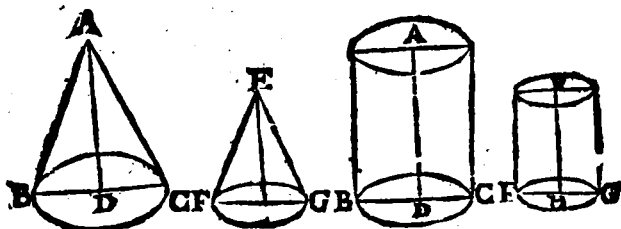
Ainsi en la figure cy-dessus les cercles DE & CF décrits par les costez opposez AD , BC , seront les bases du Cylindre $CDEF$.

24. Semblables Cones, & Cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionaux.

Soient deux Cones ABC , EFG : Item deux Cylindres ; & AD , EH soient leurs axes ; & BC , FG les diametres des bases. Or si l'axe AD est à l'axe EH , comme le diametre BC est au diametre FG ; tant les Cones, que les Cylindres seront semblables entr'eux.

Mais est icy à noter qu'en cette def. & autres preced. des Cones & des Cylindres, Euclide ne definit, & n'entend

parler cy apres que des Cones & Cylindres droites, c'est à
 sçavoir de ceux dont l'axe est perpendiculaire & à angles



droits sur la baze: mais Appolonius Pergem, & Serenus
 en traitent universellement, c'est à sçavoir tant des Or-
 togonés, que des inclinez, ou scalenes,

25. Cube est un solide cõpris de six quarrez egaux,

26. Tetraedre, est une figure solide comprise de
 quatre triangles egaux, & equilateraux,

27. Octaedre, est un solide compris de huit trian-
 gles egaux, & equilateraux.

28. Dodecaedre, est un solide compris de douze
 pentagones egaux, equilateraux, & equiangles,

29. Icosaedre, est un solide compris de vingt
 triangles egaux, & equilateraux.

30. Parallelipipede, est un solide compris de six
 quadrangles plans, desquels les opposez sont pa-
 rallels.

31. Une figure solide, est dite inscrite en une figu-
 re solide, lors que tous les angles de la figure in-
 scrite sont constituez, ou és angles, ou és côtez,
 ou finalement és plans de la figure en laquelle
 elle est inscrite.

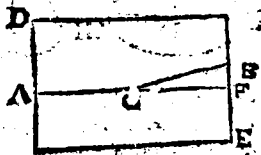
32. Mais une figure solide, est dite circonscrite à
 une figure solide, quand ou les angles, ou les cô-
 tez, ou les plans de la figure circonscrite touchent

tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle est décrite.

THEOR. 1. PROP. I.

Une partie d'une ligne droite ne peut estre sur un plan, & l'autre partie en l'air.

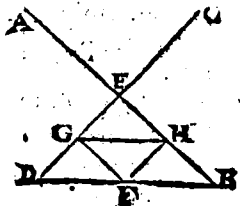
Car soit, s'il est possible, une partie de la ligne droite AB , savoir AC sur le plan DE , & l'autre partie CB en l'air. Donc puis que AC est ligne droite posée au plan DE , elle peut estre prolongée directement sur iceluy plan, lequel prolongement soit CF , qui sera autre que CB , icelle ayant esté posée en l'air, & hors dudit plan DE : Et par tant les deux lignes droites ACB , ACF auront un commun segment AC : Ce qui ne peut estre par la 10. comm. sent. Parquoy une partie d'une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles seront sur un même plan: & tout triangle est en un même plan.

Soient deux lignes droites AB & CD se coupant l'une l'autre au point E ; & en EB , ED soient pris quelconques points B & D , & soit tirée la ligne droite BD , afin de faire le triangle EBD . Je dis que les deux lignes droites AB , CD , sont constituées en un seul & même plan: Item, que le triangle EBD est pareillement en un même plan.



Car si quelque partie d'iceluy triangle EBD , comme FBE estoit en un plan, & la partie restante FDG en un autre plan, aussi BF , EG seroient en un plan, & les parties restantes FD , GD , en un autre plan, c'est à dire en l'air, contre la prec. prop. Par mêmes raisons $DEHF$

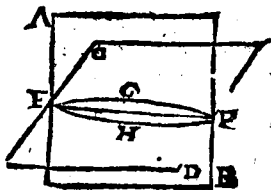
partie du mesme triangle BED, ne peut pas estre en un plan, & l'autre partie BHF en un autre plan : Ny aussi la partie DGHB ne peut pas estre en un autre plan que la partie restante GHE : car il arrieroit toujours la mesme absurdité que dessus, sçavoir est que partie d'une ligne droite seroit en un plan, & l'autre partie en l'air contre ce qui a esté démontré à la prec. prop. Parrant tout le triangle EBD est en un seul & mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en un mesme plan, il s'ensuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD sont aussi en un mesme plan ; sçavoir est en celuy auquel nous'avons démontré estre le triangle EBD. Parquoy si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, leur commune section sera une ligne droite.

Soient deux plans se coupans l'un l'autre AB & CD, & leur commune section, soit la ligne EF. Je dis que icelle commune section EF est une ligne droite.

Car si elle n'est telle, des points extrêmes E & F, qui sont communs à tous les deux plans on pourra tirer sur chacun d'iceux plans une ligne droite qui sera autre qu'icelle commune section EF : soit donc menée au plan AB une ligne droite EGF, & au plan CD la ligne droite EHF. Donc puisque ces deux lignes droites EGF, EHF ont mesmes termes E & F, elles enclorent un espace : ce qui est absurde. Donc la commune section EF sera ligne droite. Parquoy si deux plans, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, & au point de leur commune section on élève perpendiculairement une autre ligne droite, elle sera aussi élevée perpendiculairement sur le plan d'icelles.

Soient deux lignes droites AB & CD, se coupans l'une l'autre.

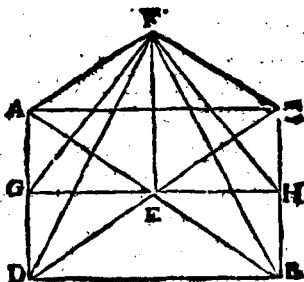
ne au point E, & d'iceluy point de section E, soit élevée EF perpendiculaire à chacune d'icelles AB, CD : je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à leur plan.

Car soient posées égales les lignes droites AE, EB, & CE, ED ; puis soient tirées les lignes droites AD, BC, & par le point E soit menée quelconque ligne droite GH coupant les lignes AD, BC, és points G & H : Item du point en l'air F soient tirées les lignes droites FA, FG, FD, FB, FH & FC, D'autant que les costez EA,

ED du triangle AED, sont égaux aux costez EB, EC du triangle BEC, chacun au sien, & les angles AED, BEC contenus par iceux costez aussi égaux par la 15.

pr. 1. les bases AD, BC seront pareillement égales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH sont égaux par la 15. pr. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE se-

ront égaux aux deux angles BEH, EBH, du triangle BHE, & le costé AE est égal au costé BE : donc par la 26. prop. 1. les deux costez AG, GE, seront égaux aux deux costez BH, HE. Et puis que les deux costez FE, EA du triangle FEA sont égaux aux costez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux costez aussi égaux, sçavoir droits par l'hypothese, par la 4. prop. 1. les bases FA, FB seront égales. Par mesme raison seront aussi égales les lignes FD, FC. Davantage, veu que les costez FA, AD du triangle FAD, sont égaux aux costez FB, BC du triangle FBC, & la base FC égale à la base FD, par la 8. pr. 1. les angles FAD, FBC seront aussi égaux : Parquoy les costez FA, AG du triangle FAG, estans égaux aux costez FB, BH, du triangle FBH, les bases FG, FH, seront pareillement égales par la 4. prop. 1. Et finalement, puis que les costez FE, EG, du triangle FEG, sont égaux aux costez FE, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi égales, les angles FEG, FEH seront pareillement égaux par la 3. pr. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droite FE sera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & constituée au mesme



plan que les lignes AB, CD, par la 2. prop. 17.

On pourra semblablement mener tant de lignes droites qu'on voudra sur le mesme plan, lesquelles rencontrant la perpendiculaire FE en E, y feront angles droits, par les mesmes raisons que dessus : & par la 2. def. 11. icelle FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droites se coupent l'une l'autre, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

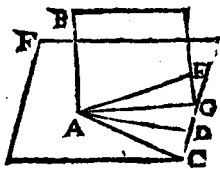
THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite rencontre en un point perpendiculairement trois autres lignes droites, icelles trois lignes droites seront en un mesme plan.

Soit la ligne droite AB perpendiculaire à trois autres lignes droites AC, AD, AE, au point de leur rencontre A. Je dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur un mesme plan.

Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en un mesme plan par la 2. prop. 11.

soient AC, AD, au plan FC : Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est élevée en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. prop. 11. & soient toutes deux au plan BE, Ainsi FC, & BE sont deux plans differens, lesquels se touchans au



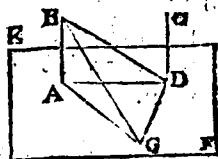
point A, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se couperont, & leur commune section sera une ligne droite par la 3. prop. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC ; & partant par la 4. d. 11. BA, & GA se rencontreront en angles droits : mais par l'hypothese AB & AE se rencontrent aussi en angles droits : par ainsi les angles BAE, BAG estans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, seroient egaux, la partie au tout : ce qui est impossible. Donc AE n'étoit pas élevée en l'air, ains estoit au mesme plan que AC & AD, Parquoy si une ligne droite rencontre en un point, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droites sont élevées perpendiculairement sur un même plan, elles seront parallèles.

Soient deux lignes droites AB , CD élevées perpendiculairement sur un même plan EF , & aux points A & D . Je dis qu'icelles AB , CD , sont parallèles entr'elles.

Car des susdits points A & D du plan EF , soit menée la ligne droite AD , & du point D la ligne droite DG perpendiculaire à icelle AD par la 11. prop. 1. puis ayant posé icelle DG égale à AB , soient menées les lignes BD , DG , AG . D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux costez AB , DG , égaux, & AD commun, & l'angle



BAD égal à l'angle GDA (car celui-là est droit par la 3. def. 11. & celui-cy est aussi droit par la construction) par la 4. prop. 1. la base BD sera égale à la base AG . Rem les deux triangles ABD & GDB ayant les deux costez AB , AG égaux aux deux costez DG , BD ; chacun au sien, & la base BG commune, par la 8. prop. 1. les deux angles BAG , BDG , seront égaux. Mais l'angle BAG est droit par la 3. def. 11. donc BDG sera aussi droit: & partant la ligne DG est perpendiculaire à BD . Mais elle est aussi perpendiculaire à chacune d'icelles AD , CD par la 3. def. 11. Parquoy GD touche perpendiculairement en un point D , les trois lignes DA , DB , DC : & partant par la 5. prop. 11. icelles trois lignes seront en un même plan, c'est à dire que CD sera au plan mené par les lignes AD , DB . Mais par la 2. prop. 11. les trois lignes AB , BD , AD qui constituent le triangle ABD sont en un même plan: partant AB & CD seront aussi en un même plan. Mais par la 3. def. 11. elles font les deux angles BAD , CDA droits: donc par la 18. prop. 1. icelles lignes AB , DC sont parallèles entr'elles. Parquoy si deux lignes droites sont élevées, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

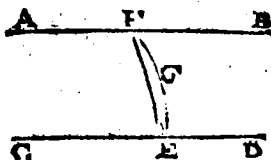
THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droites sont parallèles, & de l'une

à l'autre on mène une ligne droite, elle sera au même plan des lignes parallèles.

Soient deux lignes droites parallèles AB & CD de l'une à l'autre soit menée la ligne droite EF . Je dis qu'icelle ligne EF est au même plan des lignes parallèles AB & CD .

Car si elle n'est au même plan, ains en un autre : que celui-cy coupe cettuy-là, es points E & F , & la commune section d'iceux plans soit EGF , laquelle sera ligne droite par la 3. prop. 11. donc les deux lignes droites EF , EGF , ayans mêmes termes E & F , enfermeront un espace: ce qui est absurde. Donc la ligne droite EF n'est pas en un autre plan que celui auquel sont les parallèles AB , CD . Parquoy si deux lignes droites sont parallèles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

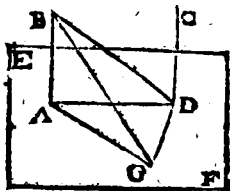
Cette même proposition est aussi véritable, encore que les deux lignes AB , CD ne soient parallèles, pourveu qu'elles soient en un même plan, comme il est manifeste par la démonstration.

THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droites parallèles, desquelles l'une soit à angles droits à quelque plan : aussi l'autre sera à angles droits sur le même plan.

Soient deux lignes droites parallèles AB & CD , & que l'une d'icelles AB soit élevée perpendiculairement sur le plan EF . Je dis que l'autre CD est aussi élevée perpendiculairement sur le même plan EF . Car étant menée au plan EF la ligne droite l'angle BAD sera droit par la 3. def. 11. Mais les deux lignes AB , CD estans parallèles, les deux angles BAD , CDA sont égaux à deux droits par la 29. prop. 1. donc l'angle CDA sera droit. Maintenant au même plan EF soit menée DG perpendiculaire à AD , & ayant posé icelle DG égale à AB ,

soient menées les lignes AG, BG, ED. D'autant que les costez BA, AD du triangle ABD sont égaux aux costez GD, DA du triangle ADG, chacun au sien, & les angles BAD, ADG contenus d'iceux costez aussi égaux, estans droits; les bazes BD, AG seront égales par la 4. prop. 1. Item, les costez BA, AG du triangle GBA estans égaux aux costez GD, DB du triangle BDG, & la baze BG commune



à tous les deux triangles; les angles BDG, BAG contenus desdits costez seront égaux par la 8. prop. 1. Mais BAG est droit par la 3. def. 11. donc BDG sera aussi droit. Parquoy GD sera perpendiculaire à chacune d'icelles AD, BD, lesquelles faisant angle à D s'y entrecouperont estans prolongées & par la 4. prop. 11. icelle GD sera élevée perpendiculairement au plan mené par les lignes AD & BD: mais par la precedente prop. icelles deux lignes BD & AD sont au même plan des paralleles AB & CD: donc GD est perpendiculaire sur le plan où est la ligne CD: partant l'angle CDG sera droit. Mais nous avons démontré que l'angle ADC est aussi droit: donc par la 4. proposition 11. CD sera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'est à dire au plan EF. Par quoy s'il y a deux lignes droites paralleles, &c. Ce qu'il faisoit demonstrier.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droites paralleles à une même, lesquelles ne sont en un même plan qu'icelle sont aussi paralleles entr'elles.

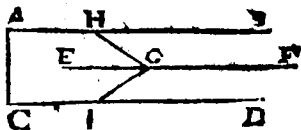
Soient les lignes droites AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en un même plan qu'icelle. Je dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

Soit pris en EF quelconque point G, duquel soient tirées à icelle EF deux perpendiculaires, sçavoir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'aut-

tant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI , qui s'entretouchent en G ; elle

le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. prop.

11. Parquoy puis que AB, EF , sont parallèles; & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI : aussi



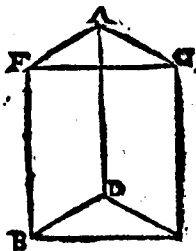
AB sera perpendiculaire au même plan par la 3. prop. 8. Par même raison CD sera perpendiculaire au plan passant par GH, GI : & partant par la 6. prop. 11. AB, CD estans perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entr'elles. Ce qu'il fa-
loit prouver.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droites s'entretouchans, sont parallèles à deux autres lignes droites s'entretouchans, & ne sont en un même plan, elles comprendront angles égaux.

Soient deux lignes droites AB & AC s'entretouchans en A , lesquelles soient parallèles à deux autres lignes droites DE & DF se touchans l'une l'autre en D : & AB, AC ne soient au même plan que DE, DF . Je dis que les angles BAC, EDF , compris par icelles sont égaux.

Car estans prises égales les quatre lignes AB, AC, DE, DF , soient menées les lignes AD, BE, CF, BC, EF . Donc AB & DE estans égales & parallèles, AD & BE seront aussi égales & parallèles par la 33. prop. 1. & par même raison AD & CF seront aussi égales & parallèles: & partant par la prec. prop. BE & CF seront aussi égales



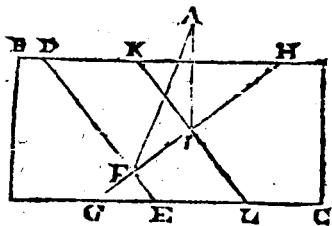
& parallèles entr'elles: & par la 34. prop. 1. BC & EF seront pareillement égales & parallèles entr'elles. Parquoy les deux

triangles ABC & DEF auront les trois costez egaux aux trois costez chacun au sien, & par la 8. prop. 1. les angles BAC, EDF, seront egaux. Si donc deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demonst. r.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'un point donné en l'air, mener une ligne droite perpendiculaire sur le plan qui est au dessous d'iceluy point.

Soit le point A en l'air, duquel il faut tirer une perpendiculaire au plan BC, qui est au dessous d'iceluy point A. Au plan BC, soit menée comme on voudra la ligne DE : à laquelle de A soit tirée la perpendiculaire AF par la 12. pr. 8. Et au plan BC par F, soit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. p. 1. Et à icelle GH soit



tirée de A la perpendiculaire AI par la 12. pr. 1. Je dis qu'icelle AI est perpendiculaire au plan BC.

Car au plan BC, soit tirée par I, la ligne KIL parallèle à DFE par la 31. prop. 1. Donc puis que DF est perpendiculaire aux deux lignes FA, FH, par la construction : & partant aussi. perpendiculaire au plan tiré par icelles FA, FH, par la 4. prop. 11. pareillement KI sera perpendiculaire au même plan par la 8. pr. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI est en un même plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA sera droit par la 2. def. 11. & AI sera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI sera perpendic. au plan où sont les lignes KI, IF, sçavoir au plan BC. Nous avons donc d'un point donné en l'air abaissé une perpendiculaire au plan d'au dessous d'iceluy point : Ce qu'il falloit faire.

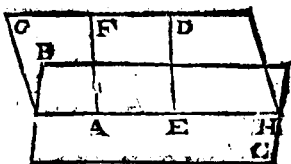
PROBL. 2. PROP. XII.

A un plan donné, & d'un point donné en iceluy, élever

élever une ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le point donné en iceluy soit A: il faut d'iceluy point A élever une ligne perpendiculaire audit plan BC.

Soit pris en l'air comme on voudra le point D, & d'iceluy soit menée sur le plan BC, la perpendiculaire DE par la preced. pr. laquelle rencontrant le plan BC au point A, on aura fait ce qui étoit requis: Mais si elle ne rencontre iceluy point A, ains quelque autre point E, dudit point A soit menée AF parallèle à ED, par la 31. prop. 1. Je dis qu'icelle AF sera perpendiculaire au plan BC. Car DE, AF étans parallèles, & DE perpendic. au plan BC par la construction, par la 8. pr. 11. AF sera aussi perpendiculairement élevée sur le même plan BC. Parquoy à un plan donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

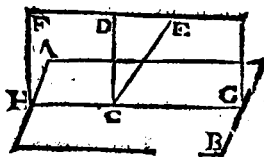


THE OR. II. PROP. XIII.

D'un plan donné, & d'un même point d'iceluy, on ne lèvera pas en l'air d'un même costé, deux lignes droites perpendiculaires.

Soit donné le plan AB, & le point en iceluy C: Je dis que du point C, on n'élèvera pas en l'air deux lignes droites perpendiculaires sur iceluy plan, & de même costé.

Car, s'il est possible, du point C, soient élevées en l'air les deux perpendiculaires CD & CE: par la 2. p. 11. elles seront en un même plan, & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB au point C, n'est point parallèle à iceluy AB: partant iceux plans étans continuez se cou-



peront, & leur commune section sera une ligne droite, laquelle

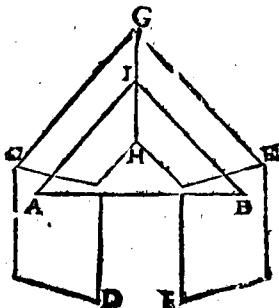
le soit GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seront droits, & partant égaux : la partie au tout : ce qui est impossible. Il ne se peut donc élever du point C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme costé. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si une ligne droite est perpendiculaire à deux plans, iceux plans seront parallèles.

Soit la ligne droite AB perpendiculaire à chacun des plans CD, & EF : je dis qu'iceux plans sont parallèles entr'eux.

Car s'ils ne sont parallèles, étans continuez ils se rencontreront : que ce soit donc de la part de C, E, & que GH soit la ligne de leur commune section, en laquelle soit pris comme on voudra le point I, & d'iceluy soient menées les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenant puis que la ligne AB est posée perpendiculaire



à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, seront droits, contre la 17. pr. 1. donc les deux plans CD, EF prolongez ne se rencontreront point ; & partant ils sont parallèles. Si donc une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit prouver.

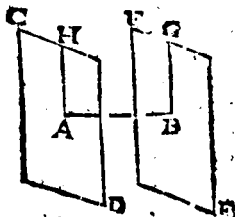
SCHOLIE.

Commandin demontre la converse de cette prop. qui est telle.

S'il y a deux plans parallèles, la ligne droite qui est perpendiculaire à l'un d'iceux, sera aussi perpendiculaire à l'autre.

Soient deux plans parallèles, CD, EF, & la ligne droite

AB soit perpendiculaire au plan *CD* : Je dis qu'icelle *AB* est aussi perpendiculaire au plan *EF* : car si elle n'est perpendiculaire soit tirée audit plan *EF*, la ligne droite *BG* de la part que *AB* fait l'angle moindre qu'un droit, & par *AB*, *BG* soit mené un autre plan, duquel & du plan *CD* la commune section soit la ligne droite *AH*. Et d'autant que l'angle *ABG* est aigu, les plans étans prolongez, les lignes droites *BG*, *AH* se rencontreroient, & partant aussi les plans, lesquels ont esté posez parallèles : ce qui est absurde. Donc *AB* est perpendiculaire au plan *EF*. Ce qu'il faisoit prouver.



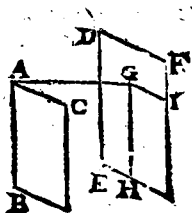
THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droites s'entretouchans sont parallèles à deux autres lignes droites s'entretouchans, n'étans toutesfois en un même plan : les plans passans par icelles, seront aussi parallèles.

Soient deux lignes droites *AB* & *AC*. s'entretouchans en *A*, parallèles à deux autres lignes *DE*, *DF*, s'entretouchans en *D*, & ne soient en un mesme plan qu'icelles. Je dis que le plan *BC* mené par icelles *AB*, *AC* est parallèle au plan *EF* tiré par les lignes *DE*, *DF*.

Car par la 11. proposition 11. de *A* soit tirée sur le plan *EF* la perpendiculaire *AG*, rencontrant le plan *EF* en *G* : puis par la 31. proposition 1. audit plan *EF*, soient tirées de *G*, les lignes *GH*, *GI* parallèles à *DE*, *DF*. Maintenant d'autant que *AB*, *GH* sont parallèles à *DE*, icelles *AB*, *GH* seront parallèles entr'elles par la 9. proposition 11. & partant par la 29. proposition 1. les angles *BAG*, *AGH* sont égaux à deux droits. Mais *AGH* est droit, par le 3. def. 11. Donc *BAG* sera aussi droit. Par même raison on prouvera l'angle *CAG* estre droit. Parquoy, veu que la ligne *GA* est perpen-

diculaire aux deux AB , AC ; par la 4. proposition II. elle sera aussi perpendiculaire à leur plan BC : Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF . Donc par la précédente proposition les plans BC , EF seront parallèles. Parquoy si deux lignes droites s'entretouchans, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

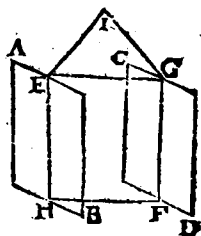


THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallèles sont coupez par un autre plan ; les lignes de communes sections seront parallèles.

Soient deux plans parallèles AB & CD , coupez par le plan EF , & les communes sections d'eux soient EH , GF . Je dis qu'icelles HE & FG sont parallèles entr'elles.

Car si elles ne sont parallèles, étans prolongées elles se rencontreront au plan coupant EF : Que ce soit donc au point I . Or d'autant que toute la ligne droite HEI est en un même plan, sçavoir en AB prolongé ; & aussi toute la ligne droite FGI en un même plan, sçavoir en CD prolongé ; les plans AB , CD étans prolongez se rencontreront aussi en I : ce qui est absurde, ayans été posez parallèles. Donc HE , FG étans continuées ne se rencontrent point ; & partant sont parallèles entr'elles. Parquoy, Si deux plans parallèles sont coupez, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



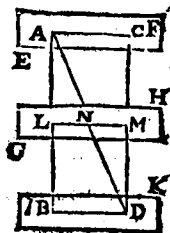
THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droites sont coupées par des plans

parallèles, elles seront coupées proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, traversans les trois plans parallèles EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont coupées par iceux plans és points A, L, B, C, M, D. Je dis qu'elles sont coupées proportionnellement, c'est à dire que les segmens d'icelles compris entre les susdits plans sont proportionaux, sçavoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.

Car és plans EF, IK, soient menées les lignes droites AC, BD : & tiré AD rencontrant le plan GH au point N, duquel soient menées les lignes LN, NM, au mesme plan GH : & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. sera en un mesme plan : semblablement le triangle ADC aussi en un mesme plan. Et d'autant que les plans parallèles GH, IK sont coupez par le plan du triangle ABD, leurs communes sections LN, BD seront parallèles par la prec. prop. Par mesme raison MN, AC, seront aussi parallèles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND : Item comme AN à ND, ainsi CM à MD : Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD. Si donc deux lignes droites sont coupées par des plans parallèles, &c. Ce qui estoit à prouver.



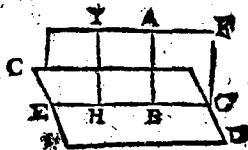
THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite est élevée perpendiculairement sur un plan, aussi tous les plans procédans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.

Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD : Je dis que tous les plans menez de la ligne AB, vers quelle part on voudra, seront élevez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

Car par AB soit tiré le plan EF, coupant le plan CD par la ligne droite EG : & en icelle soit pris quelque point H, duquel au plan EF soit menée HI

parallele à AB par la 31. prop. 1.
Donc puis que AB, IH sont
paralleles, & AB a esté posée
perpendiculaire au plan CD;
aussi IH sera perpendiculaire
au mesme plan CD, par la 8.



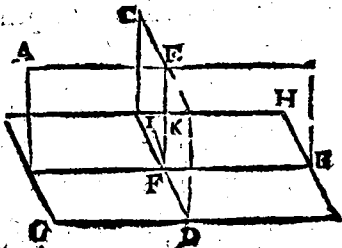
prop. 11. & partant aussi per-
pendiculaire à la commune section EG, par la 3. d. 11. Par
mesme discours toutes autres lignes qui seront tirées au plan
EF, paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan
CD: & par conséquent à la ligne EG. Parquoy par la 4. def.
11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme
raison seront démontrés tous autres plans tirez par la ligne AB,
estre perpend. au plan CD. Si donc une ligne droite est élevée
perpendiculairement sur un plan, & c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans élevez perpendiculairement sur
un autre plan s'entrecoupent, leur ligne de
commune section est perpendiculaire sur ice-
luy plan.

Soient les deux plans se coupans l'un l'autre AB & CD, éle-
vez perpendiculairement sur le plan GH, & sois la ligne de leur
commune section EF: je dis qu'icelle EF est perpendiculaire
au mesme plan GH.

Car, ou EF est perpendic. à BF, DF, communes sections des
plans AB, CD avec ledit plan GH, ou non: Que si elle leur est
perpend. par la 4. p. 11, elle le sera aussi audit plan GH, mené
par icelles BF, DF. Mais si on dit que EF est seulement per-
pendiculaire à l'une ou
l'autre desdites sections
BF, DF; qu'elle le soit
à BF. Donc puis que
le plan AB est perpen-
diculaire au plan GH,
par la 4. def. 11. la li-
gne EF (qui au plan
AB est menée per-
pend. à BF, commune
section d'iceluy avec
le plan GH) sera per-



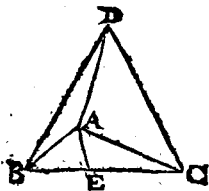
pendiculaire au plan GH. L'on concludra le mesme si ladite EF est concédée perpendiculaire à la section DF : car alors icelle EF sera perpend. au plan G. i par ladite 4. définition, puis qu'elle est posée perpendicul. à DF commune section du plan CD avec le plan GH, & menée audit plan CD qui est perpendic. à iceluy plan GH. Finalement, si on croit EF n'estre perpendic. à l'une ny l'autre d'icelles communes sections BF, DF, du point F soit menée au plan AB la ligne FI perpend. à BF par la 11. p. 1. & au plan CD, la ligne FK perpendiculaire à la section DF. Donc puis que le plan AB est perpend. au plan GH, par la 4. def. 11. la ligne FI (laquelle est perpendiculaire à DF commune section d'iceux plans AB, GH) sera aussi perpendic. à iceluy plan GH. Par mesme raison FK sera encore perpend. au mesme plan GH. Par ainsi FI, FK seront d'un mesme point F donné au plan GH élevées perpendiculairement sur iceluy plan : Ce qui est contre la 13. pr. 11. Parquoy EF sera perpendiculaire au plan GH. Si donc deux plans élevez perpendicul. &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si un angle solide est compris de trois angles plans, deux d'iceux pris comme on voudra, sont plus grands que le troisième.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Je dis que deux d'iceux lesquels on voudra, comme BAD & DAC sont plus grands ensemble que le troisième BAC.

Car si on dit que BAC est plus grand que les deux autres : au plan tiré par AB, AC, soit fait l'angle BAE égal à l'angle DAB par la 23. prop. 1. & la ligne AE égale à la ligne AD : puis au mesme plan soit menée par E la ligne droite BC, coupant les lignes AB, AC, en B & C : & tirées les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux costez AB & AD du triangle ABD sont égaux aux deux costez AB & AE, du triangle ABE, chacun au sien, & les



angles contenus d'iceux costez aussi egaux ; la base DB sera egale à la base BE , par la 4. prop. 1. Item puis que l'on pose l'angle BAC plus grand que les deux autres BAD , CAD , & que le retranché BAE est egal à l'un d'iceux BAD , le reste CAE sera plus grand que l'autre CAD : mais les deux costez EA & AC du triangle ACE , sont egaux aux deux costez AD & AC du triangle CAD , & l'angle CAE est plus grand que l'angle DAC : & partant par la 24. p. 1. la base EC sera plus grande que la base DC : adjoûtant donc les egales EB & DB, les deux CE, EB, c'est à dire la route BC , sera toujours plus grande que les deux CD, DB : & partant au triangle ABC le costé BC est plus grand que les deux autres : ce qui est contre la 20. pr. 1. Donc l'angle BAC n'est point plus grand que les deux autres BAD , CAD. Que si on dit qu'il est egal, il s'ensuivra par le mesme discours que BC est egal à BD & CD : ce qui contrevient toûjours à la 20. pr. 1. Il est donc plus petit que les deux autres. Parquoy si un angle solide est compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

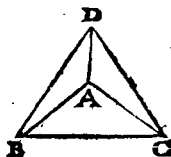
THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'un angle solide , sont plus petits que quatre angles droits.

Soit l'angle solide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Je dis qu'iceux trois angles plans sont plus petits que quatre angles droits.

Car estans tirées les trois lignes droites BC, CD, BD, seront constituez trois angles solides B, C, D, desquels chacun est contenu sous trois angles plans, sçavoir B, sous ABC, ABD, CBD : & C sous ACB, ACD, BCD : & D sous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. pr. 11. de chacun d'iceux angles solides, deux angles plans lesquels on voudra sont plus grands que le troisiéme, les deux angles ABC, ABD, seront plus grands que le troisiéme BCD ; & les deux ACB, ACD, seront plus grands que le troisiéme BCD :

Item les deux CDA, & BDA, sont plus grands que BDC : &



partant les six angles $ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA$ ensemble, seront plus grands que les trois de la base triangulaire BCD , c'est à dire que deux droits : (car iceux trois angles valent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux six angles avec les trois qui font l'angle solide A , valent six droits, par la 32. prop. 1. (Car ce sont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD ,) si on oste ces six-là, qui sont plus grands que deux droits ; les trois qui font l'angle solide A , demeureront plus petits que quatre droits. Parquoy tous les angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

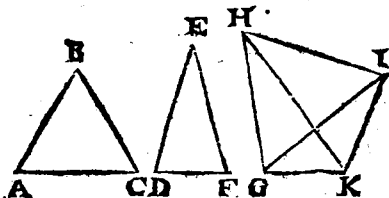
S'il y a trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra soient plus grands que l'autre, & les lignes droites comprenant iceux, egales ; il se peut faire que des lignes droites qui conjoignent icelles egales, soit constitué un triangle.

Soient trois angles plans ABC, DEF, GHK contenus de lignes droites egales BA, BC, ED, EF, HG & HK ; deux desquels pris comme on voudra sont plus grands que l'autre. Je dis que des trois lignes droites AC, DF, GK , qui conjoignent icelles lignes egales, peut estre constitué un triangle, c'est à dire que deux d'icelles lignes AC, DF, GK de quelque façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisième.

Car premierement, si les trois angles B, E, H sont egaux,

puis que les lignes qui les contiennent sont egales, par la 4. pr. 1. les bases AC, DF, GK seront egales : & partant deux d'icelles lesquelles on voudra seront ensemble plus

grandes que la troisième. Mais si lesdits angles proposez sont egaux, puis que deux d'iceux pris comme on voudra sont plus

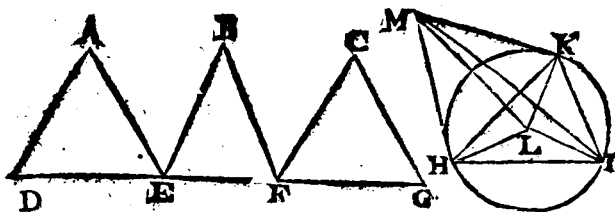


grands que le troisieme, si on en met deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à G, K on adjointe K, H, L egal à E par la 23. pr. 1. & ayant fait H, L egal à E, F on tire I, K & G, L : l'angle total G, H, L sera plus grand que le troisieme A, B, C , & la base GL par la 24. pr. 1. sera plus grande que la base AC : (car les deux costez sont egaux aux deux costez) & à plus forte raison les deux G, K, K, L , qui par la 20. pr. 1. sont plus grandes qu'icelle GL , seront plus grandes que la troisieme AC . Et par mesme discours on montrera tousjours que deux d'icelles bases AC, D, E, G, K prises comme on voudra, sont plus grandes que la troisieme : Partant d'icelles on pourra faire un triangle par la 22. prop. 1. S'il y a donc trois angles plans, &c. Ce qui estoit à demontrer.

PROBL. 3. PROP. XXIII.

Faire un angle solide de trois angles plans, desquels deux pris comme on voudra sont plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles soient moindres que quatre droits.

Soient trois angles plans A, B, C , moindres que quatre droits, & desquels deux quelz qu'ils soient sont plus grands que l'autre.



Il faut faire un angle solide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C .

- Soient posées egales les six lignes droites $A, D, A, E, B, E, B, F, C, F, C, G$ qui comprennent les angles proposez, lesquels soient soutenus des trois bases D, E, E, F, F, G . Donc puis que par la precedente prop. on peut faire un triangle d'icelles lignes D, E, E, F, F, G , soit fait le triangle H, I, K , ayant les 3 costez egaux à icelles

bases DE , EF , FG par la 22. prop. 1. lequel soit circonscrit du cercle HIK par la 3. p. 4. & du centre L soient menées les trois lignes LH , LI , LK : & apres avoir par la 12. prop. 11. élevé en l'air perpendiculairement LM , par le lemme de la 14. pr. 10. soit icelle retranchée en sorte, que son quarré avec le quarré de LH , soit egal au quarré de l'un des costez d'iceux angles plans : puis soient menées les lignes HM , IM , KM , le dis que $HIMK$ est un angle solide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A , B , C .

Car les trois lignes LH , LI , LK estans egales, & LM perpendiculaire à icelles : les trois lignes HM , IM , KM , seront egales, d'autant qu'elles peuvent autant l'une comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuvent autant que l'un des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans : puis les trois bases HI , IK , KH estans egales aux bases des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faisant l'angle solide au point M , seront egaux aux trois donnez A , B , C . Nous avons donc fait un angle solide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Si quelqu'un objectoit icy que la perpendiculaire EM ne peut pas toujours estre retranchée, en sorte que son quarré avec le quarré de LH soit egal au quarré de l'un des costés des angles donnez : comme par exemple, si iceluy costé estoit egal ou plus petit que HL . Je dis que cela n'arrive jamais, non pas seulement qu'il soit egal à HL : Car si HL & IL estoient egaux à AD & AE : & la base HI egale à la base DE . par la 8. p. 1. (& ainsi des 2. autres triangles) les trois angles au point L seroient egaux aux trois angles A , B , C , chacun au sien : ce qui est evidemment faux : Car toujours par hypothese les trois angles A , B , C , sont plus petits que quatre droits : & par le corol. de la 15. p. 1. les trois au point L sont egaux à quatre droits.

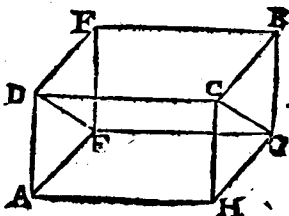
THEOR. 21. PROP. XXIV.

Si un solide est compris de plans parallels ; les plans opposez d'iceluy seront parallelogrammes semblables, & egaux.

Soit le solide AB compris de six plans parallels AC , FB , AG , DE , AE , HB : Je dis que les plans opposez sont parallelogrammes semblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB sont paralels, estans coupe^x par les plans AE & HB ; les lignes de commune section AD, FE sont paraleles : item HC & GB, par la 16. prop. II. par la mesme raison les plans AG & DB estans paralels, les lignes de commune section AF & DC : Item GH & BC sont paraleles : partant AE & HB sont paral-

lelogrammes. Par le mesme discours AG, DB ; AC, FB, se prouueront estre parallelogrammes. Je dis maintenant que les parallelogrammes opposites sont semblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, sont paraleles aux lignes HG, HC, & non en mesmes plans, mais en oppo-



sez : par la 10. pr. II. les angles DAF, CHG, seront egaux ; par mesme raison les autres angles du parallelogramme AE, seront egaux aux autres angles du parallelogramme HB. Et puis que par la 34. prop. I. au parallelogramme AC les costez AD, HC sont egaux, comme aussi les costez AF, HG, du parallelogramme AG, comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelogr. AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux : & partant ils sont parallelogram. semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG ; ven que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG, du triangle HCG, & les angles DAF, CHG, aussi egaux : par la 4. prop. I. les triangles ADF, HCG, seront pareillement egaux ; lesquels estans moitiez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. I. iceux parallelogrammes seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on démontrera les autres parallelogr. opposez AG, DB ; AC, FB, estre semblables & egaux. Si donc un solide est compris de plans paralels, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

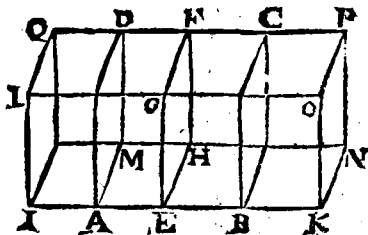
THEOR. 22. PROP. XXV.

Si un solide parallelipede est coupé par un plan parallel aux plans opposez, les solides coupe^x seront l'un à l'autre comme leurs bases.

Soit le solide parallelepipedes ABCD coupé par le plan EF
parallel aux deux oppozes AD & BC, & faisant deux solides
AF & EC : Je dis qu'iceux solides seront l'un à l'autre, com-
me la base AH à la base BH.

Car la ligne AB étant prolongée de part & d'autre, soient faites égales AI à AE, & BK à BE, & soient accomplis les parallélogrammes IM, & BN : Item les solides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE sont égales, les parallélogrammes IM, AH seront aussi égaux par la 1. pr. 6. & par la précédente les plans oppozés LD, GD seront semblables & égaux : Item AL AG semblables & égaux à MQ, MF, plans oppozés, & ainsi des autres : & par la 9.

de F , de ce livre, le solide AQ est egal au solide AF . Par le mesme discours le solide BP sera egal au solide FB : par tant le solide IF est autant multiplie du solide AF , comme la base IH est multiplie de la base AH : Item le



folide EP est autant multipliee du folide EC, comme la base EN est multipliee de la base BH : & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le folide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le folide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le folide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le folide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux folides AF, EC: desquelles de la premiere & troisieme (sçavoir de la base AH & du folide AF) on a pris les equemultiplices HI base, & IF folide : Item de la seconde & quatrieme, (sçavoir de la base BH, & du folide EC) les equemultiplices EN base, & EP folide, lesquels nous avons montré estre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prises : & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le folide AF au folide EC. Parquoy si un solide parallelepiped, &c. Ce qu'il falloit demontrer,

SCHOLIE.

Cette propos. se peut accommoder à tous prismes : Car si quelconque prisme est coupé par un plan parallèle aux plans opposés : tout ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car soit premierement le prisme $ARCDEF$, duquel les plans opposés sont les triangles ABC , DEF : & soit iceluy coupé par le plan GHI parallèle aux plans opposés. Je dis que comme la base AI est à la base FI , ainsi le solide $ABCIHG$

est au solide

$FEDIHG$. Car

soit imaginé le

prisme $ABCDEF$

estre prolongé de

part & d'autre

tant qu'on voudra :

& de AF prolongées soient prises

AK égale à GF , &

FL , LM égales à FG : En après, par les points G , L , M ,

soient entendus les plans KNO , LPQ , MRS parallèles aux

plans ABC , GHI , FED . Donc puis que les plans parallèles

ABC , GHI , sont coupés par le plan AI : leurs communes

sections AC , GI , seront parallèles par la 16. prop. II. Mais

à cause que AD est parallélog. AG , CI seront aussi parallèles.

Donc AI est parallélog. Par mesmes raisons seront dé-

montrés AH , CH estre parallélog. Et pource que les costez

AC , AB , du triangle ABC , sont égaux aux costez GI ,

GH , du triangle GHI , (car par la 34. prop. I. AC est égal

à GI , & AB à GH) & par la 10. prop. II. les angles BAC ,

HGI sont aussi égaux : (pource que les lignes AB , AC sont

parallèles aux lignes GH , GI , & en divers plans) par la

4. prop. I. les triangles ABC , GHI sont égaux entr'eux, &

equiangles : Parquoy par la 4. prop. 6. les costez d'alenour

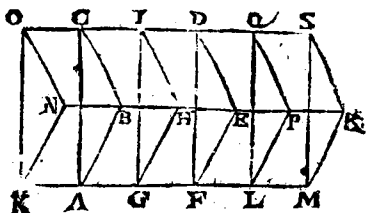
les angles égaux, seront proportionnaux ; & partant iceux

triangles seront semblables. Donc le solide $ABCIHG$, con-

tenu de deux plans opposés ABC , GHI égaux & sembla-

bles, & des parallélog. AI , IB , GB , est un prisme. Par

mesme raison $ABCONK$, $GHIDEF$, $DEFLPQ$, &

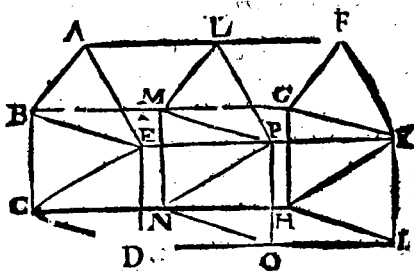


$LPQSRM$ seront prismes: Et pource que les parallelogrammes AI , KC sont egaux & semblables, comme aussi AH , KB , & CH , OB , tous les plans du prisme $ABCIHG$, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme $ABCONK$. Parquoy par la 10. def. 11. les prismes $ABCIHG$, $ABCONK$ sont egaux. Par mesme raison les prismes $GHIDEF$, $DEFLPQ$, $LPQSRM$ seront egaux. Partant le prisme $KNOIHG$ sera autant multiple du prisme $ABCIHG$, que la base KI de la base AI ; & le prisme $GHISRM$ autant multiplié du prisme $GHIDEF$, que la base GS de la base GD . Et pource que si la base KI , (multiple de la base AI premiere grandeur) est egale à la base GS , (multiple de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme $KNOIHG$, (multiple du prisme $ABCIHG$ 3. grandeur) est egal au prisme $GHISRM$, multiple du prisme $GHIDEF$ 4. grandeur: Mais si la base KI est plus grande que la base GS , aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. def. 5. comme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme $ABCIHG$ 3. grandeur sera au prisme $GHIDEF$ 4. grandeur. En la mesme maniere on démontrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE , & comme la base CH est à la base BI . Ce qui étoit proposé.

Soit maintenant le prisme $ABCDEFGHJK$, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçavoir pentagones, & soit coupé par le plan $LMNOP$. Je dis de recherches, que comme la base CM est à la base NG , ainsi le solide $ABCDEL MNOP$, au solide $LMNOPFGHIK$. Car si les plans opposez parallels sont resouds en triangles; aussi le prisme sera resoud en autant de prismes qu'il y aura de triangles és plans opposez. Parquoy comme la base BP sera à la base MK , ainsi le prisme $ABEPML$ sera au prisme $LMPKGF$, par les choses démontrées cy-dessus. En la mesme maniere, comme la base CP est à la base NK , ainsi le prisme $BCEPMN$ sera au prisme $MNPRGH$; & le prisme $CDEPNO$ au prisme $NO PKHI$. Mais par la 1. pr. 6. comme BP est à MK ; & CP à NK , ainsi est la ligne EP à la ligne PK , c'est à dire comme CN est à NH , & comme CN est à NH , ainsi, est CM à NG . Donc les prismes $ABEPML$

$BCEPMN$, $CDEPNO$, ont mesme raison aux prismes $LMPKGF$, $MNPKGH$, $NOPKHI$, que CM à NG , & partant ont

la même entr'eux. Mais parla 12. pr. 5. comme un seul est à un seul, ainsi sont les trois aux trois. Donc comme le prisme $BCEPMN$ sera au prisme



me $MNPKGH$; c'est à dire comme la base CM à la base NG ainsi le prisme $ABCELMNOP$ composé des trois sera au prisme $LMNOPFGHIK$ composé des trois. Ce qui étoit proposé. Il y aura mesme démonstration en quelconque autre prisme.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que si quelconque prisme est coupé par un plan parallèle aux plans opposez, que la section est une figure égale & semblable aux plans opposez. Car il a esté démontré au premier prisme que le triangle GHI est égal, & semblable au triangle ABC , & partant au triangle DEF : Et il y a mesme démonstration en tous. Le mesme se doit entendre des parallelepipedes.

PROPL. 4. PROP. XXVI.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en icelle, constituer un angle solide égal à un angle solide donné.

Soit la ligne droite donnée AB , & le point donné en icelle A ; & il faut construire sur icelle AB , & au point A , un angle solide égal à l'angle solide C compris de trois angles plans DCE , ECF , FCD .

Soit tirée de F , la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD , CE , par la 11. prop. 11. & soient menées les lignes DF , FE ,

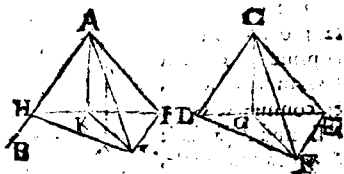
FE, EG, GD, CG : en apres soit prise AH egale à CD : & par la 23. prop. 1. soit fait l'angle HAI egal à l'angle DCE ; & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH AI, soit fait l'angle HAK egal à l'angle DCG, & la ligne AK egale à la ligne CG : puis par la 12. prop. 11. de K soit tirée au plan auquel sont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL : laquelle soit posée egale à FG, soit menée la ligne AL. Jedis que l'angle solide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, est egal à l'angle solide donné C.

Car estans menées les lignes HK, KI, IL, LH : veu que les costez AH, AK du triangle AHK, sont egaux aux costez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la construction : les

bases HK, DG seront egales par la 4. prop.

1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, estans ostez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles

KAI, GCE : lesquels par la construction sont compris de lignes egales : par la 4. prop. 1. les bases KI, GE, seront aussi egales. Les costez K, L, KL sont aussi egaux aux costez GD, GF, & les angles HKL, DGL droits : donc par la mesme 4. prop. 1. les bases HL, DF, seront egales. Parquoy puisque les costez AH, AL du triangle AHL, sont aussi egaux aux costez CD, CF du triangle CDF : car les costez AK, KL, sont egaux aux costez CG, GF, par la construction, & comprennent angles droits : partant les bases AL, CF sont egales par la 4. prop. 1. les angles HAL, DCF seront pareillement egaux par la 8. prop. 1. Finalement, pource que les costez KI, KL sont egaux aux costez GE, GF : & les angles IKL, EGF droits : par la 4. prop. 1. les bases IL, EF sont egales : partant puis que les costez, AI, AL du triangle AIL sont egaux aux costez CE, CF du triangle CEF, par la construction, les angles IAL, ECF seront aussi egaux par la 8. prop. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, composans l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composans l'angle solide C : & partant l'angle solide A est egal à l'angle solide C. Parquoy nous avons constitué sur une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit faire.



PROBL. 5. PROP. XXVII.

Sur une ligne droite donnée, décrire un solide parallélipede semblable, & semblablement posé à un solide parallélipede donné.

Soit la ligne donnée AB sur laquelle il faut construire un solide parallélipede semblable, & semblablement posé au parallélipede donné CD.

Sur la ligne AB, & au point en icelle A, soit fait par la p^{re}. un angle solide égal à l'angle solide C, lequel soit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH : tellement que HAI soit égal à ECG, BAI à

FCG ; & BAH à

FCE : puis par la

11. prop. 6. soit fait

comme CF est à

CG, ainsi AB à AI,

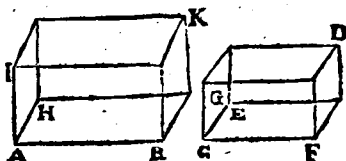
& comme CG à

CE, ainsi AI à AH :

& en raison égale,

AB sera à AH com-

me CF à CE. Et soient parachevez les parallelogr. BH, HI, BI, BK, KI, KH, qui accompliront le parallélipede AK. Je dis qu'iceluy parallélipede AK est semblable & semblablement posé au donné CD.



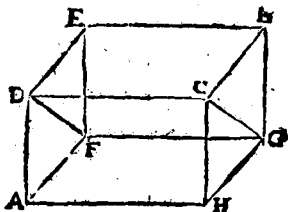
Car d'autant que AB est à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI égal à l'angle FCG, le parallelogr. BI est semblable au parallelogr. FG : par la mesme raison le parallelogr. BH sera semblable au parallelogr. FE, & HI à EG. Partant trois parallelogr. du solide AK sont semblables & semblablement posez à trois parallelogr. du solide CD. Mais par la 24. p. 11. les trois opposez sont égaux, & semblables. Parquoy les six plans du solide AK sont semblables & semblablement posez aux six plans du solide CD : & partant par la 9. def. les solides AK & CD seront semblables & semblablement posez. Nous avons donc sur une ligne droite donnée, décrit un parallélipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

Si un solide parallélipede est coupé par un plan passant par les diagonales des plans opposez, il sera coupé en deux également.

Soit le solide parallelepiped AB coupé par le plan CDHG, par les diagonales des plans opposez DF, CG. Je dis qu'il est coupé en deux également.

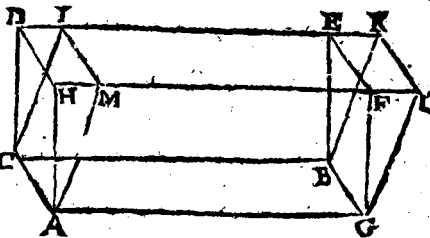
Car puis que les plans AE, HB, sont parallelogr. egaux & semblables par la 34. prop. 1. les triangles ADF, EFD, CGH & GCB sont egaux entr'eux mais les costez qui contiennent les angles egaux DAF, DEF, CHG, & CBG sont proportionnaux : donc iceux triangles seront aussi semblables par la 6. prop. 6. & le plan AG est egal & semblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ce sont plans opposez.) Partant les deux prismes ADCHGF, FEBGCD ; sont compris de parallelogrammes, & de triangles oppozez semblables & egaux, & par la 10. def. iceux prismes sont egaux. Parquoy puis qu'ils composent le parallelepiped AB ; iceluy sera coupé en deux également par le plan DCGF. Si donc un solide parallelepiped est coupé par un plan, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les solides parallelepipedes ayans même base, & même hauteur, & desquels les lignes insistantes sont colloquées en mêmes lignes droites, sont egaux entr'eux.

Soient conſtituez ſur la baſe AB, & en meſme hauteur, les ſolides parallelepipedes AD EG, AIKG, deſquels les lignes inſiſtantes AH, AM, GF, GL, CD, CI, BE, BK ſont colloquées en meſmes lignes droites HL, DK. Je dis que le ſolide ADEG eſt egal au ſolide



AIKG. Car d'autant que les parallelogrammes AF, AL constituez sur mesme base AG sont egaux entr'eux par la 35. proposition 1. si on en oste le trapeze commun GM, refteront egaux les triangles AHM, GFL: Et puis que par la 34. proposition 1. ils ont leurs costez egaux, chacun au sien, ils seront equiangles, & partant aussi semblables par la 4. prop. 6. Pour mesmes raisons les triangles CDI, BEK, seront aussi egaux & semblables. Mais par la 24. prop. 11. le parallelogr. AD est egal & semblable au parallelogr. GE: Item le parallelogr. AI au parallelogr. GK. Et par la 36. prop. 1. DM est egal à EL; attendu que leurs bases HM, FL sont egales (car HF, ML sont egales entr'elles, chacune d'icelles estant egale à AG; & ostant MF qui leur est commune, reitent MH, FL egales.) Parquoy les cinq plans du prisme AHM DC sont egaux & semblables aux cinq plans du prisme GFLKE: & par la 10. def. 11. lesdits prismes seront egaux: partant si on adjouste à chacun d'iceux prismes le commun solide AMICBFG, seront faits egaux les parallelipedes ADEG, AIKG. Parquoy les solides parallelip. ayans une mesme base, &c. Ce qu'il falloit demon-

THEOR. 25. PROP. XXX.

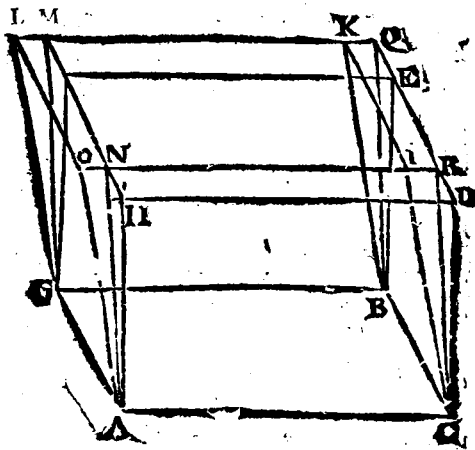
Les solides parallelipedes constituez sur même base, & de même hauteur, & desquels les lignes insistantes ne sont colloquées en mesmes lignes droites, sont egaux entr'eux.

Sur une mesme base AB, & en mesme hauteur (c'est à dire entre mesme plans parallels) soient constituez les solides parallelipedes CF, CL desquels les lignes insistantes menées des quatre angles de la base AB, sçavoir AH, AO, GF, GL, CD, CI, BE, EK, ne sont pas colloquées en mesmes lignes droites. Je dis que le solide CF est egal au solide CL.

Car puis que les plans HE, OK opposez à la base commune AB, sont en un mesme plan, à raison de la mesme hauteur des parallelipedes; soient prolongées en iceluy plan les lignes HF, DE, iusques à ce qu'elles rencontrent LK aussi prolongée en M & Q: soit encore prolongée OI, qui rencontre HF & ED en N & R, puis soient tirées les lignes droites AN, GM, BQ, CR. D'autant que les lignes conti-

mées UK , OI sont parallèles, comme aussi HF , DE ; le qua-

drilatere
 $NMQR$
 sera pa-
 rallelo-
 gramme,
 qui ayât
 les costez
 oppolez
 egaux &
 parallels,
 aussi
 $ANMG$,
 $CRQB$,
 $ANRC$,
 $GMQB$,
 seront
 parallé-
 logr. &
 partant
 le solide



CM sera parallélipède : & par la précéd. prop. il sera egal au parallélip. CF , puis qu'estans construez sur mesme base AB , & de mesme hauteur, les lignes insistantes AH , AN , GF , GM , CD , CR , BE , BQ sont colloquées en mesmes lignes droites HM , DQ . Mais pour mesmes raisons le parallélip. CM est aussi egal au parallélip. CL , ayans mesme base, & les lignes insistantes colloquées en mesmes lignes droites LQ , OR . Donc le parallélipède CF sera egal au parallélip. CL . Parquoy les solides parallélipèdes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

SCHOLIE.

On convertira sans cette proposition que la précédente en cette maniere,

Les solides parallélipèdes egaux ayans mesme base, soit que les lignes insistantes soient colloquées en mesmes lignes droites, ou non, sont de mesme hauteur.

Car si l'on dit que l'un est plus haut, si d'iceluy on coupe un parallélipède de mesme hauteur que l'autre, le coupé & l'autre seront egaux, par la 29. ou 30. prop.

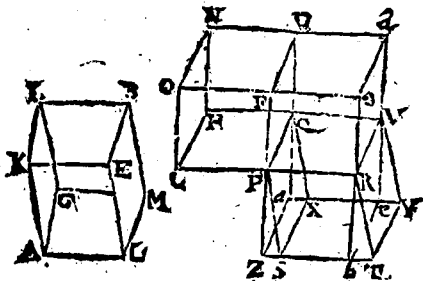
possession II. & puis que cet autre est passé egal au tout, le coupé sera egal au tout. Ce qui est absurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes constituez sur bases egales, & de même hauteur sont egaux entr'eux.

Soient les solides parallelipipedes AB, CD constituez sur bases egales AE & CH, & de même hauteur. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

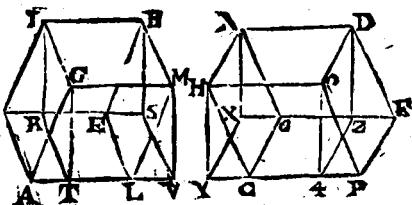
Car premierement les lignes insistentes AG, LM, KI, EB soient perpendiculaires à la base AE, & les insistentes CH, I Q, QN, FD perpendic. à la base CF; toutes lesquelles perpendic. seront egales entr'elles, puis que les parallelip. sont de même hauteur; & après avoir continué CP iusques à R, & fait PR egale à KE, au plan de OP prolongé, soit fait l'angle RPS egal à l'angle AKE, & fait PS egale à KA: puis soit achevé le parallelog. PM, sur lequel



soit construit le parallelip. QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les costez PR, PS sont egaux aux costez EK, KA, & les angles RPS, EKA egaux, les parallelogrammes PT, KL seront egaux & semblables. Derechef puis que les costez PQ, PS sont egaux aux costez KI, KA, & les angles QPS, IKA droitz par la 3. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ sont posées perpendiculaires aux plans AE, PT; aussi les parallelogrammes QS, AI. seront egaux & semblables. Item les costez PR, PQ estans egaux aux costez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droitz, par la même def. les parallelogr. PV, KB seront aussi egaux & semblables. Parquoy puis que les trois parallelogr. PT, QS, TV; du parallelipede QSTV sont egaux & semblables aux trois KL, AI, KB, du parallelip. ABL, par la

24. prop. II. tant ceux-là, que ceux-cy seront égaux & semblables à leurs autres parallelog. opposez : & partant par la 10. definit. les parallelipipedes AB, SV seront égaux entr'eux. Maintenant que EP, TS prolongées se rencontrent en Z : & DQ, YX, en a, & soit achevé le parallelipipede ZV. Item que ND, e V prolongées se rencontrent en d, & OF, b R, en o, & soit achevé le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont mesme base PV, & mesme hauteur, & que les lignes insistentes PS, PZ, RT, Rb : Qx, Qa, VY, Ve, sont colloquées entre mesmes lignes droites ZT, a Y ; iceux solides seront égaux entr'eux par la 29. prop. II. Mais le parallelipipede SV est démontré egal au parallelipipede AB : donc le parallelipipede ZV sera egal au mesme AB. Et d'autant que par la 35. pr. I. les parallelogrammes PT, Pb sont égaux, & PT egal à AE, aussi Pb sera egal au mesme AE, c'est à dire à CF (car AE, CF sont posées bases égales :) & par la 7. pr. 5. comme CF sera à Po, ainsi Pb sera à P_o : & par la 25. pr. II. comme la base CF est à la base Po, ainsi le solide CD est au solide Pd, puis que le parallelipipede Cd est coupé par le plan PD parallel aux plans opposez CN, Rd : Semblablement comme Pb est à Po, ainsi le solide ZV au solide Pd, pour ce que le parallelipipede Db est coupé par le plan PV parallel aux plans opposez Fd, Ze. Donc par la 9. pr. 5. les parallelipipedes CD, ZV seront égaux, puis qu'ils ont même raison au solide Pd, sçavoir est la même qu'ont les bases CF, Pb à la base Po. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a été démontré egal au parallelipipede AB : les parallelipipedes AB & CD seront pareillement égaux : ce qui estoit proposé.

Maintenant, & les lignes insistentes AG, LM, KI, EB; CH, PQ, ON K FD, ne sont perpendiculaires, sur les bases AE, CF, soient



tirées des points (apes avoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il sera de besoin) G, I, B, M, & H, N, D, Q, & sur les plans d'au-dessous d'iceux points les perpendic. GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ; Qd, par la 11. pr. II. & soient tirées RT,

SV, XY, Z, pour faire les parallelipipedes ITVB, NY & D, lesquels par ce qui a esté demonsté cy-dessus seront egaux entr'eux, car ils sont sur bases egales CB, & D; & de mesme hauteur; Mais par la 29. ou 30. prop. II. le solide ITVB. est egal au solide AB, & le solide NY & D egal au solide CD: donc le solide AB sera egal au solide CD. Parquoy les solides parallelipipedes constituez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonsté.

S C H O L I E.

On convertira cette 31. prop. en cette maniere.

Les solides parallelipipedes des egaux, constituez sur bases egales, sont de mesme hauteur: & les solides parallelipipedes egaux, qui sont en mesme hauteur: sont sur bases egales, s'ils n'ont une mesme base.

Car si on croit l'un plus haut que l'autre: si on coupe du plus haut un parallelep. de mesme hauteur que l'autre: par la 31. p. II. le coupé sera egal a l'autre, auquel est aussi posé egal le tout: parquoy le coupé sera aussi egal au tout: ce qui est absurde. Que si les parallelipip. estans de même hauteur, on croit que la base de l'un soit plus grande que la base de l'autre: si d'icelle base on en coupe une egale à l'autre, & sur icelle coupée on entend estre un parallelipede de mesme hauteur, l'on demonstrera en la mesme maniere, la partie estre egale au tout: Ce qui est absurde.

THEOR. 27. PROP. XXXII.

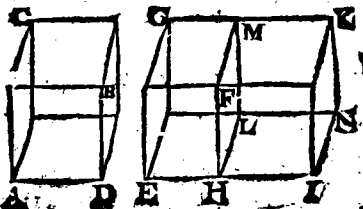
Les solides parallelipipedes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux parallelipipedes de mesme hauteur ABCD, EFGH, desquels les bases soient AB, EF. Je dis que le solide est au solide comme la base à la base.

Car si sur la ligne IE, (apres avoir prolongé le plan EF vers

& à l'angle FHI on construit le parallelogr. FI egal au parallelogr. AB; puis on acheve le solide IFLK; iceluy estant de mesme hauteur que le solide ABCD, & sur base egale, il luy sera egal

par la 31. pr. II. Parquoy



par la 7. pr. 5. comme le solide IFKL est au solide EFGH, ainsi le solide ABCD est au même solide EFGH. Mais par la 25. pr. 11. le solide FKL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est à dire AB, à la base EF : Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB à la base EF. Parquoy les solides parallelepipedes de même hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

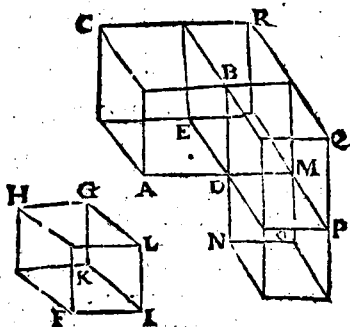
La converse : Si les solides parallelepipedes sont entr'eux comme leurs bases ; ils seront en même hauteur. Car si l'une des hauteurs est plus grande que l'autre, de la plus grande en soit coupée une égale à la moindre, & puis soit tiré un plan parallèle à la base ; & par la 32. p. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelepipede sera au parallelepipede coupé : mais ainsi il estoit aussi au parallelepipede total. Donc le coupé est égal au tout par la 9. pr. 5. Ce qui est absurde.

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelepipedes sont l'un à l'autre en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient deux semblables parallelepipedes ABCE, FHGI construits sur bases semblables AE, FI, esquelles les costez homologues sont AD, FI. Je dis que le parallelepipede ABCE est au parallelepipede FHGI en raison triplée des costez homologues AD, FI.

Car soit prolongé AD vers M, tellement que DM soit égale à FI, ou HG. Item BD vers N, en sorte que DN soit égale à LI, ou GK : Item ED vers O, tellement que LO soit égale à KI, ou GL : puis apres estans accomplis les parallelogr. DP, MN, NO, soit achevé le parallelepipede NMP. Il



est donc evident que les deux parallelipipedes FG, NP sont semblables & egaux, puis qu'ils sont composez de plans qui ont les angles egaux, & les costez au long d'iceux angles egaux, aussi egaux. Item soient construits les parallelipipedes BMCQ. & EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD, FGH, sont semblables, comme AD est à FI, c'est à dire à DM, ainsi DE à KI, c'est à dire à DO : & BD à LI, c'est à dire à DN. Mais par la 1. prop. 6. comme AD à DM, ainsi le parallelogr. AE au parallelogr. EM : & comme ED à DO, ainsi le parallelogr. EM à DP : & comme BD à DN, ainsi le parallelogr. BM à MN. Donc comme AE sera à EM, ainsi EM à DP & BM à MN. Mais par la 32. pr. 11. comme la base AE à la base EM, ainsi est le parallelipipede AECB au parallelip. EMRB : & cōme la base EM est à la base DP, ainsi le parallelip. EMRB est au parallelipipede de DPBQ : & comme la base BM est à la base MN, ainsi le parallelip. DPBQ est au parallelipipede NP. Parquoy cōme le parallelipipede AECB sera au parallelip. EMRB, ainsi le parallelipipede EMRB sera au parallelip. DPBQ : & le parallelipipede DPBQ au parallelip. NP. Partant les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP sont continuellement proportionnelles : & par la 10. d. 5. la première AECB sera à la quatrième NP, c'est à dire à FG, en raison triplée de la première AECB à la seconde EMRB. Mais par la 31. prop. 11. comme AECB est à EMRB, ainsi la base AE est à la base EM : & par la 1. prop. 6. comme AE est à EM, ainsi AD est à DM, c'est à dire à FI. Donc par la 11. pr. 5. AECD sera à EMRB comme AD à FI : partant la raison triplée de AECD à EMRB, sera la même que de AD à FI ; & par cōsequent AECD estant à FG en raison triplée de AECD à EMRB : il sera aussi en raison triplée de AD à FI. Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

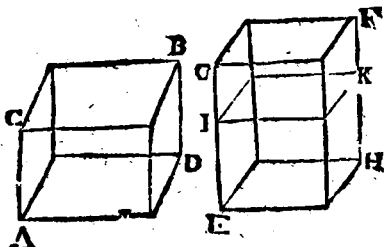
Par cecy est evident que s'il y a quatre lignes droites continuellement proportionnelles, comme la première est à la quatrième, ainsi le parallelipipede décrit sur la première, est au parallelipipede semblable, & semblablement décrit sur la seconde : Puis que tant le parallelipipede est au parallelipipede, que la première ligne à la quatrième en raison triplée de la raison de la première ligne à la seconde, sçavoir des costez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les solides parallelipipedes egaux, ont les bases & les hauteurs reciproques : Et ceux qui ont les bases & les hauteurs reciproques sont egaux.

Soient les parallelipipedes egaux ABCD, EFGH sur les bases AD, EH, desquels les hauteurs sont AC, EG. Je dis que leurs bases & leurs hauteurs sont reciproques, c'est à dire, que comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur AC.

Car si les bases AD & EH sont egales (estans les solides posez



egaux) les hauteurs AC, EG seront aussi egales par le schol. de la 31. pr. 11. & partant comme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EG à la hauteur AC.

Mais si les bases sont inegales, sçavoir AD, plus grande que EH, la hauteur EG sera plus grande que la hauteur CA: car elle ne peut estre plus petite, non pas seulement egale, d'autant que par la 31. p. 11. iceux solides seroient l'un à l'autre comme leurs bases; partant AB plus grand que EF, & nous les avons posez egaux: La hauteur EG sera donc plus grande que CA; & d'iceluy soit retranchée EI egale à CA, & d'iceluy point I soit imaginé que le plan IK parallel à EH, coupe le parallelip. EF: Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'un comme l'autre au solide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'un à l'autre comme la base AD à la base EH, par la 32. pr. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH. Or comme le parallelipede EF est au parallelip. EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25. pr. 11, & icelle base GL est à la base IL, comme la ligne EG est à la ligne EI; par la 1. pr. 6. & partant par la 11. p. 5. le solide EF est au solide EK, comme EG à EI. Mais le solide EF est aussi au solide EK, comme la base AD à la base EH: Donc par

la 11. prop. 5. comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, ou à son égale AC.

Pour la seconde partie, si la base AD est à la base EH, comme la hauteur EG est à la hauteur AC. Je dis que les deux solides AB & EF sont égaux.

Car si les hauteurs sont égales, il est évident que les bases sont aussi égales, puis qu'elles sont posées en même raison : & partant par la 31. prop. 11. les parallépipèdes AB, EF seront pareillement égaux.

Que si la hauteur EG est plus grande que la hauteur AC d'icelle, soit retranchée EI égale à AC, & par I soit tiré le plan IK parallèle à la base EH. Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est à la base EH, ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont égales : et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK : (car ils sont de même hauteur,) donc comme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide EF est au même solide EK, puis que par l'hypothèse AD est à EH comme EG à AC ou EI : partant par la 9. prop. 5. les solides AB, EF seront égaux. Donc les solides parallépipèdes égaux, ont les bases, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à cette démonstration & presque à toutes les autres de ce livre, les hauteurs des solides doivent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'étoient telles, il les y faudroit réduire, comme nous avons fait à la fin de la 31. prop. de ce livre.

Or toutes les choses que nous avons démontrées es 6 précédentes propositions, sçavoir es 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conviennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposés triangulaires, observant les susdites hypothèses. Car si à deux tels prismes de même hauteur, & constituez sur une même base, ou sur bases égales, on applique deux autres prismes égaux & semblables à iceux, seront faits deux parallépipèdes de même hauteur, & constituez sur mêmes, ou égales bases. Parquoy par la 29. 30. ou 31. pr. 11. seront égaux iceux parallépipèdes ; & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçavoir les moitiés d'iceux parallépipèdes.

Derechef, si aux deux prismes susdits de même hau-

teur, & constituez, sur diverses bases, on ajoute deux autres prismes égaux, & semblables à iceux, seront faits derechef deux parallélipèdes de même hauteur: Parquoy par la 32. pr. II. le parallélipède sera au parallélipède, comme la base à la base, & passant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçavoir la moitié de l'un des parallélipèdes à la moitié de l'autre, comme la même base à la base, si les bases des prismes sont parallélogrammes, ou comme le triangle au triangle, sçavoir, est la moitié d'une base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

D'avantage, si à iceux deux prismes semblables, on ajoute deux autres prismes égaux & semblables à eux, seront constituez deux parallélipèdes semblables, lesquels par la 33. p. II. seront entr'eux en raison triplée des costez homologues. Donc aussi par la 15. pr. 5. les prismes, sçavoir est les moitiés d'iceux, auront la raison triplée de mêmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

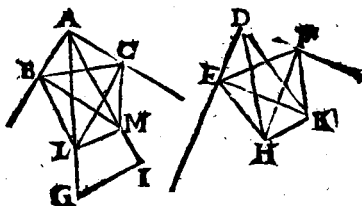
Finalement, si aux deux susdits prismes égaux, on ajoute deux autres prismes égaux & semblables à iceux, seront constituez deux parallélip. égaux de même hauteur que les prismes: Parquoy par la 34. pr. II. puis que les bases, & les hauteurs des parallélipèdes sont reciproques, & les bases des prismes sont les mêmes, ou les triangles moitiés, d'icelles, ayant même raison par la 15. p. 5. aussi les bases & les hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

Si'il y a deux angles plans égaux, aux sommets desquels soient levées en l'air deux lignes droites faisant angles égaux avec les lignes des angles premierement posez, chacun au sien; & d'un point pris au haut de chacune d'icelles deux lignes élevées sont menées des lignes perpendiculaires aux plans esquels sont les plans premierement posez, & des points où tombent icelles perpendiculaires sont tirées des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: Les angles que font icelles lignes, avec les levées en l'air sont égaux entr'eux.

Soient deux angles plans égaux BAC, EDF, des sommets

desquels A & D, soient levées en l'air les lignes droites AG, DH, tellement que l'angle BAG soit égal à l'angle EDH : & l'angle CAG égal à l'angle FDH : & des points G & H, pris és lignes AG, DH, soient tirées aux plans esquels sont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és points I,



K, desquels soient menées les lignes IA, DK. Je dis que les angles GAI, HDK, sont égaux entr'eux.

Car si les deux lignes AG, DH sont inégales de la plus grande AG, soit retranché AL égale à DH : & de L au plan du triangle AGI, soit tirée LM parallèle à GI : laquelle LM sera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 2. pr. 11. puis que GI est perpendiculaire à iceluy plan. Soient aussi tirez des points M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF : & soient menées les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM est perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le sera aussi à la ligne AM tirée au même plan par la 3. def. 11. partant par la 47. prop. 1. le carré de AL sera égal aux quarrés de AM, ML : mais par la même prop. le carré de AM est égal aux quarrés de AC, CM, puis que l'angle ACM est droit par construction. Donc le carré de AL est égal aux quarrés de AC, CM, ML : Et par la 47. prop. 1. le carré de CL est égal aux quarrés de CM, ML, puis que par la 3. d. de ce livre, l'angle CML est droit. Donc le carré de AL est égal aux quarrés de AC, GL : & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL est droit. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le carré de AL est égal aux quarrés de AM, ML : & le carré de AM est égal aux quarrés de AB, BM, l'angle ABM étant droit par la construction : le carré de AL est égal aux quarrés de AB, BM, ML : mais le carré de BL est égal à iceux quarrés de BM, ML, pource que l'angle BML est droit par la 31. def. 11. Donc le carré de AL est égal aux quarrés de AB, BL : & partant par la 48. pr. 2. l'angle ABL sera droit. On démontrera en la même manie-

re que les angles DFH , DEH sont aussi droits. Maintenant puis que les angles ABL , LAB , du triangle ABL sont égaux aux angles DEH , HDE , du triangle $D. H$, & les costez AL , DH aussi égaux, par la 26. prop. 1. les autres costez AB , BL seront pareillement égaux aux autres costez DE , EH . Par mesme raison seront égaux les costez AC , CL , aux costez DF , FH . Parquoy les costez AB , AC , du triangle ABC , étant égaux aux costez DE , DF du triangle DEF , & les angles BAC , EDF aussi égaux, par la 4. pr. 1. les bases BC , EF , seront pareillement égales entr'elles. & les angles ABC , ACB égaux aux angles DEF , DFE . Mais tous les angles ABM , ACM , sont égaux à tous les angles DEK , DFK , puis qu'ils sont tous droits : Donc aussi les autres angles BMC , MCB seront égaux aux autres angles KEF , KFB , & partant puis que les costez BC , EF , ont été demontrez égaux; les costez BM , MC , seront égaux aux costez EK , FK , par la 26. prop. 1. veu donc que les costez AC , CM , du triangle ACM sont égaux aux costez DF , FK , du triangle DFK , & les angles ACM , DFK sont droits, par la 24. prop. 1. les bases AM , DK seront égales. Et puis que BL , EH ont été démontrées égales, leur quarré seront aussi égaux. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL est égal au quarré de BM , ML , & le quarré de EH aux quarrés de EK , KH , pource que les angles BML , EKH sont droits, par la 3. def. 11. Donc les quarrés de BM , ML seront égaux aux quarrés de EK , KH : & partant étant ostez les quarrés de BM , EK , qui sont égaux, les lignes BM , EK , ayant été démontrées égales, resteront égaux les quarrés de LM , HK , & partant les lignes M , HK seront égales. Parquoy veu que les costez AL , AM du triangle ALM , sont égaux aux costez DH , DK du triangle DHK , & la base LM égale à la base HK ; les angles LAM , HDK seront égaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

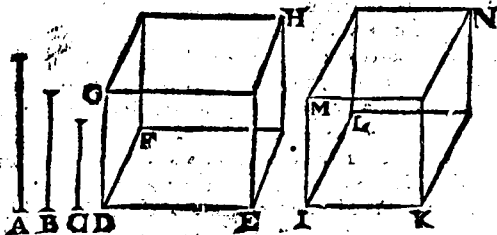
Parquoy s'il y a deux angles plans égaux, & des sommets desquels soient élevées en l'air des lignes droites égales, lesquelles avec les lignes d'iceux angles premierement posées, contiennent angles égaux, chacun au sien : les perpendiculaires tirées des points extrêmes d'icelles lignes élevées en l'air, sur les plans des angles premierement posés, seront égales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC , BDF , sont posés égaux, & les lignes égales AL , DE

élevées en haut constituent les angles égaux LAB , HDE ; Item LAC , HDF , il a été démontré que les perpendiculaires LM , HK , sont égales entr'elles.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes droites sont proportionnelles; le solide parallelepipedé constitué d'icelles trois lignes, est égal au solide parallelepipedé fait de la moyenne, pourvû qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportionnelles A , B , C ; & soit constitué un angle solide D , de trois quelconques angles plans EDF , EDG , FDG , tellement que la ligne DE soit égale à la ligne A , DG à B , & DF à C : & soit accompli le parallelepipedé DH : en apres, par la 26. pr. II. sur la ligne IK égale à B , & au point I soit fait l'angle solide I des trois angles plans



KIL , KIM , & MIL , égaux aux trois EDF , EDG , FDG : tellement que chacune des lignes IK , IL , IM soit égale à la moyenne B ; & soit parfait le parallelepipedé IN . Je dis que les solides DH , IN sont égaux.

Car puis que comme DE est à IK , ainsi IL à DF : (car DE est égale à A , IK à B ; & DF à C ,) & les angles EDF , KIL égaux, les paralleloq. EF , KI seront égaux par la 14. pr. 6. pource qu'ils ont les costez au long des angles égaux reciproques. Et d'autant qu'aux sommets des angles plans égaux EDF , KIL sont élevez en l'air les lignes égales DG , IM lesquelles

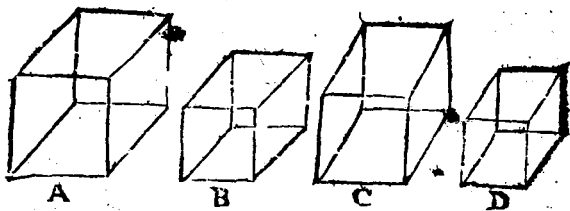
quelles avec les lignes des angles premierement posez comprennent angles egaux, un chacun au sien : les perpendiculaires tirées de G, M, sur les plans des bases EF, KL; (sçavoir est les hauteurs des parallelipipedes DH, IN) seront egales entr'elles par le corollaire de la preced. prop. Parquoy par la 31. pr. 11. les parallelip. D. I, IN, seront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les bases EF, KL egales, & pareillement les hauteurs egales. Parquoy si trois lignes droites sont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes droites sont proportioneles; les solides parallelipipedes semblables, & semblablement decrits sur icelles, seront aussi proportionaux : Et si quatre solides parallelipipedes semblables & semblablement posez sont proportionaux; les quatre lignes droites, sur lesquelles ils seront decrits, seront aussi proportioneles.

Soient quatre lignes droites proportioneles A, B, C, D : & soient decrits sur icelles quatre solides semblables & semblablement posez A, B, C, D. Je dis qu'iceux solides sont proportionaux.

Car puis que le solide A est semblable au solide B : par la 33. prop. 11. ils seront l'un à l'autre en raison triplée de la ligne A à



la ligne B : pareillement les solides C & D seront aussi en raison triplée de C à D : mais la raison de A à B, est comme de C à D par l'hypothese. Donc la raison triplée de A à B, sera sem-

blable à la raison triplée de C à D, & partant par la 11. prop. 9. le solide A sera au solide B, comme le solide C au solide D.

Maintenant si les quatre solides A, B, C, D, semblaibles & semblablement décrits sur les quatre lignes droites A, B, C, D, sont proportionaux. Je dis que la ligne A sera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car le solide A sera au solide B, en raison triplée de la ligne A à la ligne B par la 33. pr. 11. Item le solide C au solide D, en raison triplée de C à D : mais le solide A est au solide B comme le solide C au solide D : partant leur raison triplée sera semblable ; & par conséquent les quatre lignes droites A, B, C, D, seront proportioneles. Parquoy si quatre lignes droites sont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Semblablement, si trois lignes droites sont proportioneles, les parallelipip. semblaibles & semblablement décrits sur icelles seront proportionaux ; & si trois solides semblaibles, &c. Car la moyenne ligne étant posée deux fois avec son solide, les quatre solides seront proportionaux, comme il a été démontré. Car puis que le solide de la deuxième ligne est égal au solide de la troisième ligne, & la deuxième ligne égale à la troisième, la proposition est manifeste.

Et est à noter qu'il n'importe pas que tous les quatre solides soient semblaibles entr'eux : Car les deux solides décrits sur les deux premières lignes A & B étant semblaibles & semblablement pos. z, il n'est pas nécessaire que les deux autres solides, décrits sur les deux dernières lignes C & D soient semblaibles & semblablement pos. z. aux deux premiers, ains suffit qu'ils le soient entr'eux deux, ainsi qu'il est evident par la demonstration cy-dessus.

Nous ajouterons icy cet autre theoreme.

Si quatre lignes droites sont continuellement proportioneles : le parallelipipe de avant pour base le carré de l'une des extremes, & pour hauteur l'autre extrême, est égal au cube de la moyenne proport. plus prochaine de la premiere extrême prise.

Soyent quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Je dis que le parallelipipe de ayant le carré de l'extrême A pour base, & l'autre extrême D pour hauteur, est égal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extrême A.

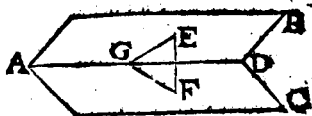
Car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A est au quarré de B , comme A à C , c'est à dire comme B à D , les bases avec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la base du parallépipède, & la ligne D , la hauteur d'iceluy; & la base du cube est le quarré de B , & sa hauteur la mesme ligne B . Donc par la 34. prop. 11. le parallépipède & le cube seront égaux. Par mesme raison le parallépip. ayant pour base le quarré de l'extreme D , & pour hauteur l'autre extreme A , sera démontré égal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D .

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, & d'un point de l'un d'iceux on mene une ligne perpendiculaire à l'autre, elle tombera sur leur commune section.

Soit le plan AB perpendiculaire au plan AC , leur ligne de commune section AD : & du point E pris en AB , soit menée une perpendiculaire au plan AC : je-dis qu'elle tombera sur la commune section AD .

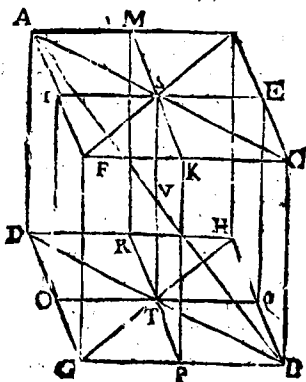
Car qu'elle tombe ailleurs, s'il est possible, comme au point F du plan AC : & par la 12. prop. 1. de F soit menée FG perpendiculaire à AD ; & la ligne GE faisant le triangle GFE . Or si la ligne EF est perpendiculaire au plan AC , par la 3. def. 11. elle le sera aussi à la ligne FG : & icelle FG étant perpendiculaire à la commune section AD , par la 4. def. elle le sera pareillement au plan AB : & par consequent à la ligne GE : partant au triangle GFE , les deux angles sur la ligne GF seroient tous deux droits contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E au plan AC ne tombera pas hors la commune section AD , ains sur icelle. Parquoy si un plan est perpendiculaire à un autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les costez des plans opposez d'un solide parallelipede, sont coupez en deux egale-
ment, & on mene des plans par les sections : la ligne de
commune section d'iceux plans, & le diametre
du solide parallelipede, se couperont en deux
egale-ment.

Soit le parallelipede AB; les plans opposez AC, BD, des-
quels tous les costez soient coupez en deux egale-ment es points
I, K, L, M, O, P, Q, R,
par lesquels soient imagi-
nez passer les plans IQ,
KR, se coupans l'un l'autre
en la ligne ST : & soit
menée la diagonale AB :
Je dis que la ligne ST, &
la diagonale AB s'entre-
coupent en deux egale-
ment.



Car étans tirées les li-
gnes SA, SC, TD, & B:
soient considerez les deux
triangles BQT, DOT,
desquels les deux costez
EQ, QT sont egaux aux
deux costez DO, OT,

(car BQ, DO, sont moitiez des lignes droites egales BH, DG;
& par la 34. pr. 1. QT, OT, sont egales aux deux egales BP, GP,
puis que PQ, PO sont parallelogrammes) & l'angle EQT; par
la 29. prop. 1. est egal à l'interne DOT : partant par la 4. prop.
1. les bases BT, DT seront aussi egales : & les angles BTQ,
DTO pareillement egaux : & par la 13. prop. 1. les angles BTQ,
BTO sont egaux à deux droits. Donc aussi DTO, BTO sont
egaux à deux droits : & partant par la 14. prop. 1. BT, DT
constituent une seule ligne droite. En la mesme maniere sera
demonstré que AS, CS sont egales, & composent une seule li-
gne droite. Maintenant puis que l'une & l'autre AD, BC est

parallele & egale à FG , à cause des parallelogrammes DF , FB : icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC , BD qui conjoignent les extrémitez d'icelles AD , BC , sont aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par consequent AS , BT moitez d'icelles sont egales. Mais pource que AC , BD sont paralleles, les lignes AB , ST seront avec icelles en un mesme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecouperont en un point, sçavoir en V . Et d'autant que par les 29. & 15. prop. 1. les deux angles ASV , AVS du triangle ASV , sont egaux aux deux angles BTV , BVT , du triangle BTV , & le costé AS egal au costé BT : les autres costez AV , SV , seront aussi egaux aux autres costez BV , TV ; chacun au sien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB , ST s'entrecoupent en deux egalelement au point V . Parquoy si les costez des plans opposez d'un solide parallelepiped, &c. Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est evident qu'en tout parallelepiped, tous les diametres s'entrecoupent en deux egalelement en un seul point, sçavoir est au point V , auquel ils divisent en deux egalelement la ligne ST . Est aussi manifeste que tout plan qui coupe le parallelepiped en deux egalelement passe par le centre d'iceluy, sçavoir par V .

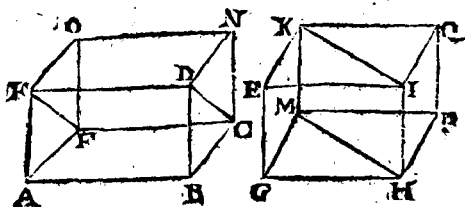
T H E O R. 35. P R O P. XL.

S'il y a deux prismes d'egale hauteur, l'un desquels ait pour base un triangle, & l'autre un parallelogramme double d'iceluy triangle: iceux prismes seront egaux entr'eux.

Soient deux prismes d'egale hauteur $ABCDEF$, $GHIKLM$: & que celuy là ait pour base le parallelogramme $ABCF$, double du triangle GHI base du prisme $GHIKLM$. Je dis qu'iceux prismes sont egaux entr'eux.

Car si on les accomplit pour estre solides parallelepipedes AN , GQ , la base GP sera egale à la base BF : & étans posez de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. prop. 11. & par la

28. prop. les plans diagonaux CDEF, HIKM les diviseront en deux également ; & partant les prismes proposez éans les



moitié de choses égales , seront égaux entières. Parquoy s'il y a deux prismes d'égale hauteur , &c. Ce qu'il falloit prouver,

Fin de l'unzième Element,





ELEMENT

DOU ZIÈME.

THEOR. I. PROP. I.

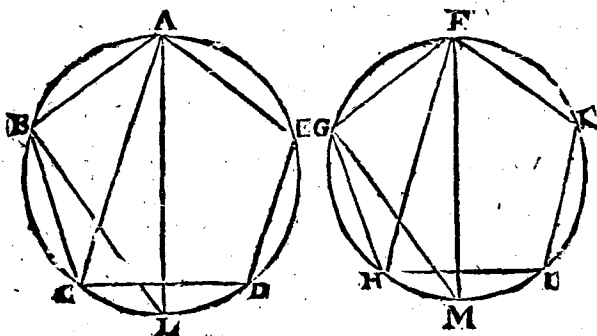


ES polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'un à l'autre comme les quarez décrits des diametres des cercles.

Soient deux polygones semblables $ABCDE$ & $FGHIK$, inscrits aux cercles, desquels les diametres sont AL , FM . Je dis qu'iceux polygones sont l'un à l'autre comme les quarez des diametres AL , FM .

Car soient menées les lignes droites AC , FH : item BL & GM . D'autant que les pentagones estans semblables, AB est à BC , comme FG à GH , & l'angle ABC égal à l'angle FGH : par la 6. prop. 6. les triangles ABC , FGH sont equiangles : partant l'angle BCA sera égal à l'angle FHG . Mais celui-là est égal à l'angle D , cettuy-cy à l'angle M , par la 21. prop. 3. (car ils sont sur mesmes segmens BA , & FG .) Donc l'angle L sera égal à l'angle M : & par la 31. prop. 3. les angles ABL , FGM estans dans les demy cercles sont droits & egau : partant les triangles ABL FGM seront equiangles : car le troisiéme angle BAL sera égal au troisiéme GFM par la 32. prop. 1.) & par la 4. prop. 6. comme AL sera à AB , ainsi FM à FG : & & en permutant, comme AL sera à FM , ainsi AB à FG . Parquoy par la 22. prop. 6. comme le pentagone décrit sur AB sera à l'autre pentagone semblable, & semblablement posé sur FG :

ainsi le quarré de AL sera au quarré de FM. Parquoy les po-

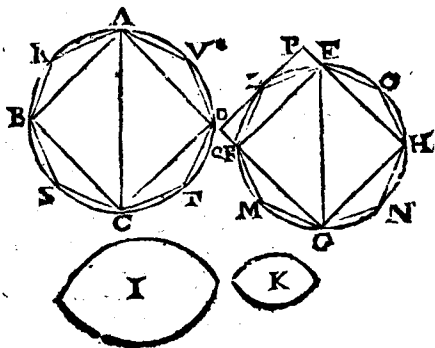


lygones semblables inscrits aux cercles, &c. Ce qui estoit à prouver.

THEOR. 2. PROP. II.

Les cercles sont l'un à l'autre, comme les quarrés de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, dont les diametres sont AC & EG: Je dis qu'ils sont l'un à l'autre comme le quarré de AC est au quarré de EG: c'est à dire que si on imagine que comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le



cercle ABCD soit à quelque figure quatrième proport. comme I, qu'icelle figure est égale au cercle EFGH.

Autrement elle sera plus petite ou plus grande. Qu'elle soit premièrement plus petite, s'il est possible : & soit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. pr. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du résidu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera enfin une quantité plus petite que K: soit donc dans iceluy cercle EFGH décrit le quarré EFGH, qui est plus grand que la moitié du cercle : (d'autant que le quarré de EG, qui est son double, est plus grand que le cercle.) Si les quatre segmens du cercle sont moindres que K, nous avons ce que nous demandons ; sinon soit coupé l'arc EF en deux également au point L, & semblablement les trois autres arcs FG, GH, HE, és points M, N, O; & soient tirées les lignes droites EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, O L, afin d'avoir l'octogone ELFMGNHO, inscrit au cercle : il est évident que dans les quatre segmens égaux, il y aura quatre triangles égaux, & que chacun comme ELF, est plus de la moitié de son segment : (car par la 41. pr. 1. le triangle isoscele FLE est la moitié du rectangle FP de mesme hauteur, & sur mesme base FE, lequel rectangle est plus grand que le segment FLE.) Soient maintenant les huit petites figures restantes plus petites que la figure K: que si cela n'estoit, il faudroit toujours couper les arcs derniers, & toujours inscrire des polygones, desquels le dernier auroit deux fois autant de côtes que l'on précédent, & soustraire toujours plus de la moitié de chaque segment, sçavoir son triangle isoscele : Il est certain que les dernières portions seront enfin plus petites que la figure K, Mais pour abréger soient les devant dites huit portions restantes plus petites que la figure K: Il est évident que l'octogone ELFMGNHO sera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K sont égales au cercle EFGH. Soit pareillement inscrit un octogone semblable au cercle AB, CD: ce qui est facile; car il n'y a qu'à couper chaque demy circonférence ABC, ADC en deux également és points B & D; puis les circonferences AB, BC, CD, AD aussi en deux également en R, S, T, V; & ayant tiré les lignes droites AR, RB, BS, SC, CV, TD, DV, & VA; il est évident que la figure inscrite sera semblable à la figure octogone décrite au cercle EFGH. Maintenant par la préc. prop. l'octogone ARBSCTDV sera à l'octogone ELFMGNHO, comme le quarré de AC est au quar-

ré de EG: mais comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I: & par la 11. pr. 5. cōme le polygone ARBSCTDV sera au polygone ELFMGNHO, ainsi le cercle ABCD sera à la figure I: mais le polygone ARBSCTDV est moindre que le cercle ABCD: Donc par la 14. prop. 5. le polygone ELFMGNHO sera aussi moindre que la figure I: mais il a aussi esté démontré plus grand. Ce qui est absurde. Donc la figure I n'est pas plus petite que le cercle EFGH.

Elle ne peut aussi estre plus grande: Car puis que comme le quarré de AC est au quarré de EG, ainsi le cercle ABCD est à la figure I; en changeant, la figure I sera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarré de AC: mais soit imaginé que comme I est au cercle ABCD, ainsi le cercle EFGH soit à quelque autre figure, comme K; & par la 14. pr. 5. comme la figure I est plus grande que le cercle EFGH, ainsi le cercle ABCD sera plus grand que la figure K: & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD sera à la figure K, comme le quarré de AC est au quarré de EG: ce qui est contre la premiere partie de la demonstration, en laquelle nous avons démontré que l'un des cercles estant à une figure, en la raison des quarrés des diametres, qu'icelle figure ne pouvoit estre plus petite que l'autre cercle: Partant la figure I ne pouvoit estre plus grande que le cercle EFGH: ny plus petite, comme en la premiere partie: elle étoit donc egale à iceluy. Parquoy les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres. Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

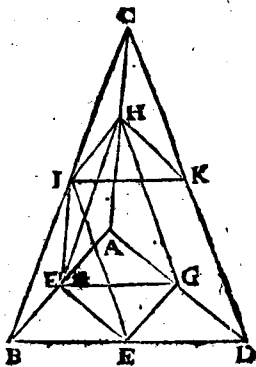
Par ces choses est evident que le cercle est au cercle comme le polygone décrit en celuy-là est au polygone semblable décrit en cettui-cy. Puis que le cercle est au cercle, & le polygone au polygone, comme le quarré du diametre est au quarré du diametre, ainsi qu'il a esté démontré es 1. & 2. prop. cy-dessus.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant base triangulaire, peut être divisée en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.

Soit la pyramide $ABCD$ ayant la base triangulaire ABD , & le sommet au point C : Je dis qu'elle peut estre diuisée en deux pyramides egales, semblables entr'elles, & à la totale $ABCD$; & en deux prismes egaux, plus grands que la moitié d'icelle pyramide proposée.

Car soient coupez en deux également, tous les costez des plans d'icelle pyramide, sçavoir les trois de la base ABD aux points E, F, G , & les trois hyporhénuses AC, BC, DC aux trois points H, I, K , & soient menées les lignes $EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF$. Premièrement il est évident que toute la pyramide $ABDC$ est diuisée en quatre solides, sçavoir en deux pyramides $AEGH, HIKC$, dont les bases sont triangles AEG, HIK , & les sommets H, C ; & en deux prismes $BFIHEG, FGDKHI$, dont la base de celui-là est le quadrangle $BEGF$, & de celui-cy le triangle FGD . Or d'autant que les costez AB, AC , ont esté coupez en deux également en E & H , par la 2. prop. 6, BC, EH seront paralleles; & par mesme raison HI est parallele à BA ; donc le quadrilatere BHE est parallelogramme: & par la 34. prop. 1. HI est egale à EB , ou EA son egale, & HE à BI , ou IC son egale: & par le corol. de la 4. prop. 6. les deux triangles ABC, AEH sont semblables entr'eux. Par mesmes raisons les deux triangles ABC, HIC seront semblables entr'eux, & conséquemment aussi les deux AEH, HIC , par la 21. prop. 6. lesquels seront aussi egaux entr'eux, puis qu'ils ont tous leurs costez egaux, chacun au sien. Par mesmes raisons le triangle AHG sera egal



& semblable au triangle HCK : mais les lignes HE, HG étant paralleles aux lignes CI, CK , & se touchans en divers plans, par la 10. p. 11. les angles EGH, ICK seront egaux: & les costez qui sont iceux angles estans proportionaux, les trois triangles EHG, ICK, BCD seront equiangles, & conséquemment semblables: comme aussi les trois AEG, HIK, ABD : Donc par la 9. def. 11. les trois pyramides $ABDC, AEGH, HIKC$

seront semblables entr'elles : & par la 10. def. les deux dernières seront aussi égales entr'elles , puis que tous les quatre triangles de l'une ont esté montrez semblables & égaux aux quatre triangles de l'autre.

Or que les deux solides BFIHGE, FGDKHI, soient deux prismes égaux, & faisant ensemble plus de la moitié de la pyramide proposée ABDC, on le prouvera ainsi, puis que les costez des plans d'icelle pyramide ont été coupez en deux également, & partant proportionnellement, par la 2. prop. 6. les lignes AB, FG sont parallèles, comme aussi BD, EG : par ainsi le quadrilatere BEGF est un parallélogr. & par la 9. p. 11. HC & IF étans parallèles à CD, elles le sont aussi entr'elles : L'onc FIHG est un parallélogr. ; comme est aussi BIHE : partant les trois costez du triangle BIF seront égaux aux trois costez du triangle EHG, chacun au sien : conséquemment iceux triangles sont equiangles & égaux entr'eux, & partant semblables : Mais par la 15. p. 11. ils sont aussi parallèles, les lignes BI, FI, étans parallèles aux lignes EH, GH. Parquoy le solide BFIHGE contenu des deux triangles BIF, EHG égaux semblables & parallèles opposez, & des trois parallélogr. BEGF, BIHE, FIHC est un prisme par la 13. def. 11. Derechef. FD, FG, CD, costez de parallélogr, sont égaux aux costez opposez IK, IH, HK, chacun au sien par la 34. p. 1. & partant les triangles FGD, IHK seront égaux & equiangles entr'eux, & conséquemment semblables. Mais ils sont aussi parallèles par la 15. p. 11. donc le solide FGD KHI contenu des deux triangles opposez FGD, IHK égaux, semblables & parallèles, & des trois parallélogr. PIKD, FIHG, GHKD est un prisme ; lequel étant de même hauteur que le prisme BFIHGE (car ils sont tous deux entre les plans parallèles BEGD, ICHK) luy sera égal par la 40. p. 11. puis que la base quadrangulaire BEGF de celuy-cy est double de la base triangulaire de celuy-là, par le scholie de la 41. p. 2. Mais il est evident qu'iceluy prisme BFIHGE est plus grand que la pyramide de mesme hauteur BEFI, qui n'en est que partis, la base d'icelle BEF n'estant que la moitié du parallélogr. BEGF : laquelle pyramide BEFI est égale & semblable à la pyramide EAGH, comme il est manifeste par l'égalité & similitude de leurs triangles. Parquoy ledit prisme BFIHEG, sera aussi plus grand qu'icelle pyramide EAGH : Et par conséquent les deux prismes BFIHEG, FGDKHI ensemble, seront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes & pyramides

sont ensemble la pyramide totale $ABCD$: donc iceux prismes étant plus grands qu'icelles 2 pyramides, seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale $ABCD$. Parquoy toute pyramide ayant base triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. IV.

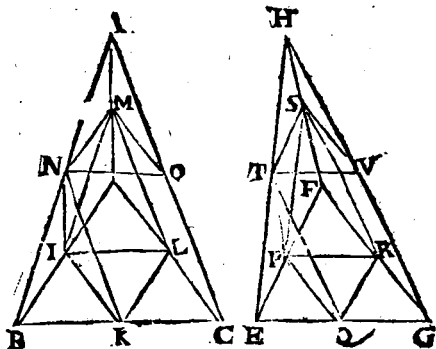
S'il y a deux pyramides de même hauteur ayans bases triangulaires, chacune desquelles soit divisée en deux autres pyramides égales entr'elles, & semblables à la toute, & en deux prismes égaux; & que les pyramides provenuës de cette division soient toujours divisées de même façon: comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi aussi tous les prismes qui sont en l'une des pyramides, seront à tous les prismes de l'autre, égaux en multitude.

Soient sur les bases triangulaires ABC , EFG , les pyramides $ABCD$, $EFGH$ de même hauteur, chacune desquelles soit divisée comme en la prec. pr. en deux pyramides égales entr'elles, & semblables à la toute, sçavoir est en $AILM$, $MNOD$; $EPRS$, $STVH$; & en deux prismes égaux $IBKLMN$, $CKLMNO$; $PFQRST$, $GQRSTV$: Et de même façon soient entendues les pyramides $AILM$, $MNOD$, $EPRS$, $STVH$ estre divisées; & en continuant toujours de même façon. Je dis que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi tous les prismes faits en la pyramide $ABCD$ sont à tous les prismes faits en la pyramide $EFGH$, égaux en multitude.

Car puis que comme BC à CK , ainsi FG à GQ , pource que l'une & l'autre ligne est divisée en deux également, & les triangles ABC , LKC sont semblables & semblablement posez: Item les triangles EFG , RQG par le corollaire de la 4. proposition 6. aussi comme le triangle ABC sera au triangle LKC , ainsi le triangle EFG sera au triangle RQG par la 22. proposition 6. & en permutant, comme ABC à EFG , ainsi KC à RQG . Mais comme IKC à RQG , ainsi est le prisme $CKLMNO$ au prisme $GQRSTV$, comme nous démontrerons incontinent: & partant ainsi aussi le prisme $IBKLMN$ est au prisme $PFQRST$, puis que ceux-cy sont égaux à ceux-là: Et comme un seul prisme, sçavoir $IBKLMN$, est à un seul prisme $PFQRST$, ainsi sont les 2. prismes ensemble $IBKLMN$,

CKLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRSTV par la 12. prop. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide ABCD seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous démontrerons en la mesme maniere, deux prismes és pyramides AILM, MNOD, faites en la pyramide

ABCD, être à deux prismes és pyramides EPRS, STVH, faites en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux



bases EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainsi continuellement, tant que la mesme division sera faite. Mais comme ces bases-là sont à celles-cy, ainsi la base LKC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à celle-cy, c'est à dire ainsi à la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG, ainsi les prismes de quelcque pyramide faite en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faite en la pyramide EFGH: & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront tant les prismes de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. prop. 5. comme les deux prismes de la pyramide ABCD sont aux deux prismes de la pyramide EFGH, ainsi tous les prismes étans és pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. ensemble, sont à tous les prismes étans és pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. ensemble, si ceux-cy sont egaux en multitude à ceux-là: pareillement comme la base ABC est à la base EFG,

ainsi seront tous les prismes de la pyramide ABCD, à tous les prismes de la pyramide EFGH. Parquoy s'il y a deux pyramides de même hauteur, ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il faisoit prouver.

L E M M E.

Or que comme LKQ est à RQ, ainsi le prisme CKLMNO soit au prisme GQRSTV, nous le démontrerons ainsi. Soient imaginées tomber des sommets D, H, des lignes perpendiculaires sur les bases ABC, EFG, lesquelles seront les hauteurs égales des pyramides ABCDEFGH. Donc puis que les plans parallèles ABC, MNO coupent proportionnellement par la 17. prop. II. deux lignes droites, sçavoir DC, & la perpendiculaire tombant de D, & DC est coupée en deux également en O : pareillement la perpendiculaire tombant de D, sera coupée en deux également au point auquel elle rencontre le plan MNO. Par la même raison la perpendiculaire tombant de H, sera coupée en deux également par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires sont posées égales, leurs moitiés, sçavoir est les hauteurs des prismes, seront aussi égales : & partant les prismes CKLMNO, GQRSTV étans d'égales hauteurs, seront entr'eux, comme les bases LKQ, RQ, par les choses que nous avons démontrées au scholie de la 34. prop. II.

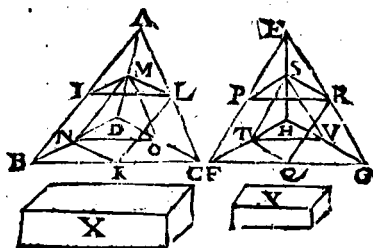
THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de même hauteur ayans bases triangulaires ; sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides de même hauteur ABCD, EFGH, desquelles les bases sont les triangles ABC, EFG. Je dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base.

Autrement, soit imaginé que comme la base AFC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD soit à quelque solide comme X, lequel sera plus petit ou plus grand que la pyramide EFGH : Et soit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du solide Y. Ainsi nous imaginons que les deux solides X & Y, sont égaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diviser une pyramide en deux pyramides égales, & en deux prismes égaux, lesquels seront plus grands que la moitié de la pyramide totale : Que si de la pyramide EFGH,

on retranche plus de la moitié, sçavoir les deux prismes $PFQRST$, $QQRSTV$, & de chacune pyramide restante $EPRS$, $STVH$, encores plus de la moitié, sçavoir deux prismes, en continuant toujours jusques à ce que toutes les pyramides restantes apres le dernier retranchement, soient toutes ensemble manifestement plus petites que le solide Y : ce qui peut arriver par la 1. prop. 10. Ainsi tous les prismes ensemble retranchez de la pyramide $EFGH$, seront plus grands que le solide X , puis que le reste est plus petit que le solide Y . Pareillement soient retranchez autant de fois deux prismes de la pyramide $ABCD$, comme on en a retranché de la pyramide $EFGH$: il est evident par ce qui a été démontré en la precedente proposition, que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi tous les prismes retranchez de la pyramide $ABCD$ seront à tous les prismes retranchez de la pyramide $EFGH$: Mais nous avons posé que comme la base ABC est à la base EFG , ainsi la pyramide $ABCD$ est au solide X . Et par tant par la 11. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide $ABCD$ seront à tous les prismes retranchez de la pyramide $EFGH$, comme la pyramide $ABCD$ est au solide X . Or tous



les prismes retranchez de la pyramide $ABCD$ sont plus petits qu'icelle pyramide : donc par la 14. prop. 5. tous les prismes retranchez de la pyramide $EFGH$, seront aussi plus petits que le solide X : Mais nous les avons tantost prouvez plus grands : Ce qui est absurde. Partant le solide X n'étoit pas plus petit que le pyramide $EFGH$.

Soit donc plus grand, s'il est possible & puis que comme la base ABC à la base EFG , ainsi la pyramide $ABCD$ au solide X en permutant la base EFG , sera à la base ABC , comme le solide X est à la pyramide $ABCD$. Mais comme le solide X est à la pyramide $ABCD$, soit posé la pyramide $EFGH$ estre à quelque autre solide, comme Y : Et par la 14. prop. 5. d'autant que le so-

le solide X est posé plus grand que la pyramide EFGH, aussi la pyramide ABCD sera plus grande que le solide Y : & par la 11. p. 5. comme la base EFC est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à un solide plus petit que l'autre pyramide : mais nous avons démontré que cela étant, il s'ensuit une absurdité, sçavoir que les puïsses retranchez d'une pyramide, estoient plus grands que la pyramide de laquelle ils sont retranchez : Parant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit : il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a été posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X ; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD est au solide X, comme à la pyramide EFGH egal à iceluy solide X ; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de mesme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonstren.

S C H O L I E.

Par la converse: Si les pyramides triangulaires sont entr'elles comme leurs bases ; elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'une soit plus grande que l'autre, en soit coupée d'icelle une egale à la moindre, & du point de la section à tous les angles de la base, soient tirées des lignes droites ; & comme la base sera à la base, ainsi la pyramide sera à la pyramide n'agueres constituée : mais elle étoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9. pr. 5. la pyramide constituée sera egale à toute la pyramide ; c'est à sçavoir la partie au tout : ce qui est absurde.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituées sur mesme, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles ; puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posées egales, ou une seule & mesme.

Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituées sur une mesme, ou egales bases, sont de mesme hauteur : Et que les pyramides egales, & ayans mesme hauteur, ont les bases egales, si elles ne sont un mesme : lesquelles deux choses l'on démontrera par la premiere partie du corol. par le mesme argument dont nous avons usé en démontrant la converse des 30. & 31. pr. 11. si tant sur la

hauteur, que sur la base coupée est construite une autre pyramide, &c.

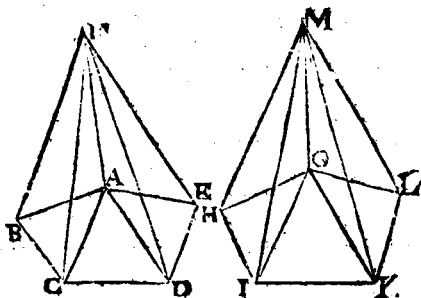
THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de même hauteur ayans bases polygones, sont l'une à l'autre comme leurs bases.

Soit la pyramide ABCDEF de même hauteur que la pyramide GHIKLM, desquelles les bases ABCDE & GHIKL sont polygones : Je dis que comme la base est à la base, ainsi la pyramide est à la pyramide.

Car les bases étant réduites en triangles ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL : soit imaginé sur chacun d'iceux une pyramide de même hauteur que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. comme la base ABC est à la base ACD, ainsi la pyramide ABCF

est à la pyramide ACDF; en composant, comme la base ABCD sera à la base ACD, ainsi la pyramide ABCDF sera à la pyramide ACDF: Mais



derechef, par la 5. prop. 12. comme la base ACD est à la base ADE, ainsi la pyramide ACDF est à la pyramide ADEF: Donc en raison égale, comme la base ABCD est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide ADEF: & partant en composant, comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera démontré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHIKLM est à la pyramide GKLM: & en changeant, comme la base GKL est à la base GHIKL, ainsi la pyramide GKLM est à la pyramide GHIKLM. Derechef, puis que par la 5. prop. 12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide

CKLM : les 4. bases ABCDE, ADE, GKL, GHIK, seront
 les mesmes raisons que les quatre pyramides ABCDEF, ADEF,
 GKIM, GHIKIM : Parquoy en raison egale, comme la base
 ABCDE est à la base GHIK, ainsi la pyramide ABCDEF est
 à la pyramide GHIKLM. Donc les pyramides de mesme hau-
 teur ayans bases polygones, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Encore que selon plusieurs Interpretes, il soit parlé en la
 demonstration de cette propos. seulement d s pyramides de
 mesme hauteur,

desquelles les ba-
 ses polygones ont
 les costez. egaux
 en nombre : sou-

tesfois nous de-

montrerons aussi

le mesme des py-

ramides de mesme

hauteur, la base

de l'une desquel-

les contient plus

de costez que la base de l'autre. Car soient premierement

deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIK, la

base de l'une desquelles soit polygone, sçavoir est pentago-

ne, & de l'autre triangulaire. Je dis que la pyramide est à

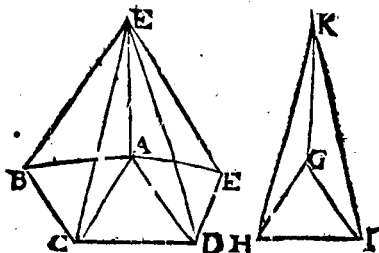
la pyramide, comme la base est à la base : Car le pentagone

étant resoud en triangles, aussi la pyramide sera divisée

en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5. prop.

12. comme la base ABC premiere quantité est à la base GHI,

seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF troisieme quan-



tiété est à la pyramide GHIK quatrieme quantité. Et en la

mesme maniere, comme la base ACD cinquieme quantité est

à la base GHI deuxieme quantité, ainsi la pyramide ACDF

fixieme quantité, est à la pyramide GHIK quatrieme quan-

tiété : par la 24. p. 5. comme la base ABCD premiere & cin-

quieme quantité ensemble sera à la base GHI seconde quan-

tiété, ainsi la pyramide ABCDF troisieme quantité avec la

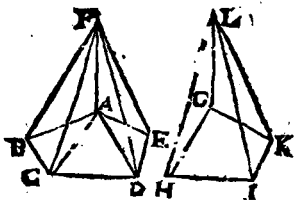
6e. sera à la pyramide GHIK 4e. quantité. Derechef, puis que

comme la base ABCD est à la base GHI, ainsi la pyramide

ABCDF est à la pyramide GHIK, comme nous venons de

demontrer : & que par la 3. prop. 12. comme la base *ADE* cinquième quantité est à la base *GHI* deuxième quantité, ainsi la pyramide *ADEF* sixième quantité est à la pyramide *GHIK* quatrième quantité; par la mesme 24. proposition 5. la base *ABCDE* sera à la base *GHI*, comme la pyramide *ABCDEF* est à la pyramide *GHIK*; ce qui étoit proposé. En la mesme maniere faudroit toujours proceder s'il y avoit davantage de triangles en la base du polygone. Or puis que comme il a esté démontré, la base du polygone *ABCDE* est à la base triangulaire *GHI*, ainsi que la pyramide *ABCDEF* est à la pyramide *GHIK*; pareillement en changeant, comme la base *GHI* sera à la base *ABCDE*, ainsi la pyramide *GHIK* sera à la pyramide *ABCDEF*. Parquoy deux pyramides, desquelles l'une a la base polygone, & l'autre triangulaire, sont toujours comme leurs bases, de quelque façon que l'on commence: Car encore que la demonstration commence au polygone & à sa pyramide, comme apert par la demonstration ci-dessus, toutesfoi en changeant, il est permis de commencer au triangle & à sa pyramide, comme il a été dit.

Maintenant soient deux pyramides de mesme hauteur *ABCDEF*, *GHIKL*, desquelles les bases sont polygones, & sont plus de costez en une base qu'en l'autre: Je dis derechef que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base. Car étant resoud le polygone *ABCDE* es triangles *ABC*, *ACD*, *ADE*: la pyramide sera divisée en autant de pyramides. Et d'autant que comme la base triangulaire *ABC*, première quantité, est à la base polygone *GHIK*, seconde quantité, ainsi la pyramide *ABCF* troisième quantité, est à la pyramide *GHIKL* quatrième quantité; & comme la base *ACD* cinquième quantité est à la base *GHIK* seconde quantité, ainsi la pyramide *ACDF* sixième quantité, est à la pyramide *GHIKL* quatrième quantité; aussi par la 24. prop. 5. comme la base *ABCD* première quantité avec la cinquième sera à la base *GHIK* seconde



quantité, ainsi la pyramide $ABCD$ troisième quantité avec la sixième sera à la pyramide $GHIK$ quatrième quantité. Derechef, puis que comme la base $ABCD$ première quantité est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCD$ tierce quantité, est à la pyramide $GHIK$ quatrième quantité : Et aussi que comme la base ADE quinte quantité, est à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ADEF$ sixième quantité, est à la pyramide $GHIK$ quarte quantité : pareillement par la 24. *proposit.* 5. comme la base $ABCDE$ première quantité avec la quinte, sera à la base $GHIK$ seconde quantité, ainsi la pyramide $ABCDE$ tierce quantité avec la sixième, sera à la pyramide $GHIK$ quatrième quantité : ce qui estoit proposé. Il faudroit toujours proceder en la mesme maniere s'il y avoit davantage de triangles en la base.

Or nous convertirons tant cette 6. *prop.* d'Euclide que celle démontrée en ce Scholie en cette maniere.

Les pyramides de quelconques bases, lesquelles sont entr'elles comme leurs bases, sont de mesme hauteur.

Ce qu'on démontrera en la mesme maniere, que les choses dites au Scholie de la 5. *proposition* de ce livre, ont esté démontrées.

C O R O L L A I R E.

Il apert aussi que les pyramides de mesme hauteur, construites sur bases égales multilateres, ou sur une mesme, estre égales entr'elles, puis qu'elles ont mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posées égales, ou une mesme.

Derechef, est evident que les pyramides multilateres égales, & construites sur bases égales, ou sur une mesme, ont mesme hauteur. Et que les pyramides multangulaires égales, & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases égales, si elles ne sont une mesme. Ce qui se peut démontrer comme nous avons dit au corollaire de la 5. *proposition* de ce livre.

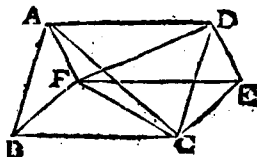
T H E O R. 7. P R O P. VII.

Tout prisme ayant la base triangulaire peut être divisé

en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.

Soit le prisme $ABCDEF$ duquel les deux triangles opposites ABF , DCE sont egaux & semblables. Je dis qu'iceluy prisme peut estre divisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.

Car aux trois parallelogrammes d'iceluy prisme, soient menées les trois diametres AC , CF , FD : d'autant que par la 34. pr. 1. les triangles ABC , ADC sont egaux, & que par la 5. prop. 12. comme la base ABC est à la base ADC , ainsi est la pyramide $ABCF$ à la pyramide $ADCF$, (car elles ont une même hauteur, sçavoir est la perpendiculaire menée du sommet F au plan BCD) icelles pyramides seront egales entr'elles. Par même raison seront egales les pyramides $ADFC$, $EFDC$, constituées sur les bases egales ADF , EFD , & sous même hauteur, sçavoir de la perpendiculaire menée du sommet C sur le plan $ADEF$. Mais la pyramide $ADCF$ est la même que la pyramide $ADFC$: puis que l'une & l'autre est contenue des quatre plans ADC , ADF , ACF , DCF . Donc les trois pyramides $ABCF$, $ADCF$, $EFDC$, ou $CDEF$, composans tout le prisme, sont egales entr'elles. Parquoy tout prisme ayant base triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouver.



C O R O L L A I R E.

De tcy resulte que tout prisme est triple d'une pyramide de même hauteur, étant sur même base, ou sur bases egales, ou bien qu'une pyramide est la tierce partie d'un prisme de même hauteur, étant sur même base, ou sur bases egales.

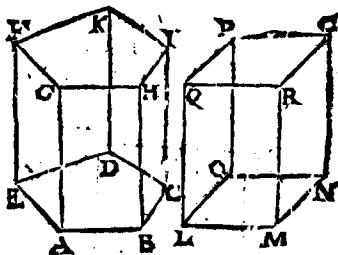
S C H O L I E.

Nous ajouterons icy la demonstration d'une autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plans paralleles à la base, egaux & semblables : cette proposition est celle.

Les prismes érans sous mesme hauteur, & ayans quelconques bases, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient deux prismes de mesme hauteur $ABCDEF GHIK$, $LMNOPQRS$, desquels les bases sont figures multilatères. Je dis que comme la base $ABCDE$ est à la base $LMNO$, ainsi est le prisme au

prisme. Car si de tous les angles de chaque base on tire des lignes droites à un point du plan supérieur, qui est opposé à la base, se feront deux pyramides sous mesme hauteur, ayans mesmes bases que le prisme : Et partant par le corollaire ci-



dessus, chaque pyramide sera la troisième partie de son prisme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide sera à la pyramide, ainsi le prisme sera au prisme : Mais la pyramide est à la pyramide, comme la base à la base, ainsi qu'il a esté démontré à la 6. prop. de ce livre. Donc aussi comme la base sera à la base, ainsi le prisme sera au prisme. Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE.

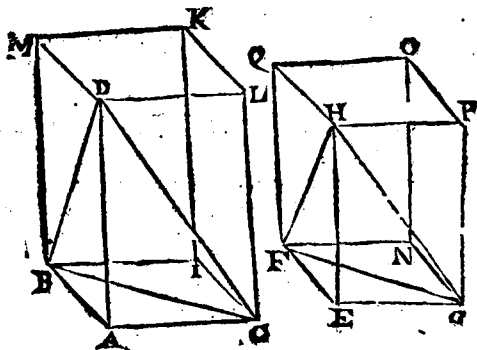
Il est manifeste par ces choses, que les prismes de mesme hauteur, & construez sur mesme base, ou sur bases égales quelles qu'elles soient, sont égaux entr'eux, puis qu'ils ont mesme raison entr'eux que leurs bases, lesquelles sont une mesme, ou bien sont égales.

Apert aussi par le contraire, que les prismes égaux construez sur une mesme base, ou sur égales sont en mesme hauteur : Et que les prismes égaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou égales. Ce qu'on démontrera en la mesme maniere qu'a esté démontré la converse de la 31. prop. 1.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplée de leurs côtez homologues.

Soient deux pyramides semblables $ABCD$ & $EFGH$, ayans bases triangulaires ABC & EFG : Je dis qu'elles sont en raison triplée des costez de mesme raison AC & EG . Car soient achevez les parallelipedes AK & EO . D'autant que les pyramides sont semblables, les trois angles plans de l'angle solide A , (sçavoir DAC , DAB , BAC) seront egaux aux trois angles plans de l'angle solide E , (sçavoir HFG , HEF , FEG) & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionaux ; tellement que comme DA est à AC , ainsi HE est à EG ; & comme DA est à DB , ainsi HE est à EF : & comme BA est



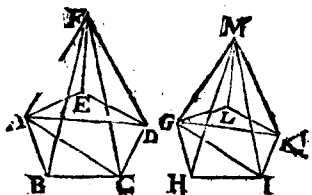
à AC , ainsi FE est à EG : Parquoy les trois parallelogrammes AL , AM , AI seront semblables aux trois parallelog. EP , EQ , EN . Mais par la 24. prop. 11. tant les trois AL , AM , AI du parallelipede AK sont egaux & semblables aux trois opposez BK , CK , ML ; que les trois EP , EQ , EN du parallelipede EO , le sont aux trois opposez QN , PN , HO : & partant les six plans du parallelipede AK sont semblables aux six plans du parallelipede EO . Et par la 9. definition 11. iceux parallelipedes sont semblables. Donc par la 33. proposition 11. ils seront en raison triplée de leurs costez homologues AC & EG . Mais par la 15. proposition 5. comme le parallelipede AK est au parallelipede EO , ainsi la pyramide $ABCD$ est à la pyramide $EFGH$: (car chacune d'icelles pyramides est la sixième partie de son parallelipede, puis que chaque parallelipede peut estre divisé en deux prismes egaux

par la 38. proposition II. & chacun prisme en trois pyramides egales par la precedente proposition) donc par la II. proposition 5. lesdites pyramides $ABCD$, $EFGH$, sont aussi en la raison triplée des mesmes costez AC & EG . Parquoy les pyramides semblables ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

De ceci est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez, sont en raison triplée de leurs costez homologues.

Soient les pyramides semblables $ABCDEF$, $GHIKLM$, ayans base rectilignes semblables de plusieurs costez. Je dis qu'icelles pyramides sont en raison triplée des costez homologues AB , GH . Car si des angles A & G , on tire aux angles oppo-
sez les lignes droites AC , AD ; GI , GK ; par la 20. proposition 6. les bases semblables seront divisées en nombre egal de triangles semblables, sçavoir est que les triangles ABC , ACD , ADL , seront semblables aux triangles GHI , GIK , GKL . Donc

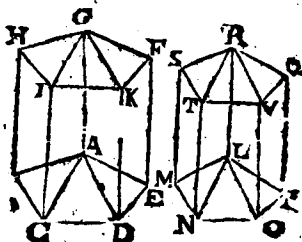


puis que les pyramides sont semblables, les triangles AFB , GMH , sont semblables, & l'angle FAB , egal à l'angle MGH ; & comme FA sera à AB , ainsi MG sera à GH ; mais comme AB à AC , ainsi GH à GI , à cause de la similitude des triangles ABC , GHI : donc en raison egale, comme FA sera à AC , ainsi MG sera à GI . Derechef, puis que comme AC est à CB , ainsi GI est à IH , à cause de la similitude des triangles ABC , GHI : & comme CB à CF , ainsi IH à IM , car à cause de la similitude des pyramides, les triangles BCF , HIM , sont semblables: aussi en raison egale, comme AC sera à CF , ainsi GI sera à IM , & partant puis que comme FA à AC , ainsi MG à GI ; & comme AC à CF , ainsi GI à IM : pareillemant en raison egale,

comme FA sera à FC , ainsi MG à MI . Parquoy par la 3. prop. 6. les triangles AFC , GMI , seront equiangles, & par tant semblables. Mais les triangles AFB , BFC , ABC sont aussi semblables aux triangles GMH , HMI , GHI . Donc par la 8. def. 11. les pyramides $ABCF$, $GHIM$, sont semblables. Par mesme raison seront semblables les pyramides $ACDF$, $GIKM$; Item $ADEF$, $GKLM$. Parquoy par la 8. prop. 12. les pyramides $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$, seront aux pyramides $GHIM$, $GIKM$, $GKLM$, chacune à la sienne, en raison triplée des costez homologues AB , CD , DE , à GH , IK , KL , chacun au sien. Veu donc qu'à cause de la similitude des bases $ABCDE$, $GHIKL$, il y a une seule & mesme raison de AB , CD , DE à GH , IK , KL : aussi les pyramides $ABCF$, $ACDF$, $ADEF$, auront aux pyramides $GHIM$, $GIKM$, $GKLM$, une seule & mesme raison, c'est à sçavoir triplée. Et par la 12. prop. 5. comme une seule pyramide $ABCF$, est à une seule pyramide $GHIM$, ainsi toutes les pyramides, sçavoir est la pyramide $ABCDEF$, est à toutes les pyramides, sçavoir à la totale $GHIKLM$. Parquoy puis que par la 8. proposition 12. la pyramide $ABEF$ est à la pyramide $GHIM$ en raison triplée des costez homologues AB , GH , aussi la pyramide $ABCDEF$ sera à la pyramide $GHIKLM$ en la raison triplée des mesmes costez homologues AB , GH : Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison triplée de leurs costez homologues: Car soient deux prismes semblables $ABCDEFGHIK$, $LMNOPQRSTV$: Je dis qu'ils sont en raison triplée des costez homologues. Car si des angles A & L , on tire les lignes AC , AD , LN , LO ; par la 20. p. 6. les triangles ABC , CAD , DEA , seront semblables aux triangles LMN , LNO , OPL . Semblablement, si des angles G & R , on tire les lignes GI , GK , RT , RV ; les triangles GHI , GIK , GKF ,



seront aussi semblables aux triangles RST , RTV , RVQ , & aux susdits : puis que par la def. du prisme, tous les plans opposites des prismes sont semblables. Et d'autant qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrammes CH , NS sont semblables, comme CI sera à CB , ainsi TN sera à NM : mais comme BC est à CA , ainsi NM est à NL à cause de la similitude des triangles. Donc en raison egale, comme CI sera à CA , ainsi TN à NL . De rechef pource que l'angle solide N , est egal à l'angle solide C , à cause de la similitude des prismes, si celui-cy est superposé à l'autre, l'angle MNO conviendra à l'angle BCD , & l'angle TNM à l'angle ICB , & l'angle TNO à l'angle ICD , mais aussi la ligne droite NL conviendra à la ligne CA , pource que les angles MNL , BCA sont egaux. Donc les angles ICA , TNL sont egaux : & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont esté demonstrez proportionaux, les parallelogrammes CG , NR , seront semblables. Mais aussi les parallelogrammes CH , HA , sont semblables aux parallelogrammes NS , SL , & les triangles ABC , GHI , aux triangles LMN , RST . Donc les prismes $ABCIGH$, $LMNTRS$, sont semblables, par la 8. def. 11. On démontrera en la même maniere que les prismes $CDAGIK$, $NOLTRV$, sont semblables, comme aussi les prismes $AEDKGF$, $LPOVRQ$ parquoy les prismes $ABCIGH$, $CDAGIK$, $AEDKGF$ par les choses démontrées à la 34. pr. 11. sont aux prismes $LMNTRS$, $NOLTRV$, $LPOVRQ$, chacun au sien, en raison triplée des costez homologues BC , CD , DE à MN , NO , OP ; chacun au sien. Et partant en la mesme maniere que nous avons démontré cy-dessus des pyramides multangles, on démontrera que les prismes $ABCDEF$, $GHIK$, $LMNOPQRSTV$, sont en raison triplée des côrez homologues BC , MN .

- De toutes ces choses se collige. que les pyramides multangles semblables, se divisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre egal, & homologues aux routes. Ce qui est manifeste par la demonstration du precedent corollaire.

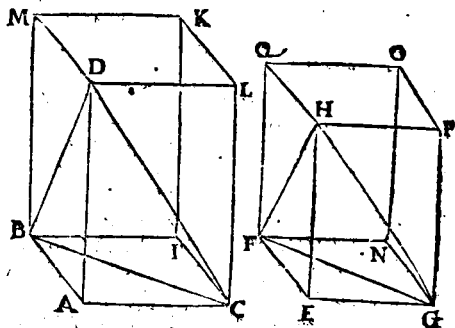
Il se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se divisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux routes, comme apert par la demonstration de ce scholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales ayans bases triangulaires, les hauteurs sont reciproques aux bases : Et les pyramides ayans bases triangulaires reciproques à leurs hauteurs, sont egales.

Soient les pyramides egales $ABCD$, & $EFGH$, ayans bases triangulaires : ie dis que les bases d'icelles sont reciproques à leurs hauteurs, c'est à dire que comme la base ABC à la base EFG , ainsi la hauteur du point H à la hauteur du point D ,

Car
soient
ache-
vez les
paral-
lelippi-
pedes
 AK ,
 EO , &
cômme
il a été
dit en
la pr.
p. ecc.
dente,



chacun d'iceux parallelipedes sera sextuple de la pyramide. Et les deux pyramides estans egales. iceux solides AK , EO , seront egaux : & par la 34. prop. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux bases. (C'est à dire que comme la hauteur du point D à la hauteur du point H , ainsi la base EN à la base AI .) Mais comme EN est à AI , ainsi le triangle EFG (moitié de EN) est au triangle ABC ; (moitié de AI) & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du point D est à la hauteur du point H , ainsi le triangle EFG est au triangle ABC .

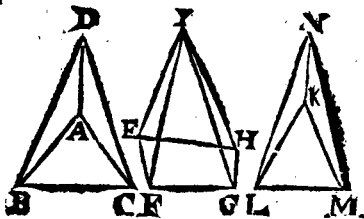
Pour la seconde partie : Si la hauteur du point D est à la hauteur du point H , comme le triangle EFG est au triangle ABC : ie dis que les pyramides $ABCD$, $EFGH$ seront egales. Car il est evident comme cy dessus que la hauteur du point D , sera à la hauteur du point H , comme la base EN à la base AI : (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC) ainsi les parallelipedes AK , EO , auront les hauteurs reciproques aux bases

& par la 34. prop. 11. ils seront égaux; & par conséquent leurs sixièmes parties seroient aussi égales, à savoir les pyramides $ABCD$. & $EFGH$: Parquoy des pyramides égales ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Les pyramides égales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides desquelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reciproques à leurs hauteurs, sont égales. Car soient premierement deux pyramides égales, l'une desquelles $ABCD$ ait la base triangulaire, mais l'autre $EFGHI$ ne l'ait pas. Soit fait le triangle KLM égal à la base non triangulaire $EFGH$; puis sur sceluy triangle soit construite la pyramide $KLMN$, de même hauteur que la pyramide $EFGHI$. Or d'autant que les pyramides $EFGHI$, $KLMN$, ont les bases égales, & même hauteur; elles seront égales, par les choses démontrées au scholie de la 6. p. 12. Mais la pyramide $EFGHI$ a esté posée égale à la pyramide $ABCD$; donc aussi les pyramides $ABCD$, $KLMN$ seront égales: Parquoy puis qu'elles ont les bases triangulaires, par la 9. pr. 12. comme la base ABC sera à la base KLM , ou à son égale $EFGH$, ainsi la hauteur de la pyramide $KLMN$, c'est à dire la hauteur de la pyramide $EFGHI$, sera à la hauteur de la pyramide $ABCD$: & partant les pyramides égales $ABCD$, $EFGHI$, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hauteurs soient reciproques; ie dis qu'icelles pyramides sont égales. Car demeurant la même construction faite ci-

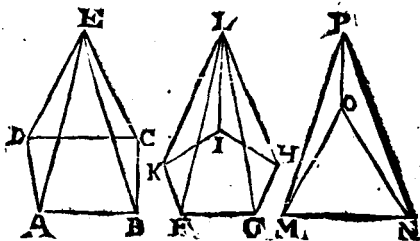


dessus; puis que la base ABC est posée estre à la base $EFGH$, comme la hauteur de la pyramide $EFGHI$ à la hauteur de la pyramide $ABCD$; aussi la base ABC sera à la base KLM , comme la hauteur de la pyramide $KLMN$ sera à la hauteur de la pyramide $ABCD$. Parquoy par la 9. pr. 12. les pyramides $ABCD$, $KLMN$, sont égales. Mais comme nous avons démontré au scholie de la 6. prop. 12. la pyramide $KLMN$

est égale à la pyramide EFGHI; donc aussi la pyramide ABCD sera égale à la pyramide EFGHI, Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant les pyramides égales ABCDE, FGH IKL, ayans bases multangulaires. Soit fait d'erechef le triangle MNO égal à la base ABCD, & la pyramide MNOP de même hauteur que la pyramide ABCDE. Donc par les choses démontrées au Scholie de la 6. prop. 12. la pyramide MNOP sera égale à la pyramide ABCDE, laquelle a esté posée égale à la pyramide FGH IKL: donc aussi la pyramide MNOP sera égale à la pyramide FGH IKL. Parquoy comme nous avons démontré cy-dessus, ainsi que la base MNO, c'est à dire la base ABCD, sera à la base FGH IK, ainsi la hauteur de la pyramide FGH IKL sera à la hauteur de la pyramide MNOP, c'est à

dire à la hauteur de la pyramide ABCDE: Et partant des pyramides égales ABCDE, FGH IKL,



les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icelles pyramides: on démontrera comme dessus qu'elles sont égales.

Or tout ce que nous avons démontré cy-dessus peut aussi convenir à quelconques prismes. Car si les prismes estoient égaux, aussi les pyramides de même hauteur qu'iceux, ayans les mêmes bases, seroient égales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. prop. 12. elles sont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le Scholie de la même prop. Parquoy comme nous avons démontré n'agueres, les bases & hauteurs d'icelles pyramides, seront reciproques. Veu donc que ces bases & hauteurs sont les mêmes que des prismes, les bases & hauteurs des prismes seront pareillement reciproques.

Derechef, si les bases & hauteurs des prismes sont reciproques, les bases & hauteurs des pyramides ayans memes bases & hauteurs que les prismes, seront aussi reciproques. Parquoy comme il a esté démontré, les pyramides sont egales: & partant aussi les prismes, puis que d'icelles pyramides, ils sont triples, ou sesquialteres. Ce qui estoit proposé.

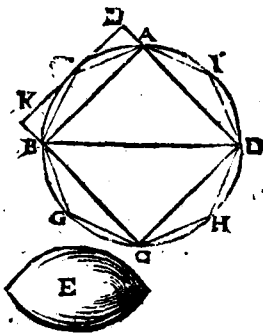
THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone est la troisiéme partie du cylindre qui a même base, & egale hauteur.

Soit un cone & un cylindre ayans une mesme base, sçavoir le cercle ABCD, & une mesme hauteur. Je dis que le cylindre est triple du cone.

Autrement, il sera plus grand, où plus petit que le triple d'iceluy cone: Soit premierement plus grand, s'il est possible, sçavoir de la quantité du solide E, c'est à dire, que si du cylindre ayant pour base le cercle ABCD est retranché le solide E, le reste sera triple du cone ayant pour base le mesme cercle ABCD: dans iceluy cercle soit interit le quarré ABCD, divisé

en deux triangles par la diagonale BD, & sur iceux triangles soient imaginez estre élevez deux prismes de même hauteur que le cylindre: Et parce que le quarré est plus de la moitié du cercle, il est evident qu'iceux deux prismes seront plus de la moitié du cylindre. Que si les segmens restans du cylindre, (les deux prismes estans ôtez) sont encores plus grands



que le solide F, sur les bases d'iceux segmens soient faits les quatre triangles isosceles AFB, BGC, CHD, DIA, & sur iceux soient imaginez estre élevez quatre prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, dont la base est le cercle

ABCD. Il est evident que ces triangles Isoscelles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre ; & par consequent qu'iceux quatre prismes seront plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huit petits segmens restans du cylindre ne sont plus petits que le solide E, soit toujours en cette façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E : Ce qui doit advenir par la 1. prop. 10. Et pour abreger, soient iceux 8 petits segmens plus petits qu'iceluy solide E. il est donc manifeste que la colonne composée de ces six prismes, ayant pour base le polygone inscrit au cercle AECD, & de mesme hauteur que le cylindre donné, sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de la pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale (car il peut estre divisé en trois telles pyramides egales par la 7. pr. 12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisant la colonne qui a pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colonne de mesme hauteur que le cylindre) est triple de toutes les six pyramides, qui sont la seule pyramide, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colonne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, qui a le cercle ABCD pour base : ce qui est impossible, n'étant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'étoit pas plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il est possible ; sçavoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisième partie du cylindre. Maintenant du cone, qui a pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçavoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçavoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçavoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle Isoscelle en iceluy segment : soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E : ce qui doit arriver par la 1. prop. 10. Soient donc pour abreger iceux huit petits segmens plus petits que le solide E : il est donc evident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, qui a iceluy octogone pour base, est plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solide E. Or iceluy cone ainsi rescindé est le tiers

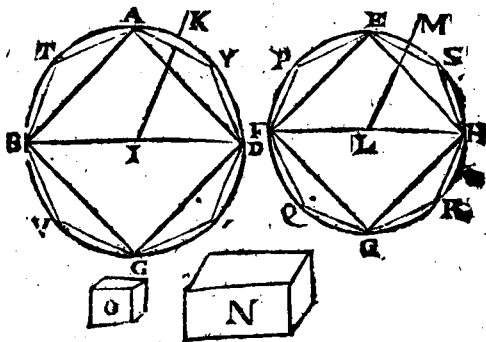
tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy dessus) le tiers de la colonne de même hauteur, ayant le même octogone pour base: Partant icelle colonne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie: Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone: il faut donc qu'il luy soit égal. Parquoy tout ce qui est la troisième partie du cylindre, &c. Ce qui estoit à demonstrier.

THEOR. II. PROP. XI.

Les cones, & les cylindres de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de même hauteur, desquels les bases sont les cercles ABCD & EFGH, les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Je dis que comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM; c'est à dire que

si on imagine que comme le cercle est au cercle, ainsi le cone BK soit à quelque autre solide, comme N; iceluy solide N sera égal au cone FM.



Autrement, il sera plus petit ou plus grand: Soit premièrement plus petit, s'il est possible, de la quantité du solide O: donc les deux solides N & O seront égaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la précédente, soit retranché plus de la moitié, sçavoir une pyramide de même hauteur que

le cone, ayant pour-basé le quarré $EGHE$: & du residu encores plus de la moitié, sçavoir quatre pyramides de mesme hauteur que le cone, ayans pour bases les quarré triangles Isosceles EPF , IQG , GRH , HSE , en continuant toujours iusques à ce que le residu soit plus petit que le solide O : & soit iceluy residu pour abreger les huit petits segmens : il s'enluit que la pyramide FM de mesme hauteur que le cone FM , & ayant pour base l'octogone $EPFQGRHS$, sera plus grâde que le solide N . Au cercle $ABCD$, soit inscrit un polygone semblable au polygone inscrit dans la base circulaire $EFGH$, & sur iceluy soit imaginé estre élevée une pyramide de mesme hauteur que le cone BK . Or par le corol. de la 2. prop. 12. comme le cercle $ABCD$ est au cercle $EFGH$, ainsi le polygone $TVXY$ est au polygone $IQRS$: mais comme le cercle $ABCD$ est au cercle $EFGH$, ainsi le cone BK est au solide N , & par la 6. prop. 12. comme le polygone au polygone, ainsi la pyramide à la pyramide de mesme hauteur que les cones : & partant par la 11. prop. 5. la pyramide $ATLV CXDYK$ sera à la pyramide $IPFQGRHSM$, comme le cone BK au solide N . Mais la pyramide $ATBV CXDYK$ est plus petite que le cone BK , la partie que le tout : Donc aussi par la 14. prop. 5. la pyramide $EPHQGRHSM$ sera moindre que le solide N . Mais elle a esté démontrée aussi plus grande : ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM .

Soit donc plus grand, s'il est possible : Or puis que l'on a posé le cercle $ABCD$ estre au cercle $EFGH$, comme le cone BK au solide N ; en permutant, comme le solide N sera au cone BK . Ainsi le cercle $EFGH$ sera au cercle $ABCD$: Mais comme iceluy solide N est au cone BK , soit aussi le cone FM à quelque autre solide, comme O : Et par la 14. prop. 5. puis que le solide N est plus grand que le cone FM , aussi le cone BK sera plus grand que le solide O . Parquoy puis que comme le cercle $EFGH$ est au cercle $ABCD$, ainsi le solide N est au cone BK : par la 11. prop. 5. comme le cercle $EFGH$ est au cercle $ABCD$, ainsi le cone FM au solide O , plus petit que le cone BK : ce que tantost nous avons montré estre impossible. Donc le solide N n'est pas plus grand ne plus petit que le cone FM , ains egal. Parquoy puis qu'on a posé la base $ABCD$ estre à la base $EFGH$, ainsi que le cone $ABCDK$ au solide N : & que par la 7. prop. 5. comme le cone $ABCDK$ est au solide N , ainsi est le mesme cone $ABCDK$ au cone $EFGHM$: pareillement com-

me la base ABCD sera à la base EFGH, ainsi le cone ABCDK sera au cone EFGHM.

Or ce que nous avons prouvé des cones de mesme hauteur, se doit aussi entendre des cylindres de mesme hauteur: d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre est triple de son cone de même hauteur, & ayant base egale. Que si le cone est au cone, comme la base à la base, aussi le triple du cone sera au triple du cone, comme la base à la base par la 15. pr. 5. c'est à dire le cylindre au cylindre, comme la base à la base. Donc les cones & cylindres de mesme hauteur, &c. C'est qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

On peut convertir cette prop. ainsi: Les cones & les cylindres qui sont entr'eux comme leurs bases, sont de mesme hauteur.

Ce qu'on peut demontrer en la même façon que nous avons démontré la converse de la 31. prop. 11.

C O R O L L A I R E.

De cecy résulte que les cones, & les cylindres de même hauteur, constitués sur même base ou sur bases égales, sont aussi égaux. Il s'ensuit encore que les cones & les cylindres égaux constitués sur même base, ou sur bases égales sont de même hauteur, & que les égaux de même hauteur sont sur bases égales, s'ils n'ont une même base. Ce que l'on pourroit aussi démontrer, comme en la converse de la 31. prop. 11.

THEOR. 12. PROP. XII.

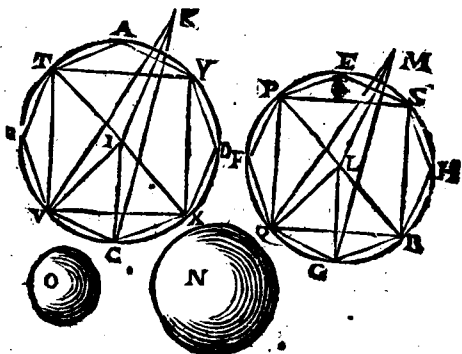
Les cones, & les cylindres semblables, sont l'un à l'autre en raison triplée des diametres de leurs bases.

Soient semblables cones, & cylindres, ayans pour bases les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux soient IK, LM, & les diametres des bases TX, PR. Je dis que le cone est au cone, & le cylindre au cylindre, en raison triplée du diametre TX au diametre PR, c'est à dire que si on imagine comme aux précédentes, que le cone ABCDK soit à quelque solide,

comme N, en raison triplée du diametre TX au diametre PR, iceluy solide N sera egal au cone EFGHM.

Autrement, il sera plus grand ou plus petit : Soit premiere-
ment plus petit, sçavoir de la quantité du solide O : donc les
deux solides O & N seront egaux au cone EFGHM ; & com-
me en la precedente soit faite distraction de plus de la moitié
du cone
EFGHM.

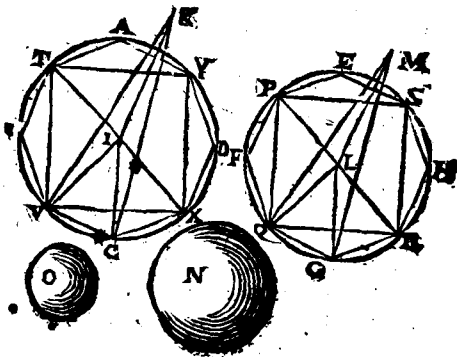
& du resi-
du enco-
re plus de
la moitié,
jusques à
ce que les
restes
soient plus
petits que
le solide
O : & pour
abreger,
iceux res-
tes soient
les huit
petits seg-



mens qui sont en l'entour de la pyramide FM qui a pour base
l'octogone EPFQGRHS ; tellement qu'icelle pyramide sera plus
grande que le solide N. Maintenant au cercle ABCD soit in-
scrit un tel polygone que le plus grand inscrit au cercle EFGH,
sçavoir ATBV CXDY ; & sur iceluy soit imaginé estre élevée
une pyramide de mesme hauteur que la cone BK, & ayant tiré
les lignes VI, CI ; QL, GL ; soient menées les lignes QM,
GM ; VK, CK, afin d'avoir les deux pyramides VCIK, QLGM.
Il est manifeste que la pyramide ATBV CXDYK est compo-
sée d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poli-
gone inscrit dans le cercle, (c'est à sçavoir qu'icelle pyramide
totale BK est composée de huit pyramides egales & semblables
à la pyramide VICK de mesme hauteur que la totale.) On peut
dire semblablement que l'autre pyramide totale EPFQGRHSM
est composée de huit pyramides egales & semblables à la py-
ramide QLGM, de mesme hauteur que sa totale. Mais d'au-
tant que les cones BK & FM sont semblables par la définition

des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe IK est à l'axe LM: & en permutant, comme le demy diametre VI sera à l'axe IK, ainsi le demy diametre QL à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droits, (car les cones sont posez droits, & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droits angles sur leurs bases) par la 6. prop. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM: Item CIK sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. pr. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables Item VI est à CI comme QL à GL, (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L, (ayans chacun une huitième partie de la circonférence pour base) & partant par la 6. prop. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles; partant semblables: Item VC est à VI, comme QG à QL, (d'autant que les triangles VIC & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est à VK, comme QL à QM: & en raison egale, VC sera à VK, comme QG à GM: Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, seront l'une à l'autre, comme les egales QM & GM: Et partant par la 5. prop. 6. les triangles VKC, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la def. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QIGM, seront semblables: Et par la 8. prop. 12. elles seront en raison triplée de leurs costez homologues, sçavoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouvera les sept autres pyramides de la totale ATBVCXDYK, proportionnelles à une chacune des sept autres pyramides de la totale EPFQGRHSM: Et partant par la 12. prop. 5. les toutes seront aux toutes, comme l'une d'icelles est à l'une d'icelles: C'est à dire que toute la pyramide Bk est à toute la pyramide FM, en raison triplée du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX au diametre PR; puis que comme VI est à QL, ainsi TX est à PR par la 15. pr. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplée des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK sera au solide N, comme la pyramide ATBVCXDYK à la pyramide EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. prop. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM: & il a esté démontré estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide

N n'est pas plus petit que le cone FM. Qu'il soit donc plus grand, s'il est possible. D'autant qu'on a posé que le cone ABCDK est au solide N en raison triplée du diamètre TX au diamètre PR, & la pyramide BK est à la pyramide FM en raison triplée des mesmes diametres, comme nous avons démontré par la 11. proposition 5.



comme le cone BK sera au solide N, ainsi la pyramide BK à la pyramide FM : & en permutant, comme N est au cone B, ainsi la pyramide FM est à la pyramide BK. Parquoy puis que par le corol. de la 8. prop. 12. la pyramide FM est à la pyramide BK en raison triplée des costez homologues QG à VG : c'est à dire du diamètre PR au diamètre TX : pareillement le solide N sera au cone BK en raison triplée des mesmes diametres PR à TX. Soit posé que comme N est au cone BK, ainsi le cone FM soit au solide O. Donc aussi le cone FM sera au solide O en raisõ triplée du diamètre PR au diamètre TX. Et puis que le solide N a esté posé plus grand que le cone FM : par la 14. pr. 5. le cone BK sera aussi plus grand que O. Parquoy le cone FM sera au solide O, moindre que le cone BK, en raisõ triplée du diamètre TR au diamètre TX : ce qui est absurde. Car il a esté démontré cy dessus qu'un cone ne peut être à un solide moindre qu'un autre cone, en raison triplée des diametres des bases d'iceux cones. Donc le solide N n'est pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM : il est donc égal. Parquoy par la 7. pr. 5. le cone ABCDK à mesme raison au cone EFGHM qu'au solide N. Et partant puis qu'on a posé le cone ABCDK estre à N en raison

triplée des diametres TX & PR : le cone ABCDK sera aussi au cone EFGHM en la raison triplée des mesmes diametres.

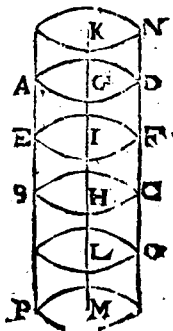
Cette demonstration se doit aussi entendre des cylindres semblables : car leurs cones érans en raison triplée des diametres, par la 15. proposit. 5. les cylindres qui sont triples d'iceux cones, seront aussi l'un à l'autre en raison triplée de leurs diametres. Donc les cones, & les cylindres semblables, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si un cylindre est coupé par un plan parallel aux plans opposez, les segmens du cylindre seront l'un à l'autre comme les segmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, coupé par le plan EF parallel aux plans opposez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Je dis que le segment du cylindre AF est au segment du cylindre EC, comme l'axe GI est à l'axe IH.

Car ayant continué l'axe GH de part & d'autre, soit faite GK égale à GI : & de l'autre costé HL, LM, chacune égale à IH : Et soit imaginé le cylindre A. CD estre continué de part & d'autre jusques aux points K & M : Cela étant, il est evident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, sont tous sur bases égales : & par le corollaire de la 11. prop. 12. les deux AF, AN, qui sont de mesme hauteur, (c'est à dire qui ont leurs axes IG, GK égaux) sont égaux entr'eux : Item les trois BF, BO, PO, érans de mesme hauteur, sont aussi égaux entr'eux. Parquoy l'axe IK est autant multiplié de l'axe IG, que le cylindre EN est multiple du cylindre ED ; & l'axe IM autant multiple de l'axe IH, que le cylindre PF est multiple du cylindre BF : Et partant si l'axe IK (multiple de IG premiere grandeur) est egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiple de IH seconde grandeur) aussi le cylindre EN (multiple du cylindre ED troisieme grandeur) sera



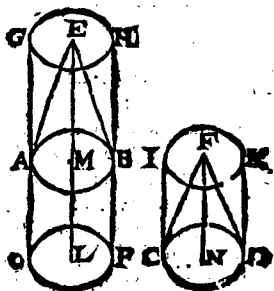
egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multiple du cylindre BF quatrième grandeur) en quelque multiplication que ce soit : & passant par la 6. def. 5. l'axe GI sera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy si un cylindre est coupé par un plan, &c. Ce qui étoit à démontrer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones & les cylindres ayans bases égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient sur bases égales AB, CD, les deux cones ABE, CDF; & les deux cylindres ABGH, CDKI, desquels les axes ou hauteurs, (car aux cones & aux cylindres droits, desquels seulement parle Euclide, les axes & les hauteurs sont les mesmes) soient ME, NF. Je dis que le cone ABE est au cone CDF; & le cylindre ABGH au cylindre CDKI, comme la hauteur ME est à la hauteur NF.

Car ayant continué l'axe EM, jusques au point L, soit faite ML égale à FN; & soit imaginé le cylindre AH continué jusques au plan OP parallèle à AB, & passant par le point L, afin que le cylindre AP soit fait de mesme hauteur que le cylindre CK. Et d'autant que le plan AB coupe le total cylindre ORGH, étant parallèle aux deux plans opposés OP, GH par la précédente proposition les cylindres AH, AP, seront entr'eux comme les axes EM & ML; Mais ML est égal à FN, & la base AB égale à la base CD : Donc par le corollaire de la 11. proposition 11. le cylindre AP sera égal au cylindre CK : Passant comme EM sera à NF, ainsi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cones ABE, CDF, sont les tierces parties des cylindres AH, CK : ils auront mesme raison qu'iceux cylindres, par la 15. pr. 5. Et partant le cone ABE sera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la



hauteur NF. Donc les cones, & les cylindres constituez sur bases egales, &c. Ce qui estoit à demonstrez.

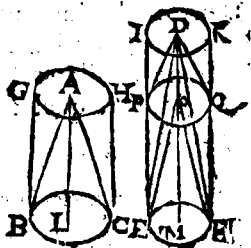
THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs sont reciproques aux bases : Et les cones, & les cylindres, desquels les hauteurs sont reciproques aux bases, sont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux ; & les cylindres BGHC, EIKF aussi egaux, desquels les bases soient BC, EF, & leurs axes ou hauteurs AL, DM. Je dis que les bases sont reciproques aux hauteurs ; c'est à dire que comme la base BC est à la base EF, ainsi la hauteur DM est à la hauteur AL.

Car premierement si la hauteur DM est egale à la hauteur AL ; les cylindres estans egaux par le corollaire de la 11. prop. 12. la base sera egale à la base : & partant comme la base BC sera à la base EF ; ainsi la hauteur DM à la hauteur AL. Que si l'une, comme MD est plus grande que AL, soit retranchée MO egale à AL ; Et soit coupé le cylindre EK par le plan PQ, parallel à EF ; & passant par le point O. Donc par la precedente proposition le cylindre EK sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO ; & partant par la 7. proposition 5. le cylindre BH, egal à iceluy BK, sera au cylindre EQ, comme MD est à MO ; & par la 11. proposition 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ, ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. proposition 5. comme la base BC à la base EF, ainsi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les bases & les hauteurs reciproques.

Par mesme discours on prouvera que les bases & hauteurs



des cones egaux ABC , DEF , sont reciproques; si on construit deux cones sous les hauteurs MO , OD ; comme apert en la figure.

Maintenant, soient les bases reciproques aux hauteurs: Je dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant construit comme dessus, puis que la base BC est à la base EF , comme la hauteur MD à la hauteur LA , ou MO son egale; Et par la 11. pr. 12. comme la base BC à la base EF , ainsi le cylindre BH au cylindre de mesme hauteur EQ : Item par la precedente proposition, comme la hauteur MD à la hauteur MO , ainsi le cylindre EK au cylindre EQ : donc par la 11. proposition 5. les deux cylindres BH & EK , auront mesme raison au troisième EQ , l'un comme l'autre: Et par la 9. proposition 5. ils seront egaux.

Quant aux cones qui ont aussi leurs bases & hauteurs reciproques, ils seront par le mesme discours demontrez egaux. Ce qui est toutesfois assez evident, puis qu'ils sont par la 10. proposition 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, &c. Ce qu'il falloit demontrez.

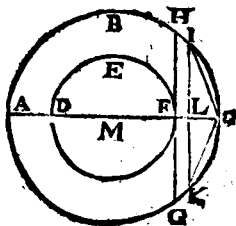
PROBL. I. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux étans à l'entour d'un même centre; inscrire au plus grand cercle un polygone equilateral, ayant le nombre des côtez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.

Soient deux cercles inegaux ABC & DEF , à l'entour d'un même centre M : Il faut dans le plus grand ABC , inscrire un polygone equilateral, duquel les costez soient en nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF .

Soit mené par le centre M le diametre AC , coupant le petit cercle au point F ; duquel soit menée HG perpendiculaire au diametre DF , rencontrant la circonference du plus grand cercle aux points H & G ; & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corollaire de la 16. pr. 3. Item soit coupée la demie circonference ABC en deux également en B ; & la moitié BC

encores en deux également, en continuant toujours ainsi jusques à ce qu'on vienne à un arc plus petit que l'arc HG; ce qui est possible par la 1. proposition 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & soit tirée la ligne droite subtendante IC. Je dis qu'icelle ligne droite IC est un costé du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont toujours esté divisez par moitez jusques à l'arc IC; il est evident qu'iceluy arc est contenu précisément certain nombre de fois en la circonférence du cercle, & en nombre pair; & par consequent que la ligne droite IC sera certain nombre de fois également dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant sera décrit dans le cercle ABC un polygone equilateral & de costez pair, lequel ne touchera le moindre cercle DEF. Car de I soit menée IK perpendiculaire à AC, coupant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF sont droits, les lignes GH, IK seront paralleles par la 28. proposition 1. Parquoy puis que la ligne droite GH touche le cercle DEF au seul point F; la ligne droite IK sera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut jamais toucher, puis que jamais elle ne conviendra avec la ligne droite GH: Donc à plus forte raison la ligne droite IC, qui est moindre & plus éloignée d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas; ny partant aussi les costez du polygone inscrit, puis qu'ils sont egaux à IC, & par consequent également distans du centre d'iceluy cercle par la 14. proposition 3. Parquoy deux cercles inegaux étans à l'entour d'un mesme centre, &c. Ce qu'il falloit faire,



C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, que si de l'extrémité du costé du polygone inscrit, lequel rencontre le diametre, on tire une ligne droite perpendiculaire à iceluy diametre, elle ne pourra toucher le moindre cercle, mais tombera toute hors d'iceluy. Car telle est la ligne IK, laquelle du point I, extrémité du costé IC rencontrant le diametre AC, est tirée per-

pendiculairement sur iceluy diametre AC, & a esté démontré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

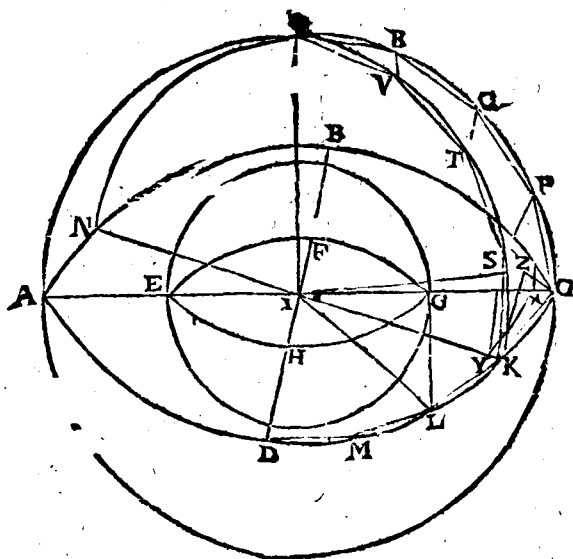
PROPL. 2. PROP. XVII.

Deux spheres inegales étans sur un même centre; inscrire en la plus grande un polyedre, duquel les plans ne touchent point la superficie de la petite sphere.

Soient deux spheres inegales ABCD, EFGH à l'entour d'un même centre I, & il faut dans la plus grande ABCD inscrire un solide polyedre, ou de plusieurs costez, lequel ne touche la superficie de la moindre sphere EFGH.

Les deux spheres soient coupées par quelque plan passant par le centre I: il est evident par la def. de la sphere, que les communes sections seront cercles & les plus grands de toute la sphere; d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la sphere, puis que le plan coupe par le centre de ladite sphere: soient donc icelles communes sections, sçavoir en la plus grande sphere, le cercle ABCD, & en la plus petite, le cercle EFGH: & soient leurs diametres AC & BD se coupans en angles droits au centre I: Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD, soit inscrit un polygone, ne touchât point le moindre cercle EFGH, par la precedente prop. duquel les costez de la quarte CD, soient CK, KL, LM, MD: Et ayant mené par le centre I le diametre KN, par la 12. pr. 11. dudit centre soit menée IO perpendiculaire sur le plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O: puis par icelle IO, & chacun des diametres AC, NK, soient tirez les plans AOC, NOK, lesquels (par ce qui a esté dit cy-dessus) seront en la superficie de la sphere des grands cercles: & d'iceux soient les demy cercles AOC, NOK: Et d'autant que la ligne IO est élevée perpendiculairement sur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOK, seront par la 18. prop. 11. élevés perpendiculairement sur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOK sont egaux, (ayans les diametres egaux,) aussi leurs moitiez seront egales, sçavoir les quartes DC, OC, OK. Parquoy, autant qu'il y aura de costes du polygone en la quarte CD, on en pourra inscrire autant en

chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO;
& KS, ST, TV, VO : & soient menées les lignes SP, TQ, VR :



Item des points P & S soient menées par la 11. pr. 11. PX, SY
perpendiculaires au plan du cercle ABCD, lesquelles par la 38.
prop. 11. tomberont sur les lignes IC, IK, communes sections
d'iceluy plan, & des quarts de cercles IOC, IOK élevez per-
pendiculairement sur ledit plan ou quart IDC. Soit aussi me-
née la ligne XY. Maintenant, puis que les arcs & les cordes PC
& SK sont égales; les angles PXC, SYK droits, & les angles
PCX, SKY égaux; (car ils insistent sur les peripheres égales
AOP, NOS) les deux angles PCX, PXC du triangle PCX,
& le costé PC, sont égaux aux deux angles SKY, SYK, & au
costé SK du triangle SKY : partant par la 26. prop. 1. les autres
costez PX, XC seront égaux aux autres costez SY, YK. Par-
quoy puis que les deux semidiametres IC, IK sont égaux : &
les segmens XC, YK, aussi égaux; les segmens IX, IY seront
pareillement égaux : partant comme IX est à XC, ainsi IY

est à YK : & par la 2. prop. 6. YX sera parallèle à KC. Item les deux perpendiculaires PX, SY estans égales, sont aussi parallèles par la 6. prop. 11 & par la 33. prop. 1. SP, YX, seront égales & parallèles : & par la 2. prop. 11. SP & KC seront parallèles, & par la 7. prop. 11. SK & PC seront au même plan d'icelles. Partant tout le quadrilatère CKSP, est en un même plan. Par même discours on montrera aussi que les quadrilatères TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en un même plan. Que si des points P, Q, R, S, T, V, on imagine des lignes droites estre menées au centre I, on se représentera une figure solide, comprise entre OC & OK, composée de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilatères SC, TP, VQ, & le triangle VOR : Et si on construit pareillement sur les costez KL, LM, & MD, comme on a fait sur CK : Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura inscrit un polyedre en la sphere donnée.

Je dis davantage, qu'iceluy polyedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on mene la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC, elle sera plus grande que IG demy diamètre de la petite sphere. Car ayant pour l'inscription du polygone tiré du point G la ligne G perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que CK costé d'iceluy polygone inscrit, soit tirée IL ; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 3. def. 11. les angles IZC, IZK sont droits, le carré de IC sera égal aux carrés de IZ, CZ, & le carré de IK égal aux carrés de IZ, ZK : Parquoy les carrés des demy diamètres égaux IC, IK, estans égaux, les carrés de IZ, CZ, seront égaux aux carrés de IZ, ZK : ostant donc le carré de IZ commun, resteront égaux les carrés de CZ, KZ ; & par conséquent les lignes CZ, KZ sont égales. On démontrera en la même maniere estans tirées des lignes de Z à P & S, qu'elles seront égales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ : Parquoy si du centre Z, & de l'intervalle de l'une d'icelles, on décrit un cercle, il circonscrira le quadrilatère CKSP : duquel les trois costez CK, CP, KS, qui soutiennent arcs égaux de cercles égaux, sont égaux, & l'autre costé SP plus petit : (car les triangles ICK, IXY estans semblables, & le costé IC plus grand que le costé IX, aussi le costé CK sera plus grand que le costé XY, qui a esté démontré égal à SP) & partant soutiendra un plus petit arc que chacun de ces trois là, qui conse-

quement sera moindre que le quart de l'entiere circonferen-
ce, & chacun de ceux-cy, plus grand : Parquoy l'angle CZK
sera plus grand qu'un droit : & par consequent le plus grand du
triangle CK : & par la 19. prop. 1. CK sera plus grand costé
que CZ . Parquoy GL estant plus grande que CK , elle sera
aussi plus grande que CZ : & par consequent le quarré de GL
plus grand que celui de CZ . Et d'autant que par la 47. pr. 1.
les quarrés de IG & GL , sont egaux aux quarrés de IZ , CZ ;
(car tant ces deux-cy, que ces deux-là sont egaux au quarré du
demy diametre de la grande sphere, les triangles IGL , ICZ
estans rectangles) & le quarré de GL , est plus grand que le
quarré de CZ : le quarré de IZ , sera plus grand que le quarré
de IG ; & par consequent la ligne IZ , plus grande que la ligne
 IG . Le plan $CKSP$ ne touche donc pas la petite sphere $EFGH$.
On prouvera par mesme raison que tous les autres plans du po-
lyedre inscrit en la grande sphere ne touchent pas la petite
sphere $EFGH$. Donc deux spheres inegales, &c. Ce qu'il fa-
loit faire.

COROLLAIRE.

*Des choses ci-dessus démontrées resulte que si en une
autre sphere on inscrit un polyedre semblable au polyedre
ci-dessus décrit, qu'iceux polyedres seront en raison tri-
plée des diametres des spheres, auxquelles ils seront in-
scrits. Car iceux polyedres estans semblables par la des-
des solides semblables, ils auront en leur convexité au-
tant de plans semblables l'un comme l'autre : partant ils
se pourront diviser en autant de pyramides semblables
l'un comme l'autre, ayans toutes le demy diametre de
leur sphere pour un de leurs costez. : Partant prises une
à une, elles seront en raison triplée des costez homolo-
gues, sçavoir est des demy diametres des spheres, par le
corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes, pareille-
ment en raison triplée des demy diametres, par la 12. pr. 5.
Et par la 15. pr. 5. en raison triplée des diametres entiers.*

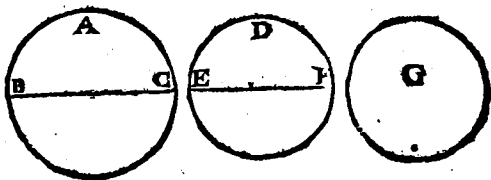
THEOR. 26. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'une à l'autre, en raison triplée
de leurs diametres.

Soient deux sphères ABC, DEF, desquelles les diamètres sont BC, EF. Je dis qu'elles sont l'une à l'autre raison triplée du diamètre BC au diamètre EF : C'est à dire que si on imagine que comme la raison triplée de BC à EF, ainsi la sphère ABC soit à quelqu'autre sphère, comme G : icelle sphère G sera égale à la sphère DEF.

Autrement, elle sera plus grande ou plus petite. Soit premièrement la sphère G, plus petite que la sphère DEF, s'il est possible : Elle pourra donc estre enfermée dans icelle, si on les met

toutes
deux
sur un
mesme
centre :
Et par-



tant dans la sphère DEF, peut estre inscrit un polyedre qui ne touchera point la plus petite sphère G par la 17. prop. 12. Et dedans l'autre sphère pourra estre pareillement inscrit un semblable polyedre par la mesme prop. Et par le coroll. d'icelle, ce polyedre cy sera à celui-là, en raison triplée du diamètre BC au diamètre EF : mais en telle raison, la sphère ABC est posée estre à la sphère G, & par la 11. prop. 5. comme la sphère ABC est à la sphère G, ainsi le polyedre de la sphère ABC, sera au polyedre de la sphère DEF. Or la sphère ABC, est plus grande que son polyedre, n'estant que partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la sphère G est aussi plus grande que le polyedre de la sphère DEF : ce qui est impossible, n'estant que partie d'iceluy. Donc la sphère ABC, ne peut estre en raison triplée des diamètres BC & EF, à une autre sphère plus petite que DEF.

Soit donc la sphère G plus grande que DEF, s'il est possible. Et puis qu'on a posé que la sphère ABC est à la sphère G, en la raison triplée du diamètre BC au diamètre EF ; en changeant, la sphère G sera à la sphère ABC, en raison triplée du diamètre EF au diamètre BC. Item on peut imaginer que comme la sphère G est à la sphère ABC, ainsi la sphère DEF soit à une

à une quatrième proportionnelle : laquelle sera plus petite que ABC par la 14. prop. 5. d'autant que G est posée plus grande que DEF : Et partant icelle quatrième proport. pourra estre inscrite en la sphere ABC ; Et si par la 11. prop. 5. la sphere DEF sera à icelle quatrième inscrite dans AEC, en raison triplée du diametre EF au diametre BC ; ce que nous avons démontré estre impossible. Donc la sphere G n'a pû estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale : & par conséquent les spheres sont l'une à l'autre en raison triplée de leurs diametres. Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste qu'une sphere est à une sphere, comme le polyedre décrit dans celle-là, est au polyedre semblable décrit en cette-cy : pource que tant les spheres que les polyedres sont en raison triplée des diametres d'icelles spheres, comme il a été démontré.

Fin du douzième Element.





ELEMENT TREIZIEME.

THEOR. I. PROP. I.



Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extrême raison : le quarré de la moitié de la toute, & du grand segment comme d'une seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

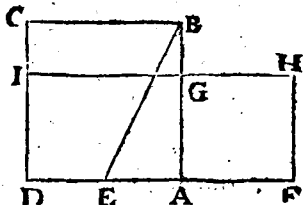
Soit la ligne droite AB coupée au point C en la moyenne, & extrême raison, dont le grand segment est AC, auquel soit ajoutée AD égale à la moitié de la totale AB : je dis que le quarré de DC est quintuple du quarré de DA.

Car soit décrit sur CD le quarré CE, & tiré le diamètre DF ; puis soit menée AG parallèle à DE, coupant le diamètre DF en H, par lequel point soit

A geometric diagram showing a square with internal lines and a circle. The square is divided into four quadrants by a horizontal line (DAGB) and a vertical line (EGLM). A diagonal line (EN) runs from the bottom-left corner (D) to the top-right corner (N). A circle is centered at point H, which is the intersection of the horizontal and vertical lines. The circle passes through points I, O, and K on the horizontal line and points P and H on the vertical line. The letters E, G, N, I, O, H, K, P, D, A, G, B, L, N, M are placed at various points on the diagram.

Ex 2

Commandin demontre encore cette prop. ainsi, Soit la ligne droite AB coupée en G , selon la moyenne & extreme raison, de laquelle AB soit fait le quarré $ABCD$, & ayant coupé AD en deux également en E , soit menée BE , & prolongée EA en F , de sorte que EF soit égale à icelle EB ; & par ce qui est démontré en la 11. prop. 1. AF sera égale à AG ; parquoy apert EF estre composé du grand segment AG & de AE , moitié de la toute AB . Je dis que le quarré de EF est quintuple du quarré EA . Car puis que AB est double de AE , le quarré de AB sera quadruple du quarré de AE par les choses démontrées au scholie de la 4. prop. 2. Mais le quarré de EB est égal aux quarréz d'icelles AB , AE par la 47. prop. 1. donc le quarré de BE , s'est à aire de EF , sera quintuple du quarré de AE . Ce qu'il falloit prouver.



Or tous ainsi qu'en la pluspart des prop. du 10. livre nous avons joint & appliqué les nombres aux lignes, afin d'en rendre les demonstrations plus claires & evidentes, aussi le faisons nous en cettuy-cy pour le contentement de ceux qui se delectent aux operations numeralles. Donc en la precedente figure la ligne droite AB soit 10, sa moitié AE 5; & leurs quarréz seront 100 & 25: partant le quarré de BE , ou de EF son égale sera 125 qui est quintuple de 25 quarré de la moitié AE , comme veut la proposition.

De cecy apert qu'étant conneuë une ligne droite coupée en la moyenne & extreme raison, on peut facilement connoître les segmens d'icelle. Car la dite ligne AB estans 10, & coupée en la moyenne & extreme raison en G , parce que dessus EF est trouvée de $\sqrt{125}$, & AE de 5; partant le reste AF , ou AG , qui est le grand segment, sera $\sqrt{125}-5$, qui oïez de la toute AB 10, resteront $15-\sqrt{125}$ pour le moindre segment BG . Les mêmes segmens AG , BG seront aussi conneus par ce qui est cy-devant enseigné à la fin du 21. chap. de nostre sommaire d'Algebre.

THEOR. 2. PROP. II.

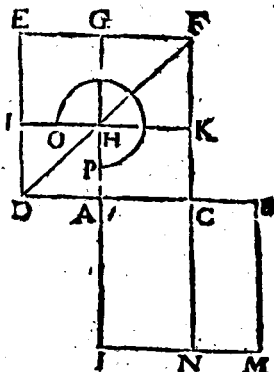
Si le quarré d'une ligne droite est quintuple du quarré d'une partie d'icelle : le double d'icelle partie étant coupé en la moyenne & extreme raison, le grand segment sera l'autre partie de la donnée.

Soit la ligne droite DC divisée au point A , en sorte que le quarré d'icelle, soit quintuple du quarré de la plus petite partie DA : & soit prise AB double d'icelle AD , laquelle (comme nous démontrerons cy-apres) sera plus grande que l'autre partie AC : Je dis que si on divise AB en la moyenne & extreme raison, que le grand segment sera AC , autre partie de la donnée DC .

Car ayant fait sur DC le quarré CE , & achevé la construction comme en la precedente; les quadrilateres AI , GK seront quarrés par le corol. de la 4. prop. 2. Et puis que AB , c'est à dire AL , est

doublé de DA, ou AH ont égale, le rectangle AN sera double du rectangle AK par la 1. prop. 6. ou égal aux deux AK, IG qui sont égaux par la 43. prop. 1. Or par le scholie de la 4. prop. 2. le carré AM est quadruple du carré AI, & le carré EC est quintuple du même par l'hypothèse : il est donc évident que le carré

AM est égal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, sont égaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectangle CM, soit égal au carré GK, fait sur une ligne égale à AC : & partant par la 17. prop. 6. comme BM, c'est à dire AB est à AC, ainsi AC à CB. Parquoy par la



3. def. 6. la ligne AB sera coupée en la moyenne & extreme raison au point C : & AC autre partie de la totale DC, est le grand segment d'icelle. Parquoy si le carré d'une ligne droite est quintuple, &c Ce qu'il falloit prouver,

L E M M E.

Que AB double de AD soit plus grand que AC, nous le démontrerons ainsi. D'autant que par le scholie de la 4. prop. 2. le carré de AB est quadruple du carré de AD, iceux deux carrés, seront ensemble quintuple du seul carré de AD. Mais le carré de DB est plus grand que les carrés de DA, AB, puis que par la 4. prop. 2. il est égal à iceux deux car-

rez avec deux fois le rectangle sous DA : AB . Donc le carré de DB sera aussi plus grand que le quintuple du carré de AD : & partant plus grand que le carré de DC , qui est posé quintuple du même carré de AD : parquoy la ligne droite DB sera plus grande que la ligne droite DC : & ostant DA qui est commun, le reste AB sera plus grand que le reste AC .

S C H O L I E.

La ligne donnée DC soit 5, & $DAV5$, afin que le carré de celle-là, qui est 25, soit quintuple du carré de celle cy, qui est 5 : Donc le reste AC sera $5 - \sqrt{5}$, & AB double de AD sera $\sqrt{20}$: laquelle étant divisée en la moyenne & extrême raison, ainsi qu'il a esté dit au prec. scholie, le plus grand segment sera $5 - \sqrt{5}$, qui est égal à AC , comme veut la proposition.

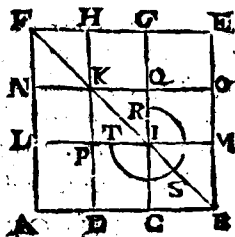
THEOR. 3, PROP. III.

Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extrême raison, le carré du petit segment, & de la moitié du grand segment comme d'une seule ligne, est quintuple du carré de la moitié du grand segment.

Soit la ligne droite AB , coupée en la moyenne & extrême raison au point C , de laquelle le grand segment AC est coupé en deux également en D : je dis que le carré du petit segment & de la moitié du grand, sçavoir de BD , est quintuple du carré de DC , moitié du grand segment AC .

Car sur AB soit décrit le carré AE , & ayant mené son diamètre BF , des points C & D soient

ménées CG DH parallèles à AF, coupans le diamètre BF es points I & K, par lesquels soient menées LM, NO parallèles à AB, lesquels coupent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. prop. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO seront quarrés des lignes AC, CD, DB. Donc puis que comme AB à AC, ainsi AC à CB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (sçavoir AM) est egal au quarré de la moyenne AC, sçavoir LG, lequel étant par le scholie de la 4. prop. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM sera aussi quadruple de PQ: mais AP & DI étans sur bases egales, sont egaux par la 1. prop. 6. Et DI étant egal à IO par la 43. prop.



1. le gnomon RST sera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: Parquoy ajoutant à iceluy gnomon le même quarré PQ; le quarré DO, décrit de DB sera quintuple d'iceluy quarré PQ, décrit de DC: Si donc une ligne droite est coupee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E,

La ligne droite AB étant 12, le grand segment AC sera $\sqrt{180} = 6$, & le moindre CB 18 — $\sqrt{180}$: Parquoy DC moitié de AC sera $\sqrt{45} = 3$, & son quarré 54 — $\sqrt{1620}$. Mais DB composée de DC & CB sera 15 — $\sqrt{45}$, & son quarré 270 — $\sqrt{40500}$, qui est quintuple du quarré de DC 54 — $\sqrt{1620}$, comme veut la proposition; La converse de laquelle est aussi veritable, c'est à sçavoir que

Si une ligne droite est coupée en deux segments inégaux, & que le carré du moindre segment & de la moitié du grand, comme d'une seule ligne soit quintuple du carré d'icelle moitié : cette ligne-là sera coupée en la moyenne & extrême raison.

Soit la ligne droite AB (en la prec. fig.) coupée inégalement en C , de laquelle le grand segment AC est coupé en deux également en D , & le carré de DB soit quintuple du carré de CD : Je dis que la ligne AB est divisée en C , selon la moyenne & extrême raison. Car demeurant la mesme construction que dessus, le carré LG est quadruple du carré PQ par le scholie de la 4. prop. 2. Mais du mesme carré PQ est aussi quadruple le gnomon RST , puis que le carré DO est posé quintuple dudit carré PQ : donc le gnomon RST sera égal au carré LG . Mais il est aussi égal au rectangle AM : donc le carré LG sera égal au rectangle AM contenu sous AB , BC : & partant par la 17. p. 6. comme AB sera à AC , ainsi AC à CB : Parquoy AB sera coupée en C , selon la moyenne & extrême raison : Ce qui estoit proposé.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extrême raison, le carré de la toute, & le carré du petit segment ensemble, sont triples du carré du grand segment.

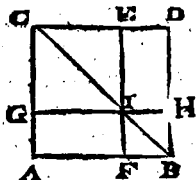
Soit la ligne droite AB , coupée en F , selon la moyenne & extrême raison, dont AF soit le plus grand segment : je dis que les carrez de AB , &

FB, sont ensemblè triples du quarré de AF.

Car soit décrit sur AB le quarré AD, auquel étant tiré le diametre BC, soit menée de F la ligne EF parallèle à AC, coupant BC en I, par lequel soit menée GH parallèle à AB. Par le corol. de la 4. p. 2. les parallelogrammes GE, FH seront quarrèz des lignes AF, FB. Et puis que comme AB est à AF, ainsi AF est à FB, par la 17. p. 6 le re-

ctangle des extremes AB, FB, sçavoir AH, est egal au quarré de la moyène AF, sçavoir GE.

Vù donc que AH & FD sont egaux, le gnomon EBG avec le quarré FH, sera egal au dou-



ble du quarré GE : & partant ajoutant le quarré GE; AD au quarré de AB, avec FH quarré de FB, sera triple de GE quarré de AC. Si donc une ligne droite est coupée en la moyène & extrême raison, &c. Ce qu'il falloit prouvet.

S C H O L I E.

La ligne AB soit 4 : donc le grand segment AF sera $\sqrt{10} - 2$. & le moindre FB $6 - \sqrt{10}$: & partant leurs quarrèz seront 16, 24 — $\sqrt{320}$, & 56 — $\sqrt{2880}$: mais celui-cy ajout. au premier 16 fait 72 — $\sqrt{2880}$, qui est le triple de 24 — $\sqrt{320}$, quarré de l'autre segment AF, ainsi que veut la prop. La converse de laquelle est aussi veritable, sçavoir est que

Si une ligne droite est coupée en deux inegalement, & que le quarré de la toute avec le quarré du moindre segment soit triple du quarré du grand segment : cette ligne-là sera coupée en la moyène & extrême raison.

Soit la ligne droite AB coupée en deux inegale-

ment en F , de sorte que le quarré de la toute AB avec le quarré du moindre segment FB est triple du quarré de l'autre segment AF . Je dis que la ligne droite AB est coupée en F , selon la moyenne & extreme raison. Car ayant construit comme dessus, d'autant que les quarrés AD , FH sont triples du quarré GE , autant le quarré GE , le gnomon EBG avec le quarré FH sera double du mesme quarré GE . Mais iceluy gnomon EBG avec ledit quarré FH est egal aux deux rectangles $AHFD$: donc iceux deux rectangles sont aussi double du quarré GE : & partant puis que lesdits rectangles AH , FD sont egaux, le seul AH compris sous AB , BF sera egal à iceluy quarré GE : & par la 17. prop. 6. comme AB sera à GI ou AF , ainsi AF sera à FB : & partant AB est divisée en F , selon la moyenne & extreme raison. Ce qui a esté proposé.

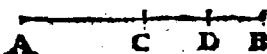
Nous ajouterons encores icy la demonstration que fait Maurolic de cet autre theoreme.

Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & du moindre segment cōme d'une seule ligne est quintuple du quarré du grand segment: & une ligne droite étant coupée inegalement, si le quarré de la toute & du moindre segment, comme d'une seule ligne est quintuple du quarré du grand segmēt; icelle ligne sera coupée en la moyēne & extreme raison.

Soit premierement la ligne droite AD coupée en C , selon la moyēne & extreme raisō, à laquelle soit ajoūée DB egale au moindre segment CD : ie dis que le quarré de AB est quintuple du quarré de AC . Car d'autant que par la 17. p. 6. le rectangle de AD , DC est egal au quarré de AC (pource que les trois lignes AD , AC , CD sōt proport.) quatre fois le rectangle de AD , DC sera qua-

druple du quarré de AC .

Et conséquemment le quarré de AC avec quatre fois le rectangle de AD .



DC sera quintuple d'iceluy quarré de AC . Mais par la 8. p. 2. le quarré de AD est egal audit quarré de AC , avec quatre fois le rectangle d'icelles AD , DC : Donc aussi le quarré de AD sera quintuple du quarré de AC : Ce qui estoit proposé.

Secondement soit la ligne droite AD divisée inegalement en C , à laquelle soit ajoutée DB egale au moindre segment CD , Et soit le quarré de AB quintuple du grand segment AC : Je dis que AD est coupée selon la moyenne Et extreme raison en C . Car d'autant que par la 8. prop. 2. le quarré de AB est egal au quarré de AC avec quatre fois le rectangle de AD , DC , aussi iceux quarré de AC Et quatre rectangles de AD , DC , seront ensemble quintuple dudit quarré de AC : Et partant le rectangle de AD , DC quatre fois sera quadruple d'iceluy quarré de AC , c'est à dire qu'un seul rectangle de AD , DC , sera egal à iceluy quarré de AC , Et par la 17. prop. 6. comme AD sera à AC , ainsi AC sera à CD : Et partant AD est coupée en C , selon la moyenne Et extreme raison. Ce qui est proposé.

Cette prop. est aussi evidente par nombres: Car si AD est 4, le grand segment AC sera $\sqrt{20}-2$, Et son quarré $24-\sqrt{320}$. mais le moindre segment CD sera $6-\sqrt{20}$, qui ajouté à AD , fait $10-\sqrt{10}$ pour la route AB , dont le quarré est $120-\sqrt{8000}$, qui est quintuple de $24-\sqrt{320}$ quarré du grand segment AC .

THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, & à icelle on ajoute une ligne droite egale au grand segment; la toute sera coupée en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera la ligne premierement posée.

Soit la ligne droite AB, coupée en la moyenne & extreme raison au point C, dont le grand segment est AC; & à icelle AB soit ajoutée directement AD égale à AC: je dis que la toute DB est aussi coupée en la moyenne & extreme raison au point A, & que le grand segment est AB.

Car puis que comme AB est à AC, c'est à dire AD ainsi AC est à CB; en changeant, comme DA sera à AB, ainsi



BC à AC, & en composant comme DB sera à AB, ainsi AB à AC, c'est à dire AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB est coupée en la moyenne & extreme raison au point A, & le grand segment est la ligne AB proposée au commencement. Si donc une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qui estoit à prouver.

S C H O L I E.

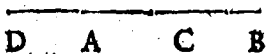
La ligne droite AB soit 4. le moindre segment CB 6—V 20. & le grand AC V 20—2: Ajoûtant donc à AB le grand segment AC, viendront V 20 + 2 pour la toute DB. Or comme V 20 + 2 est à 4. ainsi

4 est à $\sqrt{20} - 2$; car multipliant $\sqrt{20} + 2$ par $\sqrt{20} - 2$, le produit est 16, qui est le quarre de 4: Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

Clavius apres Campanus demontre en cet endroit les deux theoremes suivans.

1. Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, & que du grand segment on retranche le moindre: iceluy grand segment sera aussi coupé en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera cette ligne là, qui étoit le moindre segment de la premiere ligne.

Car la ligne droite DB soit coupée en A, selon la moyenne & extreme raison, & du grand segment AB soit retranchée AC



egale au moindre segment

AD: Je dis que le grand segment AB est divisé en C, selon la moyenne & extreme raison, & le grand segment être AC, qui est egal au moindre segment AD. Car d'autant que comme la toute DB est à la toute AB, ainsi AB retranchée de BD est à AD, c'est à dire AC retranchée de AB, aussi par la 19. prop. 5. AD reste d'icelle BD, c'est à dire AC sera à CB reste d'icelle AB, comme la toute DB à la toute AB, c'est à dire comme AB à AC: & partant AB sera divisée en C, selon la moyenne & extreme raison: Ce qui estoit proposé.

Le même est aussi manifeste en nombres: Car si DB est 4, le grand segment AB sera $\sqrt{20} - 2$, & le moindre AD $6 - \sqrt{20}$, qui retranché de AB restera CB de $\sqrt{80} - 8$: Or comme $\sqrt{20} - 2$ est à $6 - \sqrt{20}$, ainsi $6 - \sqrt{20}$ est à $\sqrt{80} - 8$, car le produit des extremes est egal à celuy des moyens, sçavoir est $56 - \sqrt{2880}$:

& partant apert ce qui estoit proposé.

2. Si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, & de la moitié d'icelle on retranche la moitié du grand segment : la moitié de la route sera aussi divisée en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera la moitié du grand segment de la route.

Car soit AB divisée en C, selon la moyenne & extreme raison & DE soit la moitié de la route, & DF moitié du grand segment AC : le dis que DE est coupée en F, selon la moyenne & extreme raison, & que le grand segment est DF. Car puis que comme la route AB est à la route DE, ainsi la retranchée AC est à la retranchée DF, (car l'une & l'autre est raison double) par la 19. prop. 5. le reste CB sera aussi au reste FE, comme la route à la route, & partant CB sera aussi double de FE. Mais par la 15. prop 3 comme AB est à AC, ainsi DE moitié de celle-là est à FE moitié de celle-cy, & par la def. de la ligne coupée en la moyenne & extreme raison AB est à AC, comme



AC à CB : donc aussi DE sera à DF, comme DF à FE : & partant par la même def. DE sera coupée en la moyenne & extreme raison en F. Ce qui est proposé.

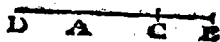
Ce theoreme est aussi manifeste en nombres : car si AB est 4, la moitié DE sera 2, le grand segment AC 10—2, & sa moitié DF 5—1, & partant le reste FE sera 3—5. Or il est evident que ces trois nombres 2, 5—1, & 3—5 sont continuellement propor. car le produit des deux extremes est egal au quarré du milieu, sçavoir est à 6—10.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si une ligne droite rationele est coupée en la moyenne & extreme raison: l'un & l'autre segment est ligne irrationele, appellée residu.

Soit la ligne droite rationele AB, coupée en la moyenne & extreme raison au point C: ie dis que chaque segment AC, BC est ligne irrationele appellée residu.

Car au grand segment AC soit ajoutée directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC est quintuple du quarré de DA, il est à iceluy comme nombre à nombre: Et par la 6. prop. 10. iceux quarréz de DC, DA seront commensurables: & par consequent les lignes DC, DA ont aussi commens. au moins en puissance.



Or AD est rationele, puis qu'elle est moitié d'une rationele AB: Donc aussi DC sera rationele. Et d'autant que les quarréz de DC, DA ne sont comme nombre quarré à nombre quarré: (comme il apert par le corol. de la 24. prop. 8. car ils sont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, seront incommens. en longit. par la 9. prop. 10. & partant rationeles commens. en puissance seulement. Parquoy si de DC rationele on ôte DA commens. en puissance seulement, par la 74. p. 10. le reste AC sera irrationele, appellée residu.

Derechef AB étant coupée en la moyenne & extreme raison en C, le quarré de AC sera egal au rectangle de AB, CB par la 17. p. 6. Mais le quarré du residu

du résidu AC appliqué à la rationelle AB, doit faire l'autre côté CB résidu premier par la 98. prop. 10. parquoy chacun des segmens AC, CB, est ligne irrationelle, apellée résidu. Si donc une ligne droite rationelle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

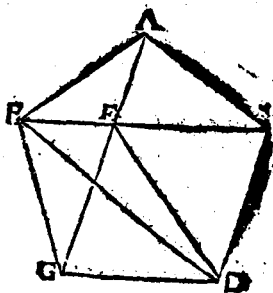
La ligne AB soit 4: donc le grand segment AC sera $\sqrt{10} - 2$, & le moindre segment CB $6 - \sqrt{20}$ l'un & l'autre desquels segmens est résidu, puis que leurs deux nombres sont comm. en puissance seulement, &c.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en un pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra sont egaux: il sera equiangle.

Au pentagone equilateral ABCDE, soient trois angles egaux, premierement d'ordre comme A, B, C: ie dis qu'iceluy pentagone est equiangle.

Car étans tirées à iceux angles egaux A, B, C, les lignes subtendantes AC, BE, BD: de Fous'en-trecouperont AC, BE soit tirée FD. Or puis que les costez AB, AE du triangle ABE sont egaux à BC, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux, aussi egaux, par la 4. p. 1. les bases BE, BD seront egales, & les angles AEB, BDC egaux. Mais par la 5.



p. 1. les angles BED , BDE sont aussi égaux, les deux côtes BE , BD ayant été prouvez égaux : Donc l'angle total AED sera égal au total CDE . Derechef, puis que les côtes AB , AE du triangle ABE sont égaux à BA , BC du triangle ABC , & les angles A & B contenus d'iceux égaux, par la 4. p. 1. la base BE sera égale à la base AC , & les angles ABE , AEB égaux aux angles BAC , BCA , chacun au sien : & par tant les angles FAB , FBA du triangle ABF sont égaux : donc les côtes AF , BF seront aussi égaux : & partant iceux étans ôtez des sub-endantes égales AC , BE les restes FC , FE seront égales : Parquoy les deux côtes FC , CD du triangle CFD se ont égaux aux côtes FE , ED du triangle DFE , & la base FD commune : donc par la 8. p. 1. les angles FCD , FED seront égaux. Mais ACB , AB ont été prouvez égaux : d'oc les tous BCD , AED sont égaux : Parquoy AED , ayant été montré égal à CDE , tous les angles du pentagone F sont égaux entr'eux par la 1. comment. & conséquemment iceluy pentagone $ABCDE$ sera equiangle.

Secondement, soient les trois angles A , C , D , non d'ordre, égaux. D'autant que les côtes AB , AE du triang. ABE sont égaux aux côtes CB , CD du triang. BCD , & les angles contenus d'iceux aussi égaux, par la 4. p. 1. les bases BE , BD , & les angles AEB , BDC seront égaux : Mais par la 5. p. 1. les côtes BE , BD étans égaux, les angles BED , BDE seront pareillement égaux : donc l'angle total AED sera égal au total CDE . Et puis que les angles BAE , CDE ont été posez égaux : les trois angles A , E , D , qui sont d'ordre, seront égaux : & partant comme il a été déjà montré le pentagone sera equiangle. Donc si

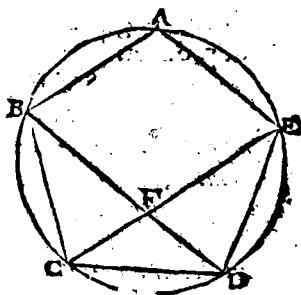
en un pentagone equilateral, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droites subtendent deux angles d'un pentagone equiangle & equilateral, lesquels soient d'ordre; elles se couperont l'une l'autre en la moyenne & extreme raison, & leurs grands segmens seront egaux au côté du pentagone.

Au pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droites BD, CE, subtendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecoupent en F. Je dis qu'elles se coupent en la moyenne & extreme raison, & que chacun de leurs grands segmens BF, EF sera egal à quelconque côté du pentagone.

Car ayant décrit par la 14. p. 4. un cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, EA seront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'ang. compris d'iceux



aussi egal par l'hypothese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. p. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF sont egaux, & par la 32. p. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. p. 6. l'angle ECB est

aussi double du même DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE : Donc les angles BFC, BCF sont egaux : & partant par la 6. p. 1. BF est egale au côté du pentagone BC. Et d'autât que par la 17. p. 3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, sont egaux, les deux angles DEC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD : & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par la 32. p. 1. Parquoy par la 4. p. 6. comme BD sera à DC, c'est à dire à BF, ainsi CD ou BF sera à FD : & partant la subtenante ED est coupée en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal à BC côté du pentagone. Par même raison on démontrera CE être coupée en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE côté du pentagone. Parquoy si deux lignes droites subtendent deux angles d'un pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouver.

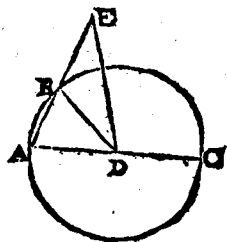
S C H O L I E.

On peut facilement demonstrier que la ligne droite qui soitient l'angle du pentagone equilateral & equiangle est parallele au côté opposé, c'est à dire que CE est parallele au côté AB, & BD au côté AE: car ayant décrit un cercle à l'entour du pentagone, d'autant que par la 22. p. 3. tant les deux angles A & BCE, que les deux ABC, AEC sont egaux à deux droits, & que A, ABC sont egaux entr'eux, le pentagone étant equiangle les deux autres BCE, ACE seront aussi egaux. Veu donc que A & BCE sont egaux à deux droits, A & AEC sont aussi egaux à deux droits, & par la 28. p. 1. AB, CE seront paralleles, &c.

La ligne droite composée du côté de l'hexagone, & du côté du decagone, tous deux inscrits en un même cercle, est coupée en la moyenne & extreme raison, de laquelle le grand segment est le côté de l'hexagone.

Au cercle ABC soit inscrite la ligne droite AB, côté du decagone à laquelle soit ajoutée directement BE égale au demy diametre du cercle, c'est à dire au côté de l'hexagone inscrit au même cercle, car il luy est egal par le coroll. de la 15. p. 4. Je dis que AE est coupée en la moyenne & extreme raison, & que BE côté de l'hexagone est le grand segment.

Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB étant la dixième partie de toute la periphèrè du cercle, sera la cinquième de l'arc ABC, moitié d'icelle periphèrè: & partant l'arc BC sera quadruple d'iceluy AB: Parquoy par la 33. prop. 6. aussi l'angle BDC sera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. p. 1. l'angle BDC étant extérieur, il vaudra les deux DAB, DBA: lesquels étans égaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle ABD est isoscele, l'un ou l'autre sera double de ABD: mais l'un d'iceux DBA étant extérieur, est egal aux deux opposez interieures DEB & BDE: (lesquels sont



egaux, étant le triangle DBE Iſoſcele, pource que DB demy diametre, & BE ſont egaux par la conſtruction) donc l'angle DBA ſera double de l'angle E; qui par conſequent ſera egal à l'angle ADB: Parquoy les deux triangles AED, ADB ſeront equiangles, ayans l'angle A cōmun, l'angle E egal à l'angle ADB, & par la 32. prop. 1. le tiers ſera egal au tiers: donc par la 4. prop. 6. comme AE eſt à AD ou BE ſon egale, ainſi AD, ou BE eſt à AB: partant AE eſt coupée en la moyenne & extrême raiſon en B: & BE côté de l'hexagone eſt le grand ſegment. Donc la ligne droite compoſée du côté de l'hexagone & du côté du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

De ucy eſt évident que le coſté de l'hexagone eſtant coupé en la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment eſt coſté du decagone inſcrit au meſme cercle. Car ſi de BE coſté de l'hexagone on coupe une partie egale à AB: comme la toute AE ſera à la toute BE: ainſi la retranchée BE ſera à la retranchée de BE: c'eſt à dire à AB: & partant par la 19. prop. 5. le reſte ſera au reſte, comme la toute à la toute; ou la retranchée à la retranchée. Parquoy BE ſera ſemblablement coupée que AE en la moyenne & extreme raiſon par la 3. def. 6. dont le grand ſegment ſera AB coſté du decagone.

S C H O L I E.

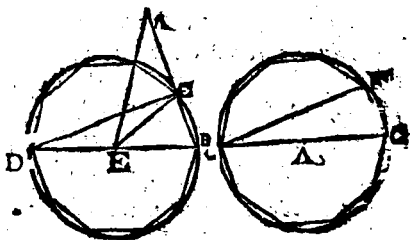
Clavius demonſtre après Campanus la converſe de cette propoſition ainſi qu'il enſuit.

Si le grand ſegment d'une ligne diviſée en la moyenne & extreme raiſon eſt le côté de l'hexagone de quelque cercle; le moindre ſegment ſera

le côté du decagone du même cercle. Que si le petit segment est le côté du decagone de quelque cercle, le grand segment sera le côté de l'hexagone du même cercle.

Car soit AB divisée en C selon la moyenne & extreme raison, & soit premierement le grand segment AC costé de l'hexagone du cercle BCD : le dis que le petit segment BC est le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car BC estant accommodé au cercle, en sorte que CA tombe hors le cercle, soit tiré de B par le centre E le diametre BED, & les lignes EA, EC. Donc puis que comme AB est à AC, ainsi AC est à CB, & que AC est égale au semidiametre EB par le corol. de la 15. prop. 4. Aussi comme AB sera à BE, ainsi EB

à BC : & par la 6. prop. 6. les triangles ABE, EBC seront equiangles, puis qu'ils ont les costez de l'angle commun



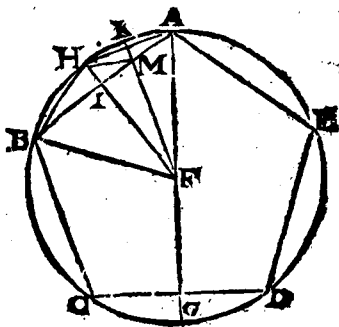
B proportionaux ; & l'angle A sera égal à l'angle BEC. Derechef, pource que les costez CA, CE sont égaux, par la 5. prop. 1. les angles CAE, CEA seront égaux, & puis que par la 32. prop. 1. à iceux est égal l'angle externe BCE ; iceluy BCE sera double de l'angle A : Mais par la 5. prop. 1. l'angle CBE est égal à l'angle BCE, à cause de l'égalité des costez EB, EC : donc aussi CBE sera double de l'angle A : & partant les deux angles BCE, CBE ensemble se-

ront quadruple du mesme angle A. Et puis que l'angle externe CED est egal aux internes BCE, CBE, aussi CED sera quadruple du mesme angle A. & partant de l'angle BEC son egal: & par la 33. prop. 6. l'arc DC sera pareillement quadruple de l'arc B: & partant l'arc du demy cercle BCD sera quintuple du mesme arc BC, & consequemment toute la periphère du cercle sera decuple d'iceluy arc BC: Parquoy la ligne droite BC est le costé du decagone.

Maintenant, le moindre segment CB soit le costé du decagone du cercle BCD. Je dis que le grand segment AC est le costé de l'hexagone: Car derechef soit accommodé au cercle BCD, le segment BC & soit tiré le diametre BED: puis de l'intervale AC soit decrit le cercle CFG, duquel le diametre est CAG, & par le corol. de la 15. prop. 4. AC sera costé de l'hexagone du cercle CFG. Donc puis que AB est coupée en C, selon la moyenne & extreme raison, & que le grand segment AC est costé de l'hexagone du cercle CFG, le petit segment CB, comme il a ja esté démontré, sera costé du decagone du mesme cercle CFG. Soit donc decrit en iceluy cercle CFG, le decagone equilateral & equiangle CFG. Item au cercle BCD, le triangle equilateral & equiangle BCD, les costez BC, CD seront egaux entr'eux: Mais d'autant que les lignes droites CD, FG estans tirées, les angles CDB, FGC insistans sur arcs semblables BC, CF, sont egaux, comme nous avons démontré au scholic de la 22. prop. 3. & que les angles BCD, CFG ostans au demy cercle sont aussi egaux, sçavoir droits par la 31. prop. 3. les costez BD, CG seront pareillement egaux entr'eux par la 26. p. 1. Parquoy les diametres BD, CG estans egaux, les cercles BCD, CFG seront aussi egaux: & partant puis

THEOR. 10. PROP. X.

Car ayant tiré le diametre AFG, & joint FB, soit coupé l'arc AB en deux également par la ligne FH, laquelle coupe aussi la ligne droite AB en I, & soient tirées les lignes droites AH, BH; & AH sera côté du decagone, & FB côté de l'hexagone: En apres, soit coupé l'arc AH en deux également en K, par la ligne FK, laquelle coupe aussi la ligne droite AH en L, & la ligne droite AB au point M, auquel soit menée la ligne HM. Vû donc que les arcs AH, BH sont égaux, aussi seront égaux les angles AFH, BFH



apuyez sur iceux, par la 27. pr. 3. Parquoy les côtez AF, FB étans égaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la base AI sera égale à la base BI, par la 4. prop. 1. & les angles AIF, BIF aussi égaux, & partant droits. Par même raison seront égales les lignes droites AL, HL, & les angles ALF, HLF droits. Or si des demy cercles égaux ABCG, AEDG on ôte arcs égaux ABC, AED, resteront égaux les arcs CG, GD, & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD. Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD sont égaux, les arcs AH, CG moitez d'iceux, seront aussi égaux: & partant l'arc AH étant double de l'arc HK, aussi le sera CG. Et puis que les arcs AB, BC sont égaux, & l'arc AB est double de l'arc BH l'arc BC sera pareillement double du même arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont équimultiples, sçavoir est doubles des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK: & par conséquent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33. prop. 6. Mais par la 20. prop. 3. le même angle BFG au centre, est double de l'angle FAB en la circonférence: donc les angles BFM, FAB seront égaux, & partant l'angle ABF étant commun aux deux triangles AFB, FBM, & le tiers au tiers par la 32. prop. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. prop. 8. comme AB sera à BF, ainsi BF à BM: & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM sera égal au carré de BF. Derechef, puis que les côtez AL, LM du triangle ALM sont égaux aux côtez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi égaux, sçavoir droits, par la 4. prop. 1.

les bases AM, HM , & les angles LAM, LHM seront égaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM est égal à l'angle HBA , pource que les côtez HA, HB sont égaux : Donc aussi l'angle LHM sera égal au même HBA : & partant par la 32. prop. 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM égaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. prop. 6. comme AB sera à AH , ainsi AH à AM : & par la 17. pr. 6. le rectangle de AB, AM sera égal au carré de AH . Mais il a été démontré que le rectangle de AB, BM est égal au carré de BF : donc les rectangles de AB, AM , & de AB, BM ensemble, sont égaux aux deux carrés de AH, BF . Mais par la 2. prop. 2. iceux rectangles sont égaux au carré de AB : donc le carré de AB côté du pentagone est égal aux deux carrés des lignes BF, AH côtez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui étoit à prouver.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste qu'une ligne droite tirée du centre, & laquelle divise en deux également un arc, divise aussi la ligne subtendante d'iceluy arc en deux également, & à angles droits.

Est aussi evident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, divise en deux également l'arc que le costé opposé à iceluy angle subtiend, comme aussi iceluy costé opposé, & à angles droits. Car il a esté démontré que le diametre AG tiré du point A , divise en deux également l'arc CD : lequel le costé opposé CD subtiend : Parquoy par ce que dessus, il coupera aussi en deux également & à angles droits iceluy costé CD . La mesme démonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez

estant impair, tellement que si d'un angle de quelconque polygone regulier dont le nombre des costez est impair, on mene une ligne droite par le centre d'iceluy qui coupe le costé opposé; elle coupera les angles en deux également, comme aussi ledit costé, & à angles droits. Mais au contraire, si elle coupe l'angle, on le coté en deux également, ou à angles droits: icelle ligne passera par le centre.

S C H O L I E.

Au quatrieme livre, Euclide a enseigné à decrire au cercle un pentagane equilateral: Mais Ptolomée au premier livre de sa grande construction a enseigné un autre moyen, beaucoup plus bref & facile pour decrire tant ledit pentagone que le decagone; lequel moyen nous avons desja raporté en nostre Construction de la table des sinus: & neanmoins nous le rapporterons encore icy. Soit donc un cercle ABC; duquel le centre est D, & ayant tiré le diametre AC, du centre D soit élevée DB perpendic. à

AC; & apres avoir coupé en deux également le semidiametre DC en E, & menée BE soit prise EF egal à EB, & tirée BF. Je dis que BF est le



costé du pentagone, & DF le costé du decagone. Car puis que CD est coupé en deux également en E, & qu'à icelle est ajoutée DF, par la 6. pr. 1. le rectangle de CF, DF avec le quarré de DE est egal au quarré de FE, ou EB son egale. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EB est egal aux quarrez de BD, DE: donc le rectangle de CF, DF avec le quarré de DE sera aussi egal aux quarrez de BD, DE; & ostant le quar-

ri de DE commun, restera le rectangle de CF , FD égal au quarré de BD , c'est à dire au quarré de CD : & par la 17. prop. 6. comme CF sera à CD , ainsi CD à DF : & partant la ligne droite CF sera divisée en D selon la moyenne & extreme raison. Vû donc que le grand segment CD est le costé de l'hexagone du cercle ABC par le corol. de la 15. prop. 4. le moindre segment DF sera le costé du decagone du mesme cercle par le schol. prec. Et pource que par cette 10. prop. le quarré de BD , costé de l'hexagone, avec le quarré de DF , costé du decagone, est égal au quarré du costé du pentagone inscrit au mesme cercle: & que par la 47. pr. 1. le quarré de BF est égal aux susdits quarrés de BD , DF ; le quarré du costé du pentagone sera égal au quarré de BF ; & partant la ligne droite BF est égale au costé du pentagone. Ce qui a esté proposé.

De cecy apert qu'estant connu le diametre d'un cercle, on connoistra aisément le costé tant du pentagone que du decagone inscriptibles en iceluy cercle. Car le diametre AC estant 8. BD sera 4, & DE 2: partant BE ou EF sera $\sqrt{20}$, & ostant DE d'icelle EF , restera DF $\sqrt{20} - 2$, qui est le costé du decagone: Et pource que le quarré d'iceluy costé FD est $24 - \sqrt{320}$ & celuy de BD 16: le quarré de BF sera $40 - \sqrt{320}$, & partant icelle BF , qui est égale au costé du pentagone sera $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$.

THEOR. II. PROP. XI.

Si dans un cercle ayant le diametre rationnel, on inscrit un pentagone equilateral; le costé du pentagone est irrationnel, appelé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral $ABCDE$, inscrit dâs

15. prop. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM, comme KF à FL : & en composant, comme les deux CD & CK ensemble à CK, ainsi KL à FL : Et par la 22. prop. 6. le quarré de la composée de CD & CK sera au quarré de CK, comme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC étant coupée en la moyenne & extrême raison (sçavoir est étant tirées la ligne droite BD) par la 8. prop. 13. son plus grand segment est égal au côté du pentagone, sçavoir à iceluy CD; par la 3. prop. 12. le quarré de la composée de CD plus grand segment, & de CK moitié de la toute CA, sera quintuple du quarré de CK, moitié de la toute : partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, étant FL quart de FB: donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL au quarré de FL, c'est à dire en raison doublée de KL à FL: car iceux quarréz sont en certe raison par la 20. p. 6. dont s'ensuit que KL sera moyenne proportionnelle entre BL & FL. Mais par le corol. de la même prop. le quarré de BL sera au quarré de KL, comme BL à FL, c'est à dire que le quarré de BL sera quintuple du quarré de KL: donc iceux quarréz seront entr'eux comme nombre à nombre, & partant commensurables par la 6. prop. 10. & conséquemment les lignes BL, KL seront commensurables entr'elles, au moins en puissance: Mais leurs quarréz étans entr'eux comme 5 à 1, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré par la 9. prop. 10. icelles lignes BL & KL, seront incommensurables en longueur: & partant BL ayant été montrée rationnelle,

icelles BL & KL seront rationeles commensurables en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. BK fera residu.

Maintenant, que la ligne BL puisse plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que le quarré de BL, qui est quintuple du quarré de KL est egal aux deux quarez de KL & N, iceux quarez de BL & N seront entr'eux comme 5 à 4. & partant commens. par la 6. pr. 10. & consequemment les lignes BL & N, commensurables entr'elles, au moins en puissance: Mais BL a été montrée rationelle: dont N le sera aussi. Et pource que les quarez d'icelles BL & N sont entr'eux comme 5 à 4, qui par le corol. de la 24. pr. 8. n'est pas comme nombre quarré à nombre quarré, icelles lignes BL & N seront incommens. en longit. par la 9. p. 10. & partant rationelles commens. en puissance seulement. Donc la toute BL étant rationelle commensurable en longitude à la rationelle proposée BE (car BL est de 5 parties telle que BH en a 8) peut plus que sa convenable KL du quarré de N, qui luy est incommens. en longitude, partant BK fera residu quatriéme par la 4. des tierces def. du 10.

Finalement, pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB est moyenne proportionele entre BH, BK; (car par la 31. p. 3. le triangle ABH à l'angle BAH droit, duquel est tirée AK perpend. à la base BH) le quarré de AB sera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droite AB peut la superficie contenuë de la rationele EH & du residu quatriéme BK: par la 95. pr. 10. icelle AB sera ligne mineure. Parquoy si dans un cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouver

SCHOLIE.

S C H O L I E.

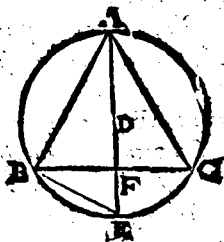
Le diametre BH soit 8 : donc BF sera 4. BL 5. & $AB\sqrt{(40 - \sqrt{320})}$, & par consequent son quarré sera $40 - \sqrt{320}$, qui divisé par BH 8, viendront 5 — $\sqrt{5}$ pour BK ; & consequemment KL sera $\sqrt{5}$, qui est commensurable en puissance seulement à BL , leurs quarrés 5 & 25, estans en sa son quintuple; partant BK est residu. Et puis que BL peut plus qu'icelle KL du quarré de N , iceluy quarré sera 20. & $N\sqrt{20}$, qui est incommensurable en longueur à la toute BL 5; & partant BK sera residu quatriéme. Mais le quarré de AB $40 - \sqrt{320}$ estant egal au produit d'iceluy residu du 5 — $\sqrt{5}$ multiplié par la rationele BH 8; icelle AB $\sqrt{(40 - \sqrt{320})}$, qui est le costé du pentagone, sera ligne mineure, comme veut la proposition. Les nombres appliquez aux autres lignes de la fig. seront tels qu'ils ensuivent : KL sera $\sqrt{5}$ 1, $CK\sqrt{(10 + \sqrt{20})}$, $AC\sqrt{(40 + \sqrt{320})}$, $CM\sqrt{(2\frac{1}{2} + \sqrt{1\frac{1}{4}})}$, & $CI\sqrt{(10 - \sqrt{20})}$.

THEOR. 11. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit au cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.

Soit le triangle equilateral ABC inscrit en un cercle ABC , duquel le centre est D . Je dis que le quarré de AB côté d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.

Car étant tiré le diametre AE , lequel coupera par



le corol. de la 10. propos. de ce livre, l'arc BC en deux également en E; & aussi la ligne droite BC en deux également & à angles droits: vu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonférence, BE sera la sixième partie: partant étant tirée la ligne droite BE, elle sera le côté de l'hexagone, & égale au demy diamètre DE par le corol. de la 13. p. 4. Or le quarté du diamètre AE sera quadruple du quarté de BE égale au demy diamètre par le scholie de la 4. pr. 2. & par la 47. prop. 1. il est aussi égal aux deux de BA & BE, l'angle ABE étant droit par la 31. prop. 3. il est donc manifeste qu'il sera triple du quarté de BE, ou ED son gal. Parquoy le quarté du côté du triangle equilateral, &c. Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

Il s'ensuit de ce que dessus, que le quarté du diamètre d'un cercle est au quarté du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquiterce, c'est à dire comme 4. à 3. Car puis qu'il a esté démontré que le quarté du costé AB est triple du quarté du demy diamètre AD, posant le quarté de AB 3, le quarté de AD sera 1; & le quarté de AF quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarté de AE sera au quarté de AB comme 4. à 3.

Et pour ce que par le corol. de la 8. prop. 6. comme AE est à AB, ainsi AB est à AE, perpendiculaire tombant d'un angle sur un costé; pareillement le quarté de AB sera au quarté de AE, comme 4. à 3.

On peut aussi facilement colliger que le semidiamètre DE, lequel tombe perpendiculairement sur BC costé du triangle equilateral, & si coupé en deux également en F par ledit costé BC. Car puis que le quarté de AB

est triple du quarré de BE , costé de l'hexagone, si on pose iceluy quarré de AB estre 12, le quarré de BE sera 4. & le quarré de BF 3; & par consequent le quarré de EF sera 1 par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE , c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE . Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2 la ligne DE sera double de FE ; & par consequent DE est coupée en deux egalemēt en F par le costé BC : tellement que la ligne perpendic. tombant du centre du cercle au côté du triangle equilateral inscrit, en iceluy est moitié du côté de l'hexagone inscrit au mesme cercle.

S C H O L I E.

Le diametre AE estant 8, BE sera 4, EF 2. AF 6, $AB \vee 48$ & $BF \vee 12$: Parquoy le quarré du costé du triangle sera 48, & celuy du semidiametre 16. &c.

PROBL. I. PROP. XIII.

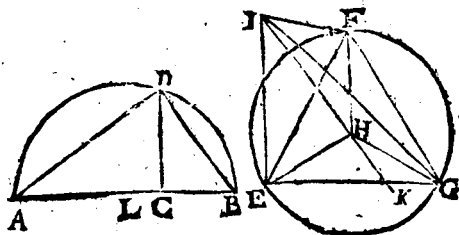
Dans une sphere donnée; inscrire une pyramide equilaterale: & montrer que le quarré du diametre d'icelle sphere, est en raison sesquialtere au quarré du côté d'icelle pyramide.

Soit AB diametre de la sphere donnée, & soit divisé en C , de sorte que AC soit double de BC . Et apres avoir décrit sur AB le demy cercle ADB , levé la moyenne proportionelle CD , & mené les lignes droites DA & DB : Soit décrit le cercle EFG , duquel le demy diametre HE soit egal à CD : & apres avoir inscrit en iceluy le triangle equilateral EFG , & tiré HF , HG , chacune desquelles sera égale à CD ; étant égale à HE ; du centre H soit levée HI perpendiculaire au plan du cercle EFG par la 12. pr. 11.

& égale à AC: puis soient menées les lignes IE, IF, & IG. Je dis premièrement que la pyramide EFGI est équilaterale.

Car par la construction le triangle EFG est équilateral, & il est évident que les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi égales entr'elles: (puis que par la 47.p. 1. le carré d'une chacune d'icelle est égal au carré de la perpendiculaire IH, & au carré de l'une des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont égales.)

Et d'autant que les côtez AC, DC du triangle ADC sont égaux



aux côtez HI, HE du triangle IHE; & les angles qu'ils comprennent égaux, étans droits: la base AD fera égale à la base EI par la 4.p. 1. En la même manière sera démontré AD être égale à FI, GI. Et vû que le carré de AC est double du carré de CD, (car ils sont l'un à l'autre comme AC à CB par le cor. de la 20.p. 6. étans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportioneles) le carré de AD, qui est égal à tous les deux, sera triple du carré de CD, ou de son égale HE: Mais par la prec. pr. le carré de EF est aussi triple du carré de HE: donc EF & AD sont égales: & par la 1. com. sent. EF & EI seront égales. Parquoy puis que AD est

aussi égale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI seront équilatéraux, & égaux entr'eux: Et par conséquent la pyramide EFGI, dont la base est le triangle EFG, & le sommet I, est équilatérale,

Je dis en second lieu qu'icelle pyramide peut être inscrite en la sphere, dont le diametre est AB. Soit continuée la ligne perpendiculaire IH par dessous la base de la pyramide jusques en K: tellement que HK soit égale à CB. & la toute IK à la toute AE, & soit imaginé être posé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide, sçavoir le point A au point I, le point B au point K: & puis que AC & CB sont égales à IH & HK; & HG égale à DC, faisant angle droit avec IH aussi bien que leurs égales AC & CD, il est evident que le point D du demy cercle tombera sur le point G: Partant le diametre AB demeurant immobile, si le demy cercle fait une revolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F, (étant les lignes HE, HF, HG égales) & par ainsi la pyramide EFGI est inscrite en la sphere donnée, puis que tous les angles d'icelle E, F, G, I, touchent la dite sphere.

Finalement, je dis que le carré du diametre AB est sesquialtere au carré du côté AD, qui est égal à chacun côté de la pyramide: Car puis que AB est triple de BC: & AC double de la même BC, AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. p. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportionnelles: Et partant par le corol. de la 20. pr 6. comme AB sera à AC, ainsi le carré de AB sera au carré de AD. Donc aussi le carré de AB sera au carré de AD en raison sesquialtere. Nous avons donc in-

écrit une pyramide equilaterale dans une sphere donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidiametre du cercle descript à l'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diametre de la sphere, a esté demontre sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarré de EF sera de 6 parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9. & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF est triple du quarré de HE , par la 12. prop. 13. Donc de 9 telles parties que contiendra le quarré de AB , le quarré de HE en contiendra 2 : Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE , puis que la raison des quarréz est comme 9 à 2.

Aussi la perpend. tirée du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide est la sixième partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du semidiam. Car L soit le centre du demy cercle ADB : L sera pareillement le centre de la sphere. Je dis que la ligne LC , (qui est la perpend. tirée du centre de la sphere à la base EFG ; car puis que AC est égale à HI , & partant le point C le mesme que H , sera aussi L le même que le centre de la sphere.) est la sixième partie du diametre de la sphere, sçavoir est de AB , & la tierce partie du semid. AL . Car puis que AC est double de CB , de telles 4. parties qu'est AC , de 2 telles sera CB : & partant de 6 telle sera la toute AB , & de 3 le semid. AL . Parquoy si AC est 4, & AL 3 ; LC sera 1 ; & partant LC sera la sixième partie de AB , & la tierce de AL .

Semblablement la hauteur de la pyramide HI sera deux tierces parties du diametre de la sphere. Car HI est la mesme que AC, laquelle par la construction est deux tierces parties d'iceluy diametre.

Aussi de 9 telles parties que sera le quarré d'iceluy diametre, le quarré de la hauteur de la pyramide en fera 4. Car la raison de 9 à 11 est la raison doublée de 3 à 2.

• S C H O L I E.

Le diametre AB estant 12. AC ou HI sera 8. CB 4. CD ou HE V. 2. AD ou EF. EIV 96. & BD V. 48. Parquoy le quarré du diametre AB est 144. & celuy de EF côté de la pyramide est 96: tellement que ces deux quarez, s'ont entr'eux cōme 3 à 2. ainsi que veut la p. &c.

P R O B L. 2. P R O P. XIV.

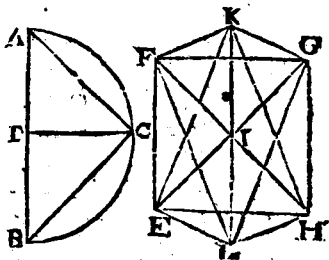
Dans une sphere donnée, inscrire un octaëdre; Et montrer que le quarré du diametre de la sphere, est double du quarré du costé de l'octaëdre.

Soit AB le diametre de la sphere donnée, & iceluy soit coupé en deux également au point D: & apres avoir construit le demy cercle ACB; levé la perpendiculaire DC, & mené les lignes droites CA, CB, lesquelles seront egales entr'elles par la 4. p. 1. sur la ligne EF eg le à l'une d'icelles AC, CB, soit construit le quarré EFGH, dans lequel soient menées les deux diagonales FH, GE se coupans au point I: duquel point par la 12. p. 11. soit élevée la ligne IK perpendiculairement sur le quarré GE, & continuée par dessous iceluy plan jusques en L, tellement que IK, IL, soient chacune egale à AD: puis des points L & K, soient menées aux angles du quarré les lignes KE, KF, KG, KH,

LE, LF, LG, & LH.

Je dis maintenant que la figure solide KL est environnée de huit triangles equilateraux ; & que c'est un octaedre. Car le quarré EFGH, ayant les côtez egaux à AC :

Il est evident que les diagonales EG, FH seront egales à AB ; partant leurs moitez à AD. Mais les deux lignes IL & IK sôt aussi egales à AD : & par cō-



sequent elles seront egales à une chacune d'icelles demy diagonales : & par la 4. prop. 1. les huit lignes LE, LF, LG, LH, KE, KF, KG, KH, seront toutes egales entr'elles ; & aux quatre du quarré EFGH par la même 4. prop. 1. (étans les demy diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en constituant des angles droits au point I, milieu du quarré.) Et puis que tous les côtez sont egaux, tous les triangles seront equilateraux, sçavoir les quatre d'au dessus du quarré EFGH, ayans leurs bases sur les quatre côtez d'iceluy quarré, & se terminans au point K, & quatre autres au dessus du même quarré, ayans aussi leurs bases sur les côtez du quarré, & se terminans au point L : & partant le solide KL compris de huit triangles equilateraux, sera octaedre.

Je dis davantage qu'iceluy octaedre est inscriptible en la sphere donnée. Car il est evident que la ligne KL, est egale au diametre AB, & que l'angle KEL est droit : (d'autant que les deux lignes KI, IE étas ega-

les, les angles sur la base KE seront egaux, & demy droits, pource que l'angle KIE est droit : Et par même raison l'angle IEL, est demy droit : & partant le total KEL sera droit.) Partant le demy cercle ayant pour diametre KL, & faisant une revolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le point E : & par même discours il touchera aussi les trois autres F, G, H, desquels les angles sont egaux à l'angle E, & par consequent l'octaed. e KL sera inscriptible en la sphere dont le diametre est AB, puis que tous les angles d'iceluy touchent ladite sphere. Finalement, il est evident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la sphere AB ou KL, est egal aux deux quarréz de KE, EL, lesquels sont egaux : & partant iceluy quarré de KL diametre de la sphere, sera double du quarré de l'un d'iceux côtez de l'octaedre. Nous avons donc inscrit un octaedre dans une sphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il est evident par les choses cy-dessus, qu'en l'octaedre trois diametres s'entrecoupent à angles droits au centre de la sphere, car le diametre KL est perpendiculaire aux deux diametres EG, FH, qui s'entrecoupent au centre I à angles droits.

Il est encore evident que l'octaedre peut être divisé en deux pyramides semblables & egales, ayans pour base commune le quarré EFGH, & pour sommets K & L, telles que sont les deux pyramides EFGHK, EFGHL.

Il apert aussi que si le tetraedre & l'octaedre sont décrits en une mesme sphere : le costé du tetraedre sera sesquitieree en puissance au costé de l'octaedre. Car le

quarré du diametre de la sphere estant 6 parties, par la prec. prop. le quarré du costé du tetraedre sera 4 parties; & par celle 14. prop le quarré de l'octaedre sera 3 parties. Donc le quarré du costé du tetraedre sera au quarré du costé de l'octaedre, comme 4 à 3; qui est raison sesquiterce.

S C H O L I E,

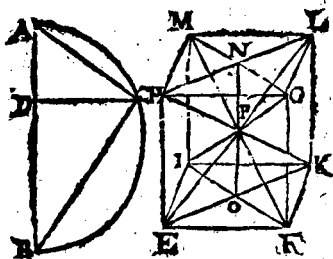
Le diametre AB étans 12. AD , ou DC , IK sera 6. AC ou EF $\sqrt{72}$. EG 12. & EI 6. Parquoy le quarré AB diam. de la sphere est 144. & celuy de EF côté de l'octaedre est 72: tellement qu'iceux quarrés sont entr'eux comme 2 à 1, ainsi que veut la prop. &c.

PROBL. 3. PROP. XV.

Dans une sphere donnée, inscrire un cube;
& montrer que le quarré du diametre de
la sphere, est triple au quarré du côté
d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnée AB , lequel soit coupé au point D , en sorte que BD soit double de AD , c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD : Puis apres avoir construit le demy cercle ACB , levé la perpendiculaire DC , & mené les deux lignes AC & BC ; sur EF egale à AC , soit fait le quarré $EFGH$, sur lequel soient élevées par la 11. prop. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI , FK , GL , HM , chacune egale à EF : puis soient menées les quatre lignes IK , KL , LM , MI . D'autant que les lignes EI , FK sont perpendiculaires au plan $EFGH$, elles seront paralleles par la 6. prop. 11. Mais elles sont aussi egales: donc par la 33. prop. 2.

EF, IK seront pareillemēt egales & paralleles: & partant EFKI est un parallele. ayant les 4 cōtez egaux. Mais il a aussi par la 34. prop. 1 les quatre angles droits, puis que les angles EIK, FKI sont oposēz aux droits KFE, IEF: donc EFKI est quarrē. Par mēme raison FKL G, GLMH, HMIE seront quarrē: & partant IKLM sera aussi quarrē, puis que par la 24. prop. 11. il est egal & semblable au quarrē oposē EFGH: Car EL est un solide parallepipede, pource que par la 15. prop. 11. les plans oposēz



d'iceluy sont paralleles, étans tirez par des lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL sera un cube: lequel ie dis être inscriptible en la sphere donnée. Car ayant menē les diametres EK, FI, HL, & GM, des plans oposēz EFKI, HGLM, soient imaginez être tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, lesquels par la 28. prop. 11. couperont le cube en deux egale-ment, & passeront par le centre d'iceluy, sçavoir par le point P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres dudit cube s'entrecouperont aussi en deux egale-ment: & partant la commune section d'iceux plans, sçavoir NO, passera par le mēme centre P. Mais il est evident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par conséquent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux, Par-

quoy étant décrit un cercle du centre P sur le diamètre EL; il est evident qu'iceluy demy cercle faisant une revolution à l'entour du cube, décrira une sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis être égale à celle du diamètre AB. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de EK est egal aux quarréz des lignes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de KL: les quarréz de EK, KL seront triples du quarré de KL. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EL est egal aux quarréz de EK, KL: donc aussi, le quarré de EL sera triple du quarré de KL, c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré de AB: (car par le corollaire de la 8. prop. 6 AB, AC, AD sont proport. & partant par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB est à AD, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AC. Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarré de AB sera triple du quarré AC.) Parquoy les quarréz de EL, AB sont egaux: & par conséquent les lignes EL, AB, diametres des spheres; comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a été démontré que le quarré du diamètre EL est triple du quarré du côté du cube KL. Parquoy nous avons fait tout ce qui étoit proposé.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste que le quarré du diamètre de la sphere, ou du cube, est egal aux quarréz du costé du tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. p. 1. le quarré de AB diamètre de la sphere, est egal aux deux quarréz de AC, BC, costez du cube, & du tetraedre.

Est aussi evident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se divisent en deux également au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droites qui conjoignent les centres des quarez opposez, se coupent en deux également au même centre de la sphere.

S C H O L I E.

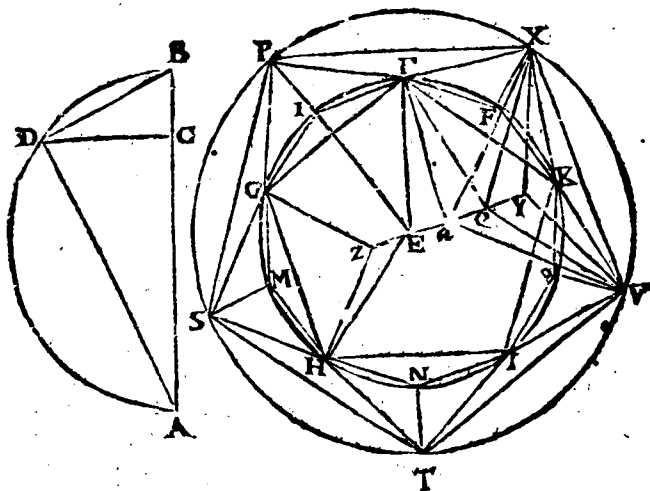
Le diametre AB étant 12, AD sera 4, BD 8, DCV 32, BCV 96, AC ou EFV 48, EKV 96, & EL 12. Parquoy apert que le quarré du diametre de la sphere AB , qui est 144, est triple du quarré de EF costé du cube, qui est 48, &c.

PROBL. 4. PROP. XVI.

Dans une sphere donnée, inscrire une icosaëdre: Et inontrer que son côté est ligne irrationele, apellée ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnée AB , lequel soit divisé au point C , en sorte que AC soit quadruple de BC , & apres avoir construit le demy cercle ADB , levé la perpendiculaire CD , & mené les lignes droites AD , DB ; du centre E , & de l'intervale EF egale à BD : soit fait un cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral $FGHIK$, & puis dans le même cercle, soit aussi inscrit un decagone equilateral: (ce qui se fera en coupant en deux également l'arc d'un chacun côté du pentagone.) En apres par la 12. prop. 11. du centre E , & des points L, M, N, O, P , soient levées les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle $FGHIK$, chacune desquelles soit

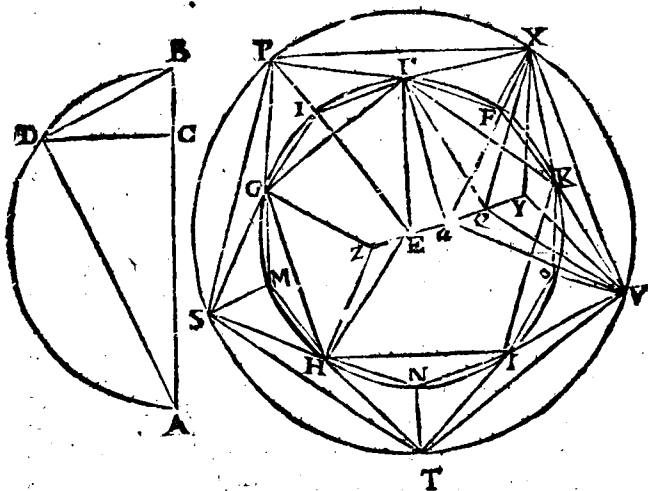
posée égale à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles seront parallèles entr'elles: & partant les lignes droites conjoignant icelles, sçavoir: EL, QR; EM, QS; EN, QT: EO, QV; EP, QX, (toutes lesquelles toutesfois nous n'avons tirées pour éviter confusion) seront égales & parallèles entr'elles, par la 33. prop 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont égales au semidiametre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront égales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15.



prop. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallèle au plan FGHK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la même raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallèle au même plan FGHK, tiré par les lignes EM, EN: mais que le plan tiré par les lignes QR, QS convient avec le plan mené

par les lignes QS , QT , en la ligne droite QS ; il est evident par les choses démontrées à la 16. prop. 11. que ces deux plans en font un seul. On démontrera en la même maniere, que le plan tiré par QT , QV , avec celuy-cy en fait un seul, & aussi celuy tiré par QV , QX & par QX , QR : tellement donc que les 5. lignes QR , QS , QT , QV , QX sont en un même plan: & partant si de Q , & de l'intervale QX , on décrit un ce cle en iceluy plan, il passera par les autres points R, S, T, V , & sera egal au cercle $FGH K$. Soient tirées les lignes droites RS, ST, TV, VX, XR . Et d'autant que LR , PX sont egales & paralleles: si on imagine être tirée une ligne droite LP , aussi par la 33. prop. 1. LP, RX seront egales & paralleles: & partant par la 28. p. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la cinquième partie du cercle $FGHIK$, sçavoir les deux dixièmes parties LF, FP : Donc aussi RX , prend la cinquième partie du cercle $RSTVX$. Par même maniere nous concluons que chacune des autres lignes droites RS, ST, TV, VX , prend la cinquième partie d'iceluy cercle. Parquoy $RSTVX$ est un pentagone equilateral, ayant tous les côtez egaux à ceux du pentagone $FGHIK$. Soient tirées des angles du pentagone $RSTVX$, aux angles du pentagone $FGHIK$, les lignes droites $RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF$. Donc puis que la perpendiculaire LR est egale au demy diametre EF , c'est à dire au côté de l'hexagone du cercle $FGHIK$; & que LF est côté du decagone, par la 10. prop. 13. le quarré du côté du pentagone du même cercle, est egal aux quarréz de LR, LF . Mais le quarré de ER par la 47. prop. 1. est egal à iceux

quarrez de LR, LF : Donc le quarté de FR est égal au quarre du côté du pentagone; & par coniequent la ligne RF fera egale à LP côté du pentagone, ou à EG, c'est à dire à RX. Par la même raison, les autres lignes RG, SG, &c. seront egales aux autres côtez de chaque pentagone; & partant les dix triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THL, TIV, VIK, VKX, XKF, seront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant soit prolongée de part &



d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que chaque prolongement QY, EZ soit égal au côté du decagone, & soient tirées les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX est semidiametre du cercle RSTVX, c'est à dire côté de l'hexagone, & QY est côté du decagone de même cercle; par la 10. prop. 13. le quarre de XV, côté du pentagone

pentagone, sera egal aux quarréz de QX , QY . Mais par la 47. prop. 1. à iceux quarréz de QX , QY , est aussi egal le quarré de XY : (car l'angle XQY , est droit, étant EQ perpendiculaire à l'un & l'autre plan des cercles parallèles). Donc le quarré de XY ; est egal au quarré de XV , & partant la ligne XY egale à la ligne XV . Par même raison XV sera démontrée egale à VY : & partant le triangle VYX est equilateral. Par même maniere, (étans tirées les lignes RY , SY , TY , lesquelles ne sont tirées pour eviter confusion) chacun des 4 triangles $R Y X$, $R Y S$, $S Y T$, $T Y V$, sera démontré equilateral, & egal au triangle VYX , c'est à dire à chacun des dix premiers triangles, puis que tous leurs côtez sont egaux aux côtez du pentagone. Par semblable argument sera prouvé que le triangle GZH est equilateral, comme aussi les 4 autres triangles HZI , IZK , KXF , FZG , (desquels toutesfois nous n'avons aussi tiré les lignes, afin d'eviter confusion) tous lesquels seront egaux tant entr'eux qu'aux 15 precedans. Veu donc que tous ces 20 triangles sont equilateraux, & egaux, & qu'ils se conjoignent les uns aux autres par lignes droites; sera constitué d'iceux un Icosaedre: lequel ie dis être inscriptible en la sphere donnée, de laquelle le diametre est AB . Car ayant coupé en deux également EQ en a , & tiré les lignes aF , aX , aV ; les côtez aQ , QV du triangle aQV seront egaux aux côtez aQ , QX du triangle aQX , (car QV , QX , sont semydiametres du cercle $RSTVX$) & les angles aQV , aQX sont droits: & partant par la 4. pr. 1. les bases aV , aX seront egales. Par la même raison, si on tire des lignes de a & Q à R, S, T , les lignes aR , aS , aT seront démontrées egales entr'elles, & à icel-

les aV , aX . Et puis que les côtez aQ , QX du triangle aQX sont égaux aux côtez aE , EF du triangle aEF , (pource que QX , EF sont demy diametres de cercles égaux, & EQ est coupée en deux également en a) & les angles aQX , aEF sont aussi égaux, sçavoir droits: par la 4. prop. 1. les bases aX , aF , seront aussi égales. Par même raison, si de a & E on tire des lignes droites à G , H , I , k , on démontrera les lignes aG , aH , aI , ak , être égales à icelle aX : & partant les dix lignes droites tirées de a aux dix angles F , G , H , I , R , k , S , T , V , X , sont égales: Et d'autant que QE est semidiametre, c'est à dire côté de l'hexagone du cercle $FGHIk$, & EZ côté du decagone du même cercle; par la 9. prop. 1. QZ sera divisée en la moyenne & extreme raison en E , & le plus grand segment sera QE . Parquoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ sera quintuple du quarré de Ea . Mais le quarré de aF est aussi quintuple du même quarré de Ea : (car le quarré de EF étant quadruple du quarré de Ea par le scholie de la 4. prop. 2. pource que EF est double de Ea : les quarrés de EF , Ea , sont le quintuple du quarré de Ea . Mais par la 47. prop. 1. le quarré de aF est égal à iceux quarrés de EF , Ea : donc aussi le quarré d'icelle aF sera quintuple d'iceluy quarré de Ea .) Donc les quarrés de aZ , aF , sont égaux: & par consequent les lignes aZ , aF seront égales. Et puis que aE , aQ , & EZ , QY sont égales aussi aZ , aY seront égales: & toutes les lignes droites tirées de a , à tous les angles de l'Iscofaedre pareillement égales. Parquoy la sphere décrite à l'entour du diametre ZY , passera par tous les angles de l'Iscofaedre. Car d'autant que par la

15. prop. 5. comme aZ est à aE , ainsi YZ à QE ; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de aZ est au quarré de aE , ainsi le quarré de YZ au quarré de QE , & que le quarré de aZ a été démontré quintuple du quarré de aE pareillement le quarré de YZ sera quintuple du quarré de QE , c'est à dire du quarré de DB son égale. Mais aussi le quarré de AB est quintuple du même quarré de BD : (car AB , BD , BC étans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD , comme AB à BC par le corol. de la 20. prop. 6. & partant AB étant quintuple de BC , aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD .) Donc les quarrés de YZ , AB sont égaux: & partant les lignes YZ , AB , & les sphères décrites à l'entour d'icelles seront égales.

Je dis finalement que le côté de l'Icosaedre est ligne irrationele, apellée ligne mineure: ce qui est evident par la 11. prop. 13. étant par la 6. prop. 10. le demy diamètre EF , ou son égale BD , ligne rationele commensurable en puissance à la posée rationele AB , de laquelle nous avons montré que le quarré étoit quintuple du quarré de BD . Nous avons donc fait ce qui étoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que le quarré du diamètre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'Icosaedre.

Et aussi qu'iceluy diamètre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone décrits en un même cercle.

Et encore que le costé de l'icosaedre est égal au costé

du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy Icosaëdre.

S C H O L I E.

Le diametre AB étant 10, AC sera 8, CB 2, CD 4, AD $\sqrt{80}$, BD ou EF $\sqrt{20}$: & partant GF ou RX costé du pentagone sera $\sqrt{(50 - \sqrt{500})}$, & LG ou FL $\sqrt{5}$. Mais RL étant egale au semidiametre, ou costé de l'hexagone EF , est $\sqrt{20}$: donc RG ou RF costé de l'Icosaëdre sera $\sqrt{(50 - \sqrt{500})}$, qui partant est egal au costé du pentagone GF ou RX , & par consequent ligne mineure comme iceluy. Davantage Ea ou aQ étant moitié de EQ ou EF egale à QX sera $\sqrt{5}$, EZ ou QT $5 - \sqrt{5}$: partant ZQ ou ZT composée du costé de l'hexagone EQ , & de celui du decagone LF sera $5 + \sqrt{5}$, IZ 5, & la somme ZT 10 : Parquoy apert que le quarré du diametre de la sphere est quintuple, &c.

PROBL. 5. PROP. XVII.

Dans une sphere donnée, inscrire un dodecaëdre : Et montrer que son côté est ligne irrationele, apellée residu.

Soit le cube AB inscriptible en la sphere donnée, duquel les deux plans extérieurs AC & DB , se rencontrent à angles droits à la ligne de commune section DC : & d'iceux plans tous les côtez soient coupez en deux egaleement, sçavoir AC , par les deux lignes EF , GH se coupans au point I ; & DB , par les lignes KL & HM se coupans au point N . Item les trois lignes KN , NL , HI soient coupées

Car soient menées les lignes DO, DP, DS : & d'autant que KN est coupée en la moyenne & extreme raison au point O , & que ON est le plus grand seg-

gal par la 47. prop. 1. est triple du quarré de OR :
& partant le quarré de DR, qui est egal à tous les

deux par là 47. prop. 1. sera quadruple du seul de RO: Et d'autant que RS est double de RO, son quarré par le scholie de la 4. prop. 2. sera aussi quadruple du quarré de OR, aussi bien que le quarré DR: Partant les lignes DR, RS seront égales. Par même discours on montrera l'égalité des trois autres côtez SC, CT, TD, tant entr'eux qu'aux deux DR, RS, donc le pentagone DRSCCT est equilateral.

Je dis qu'il est aussi en un même plan. Car ayant menée NV parallele à OR, soient tirées TH, & HV, icelles deux lignes se rencontreront directement: tellement que THV sera une seule ligne droite. Car d'autant que HI est coupée en la moyenne & extreme raison au point Q; IH sera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN est égale à HI, & NV à IQ, & QT à QI: donc comme HN est à NV, ainsi QT à QH. Parquoy les triangles NVH, QTH, ont deux côtez proportionaux à deux côtez, & sont conjoints à l'angle H, tellement que les côtez homologues HN, TQ; & NV, QH, sont parallels par la 6. prop. 11. ces deux-là étans perpendiculaires au plan AC, & ces deux-cy au plan DB: Donc par la 32. prop. 6. THV sera une seule ligne droite. Or par la 1. pr. 11. toute ligne droite est en un même plan: par consequent le pentagone DRSCCT est en un même plan.

Je dis encôres qu'il est equiangle: Car puis que KN est coupée en la moyenne & extreme raison, étant ON plus grand segment, par la 5. prop. 13. en ajoutant KN à NP, égale au plus grand segment ON; la route BP sera coupée en la moyenne & extreme raison au point N, & sera KN le plus

grand segment : & partant par la 4. pr. 13. les quarrés de KP & NP (ou PS son égale) ont triples du quarré de KN, Cou de son égale KD : & en ajoutant le quarré de KD avec les deux de KP & PS : iceux trois quarrés seront quadruples du seul de KD, (ou par la 47. pr. 1. au lieu des deux de KP & KD, le seul de DP avec celui de PS, ou encore le seul de DS, sera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC est aussi quadruple par le scholie de la 4. pr. 2. étant DC double de KD : partant les deux lignes DC & DS seront égales : Mais aussi étant tous les côtes du pentagone égaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois côtes égaux aux trois côtes chacun au sien : Et par la 8. prop. 1. l'angle au point R sera égal à l'angle au point T. Et semblablement nous montrerons que l'angle RSC est égal à l'angle DTC : partant trois angles du pentagone seront égaux, & par la 7. prop. 13. il sera equiangle. Il est aussi equilateral, & fait sur DC l'un des côtes du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que si on veut construire de même façon un pentagone, sur chacun des onze côtes restans, on trouvera une figure solide environnée de douze pentagones equiangles & equilateraux, qui par les def. sera dodecaëdre.

Je dis d'avantage qu'il est inscriptible en la sphere donnée. Car si on prolonge VN, qui est perpendiculairement élevée sur le centre du quarré DB, il apert par la 39. prop. 11. qu'elle coupera la diagonale du cube en deux également : qu'elle la coupe donc au point X, auquel point sera le centre de la sphere environnant le cube par le corol. de la 35. prop. 13. & NX est égale au demy côté du cube :

Soit menée la ligne RX . Or nous avons tantost montré par la 4. pr. 13. que les quarréz de KP & NP sont triples du quarré de KN : Mais VX est egale à KP ; & RV à NP : (car NX est egale à KN , & VN à NP). Partant les deux quarréz de RV , XV , ou le seul de RX , par la 47 prop. 1. est triple du quarré de KN : Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite au cube, est triple du quarré du côté d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre est triple au quarré du demy côté. Or KN est le demy côté du cube: Partant RX sera le demy diametre de la sphere circonscrite au cube AB , duquel le centre est X : Par même discours nous montrerons que du point X , toutes les lignes menées vers les autres angles du dodecaedre, sont egales au demy diametre de la sphere circonscrite au cube. Partant une même sphere pourra être circonscrite au cube & au dodecaedre.

Je dis finalement que le côté du dodecaedre est ligne irrationele, apellée residu. Car d'autant que les deux demy côtez du cube KN , NL sont chacun coupez en la moyenne & extreme raison: par la quinzième proposition cinq toute la ligne KL sera aux deux plus grands segmens ensemble, sçavoir à OP , comme iceux plus grands segmens sont aux plus petits ensemble, sçavoir à la composée de KO & PL . Parquoy si KL côté du cube est coupée en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera OP Mais la toute KL ainsi coupée est rationele: (car son quarré est commens. au quarré du diametre de la sphere, lequel est posé rationel: puis qu'il est le tiers d'iceluy par la 15.

prop. 13.) Donc par la 6. prop. 13. le plus grand segment OP, c'est à dire RS côté du dodecaedre qui luy est egal, est ligne irrationnelle, apelée residu. Nous avons donc fait tout ce qui étoit proposé.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte que le costé d'un cube estant coupé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment sera le costé du dodecaedre inscrit en une mesme sphere.

Aussi que le costé du cube est egal à la ligne droite subtendant un angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle mesme ligne estant coupée en la moyenne & extreme raison, par la 8. prop. 13. le plus grand segment est costé d'un pentagone : & partant par la 5. prop. 13. la ligne droite composée d'icelle, c'est à dire du costé du cube, & du plus grand segment, c'est à dire du costé du dodecaedre, est semblablement divisée, & le moindre segment est costé du dodecaedre, mais le plus grand costé est du cube : Il s'en suit que si une ligne droite est coupée en la moyenne & extreme raison, & que le moindre segment soit costé du dodecaedre : le plus grand segment sera costé du cube inscrit en la mesme sphere.

S C H O L I E.

Nous avons donc trouvé à la 15. prop. que le diamètre de la sphere estant 12, le costé du cube inscriptible en icelle est $\sqrt{48}$, & partant KN moitié d'iceluy costé sera $\sqrt{12}$, & estant coupée en la moyenne & extreme raison en O, le grand segment NO sera $\sqrt{15}$ — $\sqrt{3}$, & le moindre KO $\sqrt{27}$ — $\sqrt{15}$, tellement que

leurs trois quarréz seront $12 + 1 = \sqrt{13}$, & $42 - \sqrt{1620}$. Mais d'autant que le quarré de DO est égal aux deux quarréz de KO, DK, iceluy quarré de DO sera $54 - \sqrt{1620}$; & ajoutant à iceuy le quarré de OK, c'est aire de ON, viendront $72 - \sqrt{2880}$ pour le quarré de DK costé du dodecaedre: & partant iceluy costé sera $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, qui est residu sixième. Davantage, ajoutant à KN son grand segment ON, viendront $\sqrt{15} + \sqrt{3}$ pour la toute KP, dont le quarré est $18 + \sqrt{180}$ auquel quarré estant ajouté celui de DK, viendront $30 + \sqrt{180}$ pour le quarré de DP; & luy ajoutant le quarré de PS, qui est $18 - \sqrt{180}$, viendront 48 pour le quarré de DS subtendante de l'angle du pentagone, qui partant est $\sqrt{48}$, égal au costé du cube: lequel costé estant coupé en la moyenne & extreme raison, le moindre segment sera $\sqrt{108} - \sqrt{60}$, & le grand $\sqrt{60} - \sqrt{12}$, partant égal au costé du dodecaedre, qui estant ajouté à la subtendante DS, la composée sera $\sqrt{60} + \sqrt{12}$, qui est le double de KP. Parquoy apert que le costé d'un cercle estant coupé, &c.

PROBL. 6. PROP. XVIII.

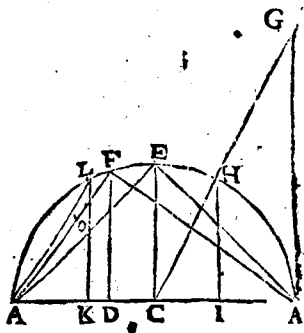
Le diametre d'une sphere étant donné; trouver les costez des cinq figures regulieres inscrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit donné AB le diametre d'une sphere: & il faut premierement trouver les côtez des cinq figures regulieres inscriptibles en icelle sphere.

Soit divisé le diametre AB en deux également

au point C, mais au point D, tellement que AD soit la tierce partie de AB : puis ayant décrit sur AB un demy cercle, soient élevées les perpendiculaires CE, DF, & tirées les lignes droites AE, AF, BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF est moyenne proportionnelle entre AB, BD, par le corol. de la 20. prop. 6. comme AB sera à BD ainsi le carré de AB au carré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere : (car par la construction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2.) Donc aussi le carré de AB est au carré de BD, en raison sesquialtere : & partant puis que par la 13. pr. 13. le carré du diamètre de la sphere est en raison sesquialtere au carré du côté du tetraedre : BF sera le côté du tetraedre inscrit en la sphere du diamètre AB.



Derechef, puis que par le même cor. de la 8. p. AE est moyenne proportionnelle entre AB, AC : & partant comme AB est à AC, ainsi le carré de AB au carré de AE par le corol. de la 20. prop. 6. & AB est double de AC, aussi le carré de AB sera double du carré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le carré du diamètre de la sphere est double du côté de l'octaedre, AE sera côté de l'octaedre inscrit en la sphere du diamètre AB.

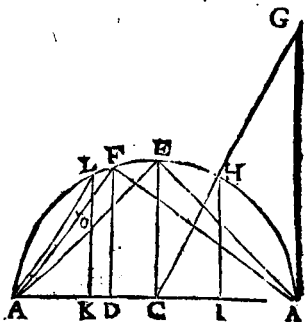
Et pour autant que par les mêmes corol. des 8. & 20. prop. 6. le quarré de AB est au quarré de AF, comme AB à AD, & que par la construction AB est triple de AD; le quarré de AB sera triple du quarré de AF. Parquoy vû que par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere est triple du quarré du côté du cube, AF sera le côté du cube inscrit en la sphere du diametre AB.

Et d'autant que AF est côté du cube, soit iceluy coupé en la moyenne & extrême raison au point O, duquel le plus grand segment soit AO: iceluy segment (par le corol. de la 17. prop. 13.) sera le côté du dodecaedre inscrit en la même sphere que le cube, qui est celle-là même qui a pour diametre AB.

Quant au côté de l'Icosaedre, soit levée la perpendiculaire BG egale à AB: & après avoir mené la ligne CG coupant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy point soit menée HI perpendicul. à AB par la 12. prop. 1. Or BG étant egale à AB, elle sera double de BC: & partant par la 4. prop. 6. HI sera double de IC: (car les triangles sont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des points B & I droits: le tiers G sera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI sera quadruple du quarré de IC: & partant le quarré de HC (ou de son egale AC) qui par la 47. prop. 1. est egal à tous les deux, sera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moitié, DC sera le demy tiers: & partant AC sera triple de DC, & son quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. proposi-

tion 6. Or iceluy quarré de AC n'est que quintuple du quarré de CI : & partant la ligne CI sera plus grande que DC. Soit donc prise CK egale à CI, & apres avoir levé la perpendiculaire KL, soit menée la ligne AL. Puis donc que le quarré de AC est quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5.

le quarré de AB, (la double de AC) sera quintuple du quarré de IK (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere circonscrite à l'Icosaedre est quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonscrivant 5 côtez de l'Icosaedre: donc IK sera semidiametre, c'est à dire côté



de l'hexagone d'iceluy cercle, lequel côté de l'hexagone avec deux fois le côté du decagone inscrit dans le même cercle, est egal au diametre de la sphere AB, par le corol. de la même 16. p. 13. Il faut donc que AK & IB lignes egales, soient deux côtés du decagone inscrit dans le même cercle, dans lequel KI est le côté de l'hexagone. Mais KI & KL sont egales: (car KL est egale à IH, pour être en même distance du centre C, laquelle étant double de CI sera egale à KI.) Partant KL sera côté de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. pr. 1. & 10. pr. 13. AL sera le côté du pentagone inscrit au même cercle. Donc il sera aussi le côté de l'Icosaedre par la

16. prop. 13. Nous avons donc trouvé les côtez des figures regulieres inſcriptibles en une même ſphere.

Maintenant pour le regard de la comparaifon d'iceux côtez trouvez. D'autant qu'il a été démontré que le quarré du diametre de la ſphere eſt ſeſquialtere au quarré du côté de la pyramide; mais double de celui du côté de l'octaedre, & triple du quarré du côté du cube: il eſt evident que le quarré du diametre de la ſphe e étant 6, celui du côté du tetraedre fera 4; celui du côté de l'octaedre 3, & celui du côté du cube 2. Partant le quarré du côté de la pyramide eſt ſeſquitie ce au quarré de l'octaedre: mais double de celui du côté du cube. Item le quarré du côté de l'octaedre eſt ſeſquialtere à celui du côté du cube. Parquoy les quarez des côtez d'icelles trois figures, & celui du diametre de la ſphere, ſont entr'eux comme nomb e à nombre: & partant par la 6. prop. 10. iceluy diametre de la ſphere, & les côtez d'icelles trois figures ſont lignes commenſurables & rationeles, pource que le diametre eſt poſé rationel. Mais les ſu'dits quarez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainſi qu'il a pert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (ſçavoir le diametre de la ſphere, le côté de la pyramide, le côté de l'octaedre, & celui du cube,) ſont incommenſurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant elles ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Et quant aux côtez de l'icoſaedre, & dodecaedre: pource qu'ils ſont lignes irrationeles, il eſt evident qu'ils ſont incommenſurables, tant entr'eux, qu'au

diametre de la sphere, & aux côtez des autres figures.

Or lesquels d'iceux côtez sont les plus grands, nous le rendrons manifeste ainsi : d'autant qu'il a été démontré cy-dessus que le quarré de AB est triple du quarré de AF : mais quintuple du quarré de KI, c'est à dire de KL son egale, trois quarez de AF seront egaux à 5 quarez de KL. Et puis que AF est coupé en la moyenne & extrême raison en O, & AO est le plus grand segment, il est evident par la 1. pr. 6. que le rectangle compris de AF, AO sera plus grand que le rectangle de AF, OF : & partant iceux deux rectangles ensemble, seront plus grands que le double du rectangle de AF, OF : Mais à iceux deux rectangles ensemble, est egal le quarré de AF par la 2. p. 2 & au double du rectangle de AF, OF, est egal le double du quarré de AO : (car par la 17. p. 6. le simple rectangle de AF, OF est egal au simple quarré de AO.) Donc aussi le quarré de AF sera plus grand que deux fois le quarré de AO : & par consequent trois quarez de AF, ou cinq quarez de KL leurs egaux, seront aussi plus grands que 6 quarez de AO. Parquoy un seul quarré de KL sera plus grand qu'un seul quarré de AO : & par consequent la ligne KL sera plus grande que AO : Partant AL, qui est plus grande qu'icelle KL, sera beaucoup plus grande que la même AO, côté du dodecadre. Nous avons donc fait ce qui étoit proposé.

S C H O L I E.

Or outre les cinq figures solides cy-dessus declarées, on n'en peut pas trouver d'autres comprises de superficies planes equiangles, & equilaterales. Car de deux

triangles, ou de deux autres superficies planes, on ne comprendra aucun solide, ne pouvant iceux constituer un angle solide. De trois triangles equilateraux, est constitué l'angle de la pyramide de quatre, l'angle de l'octaèdre : de cinq, l'angle de l'icosaedre : de six triangles equilateraux on ne constituera aucun angle solide, car iceux sont egaux à quatre angles droits, & tous les angles plans d'un angle solide, doivent estre plus petits que quatre angles droits par la 21. propos. 11. Par mesme raison on ne pourra constituer un angle solide de plus de six angles plans. De trois angles droits est composé l'angle solide du cube : de quatre angles droits on ne fera aucun angle solide : car ce seroit toujours contrevenir à la 21. prop. 11. L'angle solide du dodecaedre est compris de trois pentagones equiangles : De quatre pentagones il sera impossible, estans iceux plus grands que quatre droits, puis que chacun vaut les six quints d'un droit par le corol. de la 11. prop. 4. Et de pas un autre polygone equiangle, on ne pourra constituer aucun angle solide, d'autant qu'il s'ensuivroit toujours la même absurdité. Partant il est evident qu'outre les cinq figures regulieres cy-dessus declarées, on n'en trouvera point d'autres equilateres & equiangles.

Quant à l'aplication des nombres aux lignes de la demonstration cy-dessus, le diametre AB estant 6, AC sera 3, AD 2, & DC 1, DB 4 : Mais DF sera $\sqrt{8}$, BF costé de la pyramide $\sqrt{24}$, AE costé de l'octaèdre $\sqrt{18}$, AF cor. du cube $\sqrt{12}$, AO costé du dodecaedre $\sqrt{15} - \sqrt{3}$, CG $\sqrt{45}$ CI ou CK $\sqrt{1\frac{1}{2}}$, HI ou IK ou KL $\sqrt{7\frac{1}{2}}$ IB ou AK $3 - \sqrt{1\frac{1}{2}}$, & partant AL costé de l'icosaedre sera $\sqrt{18 - \sqrt{64\frac{1}{2}}}$.

Reste à remarquer icy certaines regles colligées des choses

choses démontrées en ce 13. livre, au moyen desquelles il sera fort aisé de connoître les costez des cinq corps réguliers inscriptibles en une sphere, dont le diametre sera connu: Et au contraire estant connu le costé de quelconque desdits cinq corps, connoître le diametre de la sphere, & conséquemment aussi tous les costez des autres corps.

1. Le quarré du diametre de la sphere est au quarré du côté du tetraedre, comme 3 à 2; de l'octaedre, comme 2 à 1; & du cube, comme 3 à 1.

2. Le quarré du côté du tetraedre est au quarré du côté de l'octaedre, comme 4 à 3, & du cube, comme 2 à 1.

3. Le quarré du côté de l'octaedre est au quarré du côté du cube, comme 3 à 2.

4. Mais le diametre de la sphere étant rationnel, le quarré du côté de l'Icosaedre est est residu quatriéme, duquel le grand nom est la moitié du quarré dudit diametre, (ou le double du quarré du semidiam.) & le moindre nom est $\sqrt{\frac{8}{5}}$ du quarré dudit diametre: (ou $\sqrt{\frac{4}{5}}$ du quarré du semidiam.)

5. Et le côté du dodecaedre est residu sixième, duquel le grand nom est $\sqrt{\frac{3}{2}}$ du semidiam (ou $\sqrt{\frac{6}{2}}$ du diam. & le petit nom est $\sqrt{\frac{1}{2}}$ du semidiam. (ou $\sqrt{\frac{1}{2}}$ du diam. c'est à dire $\sqrt{\frac{1}{2}}$ du grand nom.

Lesquelles Regles seront d'autant plus intelligibles par les exemples, ou propositions suivantes.

1. Qu'il faille connoître les costez des cinq corps inscriptibles en une sphere, dont le diametre est 8.

Premierement, je quarré ledit diametre 8. & viennent 64, dont je prends les $\frac{2}{3}$, & viennent 42 $\frac{2}{3}$ pour le quarré du costé du tetraedre ou pyramide équilatérale: & partant iceluy costé est $\sqrt{42 \frac{2}{3}}$.

Secondement, du mesme quarré 64, je prends la moitié, pour avoir le costé de l'octaëdre : & partant iceluy costé est $\sqrt{32}$.

Tiercement, du même quarré 64, je prends le tiers pour le quarré du costé du cube, qui partant est $\sqrt{21\frac{1}{3}}$.

Quartement, du même quarré 64, je prends la moitié 32 pour le grand nom du residu de l'Icosaëdre; puis je quarré le dit quarré 64, & viennent 4096, que je divise par 20, & preposant le signe $\sqrt{}$ au quotient, il sera $\sqrt{204\frac{4}{5}}$, qui est le petit nom dudit residu : Parquoy le quarré du costé de l'Icosaëdre sera $32 - \sqrt{204\frac{4}{5}}$, & partant iceluy costé est $\sqrt{32 - \sqrt{204\frac{4}{5}}}$.

Finalement, je divise le mesme quarré 64 par 12, & viennent $5\frac{1}{3}$, & le quintuple $26\frac{2}{3}$, à chacun desquels deux nombres je prepose le signe $\sqrt{}$ pour avoir les deux noms du costé du dodecaëdre, qui partant sera $\sqrt{26\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$.

2. Le côté du dodecaëdre inscriptible en une sphere étant $\sqrt{20} - 2$: connoître tant le diametre d'icelle sphere, que les côtez des autres corps reguliers.

Premierement, je multiplie le moindre nom 2 par $\sqrt{3}$, & viennent $\sqrt{12}$, pour le semidiametre de la sphere : & partant tout le diametre sera $\sqrt{48}$.

Secondement, je prends les $\frac{2}{3}$ du quarré du diametre trouvé, & viennent 32 pour le quarré du costé de la pyramide, qui partant est $\sqrt{32}$.

Tiercement, du mesme quarré 48, je prends la moitié, qui est le quarré du costé de l'octaëdre, qui partant est $\sqrt{24}$.

Quartement, du même quarré 48, je prends le tiers pour avoir le quarré du côté du cube, & partant iceluy côté sera 4.

Finalemēt la moitié du m^eme quarré 48, sera le grand nom du quarré du costé de l'Icosaedre : & pour avoir le petit nom, je quarré ledit quarré 48, & viennent 2304, que je divise par 20, & preposant le signe radical $\sqrt{}$ au quotient, il sera $\sqrt{115\frac{1}{5}}$ Parquoy le quarré du costé de l'Icosaedre requis sera $24 - \sqrt{115\frac{1}{5}}$: & partant iceluy costé sera $\sqrt{24 - \sqrt{115\frac{1}{5}}}$.

Or quant aux perpendiculaires, ou hauteurs d'iceux corps, ensemble leurs superficies, & contenus solides, nous en avons traité amplement aux annotations faites sur la Geometrie d'Errard, où les curieux & amateurs de telles suputations pourront avoir recours, s'ils ne se contentent de ce que nous en dirons au livre suivant.

Fin du treizième Element.





ELEMENT QUATORZIE'ME,

Qu'aucuns attribuent à Hypsicle Alexandrin.

THEOR. I. PROP. I.



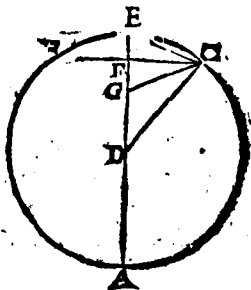
Une ligne droite perpendiculaire menée du centre au costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

Soit le cercle ABC, dont le centre est D, & BC le costé du pentagone inscrit en iceluy cercle; mais du centre D soit menée la ligne DF, perpendiculaire à iceluy costé BC, & icelle étant prolongée de part & d'autre jusques en A & E pour parfaite le diamètre AE, elle coupera en deux également, tant la ligne droite BC, que l'arc BEC, ainsi qu'il est evident par les 3. & 28. pr. 3. Parquoy étant tirée la ligne droite EC, elle fera le costé du decagone, & DE le costé de l'hexagone. Je dis que la perpen-

diculaire DF est la moitié des deux côtez ensemble EC & DE.

Car apres avoir pris FG egale à FE, soit menée la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquième partie de la circonference du cercle, EC sa moitié fera la cinquième partie de la demy circonference ACE : Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. propof. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20 pr.

3. lequel par ce moyen sera double de CDE : mais par la 4. p. 1. la base CE est egale à la base CG : & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux : donc FGC sera aussi double de



GDC : Mais iceluy FGC étant par la 31. prop. 1. egal à tous les deux GDC, GCD opposez interieurement dans iceux deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux : & par la 6. p. 1. GC & GD seront egales ; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE étans egales, la seule FD sera egale aux deux FE, EC ensemble : & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC seront egales au double de la seule DF : & par consequent icelle DF perpendiculairement tirée du centre sur le côté du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, côtez de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la ligne droite perpend. &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Il est donc manifeste que la perpendiculaire menée du centre au costé du pentagone est égale à la perpendiculaire tirée dudit centre au costé du triangle équilatéral. & à la moitié du costé du decagone inscrit au même cercle, puis que par le corol. de la 12. prop. 13. ladite perpendiculaire menée au costé du triangle équilatéral est moitié du costé de l'hexagone.

SCHOLIE.

Le semidiаметre DC étant 4, nous avons trouvé au Scholie de la 10. pr. 13. que le costé du pentagone BC sera $\sqrt{40 - \sqrt{20}}$, & le costé du decagone EC $\sqrt{20 - 2}$: Parquoy le quarré de FC moitié dudit costé BC sera $10 - \sqrt{20}$, qui ôté du quarré de DC, c'est à dire de 16, resteront $6 + \sqrt{20}$ pour le quarré de DF : & partant icelle DF est $\sqrt{6 + \sqrt{20}}$. Mais le semidiám. DC, qui est 4, étant ajouté avec le costé du decagone EC $\sqrt{20 - 2}$, fait $\sqrt{20 + 2}$, dont la moitié $\sqrt{5 + 1}$ est égal à $\sqrt{6 + \sqrt{20}}$: car le quarré de l'un & l'autre est $6 + \sqrt{20}$: partant apert ce qui estoit proposé.

THEOR. 2. PROP. II.

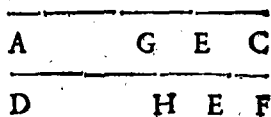
S'il y a deux lignes droites coupées en la moyenne & extreme raison; elles seront semblablement coupées.

Soient deux lignes droites AB & DE coupées en la moyenne & extreme raison aux points G & H: & leurs plus grands segmens soient AG & DH.

Je dis qu'icelles lignes sont semblablement coupées: c'est à dire que comme AB est à DE , ainsi AG à DH , & GB à HE : Item comme AG à GB , ainsi DH à HE , &c.

Car par la 17. proposition du 6. le rectangle de AB , & GB , est égal au quarré de AG : & le rectangle de DE & HE égal au quarré de DH : & partant comme le rectangle de AB ; GB fera au quarré de AG , ainsi le rectangle

de DE . HE fera au quarré de DH : (y ayant raison d'égalité de part & d'autre) & par le 3. theor. du Scholie de la



22. p. 5. quatre fois le rectangle de AB & GB fera au quarré de AG , comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH : & en composant [apres avoir ajouté directement BC égale à BG ; & EF égale à EH] quatre fois le rectangle de AB & GB avec le quarré de AG , [ou par la 8. pr. 2. le seul quarré de AC] est au quarré de AG , comme quatre fois le rectangle de DE & HE , avec le quarré de DH , [ou le seul quarré de DF] est au quarré de DH . Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG , ainsi DF à DH : Et en composant, comme la composée de AC , AG , c'est à dire la double de AB , est à AG , ainsi la composée de DF , DH , c'est à dire la double de DE , est à DH : & en permutant, comme la double de AB est à la double de DE , ainsi AG à DH : Et par la 15. proposition 5. comme la double de AB est à la double de DE , ainsi AB à DE . Donc comme AB fera à DE , ainsi AG à DH : & partant par la 19. proposition 5. ainsi

sera aussi le reste GB au reste HE. Parquoy comme AG à DH, ainsi sera GB à HE, puis que l'une & l'autre raison est comme AB à DE : & en permutant, comme AG sera à GB, ainsi DH sera à HE : & ainsi selon toutes les autres manieres d'argumenter es proportions, on démontrera toutes lignes & les parties d'icelles être proportionnelles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

La ligne droite AB estant 4, le grand segment AG sera $\sqrt{20} - 2$, & le petit GB 6 — $\sqrt{20}$. Mais DE estant 2, le grand segment DH sera $\sqrt{5} - 1$, & le petit HE 3 — $\sqrt{5}$. Or le produit de AE 4. en DH $\sqrt{5} - 1$ est $\sqrt{80} - 4$, & le produit de DE 2 en AG $\sqrt{20} - 2$ est aussi $\sqrt{80} - 4$: & partant comme AB à DE, ainsi AG à DH. Le produit de AB 4 en HE 3 — $\sqrt{5}$ est 12 — $\sqrt{80}$: & le produit de DE 2 en GB 6 — $\sqrt{20}$ est aussi 12 — $\sqrt{80}$: partant comme AB à DE, ainsi GB à HE. Le produit de AG $\sqrt{20} - 2$ en HE 3 — $\sqrt{5}$ est $\sqrt{320} - 16$, & le produit de GB 6 — $\sqrt{20}$ en DH $\sqrt{5} - 1$ est pareillement $\sqrt{320} - 16$: Parquoy est manifeste ce qui estoit proposé.

Or de cecy apert qu'estant connus une ligne droite, il est fort aisé de connoître combien seront les segmens d'icelle coupée en la moyenne & extreme raison, par le moyen de quelqu'autre ligne dont les segmens seront connus : Et pour tant plus en faciliter la pratique nous avons expressément adapté de petits nombres à la ligne DE : tellement que si on veut, par exemple, connoître les segmens

d'une autre ligne de 10. pieds. il faut dire par regle de trois ; Si 2. donnent $\sqrt{5} - 1$. que donneront 10 ? & faisant la regle. on trouvera $\sqrt{125} - 5$ pour le grand segment, qui osté de la toute 10. resteront $15 - \sqrt{125}$ pour le moindre segment.

Aussi l'un ou l'autre des segmens étant connu, on connoistra par la mesme methode tant l'autre segment que la toute : Parquoy estant connu le costé du pentagone on peut connoistre le diametre du cercle circonscrivant iceluy : car puis que par la 8. prop. 13. la subtendante de l'angle d'un pentagone estant coupée en la moyenne & extreme raison le grand segment est egal au costé dudit pentagone, on connoistra le petit segment ou reste de ladite subtendante, ainsi qu'il est dit cy-dessus ; & le quarré de la moitié d'icelle subtendante estant osté du quarré du costé du pentagone restera le quarré d'une ligne par laquelle estant divisé le quarré de la moitié de la subtendante on aura le diametre du cercle. ainsi qu'il apert des choses demontrées à la 11. prop. 13. Lequel diametre on obtiendra encore par la regle de proportion ; d'autant que nous avons demontré sur le 8. chap. du 2. livre de la Geometrie d'Errard que la raison du semidiametre du cercle au costé du pentagone inscrit en iceluy est comme de 2 à $\sqrt{10 - \sqrt{20}}$: parquoy voulant connoistre le diametre d'un cercle dont le costé du pentagone est $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$, je diray, si $\sqrt{10 - \sqrt{20}}$ donnent 2. que donneront $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$? & ayant fait la regle ainsi qu'il appartient. le 4. nombre proport. sera 4, dont le double 8 est le diametre requis.

Le mesme se doit entendre de tout autre polygone dont la raison du semidiametre au costé sera connue : Et pour ce sujet nous remarquerons icy que le semidia-

encore du cercle étant 2, le costé du triangle inscrit en iceluy sera $\sqrt{12}$: celuy du quarré $\sqrt{8}$: celuy du pentagone $\sqrt{10 - \sqrt{20}}$: celuy de l'octogone $\sqrt{8 - \sqrt{32}}$: celuy du decagone $\sqrt{5 - 1}$: & celuy du dodecagone $\sqrt{6 - \sqrt{2}}$.

THEOR. 3. PROP. III.

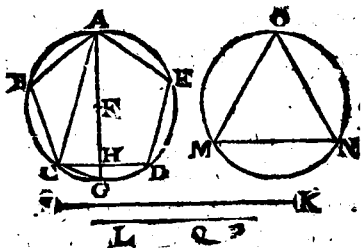
Vn même cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre inscrits en une même sphere.

Auparavant que d'expliquer cette prop. il convient demontrer que le quarré du côté du pentagone, avec le quarré de la ligne qui soutient un angle d'iceluy, est quintuple du quarré du demy diametre du cercle dans lequel est inscrit iceluy pentagone.

Soit un cercle ABCDE, le côté du pentagone inscrit en iceluy cercle CD, la ligne qui soutient un angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel coupe en deux également, tant l'arc CGD, que le côté CD, par le corol. de la 10. prop. 13. Je dis

que les deux quarréz de CA & CD sont ensemble quintuples du quarré de FG.

Car si on mene CG, ce sera le côté du decagone: & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de



AG, sera quadruple du carré du demy diamètre FG; & par conséquent les deux de AC, CG, qui par la 47. prop. 1. sont égaux au carré de AG, seront aussi quadruple d'iceluy carré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, seront ensemble quintuple du seul de GF: Mais les deux de CG & GF, costez de l'hexagone & decagone sont ensemble égaux au carré de CD côté du pentagone, par la 10. prop. 13. partant les deux carrés de AC & CD sont quintuples du carré de GF. Ce qui estoit proposé.

Pour la proposition. Soit IK le diamètre de la sphere comprenant le dodecaedre & l'Icosaedre: & d'iceluy dodecaedre soit un pentagone ABCDE, & de l'Icosaedre soit le triangle equilateral LMN: je dis qu'un même cercle circonserit le pentagone ABCDE, le triangle LMN: c'est à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonserivent sont égaux.

Car étant tirée AC subtendante de l'angle du pentagone B, ce sera le côté du cube inscrit en la même sphere, par le corol. de la 17. prop. 13, & soit exposée la ligne droite OP, telle que le carré de IK diamètre de la sphere, soit quintuple du carré d'icelle OP: laquelle OP sera egal au demy diamètre du cercle, dans lequel on construit l'Icosaedre par le corol. de la 16. prop. 13. soit icelle OP coupée en la moyenne & extreme raison en Q; & le plus grand segment OQ sera côté du decagone inscrit au même cercle, dont OP est le côté de l'hexagone ou semidiámetro, par le corol. de la 9. prop. 13. Mais par la 7. prop. 13. lors que CA est divisée en la moyenne & extreme raison, son plus

grand segment est AB : Donc par la 2. proposition 14. comme la toute AC sera à la toute OP, ainsi le plus grand segment AB sera au plus grand segment OQ : partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AC sera au quarré de OP, ainsi le quarré de AB sera au quarré de OQ ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC est au quintuple du quarré de OP, ainsi le triple du quarré de AB est au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC est égal au quintuple du quarré de OP : (pource que le quarré de IK diametre de la sphere, est égal, tant au triple du quarré de AC côté du cube par la 15. prop. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypothese.) Donc aussi le triple du quarré de AB sera égal au quintuple du quarré de OQ. Or par le coroll. de la 16. pr. 13. ML côté du triangle de l'icosaedre, est égal au côté du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demy diametre : & partant puis que par la 10. prop. 13. le quarré d'iceluy côté est égal aux deux quarrés de OP, & OQ, côtez de l'hexagone & du decagone, cinq quarrés de ML seront egaux à cinq quarrés de OP, & à cinq de OQ : ou à trois de BA, & à trois de AC. Parquoy les deux quarrés de BA, & AC estans quintuples du quarré du demy diametre FA, (comme nous avons démontré au commencement de cette proposition) trois quarrés de AB, & AC seront egaux à quinze quarrés du demy diametre FA. Mais cinq quarrés de ML, côté du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarrés du demy diametre du cercle LMN : (car chacun quarré de ML est triple du quarré du demy diametre, par la 12. proposition du 13.) Donc les

trois de BA & AC étans égaux au cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront égaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN : Partant un quarré d'iceux sera egal à un quarré, & le demi-diametre au demi-diametre, & par consequent les cercles AB C D E, LMN seront égaux. Donc un mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Il apert par ce que nous avons dit à la fin du livre precedent, que le diametre de la sphere IK estant 8, AB costé du dodecaedre sera $\sqrt{26\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$. & LM costé de l'Icosaedre $\sqrt{[32 - \sqrt{204\frac{4}{3}}]}$ Mais par ce qui a esté enseigné au Scholie preced. le semi-diam. du cercle circonscrivant un pentagone dont le costé est $\sqrt{26\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$ sera trouvé de $\sqrt{[10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{3}}]}$: & celui du cercle circonscrivant un triangle equilateral, dont le costé est $\sqrt{[32 - \sqrt{204\frac{4}{3}}]}$ sera aussi trouvé de $\sqrt{[10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{3}}]}$, soit qu'on procede par la mesme methode du Scholie preced. ou bien qu'on prenne le tiers du quarré dudit costé : car par la 12. pr. 13. iceluy tiers sera le quarré du semi-diametre requis : Parquoy apert ce qui estoit proposé.

T H E O R. 4. P R O P. IV.

● du centre du cercle circonscrivant le pentagone du dodecaedre, on mene une ligne droite perpendiculaire sur un costé d'iceluy pentagone ; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du costé du pentagone, est egal à la superficie du dodecaedre.

Soit le cercle $ABCDE$ circonscrivant un pentagone du dodécaèdre, & le centre d'iceluy cercle soit F , duquel soit tirée FG perpendiculairement sur le costé CD . Je dis que trente fois le rectangle compris de FG & CD , est egal à la superficie du dodécaèdre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE :

il est evi-

dent par la

41. prop. 1.

que le re-

ctangle

compris

de FG, CD ,

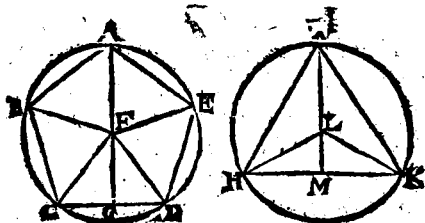
est double

du triangle

CFD . Or

en la superficie du dodécaèdre il y a douze pentagones egaux, & chaque pentagone à cinq pareils triangles que CFD , qui sont en tout soixante triangles, desquels soixante rectangles, seroient le double: Donc trente rectangles FG & CD , leur seront egaux.

Nous démontrerons semblablement, que si un triangle equilateral, comme HIK , est inscrit en un cercle, du centre duquel L , on tire sur le costé HK la perpendiculaire LM : trente fois le rectangle de LM & HK , seront egaux à la superficie de l'icosaedre. Car icelle superficie contient vingt triangles equilateraux semblables à HIK ; & chacun d'iceux se divise en trois autres triangles egaux entr'eux & semblables, & egaux à HLK , qui sont en tout soixante triangles comme HLK : mais le rectangle



de la perpendiculaire LM & du costé HK, est double du triangle HLK par la 41. p. 1. Et par conséquent soixante rectangles seroient doubles de 60 triangles : Donc trente rectangles de LM & HK seront egaux à la superficie totale de l'icosaedre.

C O R O L L A I R E.

De cecy resulte, par la 15. prop. 5. que comme un seul rectangle de FG & CD, est à un seul rectangle de LM & HK, ainsi la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre.

S C H O L I E.

Nous avons trouvé cy-devant que le diametre de la sphere estant 8, CD costé du dodecaedre sera $\sqrt{26\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}}$, HK costé de l'Icosaedre $\sqrt{[32 - \sqrt{204\frac{4}{3}}]}$, & le semidiametre CF ou LH $\sqrt{[10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{5}}]}$: Parquoy le quarré de CG sera $8 - \sqrt{3\frac{5}{9}}$, qui osté de $10\frac{2}{3} - \sqrt{22\frac{34}{5}}$ quarré du semidiametre CF, resteront $2\frac{2}{3} + \sqrt{1\frac{19}{45}}$ pour le quarré de la perpendic. FG, qui partant est $\sqrt{(2\frac{2}{3} + \sqrt{1\frac{19}{45}})}$, & le produit d'icelle perpendiculaire par le costé CD sera $\sqrt{[56\frac{8}{9} - \sqrt{647\frac{109}{27}}]}$, lequel produit multiplié par 30, donne $\sqrt{(51200 - \sqrt{524288000})}$ pour la superficie de tout le dodecaedre. Mais le quarré de HM sera $8 - \sqrt{12\frac{4}{3}}$, qui osté du quarré de LH, resteront $2\frac{2}{3} - \sqrt{1\frac{19}{45}}$ pour le quarré de la perpendiculaire LM, qui partant est $\sqrt{(2\frac{2}{3} - \sqrt{1\frac{19}{45}})}$, le produit de laquelle perpendic. par le costé HK sera $\sqrt{(102\frac{2}{3} - \sqrt{5825\frac{19}{3}})}$, & trente fois ce produit donne $\sqrt{(92160 - \sqrt{4718592000})}$ pour la superficie de l'Icosaedre.

Or en la mesme maniere que dessus on peut aussi trouver la superficie des trois autres corps reguliers, c'est à sçavoir du tetraedre, de l'octaedre & du cube: Car si du centre du cercle qui circonscrit le triangle du tetraedre ou de l'octaedre, on le quarre du cube, est tirée une perpendiculaire à un costé d'iceux; au tetraedre six fois le rectangle compris sous icelle perpendic. & le costé sera egal à la superficie dudit tetraedre: Mais à l'octaedre, & au cube, douze fois ledit rectangle compris sous la perpendic. & le costé sera egal à la superficie de l'octaedre, & aussi egal à la superficie du cube. Car si du centre du cercle circonscrivant le triangle du tetraedre, ou de l'octaedre, on tire des lignes droites à chaque angle dudit triangle ainsi que dessus, on le divisera en trois triangles semblables & egaux entr'eux, & par consequent il y aura 12 tels triangles en toute la superficie dudit tetraedre, & 24 en celle de l'octaedre: Mais le rectangle compris sous la base & la perpendic. est double de chacun desdits triangles par la 41. p. 1. & partant ledit rectangle pris six fois sera egal à la superficie dudit tetraedre; & pris douze fois, il sera egal à la superficie dudit octaedre. Mais ayant mené du centre du cercle circonscrivant le quarre du cube des lignes droites à chaque angles d'iceluy quarre il sera divisé en quatre triangles egaux & semblables; & par consequent il y en'aura 24 en toute la superficie du cube, lesquels sont egaux à 12 rectangles compris sous le costé & la perpendiculaire, ainsi que nous avons démontré plus au long sur le 4. chap. du 3. livre de la Geometrie d'Errard.

THEOR.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, jusques à ce que le tout composé soit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira un nombre parfait.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raison double, la somme desquels & de l'unité soit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D fasse FG: Je dis que le produit FG est nombre parfait.

Car ayant pris HI double de E; K double de HI; & L double de K, & ainsi de suite tant qu'il y aura de nombres proposez: iceux nombres E, HI, KL, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D; & partant en raison égale, A sera à D comme E à L; & par la 19. prop. 7. le produit de A multiplié

Unité.

A . . . 2

B 4

C 8

D 16

E 31

H 31 M 31 I

K 124

L 248

F 31 N 465 G

O-- P--

par L, sera égal au produit de D par E, sçavoir FG: mais A étant binaire, FG sera double de L; ainsi E, HI, K, L, FG, seront continuellement proportionnaux en raison double. Maintenant de HI second soit retranché HM égal à E premier; & de FG dernier, soit retranché FN, aussi égal à E premier: par la prec. prop. comme MI est égal à E, (d'autant que HI étoit double de E) ainsi NG sera égal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN égal à E, est aussi égal à l'unité & à A, B, C, D ensemble. Et par conséquent FG sera égal à l'unité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble:

L I

& puis que FG a été fait de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG; & partant par la 11. com. sent. l'unité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. prop. 9. mesurent D, mesureront le même FG. De-rechef puis que L mesure FG; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double: mesureront le même FG: ainsi l'unité & tous les nombres A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG, lequel ne peut être mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, comme nous montrerons incontinent: & partant par la 22. def. du 7. il sera nombre parfait, étant égal à toutes ses parties aliquottes.

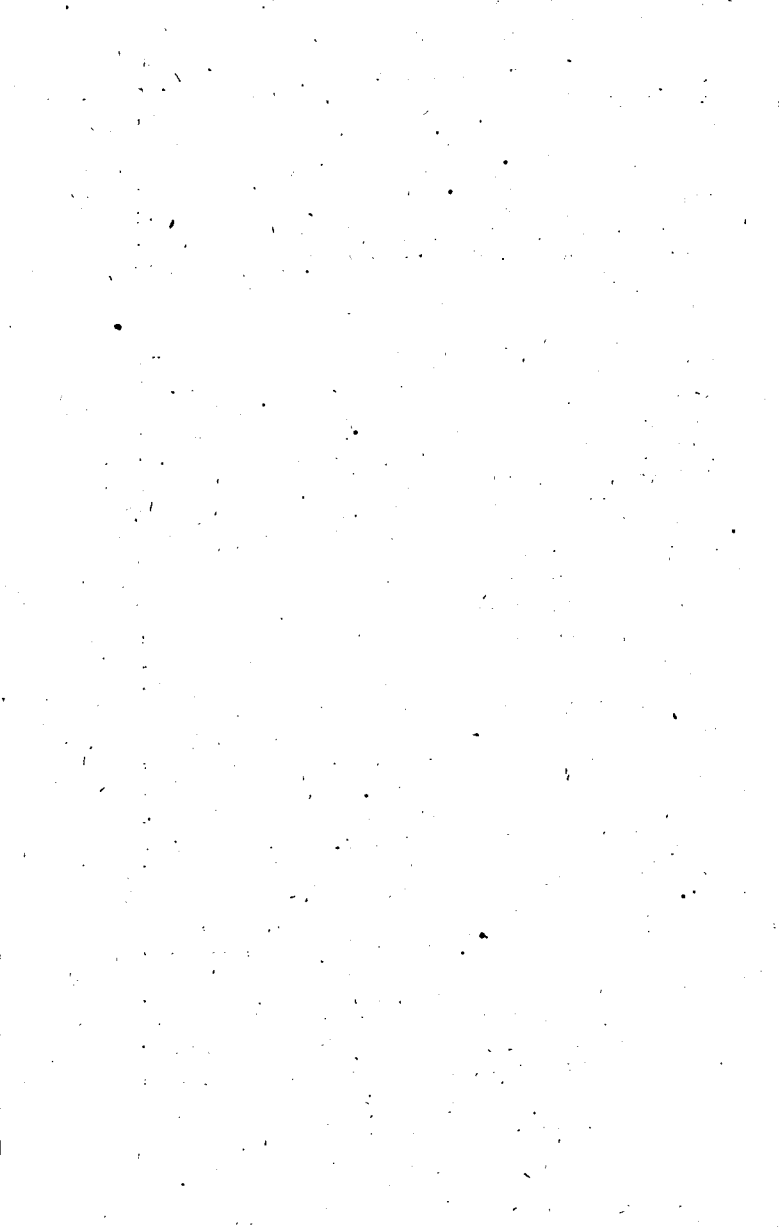
Que si on pense que FG puisse être mesuré par quelque autre nombre que les susdits; que O le mesure, s'il est possible, selon P: donc O multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le même FG est aussi produit de E en D. Donc un même nombre est fait de E premier par D 4^e, & de P second en O 3^e, & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionnaux depuis l'unité, & que A proche de l'unité est premier, par la 13. prop. 9. nul autre nombre que A, B, C mesurera le dernier D: & O est posé n'être le même qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi étoit E à P: Donc aussi E ne mesurera P: & puis que E est premier par la 31. prop. 7. E & P seront premiers entr'eux: & partant les moindres en leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C mesure iceluy D. Donc P sera le même que l'un d'iceux A, B, C. Soit donc le même que B: & d'autant que B, C, D, & E, HI, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison égale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. prop. 7. le produit de B par K, sera égal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est égal à celui de P en O. Donc un même nombre sera fait de P en O, que de B en K; & partant par la 19. prop. 7. comme P sera à B, ainsi K à O. Mais P étoit le même que B: Donc aussi K sera le même que O: Ce qui est

absurde, car O a été posé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui mesurent FG, & lequel ils composent. Iceluy est donc nombre parfait. Parquoy si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Il appert de ce Theor. que pour trouver des nombres parfaits, & leurs parties aliquottes, il faut poser d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles depuis l'unité, puis adjoûter tous ces nombres-là ensemble, & si la somme d'iceux est nombre premier, icelle étant multipliée par le dernier nombre, le produit sera nombre parfait. Mais si la susdite somme n'est nombre premier, il faudra poursuivre la position des nombres doubles jusques à ce que ladite somme de tous les nombres posez vienne à être nombre premier, laquelle étant, comme dit est cy-dessus, multipliée par le dernier des nombres doubles sera procréé un nombre parfait. Et si on prend autant de nombres continuellement doubles du susdit nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura posé depuis l'unité, (icelle excluse) tous ces nombres avec ladite unité, seront les parties aliquottes que peut avoir le nombre parfait trouvé. Ce qui est évident par la démonstration de cette prop. & néanmoins nous joindrons encore icy quelques exemples. Ayant posé 1 & 2, leur somme 3 est nombre premier, lequel étant multiplié par 2, produit 6, nombre parfait, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, sont ensemble 7, nombre premier: parquoy iceluy étant multiplié par le dernier nombre 4, le produit 28 est nombre parfait, & les parties aliquottes d'iceluy sont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la somme de ces nombres 1, 2, 4, 8, sçavoir 15, n'est pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme 31, est un nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produit le nombre parfait 496, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neuvième Element.



COMMENTAIRE
OU PREFACE
DE MARIN PHILOSOPHE,
sur le Livre des DONNEZ
d'Euclide.



Remierement, il nous faut mettre comme fondement que c'est qu'on appelle **DONNE'** : en apres remarquer l'utilité d'iceluy, & en troisiéme lieu à quelle science appartient ce Traité.

DONNE' doncques se desinit en plusieurs manieres ; car les Anciens l'ont desini d'une façon, & les modernes d'une autre ; dont s'ensuit qu'il semble mal-aisé d'en pouvoir donner la vraye explication. Car quelques-uns n'ont point baillé de definition de **Donné**, mais ils ont avec beaucoup de travail recherché certaines proprietéz d'iceluy, & quelques autres rassemblans & meslangeans ce qui en avoit esté dit auparavant par les autres ont essayé de desinir **DONNE'** : mais non pas de telle façon qu'ils ne se soient contrariéz eux-mesmes, quoy qu'il semble que tous fondez sur une mesme notion & supposition en ayent dit quelque chose : car tous ont estimé que le **Donné** estoit quelque chose comprise ; & partant entre ceux qui ont tasché de le décrire plus simplement & avec quelque simple difference, les uns ont creu que **Donné** estoit ce qui est **Ordonné**, ainsi qu'**Apollonius** en son Traité des Inclinations, & en son Traité Vniuersel : & les autres, comme **Diodore**, ce qui est **Conneu** : car en cette signification il prend la ligne droite, & les angles estre donnez, & tout ce qui peut venir à nostre connoissance, encore qu'on ne le puisse pas bien ex-

primer : Mais les autres ont creu que c'estoit mesme ce qui est Effable ; comme semble avoir voulu Ptolomée , lequel appelle Donnez toutes les choses dont la mesure est connue , soit precisément ou à peu près. Quelques autres aussi ont pensé que Donné estoit ce qui nous est concedé en l'hypothese par le proposant , veu qu'aux premiers Elemens ils prennent autrement un point donné qu'une ligne droite donnée , c'est-à-dire que qui donneroit & determineroit la quantité d'une ligne droite : toutes lesquelles choses veulent signifier quelque Comprehension. Et partant de toutes ces definitions , celles-là agréent le plus ; lesquelles plus appertement declarent la Comprehension comme nous ferons voir par les choses suivantes.

Or expliquons maintenant les diverses opinions de ceux , lesquels décrivans la nature du Donné n'ont point pris une simple marque , ou unique caractère pour le definir , & les reduisons comme en un sommaire & abrégé , afin que nous puissions aisément reconnoître ou nombrer toutes leurs differences. Les uns donc ont défini Donné être ce qui est Ordonné & Porime ensemble ; & les autres , ce qui est Ordonné & Connu ensemble : & les autres , ce qui est Porime & Connu ensemble : c'est pourquoy tous semblent avoir défini en sorte qu'ils ont en égard à la Comprehension ou Sompction & Invention du Donné. Et afin que nous concevions tant mieux leur opinion , & que des dictz de plusieurs nous puissions tirer une vraye definition de ce qui est proposé , nous remarquerons en premier lieu la signification de tous les termes simples dont ils se servent , comme aussi de leurs opposez , assavoir de l'Inordonné , & de l'Inconnu , de l'Apore , & de l'Irrationel : car ces choses-là appartiennent à cette matiere Geometrique , aux choses naturelles , & aux disciplines Mathematiques.

Or on appelle Ordonné (ou réglé) cela qui garde & observe toujours ce parquoy il est dit être ordonné , soit quant à la grandeur , ou quant à l'espece , ou touchant quelque autre chose de semblable : On le definit encore ainsi : Ordonné est ce qui ne peut être fait en diverses façons , mais en une seule en quelque lieu déterminé : comme pour exemple une ligne droite menée

par deux points donnez est dite être Ordonnée, parce qu'il ne se peut faire autrement, ny en plusieurs façons : Mais un angle passant par deux points est dit Inordonné, (ou desordonné & deregé) parce qu'il est constitué en infinies & différentes façons par un grand ou un petit cercle décrit par deux points en l'infini : Et au contraire, un angle constitué par trois points est dit Ordonné ; comme aussi ces choses sont dites être Ordonnées ; constituer sur une ligne droite un triangle equilateral, car on ne le constitue point diversément, mais invariablement sur l'une & l'autre extrémité de la ligne : Et couper une ligne droite donnée selon une raison donnée, car cela ne se peut faire qu'en une partie de la bisection. Les Inordonnez, sont ceux qui se font au contraire de ceux-là ; comme construire un triangle scalene, & couper une ligne droite indefiniment. Or ce parquoy le Probleme est ordonné est proposé en la determination, attendu qu'une certaine chose pourra être Ordonnée en une certaine maniere, & Inordonnée en une autre : comme un triangle equilateral, entant qu'il est equilateral il est Ordonné ; mais quant à la grandeur il est Inordonné, car il n'est nullement déterminé.

Mais on appelle Connus, ce qui est notoire, comme clair & compris de nous : & Inconnus, ce qui n'est point connu ny compris de nous ; comme la longueur d'un chemin est dite connue quand l'on sçait combien il contient de stades : Item que les trois angles d'un triangle rectiligne sont egaux à deux droits : & pareillement que le binome est irrationnel ; telles choses sont connues, comme aussi qu'il n'y a qu'une ligne droite qui touche la ligne Spyralle d'un point donné hors d'icelle de l'une ou l'autre part : car s'il y en avoit encore une autre, deux lignes droites encerroient un espace, ce qui est impossible. Au reste les choses irrationnelles ne s'appellent point inconnues, mais celles-là seulement qui ne sont ny connues, ny comprises de nous.

Le P O R I M E (ou qui a effecton) est ce que nous pouvons faire & construire, c'est-à-dire le reduire en connoissance : On le definit encore en cette maniere, P O R I M E est ce qui peut être exhibé par demonstration, ou

qui est apparent sans demonstration; comme est decrite un cercle d'un centre & intervalle, comme aussi construire non seulement un triangle equilateral, mais aussi un Scalene: ou trouver un binome, ou trouver deux lignes droites rationnelles commensurables en puissance seulement; & autres choses que l'on connoit en infinies facons sont Porimes, comme decrive un cercle par deux points.

L'APORE (ou qui n'a effectiion) est totalement opposé au Porime, comme par exemple, la quadrature du cercle; car elle n'a pas encore esté trouuee, bien qu'il soit certain qu'elle le peut estre: toutefois le moyen & facon de la trouver n'a pas jusques à present esté comprise: Mais nous parlons icy de ce qui est déjà connu, qui s'appelle Porime principal; car ce qui n'a pas encore esté fait, & qui neanmoins est possible, est appellé Poriste (ou faisable.) Mais l'Apore, comme il a esté déjà dit, est opposé au Porime, & est ce dont la recherche n'est point encore decidee ny bien determinée.

L'EFFABLE (c'est-à-dire rationel, ou dicible & explicable) est ce dont nous pouvons dire la grandeur, l'espece, & position: Mais cette definition est un peu trop generale, car proprement & selon soy, Effable, est ce qui est connu par certaines choses, & selon une mesure donnee par position, comme d'un épan ou d'un doigt.

Ces choses donc estans ainsi expliquees, nous pouvons aisément appercevoir en quoy conviennent & different toutes les choses que nous avons dites cy-dessus: Et premierement comme s'accorde Ordonné avec Connu, & semblablement leurs opposez entr'eux; car on ne peut point dire qu'une de ces choses par contreschange soit l'autre, ny aussi que l'une n'ait pas plus d'estenduë que l'autre, quoy qu'ils s'accordent en plusieurs choses, comme decrive une ligne droite par deux points, & constituer un triangle equilateral par trois cercles. Mais quarrer un cercle, cela est bien Ordonné, mais Inconnu, neanmoins: Item qu'à un point d'une Spyralle il y ait une seule touchante, cela est bien du genre des Ordonnez, & ne se peut faire autrement, mais pour-

tant la demonstration & construction n'en est pas connue. Et derechef, la section indefinie, & la constitution du Scalene est bien Connue, mais elle n'est pas Ordonnée; tellement qu'il est manifeste qu'entre les Ordonnez, il y en a de Connus, & d'autres Inconnus: Et par le contraire, qu'entre les Connus, il y en a d'Ordonnez, & d'autres Inordonnez: Et partant ces choses se rapportent entr'elles, comme entre les animaux, celui qui a raison avec celui qui a des pieds; car ils ne s'egalent point entr'eux, ny l'un ne s'estend pas plus que l'autre.

Semblablement se comportent entr'eux l'Ordonné & l'Inordonné, au regard du Porime & de l'Aporé, vu qu'entre iceux il y a une tres-grande ressemblance, & different entr'eux en la façon susdite: Car à la verité la Spyralle est bien Ordonnee, mais elle n'estoit pas Porime devant Archimede. Et par même raison les choses qui sont inordonnees & connues par infinis moyens sont Porimes, si quelqu'un en invente leur constitution & construction. Et neanmoins elles ne sont pas encore ordonnees, comme est constituer un triangle Scalene, car il n'est pas difficile de faire connoître la constitution d'iceluy par un equilateral, voire il est tres-facile, quoy qu'il soit inordonné, & connu en infinies façons.

Et de même façon se comportent l'Ordonné & l'Inordonné avec l'Effable & l'Irrationel, car en plusieurs choses ils s'accordent entr'eux, & different neanmoins par la susdite raison, vu que ces choses-là ne s'egalent point entr'elles, ny une chose ne contient pas l'autre: Car tous les binomes, & les choses qui sont prises comme irrationnelles, sont bien ordonnees; mais elles ne sont pas pourtant effables ou dicibles & expliquables, comme ne l'est pas le diametre du quarré au regard du côté. Or des effables il y en a plusieurs inordinex, parce qu'ils sont connus diversement, & en façons indeterminées: Car on peut mesurer un triangle Scalene par une mesure proposee & definie, comme explicable, quoy qu'il soit inordonné.

Or il est aisé de voir la convenance du Connu avec le Porime, mais il est difficile d'en expliquer leur difference, d'autant que leur nature approche l'une de l'autre.

tre , tellement qu'il semblent s'egaler entr'eux : il paroitra néanmoins y avoir quelque différence à qui les considerera de près. Car qu'il n'y ait qu'une ligne droite qui touche la Spyralle en un point , cela est Connu ; toutesfois le Probleme n'en est pas Porime , n'estant pas encore compris. De maniere que tout ce qui est Connu n'est pas pourtant Porime : Mais tout ce qui est Porime est aussi Connu ; & partant le Connu paroist plus estendu que le Porime.

Or le Connu , le Porime , & l'Effable conviennent en certaines choses , & different en d'autres par la même raison que nous avons déjà dite : Car ces lignes-là que l'on appelle Irrationelles , à la verité sont connues , & toutesfois elles ne sont pas effables ou explicables. Au contraire tout nombre est bien Effable , & néanmoins tout nombre n'est pas Connu. Mais l'Effable de sa nature est toujours effable , jasoit que quelque longueur soit tantost effable , & tantost non , si elle est exigee avec quelque autre selon une même mesure. Mais aussi cette même longueur est par fois connue , & autresfois non , jasoit qu'elles s'accordent totalement entr'elles. Or il est difficile de trouver quelque chose qui soit Effable & Inconnu ensemble ; car le Connu semble paroître plus estendu que l'Effable. Et par ces choses il est manifeste que le Porime & l'Apore different du Rationel ou Effable , & de l'Irrationel : Car il se peut faire que des choses Irrationelles , quelques-unes soient Porimes ; mais des Rationelles , aucunes ne peuvent être irrationelles. Et partant il est tres-aisé à voir en quoy s'accordent les choses susdites , néanmoins elles se comportent entr'elles de telle sorte qu'il semble que le Porime soit plus estendu que l'Effable.

Or par ces choses on peut reconnoître la difference des choses qui ont esté dites , car à la verité Effable & Irrationel se dit au respect de la mesure , laquelle néanmoins n'est pas parvenue à nôtre connoissance ; vu que quelque chose qui est rationel , peut n'être pas connu de nous , & semblablement être rationel , & n'être jamais compris qu'il le soit. Mais l'Ordonné & l'Inordonné se dit selon soy , & selon la propre nature de la chose qui vient en contemplation , encore qu'il ne soit pas com-

pris de nous, comme Archimede a apperçu quelques choses être ordonnées de leur nature, lesquelles Serenus avoit auparavant contemplees. Mais le Connu & l'Inconnu se dit au regard de nous; tellement que les choses susdites different entr'elles: car celles-cy se rapportent à nous, celles-là à la propre nature, & les autres à la mesure.

Ayant donc expliqué les convenances & differences des choses qui ont esté proposées il reste à considérer que c'est que Donné: Car de tous ceux-là qui croient que ce qui est concedé en l'hypothese par le proposant soit le Donné, se fourvoient de ce qui est cherché, parce que tous les Elemens des Donnez ne sont pas composez de cette sorte de Donné, qui est selon l'hypothese, comme on peut voir aux traitez qui ont esté faits du Donné: C'est pourquoy delaisant cette opinion il nous faut juger des definitions des autres. Donc ce qui est concedé en l'hypothese, est quelque chose qui est consequemment connu par les principes: mais ceux qui se servent des definitions d'un seul mot, le definissent & le marquent par quelques-uns des susdits, comme il a été dit au commencement; tellement que presque tous semblent avoir eu cette commune notion du Donné, sçavoir est qu'il est compris, comme aussi le mot de Donné le manifeste: Et entre ceux-cy, sont les principaux ceux qui le definissent par l'hypothese ou supposition: Et les autres ont eu egard à ce qui est concedé. Mais nous usant des choses dites comme d'une regle & adresse pour bien juger, nous pourrons trouver une parfaite definition de Donné: Car il est certain qu'il faut qu'elle s'egale & convertisse avec la chose definie, qui est une chose propre aux bonnes definitions. Or telle semble être la definition du proposé, laquelle entre les expliquées le plus simplement, le definit Porime; & entre les complexes, celle qui le definit Porime & Conau ensemble, mais toutes les autres sont imparfaittes: Car celle qui le definit Ordonné, ne suffit pas pour la comprehension & intelligence du Donné, parce que ny tout ordonné, ny le seul ordonné n'est pas compris, vu qu'il y a des choses inordonnées qui ont la même condition, comme il a été montré. Celle-là ne satisfait pas non plus, laquelle

décrit qu'il est le **Connu** : car tout connu n'est pas compris , encore que le seul connu soit compris. Celle-là n'est pas aussi parfaite laquelle définit que c'est l'Effable : car l'effable n'est pas seul compris , puis que quelques-unes des irrationnelles sont aussi comprises : Semblablement tout effable n'est pas compris , comme nous avons déclaré cy-dessus. Or entre les définitions qui s'expliquent par un seul mot , reste celle qui le définit **Porime** , laquelle semble grandement manifester la compréhension ; car tout **Porime** & le seul **Porime** est compris : Pourtant **Euclide** même a usé d'une telle définition décrivant toutes les especes de **Donnez** par luy conçues & regardées. Mais entre les définitions composées celle-là est parfaite , laquelle définit le **Donné** être le **Connu** & le **Porime** ensemble , ayant le **Connu** pour genre analogique , & le **Porime** pour difference. Mais celle-là est imparfaite , laquelle dit l'**Ordonné** & le **Porime** ensemble : car les choses qui sont telles ne sont pas seule données. Et celle-là qui le définit **Ordonné** & **Effable** ensemble , comprend semblablement le **Donné** avec défaut. Mais celle du **Connu** & **Ordonné** ensemble , n'est pas aussi recevable , vû qu'elle excède ce qu'on définit : car ce qui est tel n'est pas donné seul. Donc ceux-là seuls qui ont dit que le **Donné** est le **Connu** & le **Porime** ensemble , semblent avoir atteint la notion du **Donné** : car ce qui est tel , est tout & seul compris , lesquelles deux choses doivent être aux définitions bien données. Mais ceux-là approchent bien près de ceux-cy , lesquels ont défini ainsi : **Donné** est ce à quoy nous pouvons trouver un égal , selon les choses que nous avons proposées aux premières hypotheses & principes. Du nombre desquels est **Euclide** ayant usé par tout du verbe $\pi\omicron\epsilon\iota\varsigma\alpha\delta\epsilon\iota\mu\iota$ qui signifie exhiber ou inventer , quoy qu'il délaisse le **Connu** comme consequent du **Porime**. Quelqu'un pourroit néanmoins le reprendre de ce qu'il n'ait auparavant défini **Donné** en general , mais immédiatement quelques-unes des especes de **Donné** , jasoit qu'aux **Elemens de Geometrie** il ait définy la ligne simple avant que de définir les especes.

Quelle est l'utilité du traité des **Donnez**.

Donques après avoir expliqué universellement & se-

On qu'il nous a sem^{blé} nécessaire pour l'usage present, que c'est que **DONNE**, il faut conséquemment que nous facions voir les utilitez de ce traité. Or ce traité est tel, qu'il n'est pas seulement institué pour l'amour de soy-mesme, mais aussi pour quelque autre chose : car il est grandement nécessaire au lieu que l'on appelle **Resolu** : Et nous avons déjà dit ailleurs combien de force obtient le Lieu resolu aux disciplines Mathematiques & en l'Optique & Canonique, lesquelles approchent grandement d'icelles, tant pourco que la Resolution est une invention de la demonstration, que parce qu'en choses semblables elle nous sert de beaucoup pour l'invention de la demonstration, ou parce qu'il est beaucoup plus excellent de rencontrer une puissance resolutive, que de posseder plusieurs demonstrations particulieres.

A quelle science se rapporte le traité des Donnez.

Or veu que la consideration des Donnez est utile à toutes les sciences, attendu qu'elle sert de beaucoup à la **RESOLUTION**, elle sera dite à bon droit estre revoquée non pas à une seule science, mais à la Mathematique universellement, laquelle traite des nombres, des temps, de la velocity, & choses semblables ; qui traite mesmes des raisons, comme aussi des proportions, & pour dire en un mot de toutes medietez. Parquoy pour la parfaite & demonstrative connoissance des Donnez tant utile, Euclide a travaillé à ce livre des Donnez, lequel auteur entra tous ceux qui ont composé des **Elemens** de Geometrie obtient à bon droit le premier rang, & lequel ayant elaboré les **Elemens**, ou plutôt les introductions presque de toutes les disciplines Mathematiques, assavoir de toute la Geometrie en 13 livres, de l'Astronomie és **Phænomenes**, de la Musique, & Optique, il a laissé par écrit les **Elemens** resolutifs du traité de **Donné**. Mais comme il étoit Geometre, il a particulièrement accommodé aux grandeurs ce qui étoit du **Donné**, & toutesfois commun aux autres choses, laquelle methode a aussi été observée par luy, lors que traitant universellement des raisons & proportions, il les a appropriées aux grandeurs au 5. livre des Plans.

Maintenant il a été dit en general que c'est que **Donné**, à quelle science il appartient, & combien en est utile

10 PREF. DE MARIN SUR LES DONN. D'EUCL,
 la contemplation: Adjoûtons donc à ce qui a été dit
 la description d'icelle science, laquelle traite du Donné,
 attendu qu'elle est, comme il appert par ce qui a été
 dit, une comprehension en toutes maniere de Donnez,
 & de leurs accidens & proprietex. Mais en égard au
 livre proposé nous dirons que c'est une doctrine Eleme-
 taire de toute la connoissance du Donné: dont s'en-
 suit qu'elle sera fort utile, comme aussi les choses y con-
 tenuës, en tant qu'elles se referent au Donné. Or ce li-
 vre est divisé selon les especes des Donnez, & en la
 premiere section sont contenuës les choses qui sont données
 par raison: secondement, celles qui sont données par
 position; & en après, celles qui sont données par espece.
 Car ce qui est Donné par grandeur, est simple & par-
 ticulierement contenu aux autres, & principalement aux
 Donnez par espece. Or il a commencé aux choses don-
 nées par raison & position, d'autant que celles qui sont
 données par espece en sont constituées. Euclide donne en-
 core une autre division à ce livre, car il le divise en univer-
 selles grandeurs, en lignes, en superficies, & en theoremes
 circulaires; lequel ordre il a aussi gardé es definitions &
 suppositions de ce livre. Outre ce il s'est servi d'un genre
 d'enseigner qui ne procede point par la composition, mais
 par la resolution, ainsi que Pappus a fait voir am-
 plement aux Commentaires qu'il a fait sur ce livre.

FIN.



LES DONNEZ D'EUCLIDE, *DEFINITIONS.*

1.



ES plans ou espaces, les lignes, & les angles, auxquels nous en pouvons trouver d'égaux seront dits estre donnez par grandeur.

2. Une raison est dite estre

donnée, lors que nous en pouvons trouver une mesme, ou egale à icelle.

3. Les figures rectilignes dont les angles sont donnez, & aussi les raisons que les costez ont entr'eux, sont dites estre données par espee.

4. Les points, les lignes, & les angles, qui ont & gardent toûjours un mesme lieu & sit, sont dits estre donnez par position ou situation.

5. Un cercle est dit estre donné par grandeur, lors qu'on en donne le demi-diametre par grandeur.

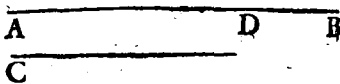
6. Un cercle est dit estre donné par position, & par grandeur, lors qu'on en donne le centre par position, & le demi-diametre par grandeur.

7. Les segmens de cercles auxquels les angles, & les bases sont donnees par grandeur, sont dits estre donnez par grandeur.

8. Les segmens de cercle, auxquels les angles sont donnez par grandeur, & les bases des segmens par position & grandeur, sont dits estre donnez par position & par grandeur.

9. Une grandeur est plus grande qu'une autre, d'une grandeur donnée, lors qu'en ayant osté la donnée, le reste est égal à cette autre.

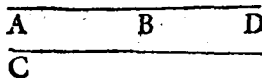
C'est-à-dire que s'il y a deux grandeurs inegales, comme AB & C,



& qu'ayant ôté de AB une grandeur donnée BD, le reste AD soit égal à l'autre grandeur C; icelle AB sera dite plus grande que C, d'une grandeur ou excez donné.

10. Une grandeur est moindre qu'une autre, d'une grandeur donnée, lors qu'ayant adjointe la donnée à icelle, la toute est égale à cette autre.

C'est-à-dire que s'il y a deux grandeurs inegales, comme AB & C, & qu'ayant adjointe à la moindre



AB, une grandeur donnée BD, toute la grandeur AD soit égale à l'autre grandeur C: Icelle AB sera dite moindre que C, d'une grandeur ou excez donné.

11. Une grandeur est dite plus grande qu'une autre grandeur d'une donnée, qu'en raison, lors qu'ostant d'icelle grandeur la donnée, le reste a à cette autre une raison donnée.

Soient par exemple deux grandeurs AB & CB, & ayant ôté de AB, une grandeur donnée AD, le reste DB ait à l'autre grandeur CB, une raison donnée: Icelle AB sera

dite plus grande
que CB d'une
donnée, qu'en

$A \quad D \quad C \quad B$

raison; pource qu'ayant ôté d'icelle AB la donnée AD ,
le reste DB a à l'autre grandeur CB une raison donnée.

12. Une grandeur est dite moindre qu'une autre d'une grandeur donnée, qu'en raison; lors que la donnée luy étant adjointe, la toute a à cette autre une raison donnée.

Soient par exemple deux grandeurs AB , BC ; & ayant adjointe à AB , une grandeur donnée AD , la toute DB ait à l'autre grandeur BC une raison donnée: Icelle

$D \quad A \quad B \quad C$

AB sera dite moindre que la même BC d'une donnée, qu'en raison: car ayant adjointe à icelle AB , la grandeur donnée AD , la composée DB a à l'autre grandeur BC , une raison donnée.

13. Une ligne droite est au long ou vis à vis par position, quand par un point donné elle est menée parallèle à une autre ligne,

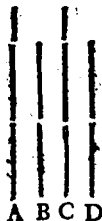
PROPOSITION I.

Des grandeurs estans données, la raison qu'elles ont entr'elles est aussi donnée.

Soient données les grandeurs A & B : Je dis que la raison de A à B est donnée.

Car puis que la grandeur A est donnée, a nous en pouvons trouver une égale à icelle; laquelle soit C : Derechef, dautant que la grandeur B est donnée, nous en pouvons aussi trouver une égale à icelle: & soit D .

Donc puis que A est égale à C , & B à D , comme A ^b 7. 5. est à C ^b ainsi B à D : & en permutant, ^c comme A ^c 16. 5. sera à B , ainsi C à D . Donc ^d la raison de A à B est ^d 2. d.



a 1. d.
comme

donnée : car c'est la même raison que de C à D, que nous avons trouvée. Ce qu'il falloit démontrer.

PROP. II.

Si une grandeur donnée a à quelque autre grandeur une raison donnée, cette autre est aussi donnée par grandeur.

Que la grandeur donnée A ait à une autre grandeur B une raison donnée : Je dis qu'icelle B est aussi donnée par grandeur.

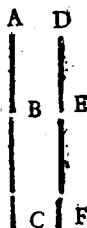
Car puis que A est donnée, nous en pouvons trouver une égale à icelle, laquelle soit C : Et d'autant que la raison de A à B est aussi donnée, nous en pouvons trouver une de même : Qu'elle soit trouvée, & soit la raison de C à D. Or puis que comme A est à B, ainsi C à D; en permutant, comme A à C, ainsi B à D: Mais A est égale à C : Donc B sera aussi égale à D. Partant la grandeur B est donnée, veu qu'à icelle en a été trouvée une égale D.

PROP. III.

Si des grandeurs données sont composées, aussi sera donnée cette grandeur-là, qui est composée d'icelles.

Soient composées les grandeurs données AB, BC : Je dis que la grandeur AC, qui est composée des grandeurs AB, BC, est donnée.

Car puis que AB est donnée, nous en pouvons trouver une égale à icelle, laquelle soit DE. Derechef, veu que BC est donnée, nous en pouvons aussi trouver une égale à icelle, laquelle soit EF. Donc puis que à icelle DE est égale AB, & à EF est égale BC, la toute AC est égale à la toute DF. Donc AC est donnée, puis que à icelle a été posée égale DF.



PROP. IV.

Si d'une grandeur donnée, on ôte une grandeur donnée, aussi sera donnée la grandeur restante.

Que d'une grandeur donnée AB, soit retranchée la grandeur donnée AC : Je dis que la grandeur restante CB est donnée.

Car d'autant que AB est donnée on en peut trouver une égale à icelle, laquelle soit DE. Derechef, puis que AC est donnée nous en pouvons aussi trouver une égale à icelle, laquelle soit DF. Veu donc que la grandeur AB est égale à la grandeur DE, & la grandeur AC à la grandeur DF; le reste CB ^h sera égal au reste FE. Parquoy ^h 3. AX, CB est donnée : car à icelle en a esté baillée une égale FE.

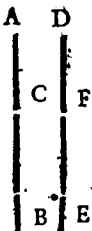


PROP. V.

Si une grandeur a une raison donnée à quelque partie d'icelle, elle aura aussi à la partie restante une raison donnée.

Que la grandeur AB ait une raison donnée à quelque partie d'icelle AC; Je dis qu'elle aura aussi à la partie CB une raison donnée.

Car soit exposée une grandeur donnée DE; & pource que la raison de la grandeur AB à la grandeur AC est donnée, ^d nous en pouvons trouver une de mesme, laquelle soit DE à DF: Donc la raison d'icelle DE à DF est donnée: Mais DE estant donnée, ⁱ aussi l'est sa partie DF, & conséquemment ^l le reste FE: Donc ^l 4. p. ^m puis que DE & FE sont données, la raison d'icelle ^m 1. p.



^d 2. d.
conn.

ⁱ 2. p.

^l 4. p.

^m 1. p.

5 sch.
19. 5.

DE à FE est aussi donnée. Et d'autant que comme DE est à DF, ainsi AB à AC, en convertissant ^u comme DE à FE, ainsi AB à CB. Mais la raison de DE à FE est donnée, comme il a été démontré : Donc aussi la raison de AB à CB est donnée.

SCHOLIE.

De cecy est evident que si une grandeur a à quelques partie d'icelle une raison donnée, en divisant sera aussi donnée la raison d'une partie à l'autre: Car puis que comme DE est à FE, ainsi AB est à CB; en divisant, comme DF à FE, ainsi AC à CB. Mais il a été démontré que les parties DF & FE sont données, & conséquemment leur raison est aussi donnée : pareillement donc est donnée la raison de AC à CB.

PROP. VI.

Si deux grandeurs ayans entr'elles une raison donnée sont composées, aussi la grandeur composée d'icelles aura à l'une & à l'autre une raison donnée.

Soient composées deux grandeurs AB, BC ayans entr'elles une raison donnée : Je dis que la toute AC a une raison donnée à chacun d'icelles AB, AC.

Car soit exposée une grandeur donnée DE; & pource que la raison de AB à BC est donnée, en soit fait une mesme d'icelle DE à EF: Donc la raison d'icelle DE à EF est donnée: & partant

• 2 p.

o la grandeur DE estant donnée, l'une & l'autre d'icelles DE, FE est donnée.

P 3. p.

Parquoy la toute DF sera aussi donnée.

q 1. p.

Donc q la raison de la mesme DF à chacune d'icelles DE, EF sera donnée. Et d'autant que comme AB à BC ainsi DE

r 18. 5.

à EF: en composant, r comme AC à BC, ainsi DF à EF: Donc en convertissant,

f sch.

f comme AC à AB, ainsi DF à DE. Par-

19. 5.

quoy comme la toute DF est à l'une & à l'autre grandeur DE, EF, ainsi la toute AC est à l'une & à l'autre



tte grandeur AB, BC. Donc : la raison d'icelle AC : 2. d. à chaque grandeur AB, BC est donnée.

PROP. VII.

Si une grandeur donnée est coupée en raison donnée, chaque segment est donné.

Que la grandeur donnée AB soit coupée en A C B une raison donnée, savoir est de AC à CB: Je dis que chaque segment AC, CB sera donné.

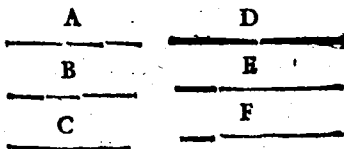
Car d'autant que la raison de AC à CB est donnée, la raison de AB à chacune d'icelles AC, CB est aussi donnée. Mais AB est donnée: donc * chacun u 6. p. des segmens AC, CB est aussi donné. x 2. p.

PROP. VIII.

Les grandeurs qui ont à une même une raison donnée, seront entr'elles en une raison donnée.

Que chaque grandeur A & C ait une raison donnée à la grandeur B: Je dis que la raison de la grandeur A à la grandeur C est aussi donnée.

Car soit exposée une grandeur donnée D: & puis que la raison de A à B est donnée,



soit faite la même d'icelle D à E. Or vu que D est donnée, aussi E est donnée. D'erechef, puis que la raison de B à C est donnée, soit faite la même de E à F. Mais E est donnée: & partant F est aussi donnée. Mais puis que D est donnée, la raison d'icelle D à F est donnée. Et d'autant que comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F, en raison égale, a 22. 5. comme A à C, ainsi D à F. Mais la raison d'icelle

D à F est donnée : Donc la raison de A à C est aussi donnée.

PROP. IX.

Si deux ou davantage de grandeurs sont entr'elles en raison donnée : & que les mêmes grandeurs ayent à quelques autres grandeurs des raisons données, jaçoit qu'elles ne soient les mêmes : ces autres grandeurs seront aussi entr'elles en raisons données.

Que deux ou davantage de grandeurs A, B, C, foyent entr'elles en raison donnée ; & que ces mêmes grandeurs A, B, C, ayent à quelques autres grandeurs D, E, F, les raisons données, non toutefois les mêmes : Je dis qu'icelles D, E, F, seront entr'elles en raisons données.

Car d'aurant que la raison de A à B est donnée, & aussi celle de A à D ; la

A	D
B	E
C	F

raison de D à B sera donnée : Mais la raison de B à E est aussi donnée : Donc la raison d'icelle D à E sera pareillement donnée. Derechef, puis que la raison de B à C est donnée, & aussi celle de B à E ; la raison de E à C sera donnée. Mais la raison de C à F est aussi donnée : Donc la raison de E à F sera donnée. Mais il a esté démontré que la raison de D à E est aussi donnée : & partant la raison de D à F sera donnée. Donc les grandeurs D, E, F, sont entr'elles en raisons données.

PROP. X.

Si une grandeur est plus grande qu'une grandeur d'une donnée, qu'en raison : la composée des deux sera aussi plus grande que cet-

te même grandeur d'une donnée, qu'en raison : Mais si cette composée est plus grande que la même grandeur d'une donnée, qu'en raison ; ou le reste sera aussi plus grand qu'icelle même d'une donnée, qu'en raison ; ou bien sera donné iceluy reste avec la suivante, à laquelle l'autre grandeur a raison donnée.

• Soit la grandeur AB plus grande que la grandeur BC d'une donnée, qu'en raison : Je dis que la toute AC est aussi plus grande que la même BC d'une donnée, qu'en raison.

$\overline{A \quad D \quad B \quad C}$

Car puis que AB est plus grande que BC d'une donnée, qu'en raison, en soit ostée la grandeur donnée AD : Donc la raison du reste DB à BC est donnée ; & en composant, la raison de DC à BC est aussi donnée. Mais la grandeur AD est aussi donnée : Donc AC est plus grande que la même BC d'une donnée, qu'en raison. c. 11. d.
d. 6. p.

Derechef, soit la grandeur AC plus grande que la grandeur BC d'une donnée, qu'en raison : Je dis que le reste AB est ou plus grand que la même BC d'une donnée qu'en raison, ou que la même AB avec celle qui suit, à laquelle BC a une raison donnée, est donnée.

$\overline{A \quad D \quad B \quad E \quad C}$

Car d'autant que la grandeur AC est plus grande que la grandeur BC d'une donnée, qu'en raison, en soit retranchée la grandeur donnée. Or icelle grandeur donnée est, ou moindre que la grandeur AB , ou plus grande. Soit premièrement moindre, & soit AD : donc la raison du reste DC à CB est donnée. Parquoy en divisant la raison de DB à BC est donnée. Mais la grandeur AD est aussi donnée : Donc la grandeur AB est plus grande que la grandeur BC d'une c. sch.
5. pr.

f II. d. donnée, qu'en raison. Soit maintenant la grandeur
 donnée plus grande que la grandeur AB; & soit posée
 AE égale à icelle: Donc la raison du reste EC à CB
 est donnée: Et en convertissant, la raison d'icelle
 BC à BE est aussi donnée. Mais icelle BE avec BA est
 donnée, pource que la toute AE est donnée: Donc
 est donnée AB avec celle qui suit BE, à laquelle BC
 a une raison donnée.

P R O P. XI.

Si une grandeur est plus grande qu'une gran-
 deur d'une donnée, qu'en raison, la même
 grandeur sera aussi plus grande que la com-
 posée d'icelles d'une donnée, qu'en raison;
 Et si la même grandeur est plus grande que
 les deux ensemble d'une donnée, qu'en rai-
 son; cette même grandeur sera aussi plus
 grande que le reste d'une donnée, qu'en
 raison.

Que la grandeur AB soit plus grande que la gran-
 deur BC d'une donnée, qu'en raison: Je dis que la
 même AB est aussi plus grande que la toute AC d'u-
 ne donnée, qu'en raison.

Car puis que la grandeur AB est plus grande que
 BC d'une donnée, qu'en raison, en soit ôtée une
 grandeur donnée AD. Donc la raison du reste DB
 à BC est donnée; & partant la raison de DC à BD
 sera aussi donnée.

Soit fait la mes-
 me de AD à DE: A ——— E ——— D ——— B C

Donc la raison d'icelle AD à DE est donnée. Mais
 AD est donnée: Donc DE est aussi donnée, & con-
 sequemment le reste AE est aussi donné. Mais
 d'autant que comme AD à DE, ainsi DC à BD,
 en permutant, comme AD à DC, ainsi DE à DB:
 Donc en composant, comme AG à CD, ainsi EB
 à DB; & en permutant, comme AC à EB, ainsi DC
 à DB. Mais la raison de DC à DB est donnée: Donc

aussi le sera celle de AC à EB, conséquemment celle de EB à AC. Mais il a été démontré que AE est donnée : Donc ^h AB est plus grande que AC d'une donnée AE, qu'en raison.

Mais maintenant soit AB plus grande que AC d'une donnée, qu'en raison : Je dis que la même AB est aussi plus grande que le reste BC d'une donnée, qu'en raison. Car d'autant que AB est plus grande que AC d'une donnée qu'en raison, en soit retranchée la grandeur donnée AE. Donc la ^h raison du reste EB à AC est donnée, & conséquemment aussi le sera celle de AC à EB. Soit faite la même de AD à DE : Donc la raison de AD à DE est donnée; & en convertissant, ^{p. 5. p.} la raison de AD à AE sera aussi donnée, & conséquemment celle de AE à AD. Or AE est donnée : Donc la toute AD ^l sera aussi donnée. Et d'autant que comme la toute AC est à la toute EB, ainsi la retranchée AD est à la retranchée ED; ainsi aussi sera ^{p. 19. 5.} le reste DC au reste DB. Mais la raison de AC à EB est donnée : Donc aussi le sera celle de DC à DB. Parquoy en divisant, ^{r sch.} la raison de BC à DB est donnée; & conséquemment aussi le sera celle de DE ^{p. 5. pr.} à BC. Mais il a été démontré que AD est donnée : Donc ^h AB est plus grande que la même BC d'une ^{h. 11. d.} donnée, qu'en raison.

P R O P. X

S'il y a trois grandeurs, & que la première avec la seconde soit donnée, mais la seconde avec la tierce soit aussi donnée : ou la première sera égale à la tierce, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée.

Soient trois grandeurs AB, BC, CD; & AB avec BC, $\frac{A}{B}$ $\frac{C}{D}$ savoir AC soit donnée : mais BC avec CD, savoir BD soit aussi donnée : Je dis que la grandeur AB est ou égale à la grandeur CD, ou que l'une est plus grande que l'autre d'une donnée.

Car d'autant que chacune des grandeurs AC, BD est donnée, les grandeurs données sont ou égales entr'elles, ou inégales : Qu'elles soient premièrement égales. Donc AC est égale à BD : soit ôtée la commune BC, & demeurera AB égale à CD. Mais qu'elles soient inégales, comme en cette autre figure. Et soit BD plus grande que AC. Soit donc posée BE égale à

AC. Or puis que  AC est donnée, BE est aussi donnée. Mais la toute BD est aussi donnée : le reste ED : le sera donc aussi. Et d'autant que BE est égale à AC ôtant la commune BC, restera AB égale à CE. Mais ED est donnée : Donc CD est plus grande que AB d'une donnée ED.

S C H O L I E.

Que si la première avec la seconde, savoir AC étoit plus grande que la seconde avec la tierce, savoir BD, comme en cette autre figure, on feroit GE égale à icelle BD ; & par mesmes raisons que dessus on démontreroit AE être donnée, & égale à CD : & partant AB être plus grande que CD d'une donnée.



P R O P. XIII.

S'il y a trois grandeurs, & que la première d'icelles ait à la seconde une raison donnée, mais la seconde soit plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raison ; aussi la première sera plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raison.

Soient trois grandeurs AB, CD, E ; & icelle AB ait à CD une raison donnée : mais la grandeur CD soit plus grande que la grandeur E, d'une donnée, qu'en raison : Je dis que la grandeur AB est plus grande que la grandeur E d'une donnée, qu'en raison.

Car puis que CD est plus grande que E d'une don-

mée, qu'en raison, en soit ôtée une grandeur donnée CF : Donc la raison du reste FD à E est donnée. Et d'autant que la raison de AB à CD est donnée, soit faite la même de AH à CF. Donc la raison d'icelle AH à CF est donnée.

Mais CF est donnée : Donc A H B
 " AH est aussi donnée. Et C F D " 2. pr.
 vû que comme la toute AB est à la toute CD, ainsi la retranchée AH est à la retranchée CF, & ainsi aussi le reste HB est au reste FD : la raison d'icelle HB à FD est aussi donnée. * 19. 5.
 Mais la raison de FD à E est aussi donnée : Donc " 8. pr.
 la raison de HB à E est donnée. Mais il a été démontré que AH est donnée : Donc AB est plus grande l 11. d.
 qu'icelle E d'une donnée, qu'en raison.

P R O P. X I V.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raison donnée, & qu'à chacune d'icelles on ajoute une grandeur donnée, ou les toutes auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs AB, CD ayans entr'elles une raison donnée; & à chacune d'icelles soit ajoutée une grandeur donnée, sçavoir BE & DF : Je dis que les toutes AE, CF, ou sont entr'elles en une raison donnée, ou que l'une est plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Car d'autant que chacune d'icelles BE, DF est donnée, & la raison d'icelle BE à DF est aussi donnée : Et si cette raison est la même que de AB à CD; celle de la toute AE à la toute CF, sera encore la même: * 12. 5.
 & partant la raison d'icelle AE à CF est donnée.

Maintenant, la raison de BE à DF ne soit la même

- que de AB à CD ; & soit fait comme AB à CD , ainsi BG à DF : Donc la raison d'icelle BG à DF est donnée. Mais la grandeur DF est donnée : Donc ^a BG est aussi donnée. Et puis que la toute BE est donnée, ^b $4. pr.$ le reste GE sera aussi donné. Mais d'autant que comme AB à CD , ainsi BG à DF , ^c ainsi aussi est la toute AG à la toute CF : & partant la raison d'icelle AG à CF est donnée : Mais la grandeur GE est donnée, ^d $11. d.$ Donc la grandeur AE est plus grande que la grandeur CF d'une donnée , qu'en raison.

PROP. XV.

Si, deux grandeurs ont entr'elles une raison donnée, & que de chacune d'icelles on ôte une grandeur donnée : les grandeurs restantes, ou auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée , qu'en raison.

Soient deux grandeurs AB , CD , ayans entr'elles une raison donnée , & que de chacune d'icelles soit retranchée une grandeur donnée , c'est assavoir de AB la grandeur AE , & de CD la grandeur CF : Je dis que les restes EB , FD , ou sont entr'eux en une raison donnée , ou bien que l'un est plus grand que l'autre d'une donnée , qu'en raison.

Car d'autant que chaque grandeur AE , CF est donnée , la raison de AE à CF est donnée : Et si elle est la même que de

A	E	G	B
C	F		D

- ^e $19. s.$ AB à CD , celle du reste EB au reste FD ^c sera aussi la même ; & partant la raison d'icelle EB à FD sera aussi donnée. Mais si elle n'est la même , soit fait comme AB à CD , ainsi AG à CF . Or la raison de AB à CD est donnée : Donc aussi celle de AG à CF sera donnée. Mais CF est donnée : Donc ^d AG est donnée. Mais AE est aussi donnée : Donc ^e le reste EG est donnée. Et d'autant que comme AB à CD , ainsi la retranchée AG à la retranchée CF , & ainsi aussi ^c le

reste GB au reste FD ; la raison d'icelle CB à FD est aussi donnée. Partant puis que EG est donnée, EB est plus grande que FD d'une donnée, qu'en raison. • II. d.

P R O P. X V I.

Si deux grandeurs ont entr'elles une raison donnée, & que de l'une d'icelles on ôte une grandeur donnée, & à l'autre on en ajoute une donnée : la toute sera plus grande que le reste d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs AB , CD , ayans entr'elles une raison donnée, & que de CD on ôte une grandeur donnée DE , mais à AB soit adjointe la grandeur donnée BF : Je dis que la toute AF est plus grande que le reste CE d'une donnée, qu'en raison.

$$\begin{array}{cccc} A & & G & & B & & F \\ \hline C & & & & E & & D \end{array}$$

Car puis que la raison de

AB à CD est donnée, soit faite la même de BG à DE :

Donc la raison d'icelle BG à DE est donnée. Mais f 2. d.

DE est donnée : Donc BG est aussi donnée. Mais g 2. p.

BF est aussi donnée : Donc la toute GF est donnée. h 3. p.

Et puis qu'on comme AB à CD , ainsi la retranchée BG à la retranchée DE , & ainsi aussi le reste AG au reste i 19. s.

CE ; la raison d'icelle AG à CE est donnée : Mais

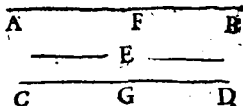
GF est donnée : Donc la grandeur AF est plus gran-

de que la grandeur CE d'une donnée, qu'en raison.

P R O P. X V I I.

S'il y a trois grandeurs, & que la première soit plus grande que la seconde d'une donnée, qu'en raison, mais la tierce soit aussi plus grande que la même seconde d'une donnée, qu'en raison : la première aura à la tierce, ou une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient trois grandeurs AB , E , CD , & que chacune des grandeurs, AB , CD , soit plus grande que la grandeur E d'une donnée, qu'en raison : Je dis que les grandeurs AB , CD , ou sont entr'elles selon une raison donnée, ou que l'une est plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.



Car puis que AB est plus grande que E d'une donnée, qu'en raison, en soit ôtée la grandeur donnée AF : Donc la raison du reste FB à E est donnée. De rechef puis que CD est plus grande que la même E , d'une donnée, qu'en raison, en soit retranchée la grandeur donnée CG ; & la raison du reste GD à E sera donnée : Donc la raison de FB à GD sera aussi donnée. Mais à icelles FB , GD , sont adjointes les grandeurs données AF , CG : Donc les toutes AB , CD , ou auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

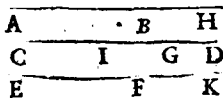
18. p.

m 14. p.

PROP. XVIII.

S'il y a trois grandeurs, & que l'une d'icelles soit plus grande que chacune des autres d'une donnée qu'en raison, ou les deux autres auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient trois grandeurs AB , CD , EF , & l'une d'icelles, sçavoir CD , soit plus grande que chacune des autres AB , EF , d'une donnée qu'en raison : Je



dis que les deux grandeurs AB , EF , ou seront entr'elles selon une raison donnée, ou que l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Car d'autant que la grandeur CD est plus grande

que la grandeur AB d'une donnée, qu'en raison, en soit ôtée la grandeur donnée DG : donc la raison du reste CG à AB est donnée. Soit faite la même de GD à BH : donc la raison d'icelle DG à BH est donnée. Mais DG est donnée : donc BH est aussi donnée. Et ^{2. pr.} d'autant que comme CG à AB , ainsi GD à BH , ^{12. 5.} aussi est la toute CD à la toute AH , la raison d'icelle CD à AH sera aussi donnée.

Derechef, puis que la même CD est plus grande que EF , d'une grandeur donnée, qu'en raison, en soit retranchée la grandeur donnée DI : Donc la raison du reste CI à EF est donnée : Soit faite la même de DI à EK . Donc la raison d'icelle DI à EK sera aussi donnée. Mais DI est donnée : Donc EK est aussi donnée. Et veu que comme CI à EF , ainsi ID à EK ; ainsi aussi est la toute CD à la toute EK : la raison d'icelle CD à EK sera donnée. Mais la raison de la même CD à AH est aussi donnée : Donc ^{8. p.} la raison d'icelle AH à EK sera donnée. Et puis que d'icelles AH , EK sont retranchées les grandeurs données BH , EK : les grandeurs AB , EF , ^{15. p.} ou sont entr'elles en une raison donnée, ou l'une est plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

PROP. XIX.

S'il y a trois grandeurs, & que la première soit plus grande que la seconde, d'une grandeur donnée, qu'en raison, & la seconde soit plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raison : Aussi la première grandeur sera plus grande que la tierce d'une donnée, qu'en raison.

Soient trois grandeurs AB , CD , E , & la grandeur AB soit plus grande que CD d'une donnée, qu'en raison ; mais CD soit aussi plus grande que E d'une donnée, qu'en raison : Je dis que AB est plus grande que la même E d'une donnée qu'en raison.

Car puis que CD est plus grande que E d'une donnée, qu'en raison, en soit ôtée la grandeur donnée CF : Donc la raison du reste FD à E est

A	G	H	E
C		F	D
		E	

donnée. Derechef, veu que AB est plus grande que la mesme CD d'une donnée, qu'en raison, en soit ôtée la grandeur donnée AG : Donc la raison du reste GB à CD est donnée. Soit faite la mesme de GH à CF : Donc la raison d'icelle GH à CF est donnée, Mais CF est donnée: Donc aussi GH est donnée. Et puis AG est aussi donnée, la toute AH sera aussi donnée. Mais comme GB à CD , ainsi GH à CF , & ainsi aussi le reste HB au reste FD : Donc la raison d'icelle HB à FD est donnée. Mais la raison de la mesme FD à E est aussi donnée: Donc la raison de HB à E est pareillement donnée, & est aussi donnée la grandeur AE : Parquoy la grandeur AB est plus grande que E d'une donnée, qu'en raison.

AUTREMENT.

Soient trois grandeurs AB, C, D , & que AB soit plus grande que C d'une donnée, qu'en raison; mais icelle C soit aussi plus grande que D d'une donnée, qu'en raison: Je dis que AB est plus grande que D d'une donnée, qu'en raison.

A	E	F	B
		C	
		D	

Car d'autant que AB est plus grande que C d'une donnée, qu'en raison, en soit retranchée la grandeur

donnée AE : Donc la raison du reste EB à C est donnée. Mais la grandeur C est plus grande que la grandeur D d'une donnée, qu'en raison: Donc EB est plus grande que D d'une donnée qu'en raison. Parquoy en soit retranchée la grandeur donnée EF , & la raison du reste FB à D sera donnée. Mais AF est donnée: Donc AB est plus grande que D d'une donnée, qu'en raison.

PROP. XX.

• S'il y a deux grandeurs données, & que d'icelles soient ôtées des grandeurs ayans entr'elles une raison donnée : ou les grandeurs restantes auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera pas grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs données AB, CD, desquel. les soient ôtées les grandeurs AE, CF, ayans entr'elles une raison donnée : Je dis que les grandeurs EB, FD, ou auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison. Car puis que l'une & l'autre grandeur AB, CD est donnée, la raison d'icelle

AB à CD est ^z aussi donnée :

$$\begin{array}{cccc} A & E & G & B \\ \hline C & F & & D \end{array}$$
 ^{1. p.}

Et si c'est la mesme que de AE à CF celle du reste EB

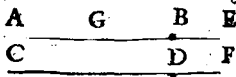
au reste FD sera ^x aussi la mesme, & partant la raison ^{x 19. 5.} d'icelle EB à FD sera aussi donnée. Mais si elle n'est la mesme, soit fait que comme AE à CF, ainsi AG à CD. Or la raison d'icelle AE à CF est donnée : donc la raison d'icelle AG à CD est donnée. Mais CD est donnée : Donc ^a AG est aussi donnée. Mais la toute AB est pareillement donnée : Donc ^b le reste BG est donné. Et puis que comme AE à CF, ainsi AG à CD, & aussi le reste EG au reste FD ^{3. p.} la raison d'icelle EG à FD est donnée. Mais GB est aussi donnée : Donc la grandeur EB est plus grande ^{b 4. p.} que la grandeur BD d'une donnée, qu'en raison. ^{1 11. d.}

PROP. XXI.

S'il y a deux grandeurs données, & qu'à icelles on ajoute d'autres grandeurs ayans entr'elles une raison donnée : ou les toutes auront entr'elles une raison donnée, ou l'une sera plus grande que l'autre d'une donnée, qu'en raison.

Soient deux grandeurs données AB, CD, & à icelles soient adjointes les grandeurs BE, DF ayans entr'elles une raison donnée :

Je dis que les toutes AE, CF ; ou auront entr'elles une raison donnée, ou bien que l'une sera plus grande quel'autre d'une donnée, qu'en raison.



e 1. p.

d 12. s.

e 2. p.

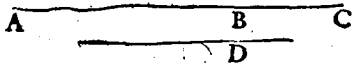
f 4. p.

Car puis que l'une & l'autre grandeur AB, CD est donnée, leur raison est aussi donnée : Et si c'est la même raison que de BE à DF, aussi sera donnée la raison de la toute AE à la toute CF ; car ce sera encore la même. Mais si ce n'est la même, soit fait que comme BE est à DF, ainsi BG à CD : Donc la raison d'icelle BG à CD est donnée. Mais CD est donnée : Donc le sera aussi BG. Mais la toute AB est donnée : Donc le sera aussi le reste AG. Et puis que comme BE à DF ainsi BG à CD, & aussi la toute GE à la toute CF ; la raison d'icelle GE à CF sera pareillement donnée. Mais AG est donnée : Donc la grandeur AE est plus grande que la grandeur CF d'une donnée, qu'en raison.

PROP. XXII.

Si deux grandeurs ont à quelque autre une raison donnée, aussi leur composée aura à la même une raison donnée.

Que les deux grandeurs AB, BC ayent à quelque autre grandeur D une raison donnée :



Je dis que la composée AC a aussi à la même D une raison donnée.

e 3. p.

h 6. pr.

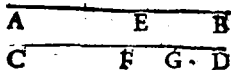
e 8. pr.

Car puis que chaque grandeur AB, BC a une raison donnée à D, la raison de AB à BC est donnée : & en composant la raison de AC à BC est donnée. Mais celle de BC à D est aussi donnée : donc la raison d'icelle AC à D sera pareillement donnée.

PROP. XXIII.

Si le tout est au tout en raison donnée, & que les parties soient aux parties en raisons données, jaoit que ce ne soient les mêmes: les toutes seront aux toutes en raisons données.

Que le tout AB ait au tout CD une raison donnée; mais les parties AE, EB soient aux parties CF, FD en raisons données, bien qu'elles



ne soient les mêmes: Je dis que toutes ces grandeurs seront aussi entr'elles en raisons données, c'est-à-dire qu'une chacune d'icelles AB, AE, BE, CD, CF, FD sera à chacune des autres en raison donnée.

Car puis que AE est à CF en raison donnée, soit faite la même de AB à CG: Donc la raison d'icelle AB à CG est donnée, & conséquemment aussi celle du reste EB au reste FG. Mais la raison de FD à la même EB est aussi donnée: Donc la raison de FD à FG est pareillement donnée: & partant ^m celle de FD au reste GD est aussi donnée. Mais la raison de AB à chacune d'icelles CD, CG est donnée: Donc le sera aussi ^l celle de CD à CG, & encore ^m celle de CD au reste GD. Mais la raison de FD à DG est donnée: Donc le sera aussi ^l celle de la même CD à FD, & conséquemment celle de ^m CD au reste FC: Donc aussi sera donnée la raison de CF à FD. Mais la raison de EB à FD est posée donnée: Donc la raison de CF à EB sera donnée. Derechef, pource que la raison de AB à CD est donnée, & aussi celle de CD à chacune d'icelles FC, FD; la raison de la même AB à chacune desdites FC, FD ^l sera pareillement donnée. Mais la raison d'icelle FD à EB est donnée: Donc aussi sera donnée la raison de AB à BE, & conséquemment au reste ^m AE. Parquoy en divisant, ⁿ la raison de AE à EB sera pareillement donnée. Mais la raison de EB à FD est donnée.

19. 5.

18. p.

5. p.

sch.

5. p.

1 3. pr. Donc le sera aussi celle de AE à FD. Semblablement pource que la raison de CD à AB est donnée, & celle de AB à chacune de ses parties AE, EB : aussi la raison d'icelle CD à chacune desdites AE, EB sera donnée. Parquoy chacune des grandeurs AB, CD, AE, EB, CF, FD est à chacune des autres en raison donnée.

PROP. XXIV.

Si de trois lignes droites proportionnelles, la premiere a à la tierce une raison donnée; elle aura aussi à la seconde une raison donnée.

Soient trois
lignes droites
proport. A, B,
C, & soit A à
B, ainsi que B
à C : mais A
ait à C une rai-

A	D
B	F
C	E

son donnée : Je-dis que A aura aussi à B une raison donnée.

Car soit exposée une autre ligne droite D; & puis que la raison de A à C est donnée soit faite la même de D à F : Donc la raison de D à F est donnée. Mais D est donnée : donc F est aussi donnée. Entre les deux lignes droites D, F soit prise la moyenne proportionnelle E. Donc le rectangle fait sous D, F est égal au carré de E. Mais iceluy rectangle de D, F est donné : (car tous les angles d'iceluy rectangle sont donnez, étans droits, & les raisons qu'ont les cottez entr'eux sont aussi données) donc le carré de E est donné, & consequemment icelle ligne droite E est aussi donnée : (car on en peut trouver une égale à icelle, puis que le rectangle de D, F est donné.) Mais D est donnée : Donc la raison de D à E est donnée, & comme A est à C, ainsi D à F. Mais comme A à C, ainsi le carré de A au rectangle de A, C, & aussi comme D à F, ainsi le carré de D au rectangle de D, F. Donc comme le carré de A est au rectangle de A, C, ainsi le carré

13. 6.

P 17. 6.

93. d.

1. d.

14. 2.

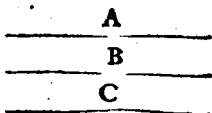
1. p.

1. 6.

quarré de D est au rectangle de D, F. Mais le rectangle de A, C, est égal au quarré de B, (puis que A, B, C sont proportionnelles) & celui de D, F, au quarré de E. Donc comme le quarré de A est au quarré de B, ainsi le quarré de D est au quarré de E. Parquoy $\times 22.6.$ comme A à B, ainsi D à E. Mais la raison de D à E $\gamma 2. d.$ est donnée: donc γ aussi la raison de A à B est donnée.

AUTREMENT.

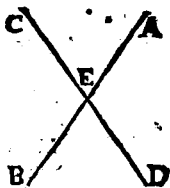
D'autant que la raison de A à C est donnée, & que comme A est à C, ainsi le quarré de A au rectangle de A, C: la raison d'iceluy quarré de A au rectangle de A, C est aussi donnée. Mais à iceluy rectangle de A, C est égal le quarré de B (puis que A, B, C sont proport.) donc la raison du quarré de A au quarré de B est donnée, & par consequent est aussi donnée la raison de la ligne A à la ligne B: Car à chacune d'icelles A, B, nous en avons exhibé une égale au propre quarré de chacune.



PROP. XXV.

Si deux lignes données par position s'entrecouppent, le point auquel elles se couppent est donné par position.

Soient deux lignes AB, CD données par position, qui se couppent l'une l'autre au point E: Je dis que le point E est donné par position: Car s'il changeoit de lieu l'une ou l'autre des lignes AB, CD changeroit sa position: Or est il que par l'hypothese elle ne change point: Donc le point E est donné par position.



PROP. XXVI.

Si les extremitéz d'une ligne droite sont données par position : icelle ligne droite est donnée par position, & par grandeur.

De la ligne droite AB les extremitéz A, B soient données par position : Je dis que la ligne droite AB  est donnée par position, & par grandeur.

Car si le point A demeurant en son lieu; la position, ou la grandeur de la ligne droite AB change, le point B tombera ailleurs : Or est-il que par l'hypothese il n'y tombe point. Donc la ligne droite AB est donnée par position, & par grandeur.

PROP. XXVII.

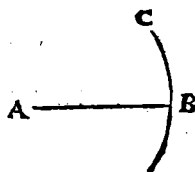
Si d'une ligne droite donnée par position, & par grandeur une extremité est donnée, aussi l'autre extremité sera donnée.

De la ligne droite AB donnée par position, & par grandeur soit donnée une extremité, sçavoir A : Je dis que l'autre extremité B est donnée.

Car si le point A demeurant en son lieu le point B change & tombe en un autre lieu, ou la position de la ligne droite AB, ou sa grandeur changeroit : or est-il que selon l'hypothese l'une ny l'autre ne change. Donc le point B est donné.

AUTREMENT.

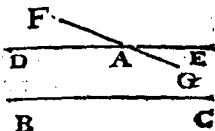
Du centre A, & de l'intervalle AB soit décrite la circonference BC. Donc icelle circonference BC est donnée par position. Mais la ligne droite AB est aussi donnée par position : Donc le point B est donné.



PROP. XXVIII.

Si par un point donné est tirée une ligne droite vis à vis d'une ligne droite donnée par position, la ligne droite menée est donnée par position.

Que par le point donné A soit menée vis à vis d'une ligne droite BC donnée par position, une ligne droite DAE: Je dis que la ligne droite DAE est donnée par position.

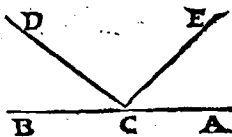


Car si elle n'est donnée, le point A demeurant en son lieu, la position de la ligne droite DAE changera. Qu'elle change donc s'il est possible, & tombe ailleurs demeurant parallèle à BC, & soit FAG. Donc BC est parallèle à icelle FAG. Mais la même BC est aussi parallèle à DAE: Donc DAE est parallèle à icelle FAG. Ce qui est absurde vu qu'elles se joignent & rencontrent en A. Donc la position de la ligne droite DAE ne tombe pas ailleurs. Parquoy icelle ligne DAE est donnée par position.

PROP. XXIX.

Si à une ligne droite donnée par position, & à un point donné en icelle est menée une ligne droite qui fasse angle donné; la ligne menée est donnée par position.

Qu'à une ligne droite donnée AB, & à un point donné en icelle C, soit menée la ligne droite CD, qui fait l'angle donné ACD: Je dis que la ligne droite CD est donnée par position.



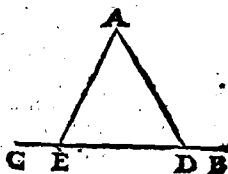
Car si elle n'est donnée par position, le point C demeurant en son lieu, la position de la ligne CD

observant la grandeur de l'angle ACD tombera ailleurs : Qu'elle y tombe donc, s'il est possible ; & soit CE . Donc l'angle ACD est égal à l'angle ACE , le grand au moindre. Ce qui est absurde. Donc la position de la ligne droite CD ne tombera ailleurs : & partant icelle ligne CD est donnée par position.

PROP. XXX.

Si d'un point donné est tirée à une ligne droite donnée par position une ligne droite faisant un angle donné : la ligne tirée est donnée par position.

D'un point donné A soit tirée à la ligne droite BC donnée par position, une ligne droite AD faisant l'angle ADB donné : Je dis que la ligne AD est donnée par position.

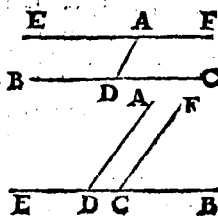


Car si elle n'est donnée, le point A ne bougeant de son lieu la position de la ligne droite AD gardant la grandeur de l'angle ADB changera. Quelle change donc ; & soit la ligne droite AE . Donc l'angle ADB est égal à l'angle AEB , le grand au moindre : Ce qui est absurde. Donc la position de la ligne droite AD ne change point : & partant icelle ligne AD est donnée par position.

f 16. I.

AUTREMENT.

Par le point A soit tirée la ligne EAF parallèle à la ligne droite BC . Donc puis que par le point donné A , vis-à-vis & contre une ligne droite BC donnée par position, est tirée la ligne droite EF ; icelles lignes EF , BC sont parallèles, mais aussi sur icelles tombe la ligne droite AD :



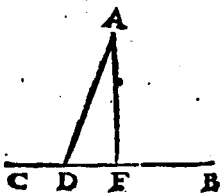
Donc $\angle$ FAD est égal à l'angle donné ADB; § 29. 1.
& partant il est aussi donné. Parquoy à la ligne droite EF donnée par position, & au point A donné en icelle, est tirée la ligne droite AD faisant l'angle donné FAD : Donc icelle AD est donnée par position. § 29. p.

AUTREMENT.

En la ligne BCE soit pris un point donné C, & par iceluy soit menée CF parallèle à icelle DA. D'autant que AD, FC sont parallèles, & que sur icelles tombe la ligne droite BCE : l'angle FCB est égal à l'angle donné ADB : & partant il est aussi donné. § 29. 1.
Et puis que à la ligne droite BC donnée par position, & à un point C donné en icelle est tirée la ligne droite FC faisant un angle donné FCB ; icelle ligne FC est donnée par position. Mais par le point A donné, est tirée vis-à-vis de la ligne FC donnée par position, la ligne AD ; Donc icelle AD est donnée par position. § 29. p.

AUTREMENT.

Soit pris en la ligne droite BC quelque point F, & soit tirée AF. D'autant que chaque point A, F est donné, la ligne AF est donnée par position. Mais la ligne BC est aussi donnée par position : Donc $\angle$ AFD est donné. Mais par l'hypothèse l'angle ADF est donné : Donc DAF (qui est le reste

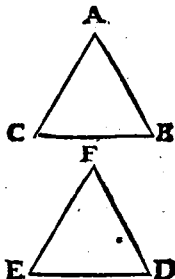


1261 p.

n de deux droits) est donné. Et puis que à la ligne droite AF donnée par position, & au point A donné en icelle, est tirée la ligne droite DA faisant l'angle donné DAF, icelle ligne DA est donnée par position. § 29. p.

† Euclide suppose icy que deux lignes droites étans données par position, & inclinées entr'elles font un angle donné; ce qu'aucuns demonstrent ainsi. D'autant que les deux lignes droites données par position sont inclinées entr'elles, l'inclination d'icelles lignes est donnée: Mais l'angle est l'inclination des lignes: Donc l'angle que font les lignes droites données par position, & inclinées entr'elles est donné.

Mais le sieur Hardy le demonstre presque ainsi. Soient deux lignes droites inclinées AB, CB données par position, & en AB soit pris quelque point donné A, & en BC aussi quelque point C, & soit tirée la ligne droite AC. Puis que tant le point B, que chacun des points A & C est donné, les trois lignes droites AB, BC, AC sont données par grandeur. Parquoy de trois lignes directes égales à icelles, on pourra constituer un triangle: soit donc fait le triangle FDE ayant le côté FD égal au côté AB, le côté FE égal au côté AC, & la base DE égale à la base BC. Vu donc que les angles compris des lignes droites égales sont égaux, nous avons trouvé l'angle FDE égal à l'angle ABC: & partant iceluy angle ABC est donné.

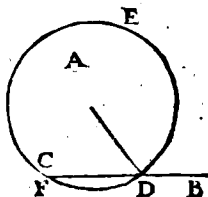


PROP. XXXI.

Si d'un point donné, on tire à une ligne droite donnée par position, une ligne droite donnée par grandeur: elle sera aussi donnée par position.

Que d'un point donné A, soit tirée à la ligne droite BC donnée par position, la ligne droite AD donnée par grandeur: Je dis qu'icelle AD est donnée par position,

Car du centre A, & de l'intervalle A soit décrit le cercle DE. D'autant que le centre A est donné par position, & le semidiam. AD par grandeur; le cercle DE est donné par position. Mais la ligne droite BC est aussi donnée par position: Donc le point d'intersection D est donné. Et puis que le point A est aussi donné: la ligne droite AD est donnée par position.



P 6. d.

25. p.

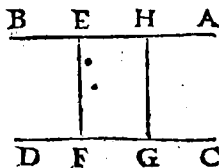
26. p.

P R O P. XXXII.

Si à des lignes droites paralleles données par position, on tire une ligne droite, faisant des angles donnez; la ligne tirée sera donnée par grandeur.

Aux lignes droites paralleles AB, CD données par position, soit tirée la ligne droite EF faisant les angles donnez BEF, EFD: Je dis que la ligne EF est donnée par grandeur.

Car soit pris en la ligne CD un point donné G, & d'iceluy soit tirée GH parallele à FE. D'autant que les lignes EF, HG sont paralleles, & que sur icelles tombe la ligne CD l'angle EFD



est égal à l'angle FGH. Mais l'angle EFD est donné: donc l'angle FGH est aussi donné. Et d'autant qu'à la ligne droite CD donnée par position, & au point G donné en icelle est tirée la ligne droite GH faisant l'angle donné FGH: icelle ligne GH est donnée par position. Mais AB est aussi donnée par position: Donc le point H est donné. Mais le point G est aussi donné: Donc la ligne GH est donnée par

29. 1.

29. p.

25. p.

26. p.

734. 1. grandeur, & est γ égale à EF. 2 Parquoy icelle ligne
 2 1. d. EF est donnée par grandeur. *fin*

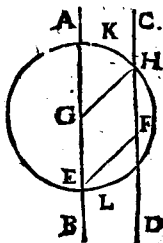
PROP. XXXIII.

Si à des lignes droites paralleles donnée par position, on tire une ligne droite donnée par grandeur, elle fera les angles donnez.

Aux lignes droites paralleles AB, CD données par position, soit tirée une ligne droite EF donnée par grandeur: Je dis qu'elle fera les angles BEF, DFE donnez.

Car soit pris en la ligne droite AB le point G, & par iceluy soit tirée GH parallele à EF. Donc EF est égale à icelle

734. 1. γ GH. Mais EF est donnée par grandeur: Donc GH est aussi donnée par grandeur. Mais le point G est donné, & partant si d'iceluy, & de l'intervalle GH est décrit un cercle^a il sera donné par position. Qu'il

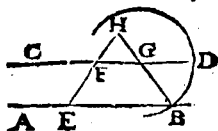


2 6. d. soit donc décrit, & soit HKL. Iceluy cercle HKL est donc donné, par position: Mais la ligne CD qui coupe la circonference KHL en H est aussi donnée par position: donc iceluy point d'intersection H^b est
 25. p. donné. Mais le point G est donné: donc^c la ligne
 26. p. droite GH est donnée par position. Mais la ligne droite CD est aussi donnée par position: Donc^d l'angle GHF est donné. Mais à iceluy est égal^e l'angle
 d sch. EFD: Donc l'angle EFD est donné; & partant aussi
 30. pr. l'angle BEF, car c'est le reste de la somme de deux
 29. 1. droits.

AUTREMENT.

Soit pris en la ligne droite CD le point G; & soit posée GD égale à EF: puis du centre G & intervalle GD soit décrit un cercle DBH, & tiré GB. D'au-

tant que le centre G est donné par position, & le semidiámetro GD par grandeur, le cercle BDH ^a est donné par position. Mais la ligne AB est aussi donnée par position : Donc ^b le



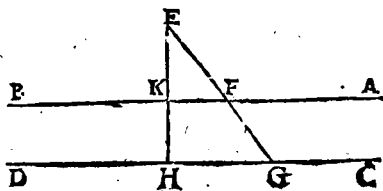
point G est donné. Mais le point B est aussi donné : Donc ^c la ligne droite GB est donnée par position. Mais la ligne droite CD est aussi donnée par position : Donc ^d l'angle BGD est donné. Parquoy si EF est parallèle à BG, l'angle EFD, ^e sera donné, & conséquemment aussi l'autre angle BEF. Mais les lignes droites BG, EF n'étant parallèles, qu'elles se rencontrent au point H. D'autant que EB est parallèle à FG, & EF est égale à GD, c'est-à-dire à BG; aussi FH ^f sera égale à GH. (car EH, ^{f 14. 5.} BH étant coupées proportionnellement ^g par la parallèle FG, comme EF à FH ainsi BG à GH, & en permutant, comme EF à BG ainsi FH à GH.) Donc ^h l'angle HFG est égal à l'angle HGF. Mais iceluy ^{h 5. 1.} HGF est donné : (car il est égal ⁱ au donné BGD.) ^{i 15. 1.} Donc l'angle HFG est aussi donné. Mais à iceluy est égal l'angle BEF; & partant est donné, comme aussi le restant EFG.

PROP. XXXIV.

Si d'un point donné on tire à des lignes droites parallèles données par position, une ligne droite; elle sera coupée en raison donnée.

Qu'aux

lignes
droites
parallèles
AB, CD
données
par posi-
tion, soit
tirée du



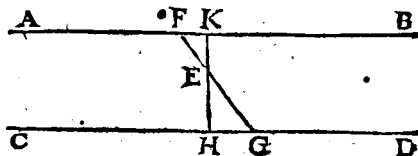
point donné E, la ligne droite EFG : Je dis que la raison de EF à FG est donnée.

Car du point E soit tirée EH perpendiculaire à la ligne CD. D'autant que du point donné E est tirée à CD la ligne droite EH, faisant l'angle donné EHG, ¹ icelle ligne EH est donnée par position. Mais l'une & l'autre ligne AB, CD est aussi donnée par position. Donc ^m les points d'intersection K, H sont donnez. Mais le point E est aussi donné : Donc ⁿ chaque ligne EK, KO est donnée. Parquoy ^o la raison d'icelle EK à KO est donnée. Mais comme EK à KO, ainsi EF à FG : (car au triangle GEH, la ligne KF étant parallèle à HG, les côtez EH, EG sont coupez proportionnellement.) Donc la raison d'icelle EF à FG est donnée.

AUTREMENT.

Aux lignes droites parallèles AB, CD données par position, soit tirée du point donné E la ligne droite FEG : Je dis que la raison de GE à EF est donnée. Car du point E soit tirée à CD la perpendiculaire EH, & produite jusques au point K. Puis donc que du point E à la ligne droite CD donnée par position, est tirée

la ligne EH faisant l'angle donné EHG;



¹ icelle E H est

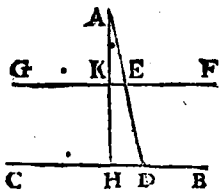
donnée par position. Mais chaque ligne AB, CD est aussi donnée par position : Donc ^m chaque point d'intersection H, K est donné. Mais le point E est aussi donné. Donc ⁿ chacune des lignes EH, EK est donnée par grandeur : & partant ^o la raison d'icelle EH à EK est donnée. Mais ^p comme EH à EK ainsi EG à EF ; (car les angles oppozes du point E étans égaux, & les lignes AB, CD parallèles, les triangles EHG, EKF sont équiangles, & partant comme

EH à EG ainsi EK à EF ; & en permutant comme EH à EK ainsi EG à EF.) Donc la raison d'icelle EG à EF est donnée.

PROP. XXXV.

Si d'un point donné à une ligne droite donnée par position, est tirée une ligne droite, laquelle soit coupée en une raison donnée, & que par le point de section soit menée une ligne droite vis à vis de la ligne droite donnée par position : la ligne menée sera donnée par position,

Que d'un point donné A soit tirée à une ligne droite BC donnée par position, la ligne droite AD, & soit coupée en E selon une raison donnée, c'est à sçavoir de AE à ED, mais par le point E soit menée FEG parallèle à BC : Je dis que FG est donnée par position.



Car du point A soit tirée AH perpendiculaire à BC. D'autant que du point donné A est tirée à BC donnée par position, la ligne droite AH faisant l'angle AHD donné ; icelle AH est donnée par position. Mais BC est aussi donnée par position : Donc le point H est donné. Mais le point A est aussi donné : Donc la ligne AH est donnée par grandeur, & par position. Et d'autant que comme AE à ED, ainsi AK à KH, & que la raison de AE à ED est donnée ; aussi la raison de AK à KH est donnée ; & en composant, la raison de AH à AK est donnée. Mais AH est donnée par grandeur. Donc aussi AK est donnée par grandeur. Mais AK est aussi donnée par position, & le point A est donné : Donc le point K est aussi donné. Et puis que par iceluy point K donné est menée la ligne

30. p.

25. p.

26. p.

2. 6. j.

6. p.

2. p.

27. p.

droite FG, vis à vis de la ligne droite BC donnée par
 z 28. p. position ; icelle ligne FG^z est donnée par position.

PROP. XXXVI.

Si d'un point donné on tire à une ligne droite
 donnée par position une ligne droite, & qu'à
 icelle on ajoute quelque ligne droite ayant
 une raison donnée à la même ; mais que par
 l'extrémité d'icelle ajoutée, on mene une
 ligne droite vis à vis de la ligne donnée par
 position : icelle ligne menée sera donnée par
 position.

Que du point donné A soit tirée à la ligne droite
 BC donnée par position, la ligne droite AD, à la-
 quelle soit adjointe la ligne droite AE qui ait à AD
 une raison donnée ; mais par le point E soit menée
 FEK parallèle à icelle BC : Je dis que FK est donnée
 par position.

Car du point E soit menée à BC
 la perpendiculaire AL, & prolongée
 jusqu'au point G. D'autant
 que du point donné A est tirée à
 la ligne droite BC donnée par po-
 sition la ligne droite GL, qui fait
 430. p. un angle GLD donné ; & icelle li-
 gne GL est donnée par position.
 Mais BC est aussi donnée par po-
 sition : Donc^r le point L est
 226. p. donné. Et puis que le point A est
 226. p. aussi donné, la ligne AL est don-
 née. Mais d'autant que la raison
 246. de AE à AD est donnée, & que^a
 165. comme icelle AE à AD, ainsi AG
 à AL ; (à cause que les triangles A
 LD, AGE sont équiangles) la
 raison de AG à AL est aussi donnée. Mais AL est don-
 née par grandeur : Donc^b AG est donnée par gran-
 2. p. deur. Mais elle l'est aussi par position, & le point A
 17. p. est donné : Donc^c le point G est aussi donné. Et puis

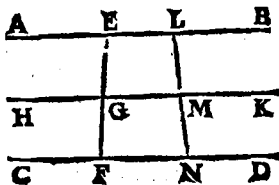


que par iceluy poinct donné G, est menée la ligne FK, vis à vis de la ligne droite BC donnée par position; & d 28. p. icelle ligne FK est donnée par position.

P R O P. XXXVII.

Si à des lignes droites paralleles données par position, est tirée une ligne droite, qui soit coupée en raison donnée: mais par le point de section soit menée vis à vis des lignes droites données par position, une ligne droite: icelle ligne menée sera donnée par position.

Soient des lignes droites paralleles AB, CD données par position, & à icelles soit tirée la ligne droite EF coupée en la raison donnée de EG à GF; & par le poinct G soit



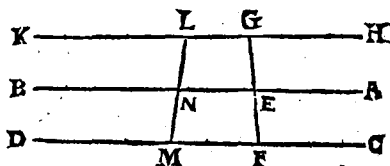
menée HGK parallele à laquelle on voudra d'icelles AB, CD: Je dis que KH est donnée par position.

Car soit pris en la ligne AB le poinct donné L, & d'iceluy poinct soit tirée LN perpendiculaire à CD. Et puis que du poinct donné L, est tirée à la ligne droite CD, la ligne LN faisant l'angle LND donné icelle LN est donnée par position. Mais CD est aussi donnée par position. Donc le poinct N est donné. Mais le poinct L est aussi donné: Donc la ligne LN est donnée. Et vû que la raison de FG à GE est donnée, & que comme FG à GE, ainsi NM à ML; la raison d'icelle NM à ML est donnée: Et en composant, la raison de LN à LM est aussi donnée. Mais LN est donnée par grandeur: Donc ML est donnée par grandeur. Mais elle l'est aussi par position, & le poinct L donné. Donc le poinct M est aussi donné. Et attendu que par iceluy poinct M est menée la ligne droite KH vis-à-vis de

qui ait une raison donnée à la même ; mais par l'extrémité de l'ajoutée soit menée une ligne droite vis à vis des parallèles données par position : la ligne menée sera aussi donnée par position.

Soient des lignes droites parallèles AB , CD données par position, & à icelles soit tirée la ligne droite EF , à laquelle soit ajoutée la ligne droite EG ayant une raison donnée à la même EF , mais par le point G soit menée la ligne droite HK parallèle à l'une ou à l'autre des lignes AB , CD : Je dis qu'icelle ligne HK est donnée par position.

Car soit pris en la ligne AB le point donné N , & d'iceluy soit tirée à CD la



perpendiculaire NM , & soit prolongée jusques au point L . D'autant que du point donné N est tirée à la ligne droite CD donnée par position, la ligne droite NM faisant un angle donné NMF ; icelle NM est donnée par position. Mais la ligne CD est aussi donnée par position : Donc le point M est donné. Mais le point N est aussi donné : Donc la ligne NM est donnée. Et pource que la raison de EG à EF est donnée, & que (par les choses démontrées au Scholie préc.) comme EG à EF ainsi LN à NM , la raison de LN à NM est aussi donnée. Mais NM est donnée : Donc LN est aussi donnée. Mais le point N est donné : Donc le point L est aussi donné. Vû donc que par le point donné L , est menée la ligne droite HK vis à vis de la ligne AB donnée par position ; icelle HK est aussi donnée par position.

30. p.
25. p.
26. p.

u 2. p.
x 27. p.

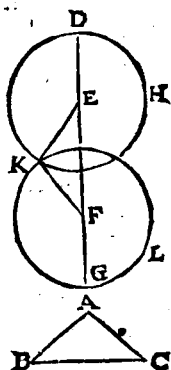
y 28. p.

PROP. XXXIX.

Si chaque côté d'un triangle sont donnez par grandeur, le triangle est donné par espece.

Du triangle ABC soient donnez chaque costez par grandeur : Je dis que le triangle ABC est donné par espece.

Car soit exposée une ligne droite DG donnée par position, & finie au point D, mais infinie vers l'autre partie G. En icelle soit prise D E égale à AB. Or puis que icelle AB est donnée par grandeur, DE l'est aussi, mais la mesme DE est aussi donnée par position, & le point D donné : Donc le point E est donné. Derechef, soit posée EF égale à BC. Et veu que BC est donnée par grandeur, EF le sera aussi. Mais icelle EF est semblablement donnée par position, & le point E est donné : Donc le point F est donné. Soit encore prise FG égale à AC. Or d'autant que icelle AC est donnée par grandeur, FG l'est aussi. Mais FG est aussi donnée par position, & le point F est donné : Donc le point G est aussi donné. Maintenant du centre E, & intervalle ED soit décrit le cercle DHK, & iceluy sera donné par position. Derechef, du centre F & intervalle FG soit décrit le cercle GLK : Donc iceluy cercle GLK est donné par position ; & partant le point d'intersection K est donné. Mais chacun des points E, F est donné : Donc chaque ligne EK, EF, FK est donnée par position & grandeur. Donc le triangle EKF est donné par espece : Mais il est égal & semblable au triangle ABC ; & partant le triangle ABC est aussi donné par espece.



SGHOLIE,

† Euclide suppose icy qu'un triangle dont les côtez sont donnez par grandeur & position est donné par espece, mais l'ancien interprete le demonstre presque ainsi. D'autant que les lignes droites KE, EF, sont données & la raison qu'elles ont entr'elles est donnée. Item les lignes droites EF, FK estans données, leur raison est aussi donnée. Et semblablement est donnée la raison d'icelles EK, FK. Derechef, pource que les mêmes lignes KE, EF sont données par position & l'angle KEF est donné par grandeur: Item les lignes droites EF, FK estans données par position, l'angle EFK est donné par grandeur; comme est aussi le restant EKF. Par ainsi au triangle EKF tous les angles sont donnez, & aussi les raisons des côtez: Donc iceluy triangle EKF est donné par espece.

1. p.

sch.

30. pr.

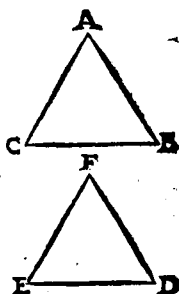
3. def.

PROP. XL.

Si les angles d'un triangle sont donnez par grandeur, le triangle est donné par espece.

Que chacun angle du triangle ABC soit donné: Je dis que le triangle ABC est donné par espece.

Car soit exposée la ligne droite DE donnée par position & par grandeur, & soit constitué au point D l'angle EDF égal à l'angle CBA, mais au point E l'angle DEF égal à l'angle BCA: Donc le troisième angle BAC est égal au troisième angle DFE. Or chacun des angles constituez aux



points A, B, C est donné: Donc chacun de ceux qui sont posez aux points D, F, E est aussi donné. Et puis que à la ligne droite DE donnée par position, & au point D donné en icelle est tirée la ligne droite DF, qui fait l'angle donné EDF; & la ligne DF est donnée par position. Et par mesme raison la ligne EF est donnée par position: Donc le point F est donné par position. Mais chacun des points D, E est donné:

29. p.

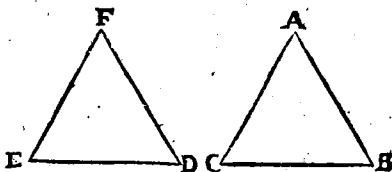
29. p.

126. p. Donc chacune des lignes DF, DE, EF est donnée
 139. p. par grandeur. Parquoy le triangle DFE est donné
 par espece; & est semblable au triangle ABC: Donc
 le triangle ABC est donné par espece.

PROP. XLI.

Si un triangle a un angle donné, & que les
 deux côtez qui le constituent aient entr'eux
 une raison donnée; le triangle est donné par
 espece.

Que le
 triangle
 ABC ait
 l'angle
 BAC don-
 né, &
 que les
 costez
 BA, AC



qui font iceluy angle soient entr'eux en raison don-
 née: Je dis que le triangle ABC est donné par espece.

Car soit exposée la ligne droite DF donnée par
 grandeur & position; mais sur icelle & au point don-
 né F soit constitué l'angle DFE égal à l'angle BAC.
 Or l'angle BAC est donné: Donc aussi est donné:
 l'angle DFE. Et puis que à la ligne droite DF don-
 née par position & du point F donné en icelle est ti-
 rée une ligne droite FE faisant l'angle donné DFE;
 m icelle ligne FE est donnée par position. Mais veu
 que la raison de AB à AC est donnée, soit faire la
 même de DF à FE, puis soit tirée DE. Donc la rai-
 son de DF à FE est donnée: Mais DF est donnée:

m 29. p.

n 2. pr.

o 27. p.

p 26. p.

q 39. p.

Donc n FE est donnée par grandeur. Mais la mesme
 FE est aussi donnée par position, & le point F est
 donné. Donc o le point E est aussi donné. Mais cha-
 cun des points D, F est donné: Donc p chacune des
 lignes droites DF, FE, DE est donnée par position &
 grandeur. Parquoy q le triangle DEF est donné par
 espece. Et veu que les deux triangles ABC, DEF ont

Un angle égal à un angle, c'est à sçavoir l'angle BAC à l'angle DFE, & les costez qui constituent iceux angles égaux, proportionnaux; le triangle ABC est semblable au triangle DEF. Mais le triangle DEF est donné par espece: Donc le triangle ABC est donné par espece.

P R O P . X L I I .

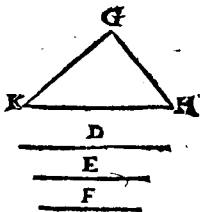
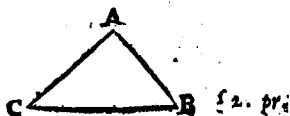
Si les côtez d'un triangle sont entr'eux en raisons données, le triangle est donné par espece.

Que les costez du triangle ABC soient entr'eux en raisons données: Je dis que le triangle ABC est donné par espece. Car soit exposée la ligne droite D donnée par grandeur; & puis que la raison de BC à AC est donnée, soit faite la mesme de D à E. Or D est donnée: Donc E est aussi

donnée. Derechef, veu que la raison de AC à AB est donnée, soit faite la mesme de E à F. Or E est donnée: Donc F est aussi donnée.

Maintenant de trois lignes droites égales aux trois données D, E, F, & desquelles deux en quelque façon qu'elles soient prises sont plus grandes que l'autre, soit constitué le triangle GHK, tellement que D soit égale à HK, mais E à KG, & GH à F. Donc chacune desdites lignes HK, KG,

GH est donnée par grandeur. Parquoy le triangle HGK est donné par espece. Et d'autant que comme BC à CA, ainsi D à E, & que D est égale à HK, & E à KG: comme BC à CA ainsi HK à KG. Derechef, pour ce que comme CA à AB, ainsi E à F, & que E est égale à KG, & F à GH: comme CA à AB, ainsi



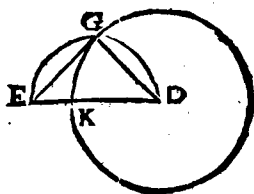
- KG à GH. Mais il a été démontré que comme BC à CA, ainsi HK à KG : Donc par égalité de raison, comme BC à AB, ainsi HK à GH. Donc ^a le triangle ABC est semblable au triangle GHK. Mais le triangle GHK est donné par espèce : Donc le triangle ABC est aussi donné par espèce.

PROP. XLIII.

Si les côtez d'autour un des angles aigus d'un triangle rectangle, ont entr'eux une raison donnée ; le triangle est donné par espèce.

Soit un triangle ABC ayant l'angle A droit, & les côtez BC, BA d'entour un des angles aigus soient entr'eux en raison donnée : Je dis que le triangle ABC est donné par espèce.

Car soit exposée la ligne droite DE donnée par grandeur & position, & sur icelle DE soit décrit



F



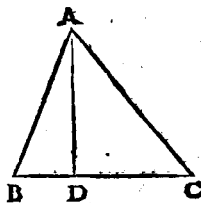
- ^b 6. def. le demy cercle DGE. Donc ^b le demy cercle DGE est donné par position : (car la ligne DE étant donnée, & coupée en deux également, le centre dudit cercle est donné par position, & le semidiam par grandeur.) Et d'autant que la raison de BC à BA est donnée, soit faite la même de DE à F : Donc la raison de DE à F est donnée. Mais DE est donnée : Donc F est ^c aussi donnée. Or BC est plus grande que ^c AB : Donc ED est ^c aussi plus grande que F. Soit accommodée DG égale à F, & tiré EG ; puis du centre D & intervalle DG soit décrit le cercle GK. Or iceluy cercle ^b est donné par position, puis que le centre D est donné, & le semidiametre DG aussi donné par

grandeur. Mais le demy cercle DGE est aussi donné par position : Donc le point d'intersection G est donné. Mais les points D, E sont aussi donnés : Donc chacune des lignes droites DE, DG, EG est donnée par position & grandeur. Parquoy le triangle DGE est donné par espece. Et puis que les triangles ABC, DGE ont un angle égal à un angle, scavoir l'angle droit BAC à l'angle droit DGE, & les côtez d'alentour les angles CBA, EDG proportionnaux, mais chacun des autres ACB, DEG moindre qu'un droit : iceux triangles ABC, DEG sont semblables. Mais le triangle DGE est donné par espece : Donc le triangle ABC est aussi donné par espece.

PROP. XLIV.

Si un triangle a un angle donné, & que les côtez d'autour un autre angle ayent entr'eux une raison donnée ; le triangle est donné par espece.

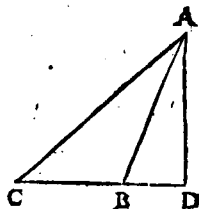
Soit le triangle ABC qui ait l'angle B donné, & les côtez BA, AC d'autour un autre angle BAC ayent entr'eux une raison donnée : Je dis que le triangle ABC est donné par espece.



Or l'angle donné B est aigu ou obtus ; (car il étoit droit à la prop. prec.) soit premierement aigu, & du point A soit tirée AD perpend. à BC : Donc l'angle ADB est donné : Mais l'angle B est aussi donné ; & partant le troisième BAD est donné. Parquoy le triangle ABD est donné par espece : & partant la raison de BA à AD est donnée. Mais la raison de la même BA à AC est aussi donnée : Donc la raison de AD à AC est donnée ; & l'angle ADC est droit. Parquoy le

¶ 43. p. triangle $\triangle ACD$ est donné par espece : Donc n l'angle C est donné. Mais l'angle B est aussi donné ; &
 ¶ 3. def. partant l'autre angle BAC est donné : Donc q le triangle ABC est donné par espece.

Maintenant, l'angle ABC donné soit obtus, & sur le côté CB prolongé soit tirée la perpendiculaire AD . D'autant que l'angle ABC est donné, aussi l'angle ABD qui est de suite sera donné. Mais l'angle ADB est aussi donné : Donc le troisième DAB est donné. Parquoy q le triangle ABD



¶ 3. def. est donné par espece : & partant n la raison de DA à AB est donnée. Mais la raison de AB à AC est aussi donnée : Donc o la raison de DA à AC est donnée ; & l'angle D est droit : Donc le triangle DAC est donné par espece ; & partant l'angle ACB est donné. Mais l'angle ABC est aussi donné : Donc le troisième angle BAC est donné. Parquoy le triangle ABC est donné par espece.

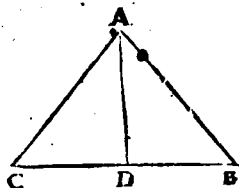
PROP. XLV.

Si un triangle a un angle donné, & que le composé des deux côtez d'autour iceluy angle donné ait à l'autre côté une raison donnée : le triangle est donné par espece.

Soit le triangle ABC , qui ait l'angle BAC donné, mais la ligne composée des deux côtez AB , AC qui constituent iceluy angle BAC ait au troisième côté BC une raison donnée : Je dis que le triangle ABC est donné par espece.

Car l'angle BAC soit coupé en deux également
 ¶ 7. pr. par la ligne AD . Donc l'angle CAD est donné.
 ¶ 3. 6. Et puis que comme AB à AC , ainsi BD à CD , en
 ¶ 18. 5. composant, & comme la composée CAB est à CA ,

ainsi BC à CD; & en
permutant, comme la
composée CAB à CB,
ainsi CA à CD. Mais
la raison de la composée
BAC à BC est donnée:
Donc la raison de CA à
CD est aussi donnée;
& l'angle CAD est don-
né: Donc ^u le triangle
ACD est donné par espe-
ce; & partant l'angle C est donné. Mais l'angle BAC
est aussi donné: Donc le troisième B est donné. Par-
quoy ^x le triangle ABC est donné par espece.

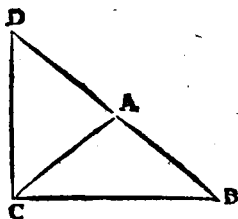


^u 44.p.

^x 40.p.

AUTREMENT.

Soit prolongée BA
directement jusques en
D, tellement que AD
soit égale à AC, puis
soit joint CD. D'au-
tant que la raison de la
composée CAB à CB
est donnée, & que AD
est égale à AC; la rai-
son de la toute BD à



BC est donnée. Mais l'angle ADC est aussi don-
né, car il est moitié de l'angle donné BAC: (pource
qu'iceluy BAC y est égal aux deux angles intérieurs y 32. I.
ACD, ADC qui sont ^z égaux entr'eux étans les cô- z 5. I.
tez AC, AD égaux.) Parquoy le triangle BDC
^a est donné par espece; & partant l'angle B est don- a 44.p.
né. Mais l'angle BAC est aussi donné: Donc le reste
ACB est donné. Parquoy ^b le triangle ABC est b 40.p.
donné par espece.

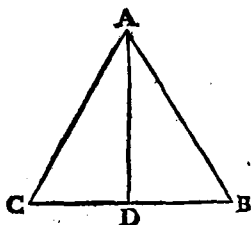
PROP. XLVI.

Si un triangle a un angle donné, & que la com-
posée des deux côtez d'autour un autre an-

gle ait à l'autre côté une raison donnée ; le triangle est donné par espece.

Soit le triangle ABC , lequel ait l'angle B donné, mais la composée des deux côtez d'autour un autre angle BAC , c'est-à-dire CAB , ait à l'autre côté BC une raison donnée : Je dis que le triangle ABC est donné par espece.

Car soit couppe l'angle BAC en deux également par la ligne AD : Donc (comme il a été demonsté à la prec. prop.) la composée CAB est à CB , comme AB à BD . Mais la raison d'icelle composée CAB

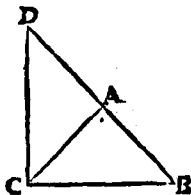


à CB est donnée : Donc aussi la raison de AB à BD est donnée. Mais l'angle B est aussi donné : Donc le triangle ABD est donné par espece ; & partant d l'angle BAD est donné. Mais l'angle BAC est double d'iceluy BAD ; & partant il est aussi donné : Donc le troisieme angle C est donné. Parquoy le triangle ABC est donné par espece.

c 41. p.
d 3. def.
conn.

AUTREMENT.

Soit prolongée BA directement, & posé AD égale à AC , puis joint CD . D'autant que la raison de la composée CAB à CB est donnée, & que AD est égale à AC : la raison de BD à BC est donnée ; & l'angle B est aussi donné : Donc le triangle CDB est donné par espece ; & partant d l'angle D est donné : Donc l'angle BAC , qui est



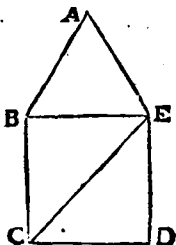
double d'iceluy, est aussi donné. Parquoy l'autre angle ACB est donné : Donc le triangle ABC est donné par espece.

PROP. XLVII.

Les rectilignes donnez par espece, se divisent en triangles donnez par espece.

Soit un rectiligne $ABDE$ donné par espece ; Je dis qu'il se divise en triangles donnez par espece.

Car soient tirées les lignes droites EB , EC . D'autant que le rectiligne $ABCDE$ est donné par espece, l'angle BAE est donné, & la raison du côté AB à AE : Donc $\circ$ le triangle BAE est donné par espece. ^d 3. def. *conver.*
 Parquoy l'angle ABE est donné. Mais tout l'angle ABC est aussi donné : Donc $\circ$ le reste EBC est donné. ^e 41. p. ^f 4. p.
 Mais la raison du côté AB à BE , & aussi celle de AB à BC est donnée : donc $\circ$ la raison de BC à BE est donnée ; & l'angle CBE est aussi donné : partant $\circ$ le triangle BCE est donné par espece. ^o 8. pr.
 Par même discours on démontrera que le triangle CDE est donné par espece. ^o 41. p.
 Donc les rectilignes donnez par espece se divisent en triangles donnez par espece.

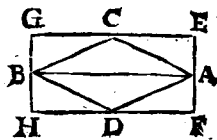


PROP. XLVIII.

Si sur une même ligne droite sont décrits des triangles donnez par position, ils auront entr'eux une raison donnée.

Sur la mesme ligne droite AB soient décrits deux triangles ACB , ABD donnez par espece : Je dis que la raison de ACB à ABD est donnée.

Car des points A, B soient tirées à angles droits sur la ligne AB, les lignes AE, BG, & prolongées jusqu'aux points F, H : mais par les points C, D, soient menées ECG, FDH parallèles à AB. D'autant donc que le



g 3. def. triangle ABC est donné par espece, & la raison de CA à BA est donnée, & l'angle CAB aussi donné.

sonu.

Mais l'angle BAE est donné : Donc le reste CAE est aussi donné. Mais l'angle CEA est donné ; & partant l'autre angle ACE est aussi donné. Parquoy le triangle AEC est donné par espece. Or la raison de EA à

h 40 p.

AB est donnée, (car *d* la raison de EA à AC, & celle de AC à AB est donnée.) Et semblablement est

o 8. pr.

d 3. def.

donnée la raison de FA à AB. Donc la raison de EA à AF est donnée. Mais comme AE est à AF ainsi le

i 1. 6.

parallelogramme AH est au parallelogramme AG. Mais ACB est

i 41. 1.

moitié de AH, & ADB moitié de AG : Donc la raison du triangle ACB au triangle

m 15. 5.

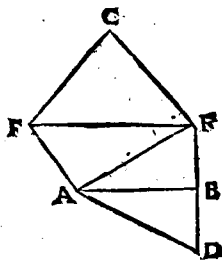
ADB est donnée ; car c'est la mesme raison que de AH à AG, c'est à dire de EA à AF, qui est donnée.

PROP. XLIX.

Si sur une même ligne droite sont décrits deux quelconques rectilignes donnez par espece; ils auront entr'eux une raison donnée.

Sur une mesme ligne droite AB soient décrits deux quelconques rectilignes AECFB, ADB données par espece : Je dis que la raison de AECFB à ADB est donnée.

Car soient menées FA, FE: Donc chacun des triangles ABF, AFE, ECF est donné par espece. Et veu que sur une mesme ligne droite EF sont décrits les



a 47. p.

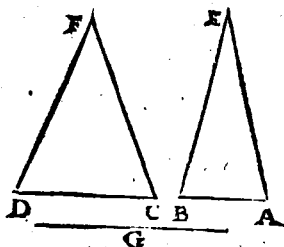
triangles ECF, EAF donnée par espece ; la raison de ECF à EAF est donnée. Donc en composant, la raison de AECF à EAF est donnée. Mais la raison d'iceluy EAF à FAB est donnée, puis que ce sont triangles donnez par espece décrits sur une mesme ligne droite AF : Donc q la raison de AECF à FAB est donnée. Parquoy en composant, la raison de AECFB à FAB est donnée. Mais la raison d'iceluy FAB à ABD est donnée : Donc q la raison de AECFB à ABD est aussi donnée.

PROP. L.

Si deux lignes droites ont entr'elles une raison donnée, & que sur icelles soient décrits des rectilignes semblables & semblablement posez ; ils auront entr'eux une raison donnée.

Soient deux lignes droites AB, CD ayans entr'elles une raison donnée, & sur icelles soient décrits les rectilignes AEB, CFD semblables & semblablement posez ; Je dis que la raison qu'ils ont entr'eux est donnée.

A icelles AB, CD soit prise une troisieme proportion G. Donc comme AB à CD, ainsi CD à G. Mais la raison de AB à CD est donnée : Donc la raison de CD à G est aussi donnée. Parquoy q la raison de AB à G est donnée. Mais comme AB à G, ainsi AEB à CFD : Donc la raison d'iceluy AEB à CFD est donnée.

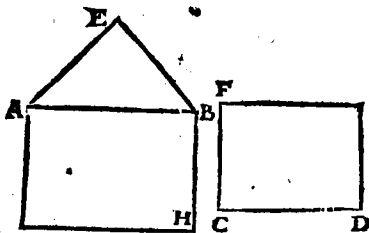


q 8. pr.
r corol.
19. om.
20. 6.

PROP. LI.

Si deux lignes droites ont entr'elles une raison donnée, sur icelles soient décrits quelconques rectilignes donnez par espece ; ils auront entr'eux une raison donnée.

Soient deux lignes droites AB, CD ayans entr'elles une raison donnée, & soient descriptes sur icelles quelconques rectilignes AEB CFD donnez



par espece: Je dis que la raison de AEB à CFD est donnée,

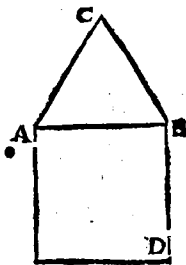
- Car sur AB soit décrit le rectiligne AH semblable & semblablement posé à DF . Or DF est donné par espece: Donc aussi AH est donné par espece. Mais AEB est aussi donné par espece & décrit sur la mesme
49. p. ligne AB : Donc la raison de AEB à AH est donnée: Et puis que la raison de AB à CD est donnée, & que sur icelles lignes sont décrits les rectilignes AH, DF
50. p. semblables & semblablement posez: la raison d'iceluy AH à DF est donnée. Mais la raison de AEB à AH
8. pr. est aussi donnée: Donc la raison de AEB à DF est donnée.

PROP. LII.

Si sur une ligne droite donnée par grandeur, est décrite une figure donnée par espece; Icelle figure est donnée par grandeur.

Sur la ligne droite AB donnée par grandeur soit décrite la figure ACB donnée par espece: Je dis que la figure ACB est donnée par grandeur.

Car sur la mesme ligne AB soit décrit le quarré AD . Donc AD est donné par espece † & par grandeur. Et veu que sur la ligne droite AB sont décrits les deux rectilignes ACB, AD donnez par



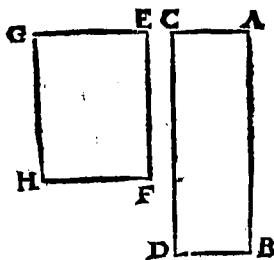
49. p. espece; la raison de ACB à AD
2. p. est donnée. Donc ACB est donnée par grandeur.

† L'ancien interprete a remarqué icy que tout quarré est donné par espece, pource que tous les angles en sont donnez, étans tous droits & égaux : Mais aussi les raisons des costez sont données ; car iceux costez étans tous égaux, aussi les raisons en sont égales. Davantage, toutesfois & quantes qu'un quarré est exposé, on en peut exhiber un égal à iceluy ; & partant le quarré est donné par grandeur, & aussi chaque costé d'iceluy.

PROP. LIII.

S'il y a deux figures données par espece, & qu'un côté de l'une ait à un côté de l'autre une raison donnée : les autres côtez auront aussi aux autres côtez raisons données.

Soient deux figures AD, EH données par espece, & la raison de BD à FH soit donnée : Je dis que la raison des autres costez aux autres costez est donnée.



^a 3. d.
^b 2. p.

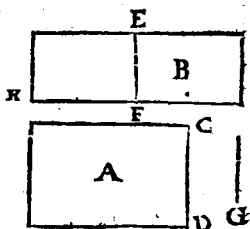
Car puis que la raison de BD à FH est donnée, & aussi celle ^a de BD à BA : ^b la raison d'icelle AB à FH est donnée. Mais la raison d'icelle FH à FE ^a est aussi donnée : donc ^b la raison de AB à EF est donnée : Aussi est semblablement donnée la raison des autres costez aux autres costez.

PROP. LIV.

Si deux figures données par espece ont entr'elles une raison donnée, aussi les côtez d'icelles seront entr'eux en raison donnée.

Soient deux figures A, B données par espece, qui aient entr'elles une raison donnée : Je dis que leurs côtez auront entr'eux une raison donnée.

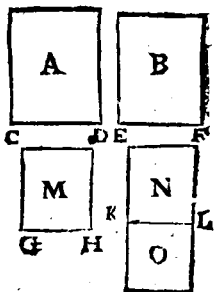
Car ou la figure A est semblable, & semblablement posée à B, ou non. Qu'elle soit premièrement semblable & semblablement posée, & soit prise κ G troisième proportion. aux lignes droites CD, EF. ϵ corol. Donc comme CD à G, ainsi A à B. Mais la raison de A à B est donnée: donc 19. ou 20. 6. aussi la raison de CD à G est donnée. Et veu que CD, EF, G sont proportion. δ aussi la raison de CD, à EF, est donnée. Mais A & B sont ϵ 53. p. données par espèce: donc ϵ les autres côtes auront raison donnée aux autres côtes.



Maintenant, la figure A ne soit semblable à la figure B; & soit décrite sur EF la figure EH semblable & semblablement posée à A: donc la figure EH est donnée par espèce. Mais la figure B est aussi donnée par espèce: donc ϵ la raison de B à EH est donnée; & ϵ 49. p. partant la raison de A à icelle EH ϵ est aussi donnée. ϵ 8. p. Mais A est semblable à EH: donc (par ce que dessus) la raison de CD à EF est donnée: & semblablement la raison des autres côtes aux autres côtes est donnée.

AUTREMENT.

Soit exposée une ligne droite donnée GH. Maintenant ou la figure A est semblable à la figure B, ou non. Soit premièrement semblable; & soit fait comme CD à EF, ainsi GH à LK: puis sur GH, LK soient décrites les figures M, N semblables & semblablement posées à icelles A, B: lesquelles M, N seront conséquemment don-



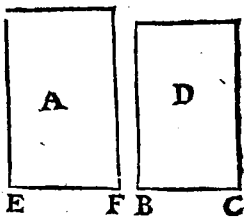
nées par especes. Donc puis que comme CD à EF, ainsi GH à LK, & que sur icelles lignes CD, EF, GH, LK sont décrites les figures A, B, MN semblables & semblablement posées: ^h cōme A à B, ainsi M à N. Mais la ^h 22.6. raison de A à B est donnée: donc la raison de M à N est donnée. Mais ⁱ M est donnée, attendu que c'est une ⁱ 52. p. figure donnée par espee décrite sur une ligne droite donnée par grandeur: donc N est aussi donnée. Maintenant, sur LK soit décrit le quarré O: donc ^l 1. sch. la figure O est donnée par espee. Parquoy la raison ^{52. p.} de K à N est donnée. Mais N est donnée: donc K est donnée; & conséquemment ^l aussi KL. Mais GH est donnée: donc ^m la raison de GH à KL est donnée. ^m 3. pr. Mais comme GH à LK, ainsi CD à EF: donc la raison de CD à EF est donnée; & partant les figures A & B étans données par especes: ⁿ les autres costez d'icelles auront aussi aux autres costez une raison donnée. ⁿ 53. p. Mais si les figures ne sont semblables; sera procedé comme en la derniere partie de la demonstration cy-dessus.

P R O P. L V.

Si un espace est donné par espee & par grandeur, les côtez d'iceluy seront donnez par grandeur.

Soit un espace A donné par espee & par grandeur: Je dis que les côtez d'iceluy sont donnez par grandeur.

Car soit exposée la ligne droite BC donnée par position & par grandeur; & sur icelle BC soit décrit l'espace D semblable & semblablement posé à



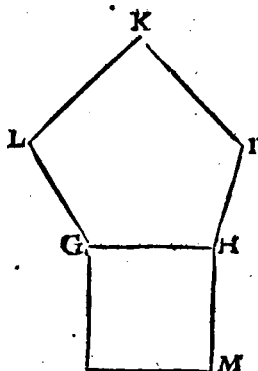
A: partant iceluy espace D est donné par espee, Et pource qu'il est décrit sur la ligne BC donnée par grandeur; il est aussi donné ^o par grandeur. Mais la ^o 52. p. figure A est aussi donnée: donc ^m la raison de A à D

est donnée. Mais icelles figures A, D sont données par espece : donc p la raison de la ligne EF à la ligne BC est donnée. Mais BC est donnée : donc m EF est aussi donnée. Mais la raison d'icelle EF à FG est donnée : donc r FG est donnée. Et par mêmes raisons on démontrera chacun des autres côtez estre donné par grandeur.

AUTREMENT.

Soit l'espace GHIKL donné par espece & par grandeur : Je dis que les côtez d'iceluy sont donnez par grandeur.

Car soit décrit sur la ligne droite GH le quarré GM : donc r GM est donné par espece. Mais l'espace GHIKL est aussi donné par espece : donc t la raison d'iceluy espace GK à GM est donnée. Mais GK est donné par grandeur : donc r GM est aussi donné par grandeur. Et veu que GM est le quarré de la ligne GH ; icelle ligne GH est donnée par grandeur. Parquoy semblablement chacune des autres lignes HI, IK, KL, LG est donnée.



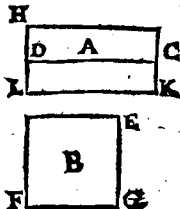
PROP. LVI.

Si deux parallelogrammes équiangles ont entr'eux une raison donnée, comme un côté du premier est à un côté du second, ainsi l'autre côté du second est à celle à laquelle l'autre côté du premier a la raison donnée que le parallelogramme a au parallelogramme.

Soient

Solent deux parallelogrammes équiangles A, B ayans entr'eux une raison donnée : Je dis que comme CD est à FG, ainsi GE est à celle à laquelle DH a la raison donnée que le parallelogramme A a au parallelogramme B.

Car soit prolongé directement HD jusques en L, tellement que comme CD est à FG, ainsi HD soit à DL; & soit achevé le parallelogramme DK. D'autant que comme CD à FG, ainsi HD à DL, & que ^a CD est égal à KL : comme LK à FG, ainsi GE à ^a 34.1. DL; & par ainsi les côtez d'autour les angles égaux DLK, EGF, sont reciproquement proportionnaux: parquoy ^b DK est égal à B. Et partant puis que la ^b 14.8. raison de A à B est donnée, & que B est égal à DK; la raison de A à DK est donnée. Mais comme ^c A à ^c 1.6. DK (c'est-à-dire B) ainsi HD à DL : donc la raison de HD à DL est aussi donnée. Et vû que comme CD à FG, ainsi GE à DL, & que la ligne droite HD a à DL raison donnée, savoir celle qu'a l'espace A à l'espace B : comme CD est à FG, ainsi GE est à celle à laquelle HD a la raison donnée qu'a l'espace A à l'espace B, c'est-à-dire la raison de HD à DL.



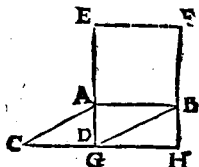
PROP. LVII.

Si un espace donné est appliqué à une ligne droite donnée en angle donné, la largeur de l'application est donnée.

A la ligne droite donnée AB soit appliqué l'espace donné AD, en angle donné CAB : Je dis que CA est donnée.

Car sur AB soit décrit le quarré AF : donc ^d ice- ^d sch. luy AF est donné. Soient prolongées les lignes EA, ^e 2. pr. FB, CD aux points G, H. Vû donc que chaque

36. 1. espace AD, AF est donné, leur raison est aussi donnée. Mais AD est égal à AH : donc la raison de AF à AH est donnée. Parquoy la raison de EA à AG est donnée. (car c'est la même que de AF à AH.) Mais EA est égale à AB : donc la raison de AB à AG est donnée. Maintenant puis que l'angle CAB est donné, & l'angle GAB aussi donné ; le reste CAG est donné. Mais l'angle CGA est aussi donné, pource qu'il est droit : donc le reste ACG est donné. Parquoy le triangle CAG est donné par espèce. Donc la raison de CA à AG est donnée. Mais la raison de AB à la même AG est aussi donnée : Donc la raison de CA à AB est donnée ; & icelle AB est donnée. Parquoy CA est aussi donnée.

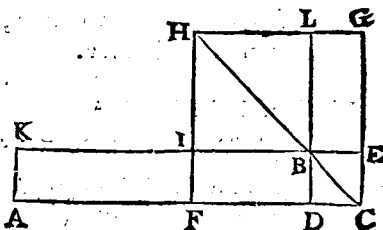


PROP. LVIII.

Si un-espace donné est appliqué à une ligne droite donnée, défailant d'une figure donnée par espèce ; les largeurs du défaut sont données.

Soit un espace donné AB appliqué selon la ligne droite donnée AC défailant de la figure DE donnée par espèce : Je dis que chacune des lignes droites BD, DC est donnée.

Car soit coupée AG en deux également au point F ; donc tant AF, que FC est donnée. Sur icelle FC soit décrit le rectiligne FG

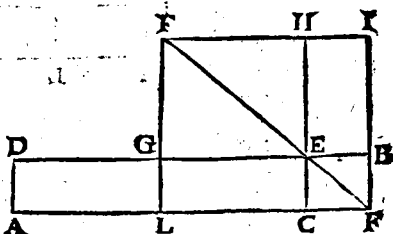


semblable & semblablement posé à DE, & soit construite la figure. Donc FG est donné par espece : & puis qu'il est décrit sur la ligne droite FC donnée par grandeur, iceluy rectiligne FG est ^h aussi donné ^h 32. p. par grandeur. Mais FG est égal à AB, IL ; (car ⁱ AJ, FE étans égaux, & ⁱ FB, BG aussi égaux, ⁱ 36. I. le gnomon ICL est égal à AB, & partant leur adjou- ^l 43. I. tant IL commun, FG sera égal à AB, IL :) Donc les figures AB, IL ensemble sont données par grandeur. Mais AB est donnée par grandeur : donc ^m la ^m 4. p. restante IL est aussi donnée par grandeur. Mais elle est aussi donnée par espece, puis qu'elle est ⁿ sem- ⁿ 24. 6. blable à DE : Donc ^o les côtez d'icelle IL sont don- ^o 55. p. nez. Parquoy IB est donnée : & puis qu'elle est égale à FD ; icelle FD est aussi donnée. Mais FC est ^p 34. I. donnée : Donc le reste DC ^m est donné ; & ^q 2. rai- ^q 3. d. son donnée à BD : & partant ^r BD est donnée. ^r 2. pr.

PROP. LIX.

Si un espace donné est appliqué selon une ligne droite donnée, excédant d'une figure donnée par espece ; les largeurs de l'excès sont données.

Soit un espace donné AB appliqué selon la ligne droite donnée AC, excédant de la figure CB don-



née par espece : Je dis que chacune des lignes CE, CF est donnée.

Car DE étant coupée en deux également en G, soit décrit sur GE le rectiligne GH semblable &

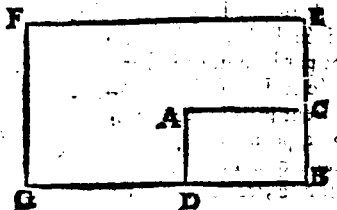
que les parallelogr. GN, CB sont avec le parallelogr. LO au-
 tour d'un même diametre, ils sont ^b semblables entr'eux. ^b 24.6.
 Parquoy comme FC à CE, ainsi EG à GM: Semblable-
 ment pource que les parallelogr. CB, GH sont semblables,
 comme FC à GE, ainsi EG à GK: Donc ^a comme EG à GM, ^d II. 5.
 ainsi EG à GK. Parquoy ^c GM & GK sont égales; la partie ^c 9.5.
 au tout; Ce qui est absurde. On démontrera par mesmes
 raisons que le diametre prolongé ne tombera pas au dessous
 du point K. Donc les parallelogrammes CB, GE consi-
 stent allentour d'un même diametre.

PROP. LX.

Si un parallelogramme donné par espee & par
 grandeur est augmenté ou diminué d'un
 gnomon, les largeurs du gnomon sont don-
 nées.

Que le parallelogramme AB donné par espee & par
 grandeur, soit premièrement augmenté du gnomon
 CFD. Je dis que
 chacune des li-
 gnes droites CE,
 DG est donnée.

Car puis que
 AB est donné, &
 le gnomon CFD
 aussi donné, tout
 le parallelogram-
 me BF est donné:



Mais il est aussi donné par espee, attendu qu'il est
 semblable à BA. Donc ^e les costez d'iceluy BF sont ^e 55.p.
 donnez; & partant chacune des lignes BE, BG est
 donnée. Mais chacune des lignes BC, BD est don-
 née: Donc chacune des lignes restantes CE, DG est
 aussi donnée.

Maintenant que le parallelogramme BF donné par
 espee & par grandeur soit diminué du gnomon donné
 CFD: Je dis que chacune des lignes CE, DG est
 donnée. Car d'autant que BF est donné, & le gno-

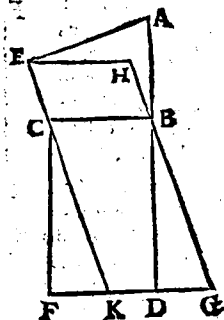
mon CFD donné ; le reste AB est aussi donné. Mais il est aussi donné par espèce, veu qu'il est semblable à BF: Donc les costez d'iceluy AB sont donnez ; & partant chacune des lignes CB, BD est donnée. Mais chacune des lignes ; BE, BG est donnée : Donc aussi chacune des restées CE, DG est donnée.

PROP. LXI.

Si à un côté d'une figure donnée par espèce est appliqué un espace parallelogramme en angle donné, & que la figure donnée ait au parallelogramme une raison donnée: le parallelogramme est donné par espèce.

Qu'à un costé de la figure ABCE donnée par espèce soit appliqué un espace parallelogramme CD en angle donné BCF, & soit donnée la raison de la figure AC au parallelogramme CD: Je dis que CD est donné par espèce.

Car par le point B soit tirée BH parallele à CE, & par le point E soit menée EH parallele à CB, & soient prolongées EC, HB aux points K, G. D'autant que l'angle BCE est donné, & la raison de EC à CB, & le parallelogramme CH, est donné par espèce: Mais la figure ABCE est aussi donnée par espèce, & est décrite sur la mesme ligne BC que le parallelo-



53. d.

49. p. gramme CH donné par espèce: Donc la raison de la figure ABCE au parallelogramme CH est donnée. Mais par l'hypothese la raison d'icelle figure ABCE au parallelogramme CD est aussi donnée; & CD est égal à CG: Donc la raison de CH à CG est don-

36. 1.

8. p.

née. Parquoy la raison de la ligne EC à la ligne CK est donnée : (car ^m comme CH à CG, ainsi EC à ^m CK.) Mais la raison de EC à CB est aussi donnée : Donc la raison d'icelle CB à CK est donnée. Et ven que l'angle ECB est donné, aussi l'angle de suite BCK est donné : Mais l'angle BCF est posé donné ; & partant le resté FCK est donné. Item l'angle CKF est donné, attendu qu'il est égal à l'angle BCK : Donc l'autre angle CFK est donné. Parquoy le triangle FCK est donné par espece ; & partant la raison de FC à CK est donnée. Mais la raison de CB à la mesme CK est aussi donnée : Donc la raison de EC à CB est donnée ; & l'angle BCF est aussi donné. Parquoy le parallelogramme CD est donné par espece.

S C H O L I E.

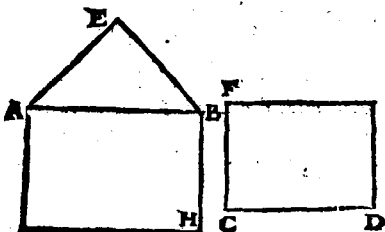
† Encore qu'il soit manifeste qu'un parallelogramme qui a un angle donné, & la raison des costez d'autour iceluy angle aussi donnée, soit donné par espece ainsi que le dit icy Euclide, si est-ce que l'ancien interprete l'a voulu demonstrier ainsi. Pource qu'au parallelogramme CH l'angle ECB est donné, aussi l'angle CEH est donné : car la ligne droite EC tombant sur les paralleles EH, CB fait les deux angles interieurs d'une mesme part égaux à deux droits : Et partant puis que l'angle ECB est donné, les autres angles sont donnez. Et pource que la raison de EC à CB est donnée, & que BH est égale à CE, & EH à BC la raison des costez entr'eux est aussi donnée.

P R O P. LXII.

Si deux lignes droites ont entr'elles une raison donnée, & sur l'une d'icelles est décrité une figure donnée par espece, mais sur l'autre un espace parallelogramme en angle donné, & que la figure ait au parallelogramme une raison donnée ; le parallelogramme est donné par espece.

Que les deux lignes droites AB , CD aient entr'elles une raison donnée, & sur AB soit décrite la figure AEB donnée par espece, mais sur CD le parallelogramme DF en angle donné DCF ; & la raison d'icelle figure AEB au parallelogramme DF soit donnée: Je dis que le parallelogramme DF est donné par espece.

Car sur la ligne AB soit décrit le parallelogramme AH semblable & semblablement posé à DF . Veu donc que la raison de AB à CD est donnée,



& sur icelles lignes sont décrits les rectilignes AH , FD semblables & semblablement posés; & la raison de AH à FD est donnée. Mais la raison de FD à AEB est aussi donnée; Donc la raison de AH à AEB est donnée. Mais l'angle ABH est aussi donné, étant égal à l'angle FCD ; par ainsi la figure AEB est donnée par espece, & à AB l'un des costez d'icelles est appliqué le parallelogramme AH en angle donné ABH , & la raison de ladite figure AEB à iceluy parallelogramme AH est donnée: Donc le parallelogramme AH est donné par espece, & partant FD , qui luy est semblable, est aussi donné par espece.

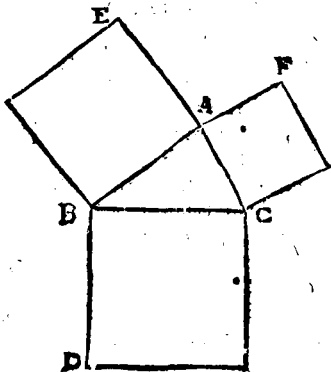
PROP. LXIII.

Si un triangle est donné par espece, le quarré qui est décrit sur un chacun des costez aura raison donnée au triangle.

Soit le triangle ABC donné par espece, & soient décrits sur chacun des côtes d'iceluy les quarrés BE , CD , CF : Je dis que chacun des quarrés BE , CD ,

CF aura une raison donnée au triangle ABC.

Car puis que sur une mesme ligne droite BC sont décrits les deux rectilignes ABC, CD donnez par espece; la raison d'iceluy ABC à CD est donnée; Et partant est aussi donnée la raison de l'un & l'autre des quarez BE, CF au triangle ABC.



49. 2.

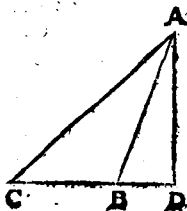
PROP. LXIV.

Si un triangle a un angle obtus donné, cet espace là duquel le côté soutenant l'angle obtus peut plus que les côtez comprenant iceluy angle, aura une raison donnée au triangle.

Soit le triangle ambligone ABC ayant l'angle obtus ABC donné : & ayant prolongé directement CB, de A soit tirée la perpendiculaire AD; Je dis que l'espace duquel le quarré de la ligne AC excède les quarez des lignes AB, BC, c'est-à-dire le double du rectangle sous CB, BD, aura une raison donnée au triangle ABC.

12. 2.

Car puis que l'angle ABC est donné, aussi l'angle ABD est donné. Mais l'angle ADB est aussi donné : Donc l'autre angle BAD est donné. Parquoy le triangle ABD est donné par espece : Donc la raison de AD à DB est donnée. Mais comme AD



7. 40.

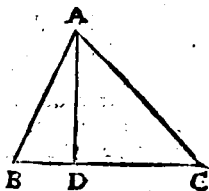
3. d.

1. 6. à DB , ainsi a le rectangle de AD , BC au rectangle de BC , BD . Mais la raison de AD ; DB est donnée: Donc aussi est donnée la raison du rectangle de AD , BC au rectangle de BC , BD . Parquoy la raison du double d'iceluy rectangle de BC , BD au rectangle de AD , BC est aussi donnée: Mais iceluy rectangle de AD , BC a aussi raison donnée au triangle ABC : (c'est à sçavoir la raison double, car le rectangle est double du triangle) donc la raison du double rectangle de BC , BD au triangle ABC est donnée. Mais iceluy double rectangle de CB , BD , est cet espace là duquel le quarré de la ligne AC , excède les quarrés des lignes AB , BC : Donc iceluy espace a raison donnée au triangle ABC .

PROP. LXV.

Si un triangle a un angle aigu donné, cet espace là duquel le côté subtendant ledit angle aigu peut moins que les côtes comprenant iceluy angle aigu, aura au triangle une raison donnée.

Soit le triangle ABC ayant l'angle aigu ACB donné, & du point A soit menée AD perpendiculaire à BC : Je dis que cet espace là duquel le quarré de la ligne droite AB est moindre que les quarrés des lignes AC , CB , c'est-à-dire d le double du rectangle de BC , CD , à une raison donnée au triangle ABC .



13. 2. Car d'autant que l'angle C est donné, & l'angle ADC aussi donné, l'autre angle DAC est donné: parquoy e le triangle ADC est donné par espèce; & partant la raison de AD à DC est donnée, & conséquemment aussi f celle du rectangle de BC , CD au

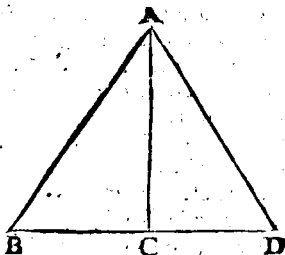
rectangle de BC , AD . Donc la raison du double rectangle de BC , CD au rectangle de BC , AD est donnée. Mais est aussi donnée la raison d'iceluy rectangle de BC , AD au triangle ABC : (car le rectangle est double du triangle) donc la raison du double rectangle de BC , CD au triangle ABC est donnée. Et vu que iceluy double rectangle de BC , CD est ce dont le quarré de la ligne AB est moindre que les quarrés des lignes AC , BC ; cet espace là duquel le quarré de la ligne droite AB est moindre que les quarrés des lignes AC , BC aura raison donnée au triangle ABC . 41. 1.
8. p.

P R O P. LXVI.

Si un triangle a un angle donné, le rectangle des lignes comprenans iceluy angle aura une raison donnée au triangle.

Soit le triangle ABD , qui ait l'angle B donné : Je dis que le rectangle compris sous AB , BD a raison donnée au triangle ABD .

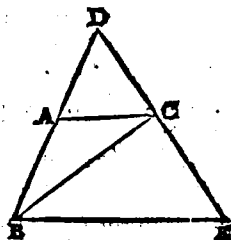
Car du point A soit tirée AC perpendiculaire à BD . Donc puis que l'angle B est donné, & aussi l'angle ACB , l'autre angle



BAC est pareillement donné. Parquoy le triangle ABD est donné par espece : & conséquemment est donnée la raison de AB à AC . Mais comme AB à AC , ainsi le rectangle de AB , BD au rectangle de BD , AC : Donc la raison du rectangle de AB , BD au rectangle de BD , AC est donnée. Mais la raison d'iceluy rectangle de BD , AC au triangle ABD est aussi donnée : (car c'est la raison double, le rectangle étant double du triangle) donc la raison du rectangle de AB , BD au triangle ABD est donnée. 40. p.
1. 6.
41. p.

Si un triangle a un angle donné, cet espace là duquel la composée des deux costez compre-
nans iceluy angle peut plus que l'autre côté,
aura raison donnée au triangle.

Soit le triangle ABC ,
ayant l'angle BAC don-
né : Je dis que cet es-
pace là duquelle quarré de
la composée de BA , AC est
plus grand que le quarré
de BC , aura raison donnée
au triangle ABC .



Car soit prolongée BA ,
tellement que AD soit
égale à AC , puis étant ti-
rée DCE indeterminement
du poinct B soit menée BE

parallèle à AC rencontrant icelle DE en E . D'autant
que AD est égale à AC , DB est égale à BE : (car les
deux triangles ADC , BDE sont semblables) & du
sommet B est tirée à la base DE la ligne droite BC .
Donc le rectangle de DC , CE avec le quarré de BC
est égal au quarré de BD . Mais icelle BD est composée
de BA , AD : Donc le quarré de la composée d'icelles
 AB , AC est plus grand que le quarré de BC du re-
ctangle de DC , CE .

Maintenant, je dis que le rectangle de DC , CE a
raison donnée au triangle ABC . Car d'autant que
l'angle BAC est donné, aussi est donné l'angle DAC .
Mais chacun des angles ADC , ACD est donné, car
il est moitié de l'angle BAC , qui est donné : Donc

le triangle ADC est donné par espece, & partant la
raison de DA à DC est donnée. Donc aussi est don-
née la raison du quarré d'icelle DA au quarré de DC .

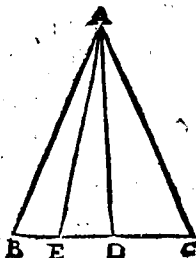
Et veu que comme BA à AD ainsi EC à CD , & aussi
comme BA à AD ainsi le rectangle de BA , AD au
quarré de AD , & comme EC à CD ainsi aussi le
rectangle de EC , CD au quarré de CD : En permu-

tant, comme le rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD , ainsi le carré de AD au carré de DC . Mais la raison d'iceluy carré de AD au carré de DC est donnée : Donc la raison du rectangle de BA, AD au rectangle de EC, CD est aussi donnée. Mais AD est égale à AC : Donc la raison du rectangle de BA, AC au rectangle de EC, CD est donnée. Mais la raison du rectangle de BA, AC au triangle ABC est donnée, pource que l'angle BAC est donné : Donc la raison du rectangle EC, CD au triangle ABC est donnée. Mais le rectangle de EC, CD est ce dont le carré de la composée de BA, AC est plus grand que le carré de BC : Donc cet espace là duquel le carré de la composée de BA, AC est plus grand que le carré de BC , aura raison donnée au triangle ABC .

SCHOLIE.

† Euclide suppose icy que lors qu'en un triangle Isoscelle est tirée du sommet à la base quelque ligne droite ; le carré d'icelle ligne avec le rectangle contenu sous les segmens de la base est égal au carré de l'une ou l'autre des jambes : Ce que l'ancien Interprete demonstre ainsi.

Soit le triangle Isoscelle ABC , duquel les jambes soient AB, AC , & du sommet A soit tirée à la base BC quelconque ligne droite AD : Je dis que le carré de AD avec le rectangle de BD, DC est égal au carré de l'une ou l'autre des jambes AB, AC . Or la ligne AD est perpendiculaire à BC , ou non : Quelle soit premièrement perpendiculaire ; Donc elle coupera la base BC en deux également au point D ; & partant le rectangle sous BD, DC est égal au carré d'icelle BD , & leur adjoutant le commun carré de AD : le rectangle de BD, DC avec le carré de AD sera égal aux carrés de DB, AD . Mais à iceux carrés de AD, DB , est égal le carré de AB : donc



u sch.
26. I.

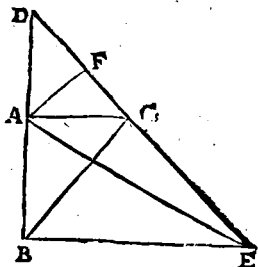
247. I.

le carré de AB est égal au rectangle de BD , DC , & carré de AD ensemble.

Maintenant AD ne soit perpendiculaire, mais que du point A tombe sur BC la perpendiculaire AE : Cela étant ainsi, BC sera coupée en deux également en E , & inégalement en D ; parquoy le rectangle de BD , DC avec le carré de DE est égal au carré de BE : & ajoutant le commun carré de AE , le rectangle de BD , DC avec les carrés de DE , AE sera égal aux carrés de BE , AE . Mais le carré de AD est égal aux deux carrés de DE , AE : Donc le rectangle de BD , DC avec le carré de AD est égal aux carrés de BE , AE . Mais à deux carrés de BE , AE est égal le carré de AB : Donc le carré de AD avec le rectangle de BD , DC , est égal au carré de AB .

AUTREMENT.

Ayant construit comme en la démonstration préc. du point A soit tirée AF perpendiculaire à CD , & soit menée AE . D'autant que l'angle BAC est donné, aussi le sera ACF moitié d'iceluy. Mais l'angle AFC est donné ; & partant le triangle AFC est donné par espèce :



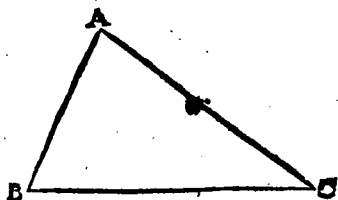
Donc la raison de AF à FC est donnée. Mais la raison de CD à la même FC est aussi donnée, attendu que CD est double de FC : Donc la raison de CD à AF est donnée ; & partant est aussi donnée la raison du rectangle de CD , EC au rectangle de AF , EC : (car c'est la même raison que de CD à AF .) Mais la raison du rectangle de AF , EC au triangle ACE est donnée, vû qu'il est double d'iceluy triangle : donc la raison du rectangle de CD , CE au triangle ACE est aussi donnée. Mais le triangle ACE est égal au triangle ABC ; car l'un & l'autre est constitué sur une même base AC , & entre mesmes parallèles

AC , BE : donc ^b la raison du rectangle de CE , CD , ^b 3. p. au triangle ABC est donnée. Mais iceluy rectangle de CE , CD est l'espace duquel le quarré de la composée de AB , AC est plus grand que le quarré de BC : donc cet espace là duquel le quarré de la composée de AB , AC est plus grand que le quarré de BC , a raison donnée au triangle ABC .

AUTREMENT.

Car l'angle donné A est ou droit, ou aigu, ou obtus. Qu'il soit premierement droit : donc le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC de deux fois le rectangle de BA , AC :

(pource que le quarré de BC est égal aux deux quarrés de BA , AC ; & le quarré de la composée BAC s'est. égal à

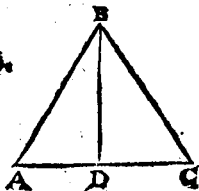


E 47. I.

iceux deux quarrés de BA , AC , & deux fois le rectangle d'icelles BA , AC .) Parquoy la raison du double rectangle de BA , AC au triangle ABC est donnée.

E 4. 2.

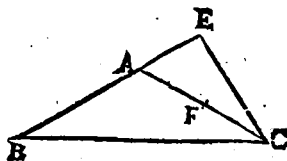
Maintenant, soit l'angle A aigu, & du point B soit tirée sur AC la perpendiculaire BD . D'autant que le triangle ABC est oxigone, & est tirée la perpendiculaire BD , les quarrés de AB , AC sont égaux ^b ^b 13. E. au quarré de BC avec deux fois le rectangle de AC , AD : adjôtant donc le commun double rectangle de AB , AC ; les quarrés de AB , AC , avec le double rectangle d'icelles AB , AC , c'est-à-dire, le seul ⁱ ⁱ 4. I. quarré de la composée BAC , sont égaux au quarré de BC avec le double rectangle de AD , AC , & en outre le double rectangle de BA , AC , c'est-à-dire le double rectangle sous la composée BAD , AC : (car le rectangle de BAD , AC est ⁱ égal aux rectangles de BA , AC , &



I 1. 2.

de AD , AC .) Donc le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de EC , du double rectangle de BAD , AC . Et puis que l'angle BAC est donné, & l'angle ADB aussi donné; l'autre angle ABD est donné; donc le triangle ABD est donné par espere; & partant la raison de AD à AB est donnée, & par conséquent la raison de la composée BAD à AB est aussi donnée. Parquoy est aussi donnée la raison du rectangle d'icelles composée BAD , AC au rectangle de BA , AC . Mais la raison d'iceluy rectangle de BA , AC au triangle ABC est donnée, pource que l'angle A est donné: donc la raison du double rectangle de la composée BAD , AC au triangle ABC est donnée.

Finablement, soit l'angle PAC obtus, & ayant prolongé BA , d'un point C soit tirée sur icelle la perpendiculaire CE , puis soit posée AF égale à AE . D'autant que l'angle PAC est obtus, & est tirée la perpendiculaire CE , les quarrés de AB , AC , & le double rectangle sous BA , AE , ou AF , sont ensemblement égaux au quarré de BC : & adjoûtant le commun double rectangle de BA , AC , les quarrés d'icelles AB , AC avec le double rectangle des mesmes AB , AC c'est-à-dire le quarré de la composée BAC , & le double rectangle de BA , AF sont ensemble égaux au quarré de

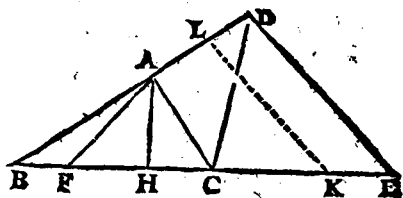


BC avec le double rectangle de BA , AC : Soit ôté le commun double rectangle de BA , AF & restera le quarré de la composée BAC égal au quarré de BC avec le rectangle de AB , CF : (car le rectangle de AB , AC est égal aux deux rectangles de AB , AE , & AB , CF) donc le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC du double rectangle de AB , CF . Et d'autant que l'angle BAC est donné, l'angle CAE est donné. Mais l'angle AEC est aussi

aussi donné : donc l'autre angle ACE est donné. Parquoy le triangle ACE est donné par espece ; & partant la raison de CA à AE, c'est à dire à AF, est donnée : donc la raison d'icelle CA à FC est aussi donnée. Mais la raison de la mesme CA à CE est donnée : donc la raison de CE à CF est aussi donnée. Parquoy la raison du rectangle de EC, AB au rectangle de FC, AB est donnée, (car le rectangle est au rectangle, comme CE à CF) & aussi celle du rectangle de AC, AB au rectangle de EC, AB : donc la raison du rectangle de FC, AB au rectangle de AC, AB est donnée. Mais la raison du rectangle de AC, AB au triangle ABC est donnée : donc aussi la raison du double rectangle de FC, AB au triangle ABC est donnée. Mais iceluy double rectangle de FC, AB est ce dont le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC : dont cet espace là duquel le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BG a raison donnée au triangle ABC.

AUTREMENT.

Soit prolongée la ligne BA jusques au point D, en sorte que AD soit égale à AC, & soit menée CD. D'autant



que l'angle BAC est donné, aussi chacun des angles ADC, ACD qui est moitié d'iceluy sera donné ; & partant l'autre angle DAC est aussi donné : donc le triangle ACD est donné par espece. Parquoy la raison de AC à CD est donnée. Et d'autant que l'angle ADC est donné, soit fait chacun des angles DEC, AFC égal à iceluy ADC. Donc puis que l'angle BDC est égal à l'angle DEC, & l'angle DBE est commun aux triangles DBE, DBC, l'autre angle BDE est égal à l'autre angle BCD ; & partant le triangle BDE

b 4. 6. est équiangle au triangle BDC. Donc ^b comme EB à BD, ainsi BD à CB: parquoy le rectangle de EB, CB, c 3. 2. c'est-à-dire ^c le rectangle de EC, CB ^c avec le quarré d 17. 6. de CB, est égal ^d au quarré de BD, c'est-à-dire au quarré de la composée BAC, car AD est égale à AC; & partant le rectangle de EC, CB avec le quarré de CB, c'est-à-dire le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré du rectangle de BC, CE: Je dis donc que la raison d'iceluy rectangle de BC, CE au triangle ABC est donnée.

Car d'autant que l'angle BDE est égal à l'angle BCD, & l'angle ADC égal à l'angle ACD; l'autre angle CDE est égal à l'autre ACB: Mais l'angle DEC est aussi égal à l'angle AFC; donc le reste CAF est égal au reste DCE. Parquoy le triangle AFC est équiangle au triangle DCE; & partant ^b comme CA à AF, ainsi CD à CE; & en permutant, comme AC à CD, ainsi AF à CE. Mais la raison de AC à CD est donnée; donc aussi la raison de AF à CE est donnée. Du point A soit menée AH perpendiculaire à BC. D'autant que l'angle AFC est donné, & l'angle AHF aussi donné, le troisième HAF est donné. Parquoy ^c le triangle AHF est donné par espece; & par conséquent la raison de AF à AH est donnée. Mais la raison de AF à CE est aussi donnée: donc ^f la raison de AH à CE est donnée; & partant la raison du rectangle de AH, BC ^g au rectangle de BC, CE est aussi donnée. Mais la raison du rectangle de AH, BC au triangle ABC est pareillement donnée; (car le rectangle ^h est double du triangle) b 41. 1. & le rectangle de BC, CE, est ce dont le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC: donc cet espace là duquel le quarré de la composée BAC est plus grand que le quarré de BC à raison donnée au triangle ABC.

S C H O L I E.

† L'ancien Interprete pretendait enseigner à construire l'angle DEB égal à l'angle ADC, dit qu'on fasse sur la ligne droite BD, & au point D, l'angle BDE égal à

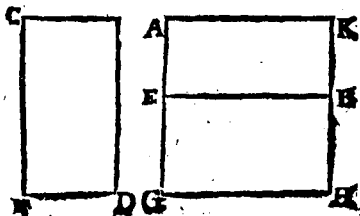
L'angle BCD, & qu'on tire les lignes BC, DE jusques à ce qu'elles s'entrecouppent en E : tellement qu'il suppose l'angle BCD être donné, & il ne l'est pas.

Le même Interprete enseigne puis après comment on peut universellement d'un point donné mener à une ligne droite donnée par position une ligne droite faisant angle égal à un angle donné ; mais nous delaissons aussi ce moyen là pource que nous en avons enseigné un autre beaucoup plus bref & aisé au 44. de nos Probl. Geometriques. Car par exemple, voulant du point donné D mener à la ligne BC donnée par position une ligne droite faisant angle égal à l'angle donné ADC, ainsi qu'il est icy requis ; il n'y a qu'à prendre en icelle BC quelconque point K, & à iceluy faire l'angle CKL égal à l'angle donné ADC : Que si la ligne KL rencontre le point D, elle sera la ligne requise, mais ne le rencontrant pas, soit menée d'iceluy point D la ligne DE parallele à icelle KL couppant BC prolongé en E, & l'angle DEC sera égal au donné ADC. Car sur les deux lignes paralleles LK, DE tombe la ligne BE, & partant l'angle DEC est égal à l'angle LKC, qui a été fait égal au donné ADC ; & par consequent iceluy DEC est aussi égal à ADC.

PROP. LXVIII.

Si deux parallelogrammes équiangles ont entr'eux une raison donnée, & qu'un côté ait aussi une raison donnée à un côté ; l'autre côté aura pareillement une raison donnée à l'autre côté.

Soient deux parallelogrammes équiangles AB, CD ayans entr'eux une raison donnée, & qu'un côté ait à un côté une raison donnée.



née, & soit la raison de BE à FD donnée : Je dis que la raison de AE à FC est aussi donnée.

Car à la ligne droite EB soit appliqué le parallélogramme EH égal à iceluy CD, & constitué de sorte que AE & EG fassent une ligne droite : † donc KB, BH feront aussi une ligne droite. Et d'autant que la raison de AB à CD est donnée, & que EH est égal à iceluy CD; la raison de AB à EH est donnée; & partant la raison de AE à EG ¹ est aussi donnée. Vû donc que EH est égal & équianglé à CD, comme ^m EB à FD, ainsi FC à EG. Mais la raison de EB à FD est donnée : donc aussi la raison de FC à EG est donnée. Mais la raison de AE à la même EG est aussi donnée : donc la raison de AE à FC est donnée.

S C H O L I E.

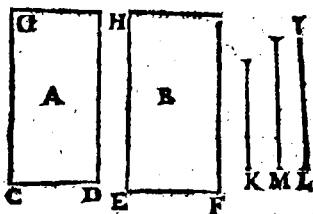
† Euclide ayant posé AE, EG directement en une seule ligne droite, conclut aussi-tôt que KB & BH feront aussi une ligne droite, mais nous le démontrerons ainsi. D'autant que les lignes droites AE, EG sont posées directement les angles AEB, BEG, ^a sont égaux à deux droits. Et ^a 13. 1. puis que AB est un parallélogramme, les lignes AK, EB sont parallèles; sur lesquelles tombe la ligne AE, & partant les deux angles intérieurs A, BEA ^b sont aussi égaux ^b 29. 1. à deux droits; & ôtant l'angle commun BEA, démontrera l'angle A égal à l'angle BEG, & conséquemment leurs opposés EBK & H sont aussi égaux entr'eux. Derechef; puis que BG est un parallélogramme les deux lignes BE, HG sont parallèles sur lesquelles tombe BH : & partant les deux angles intérieurs H, EBH ^b sont égaux à deux droits. Mais il a été démontré que H est égal à EBK : donc les deux angles EBK, EBH sont aussi égaux à deux droits; & partant les deux lignes KB, BH se rencontrent directement comme ledit Euclide.

— A U T R E M E N T.

Soit exposée la ligne droite donnée k : & puis que la raison de A à B est donnée, soit faite la même de ^k à l : donc la raison de k à L est aussi donnée. Mais ^k est donnée : donc ^a L est aussi donnée. Derechef,

Puis que la raison de CD à EF est donnée soit faite la même de κ à M : donc la raison de κ à M est donnée. Mais κ est donnée : donc M est aussi donnée; $\circ$ 1. pr.

& partant la raison de L à M est donnée. Or d'autant que A est équiangle à B la raison d'iceluy A à B , est composée de celle des côtez, c'est-à-dire de



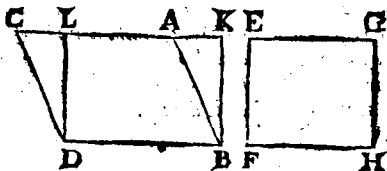
P. 23. 6.

CD à EF , & de CG à EH . Mais aussi la raison de K à L est composée de K à M , & de M à L : donc la raison composée de CD à EF , & de CG à EH , est la même que la composée de κ à M , & de M à L . (la raison de κ à L étant la même que de A à B .) Mais la raison de CD à EF est la même que de κ à M : donc l'autre raison de CG à EH est aussi la même que de M à L . Mais icelle raison de M à L est donnée : donc aussi la raison de CG à EH est donnée.

PROP. LXIX.

Si deux parallelogrammes ayans les angles donnez, ont entr'eux une raison donnée, & qu'un côté ait aussi une raison donnée à un côté ; pareillement l'autre côté aura une raison donnée à l'autre côté.

Que les deux parallelogr. CB , EH ayas les angles aux pointts D & F donnez, ayent entr'eux une raison donnée, &



que la raison de DB à FH soit aussi donnée : Je dis que la raison de AB à EF est donnée.

Car si CB est équiangle à HE, il est manifeste par la prec. prop. Mais s'il n'est équiangle, soit constitué sur la ligne droite DB, & au point B donné en icelle l'angle DBK égal à l'angle EFH, & soit achevé le parallélogramme DK. D'autant que chacun des angles BKL, BAK est donné, † l'autre angle KBA, est donné : Parquoy le triangle ABK est donné par espèce ; & partant la raison de AB à BK est donnée. Mais la raison de CB à EH est supposée donnée, & CB est égal à DK : donc la raison de DK à EH est donnée. Et pource que DK est équiangle à EH, & la raison d'iceluy DK à EH est donnée, comme aussi celle de DB à FH ; la raison de BK à FE est donnée. Mais la raison d'icelle BK à BA est aussi donnée : donc la raison de AB à FE est donnée.

SCHOLIE.

† Euclide suppose icy qu'un parallélogramme ayant un angle donné, tous les autres angles sont aussi donnez : Et tant l'ancien Interprete que le sieur Hardy en déduisent les raisons, qui sont que l'angle F étant donné, l'autre angle E sera aussi donné, étant le reste de deux droits, pource que sur les lignes droites paralleles EG, FH tombe la ligne EF, qui fait les deux angles intérieurs de même part F & E égaux à deux droits : Mais à icèux angles sont égaux les oppozes G & H, & partant ils sont aussi donnez.

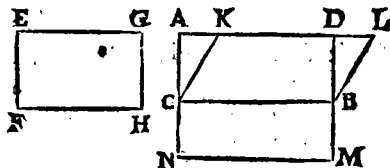
Dont s'ensuit que les angles BDC & F estans donnez par l'hypothese, tous les autres angles des deux parallelogrammes CB, EH sont aussi donnez : partant l'angle DBK ayant esté fait égal à l'angle F, l'angle K sera égal à l'angle E, & donné comme iceluy : Mais l'angle BAL, qui est oppozé au donné BDC est aussi donné ; & partant BAK qui est le reste de deux droits sera aussi donné, tellement qu'au triangle ABK les deux angles BAK & BKA sont donnez, ainsi qu'Euclide le dit icy.

PROP. LXX.

Si de deux parallelogrammes, les côtez d'autour angles égaux, ou bien d'autour des inégaux, toutesfois donnez, ont entr'eux une raison donnée; aussi les mêmes parallelogrammes auront entr'eux une raison donnée.

Soient deux parallelogr.

AB, EH desquels les côtez d'autour les angles égaux des poinçts F, C, ou d'autour des inégaux,



toutesfois donnez ayent entr'eux une raison donnée, c'est-à-dire que la raison de AC à EF soit donnée, & aussi celle de CB à FH : Je dis que la raison de AB à EH est aussi donnée.

Car soit AB équiangle à EH, & sur la ligne droite CB soit appliqué le parallelogramme CM égal au parallelogramme EH, tellement que AC soit directement à CN, & par consequent DB sera directement avec BM. D'autant donc que CM est équiangle & égal à EH, les côtez d'autour les angles égaux seront reciproquement proportionnaux : Parquoy comme BC à HF, ainsi FE à NC. Mais la raison de BC à HF est donnée : donc la raison de FE à NC est aussi donnée. Mais la raison de AC à la mesme EF est donnée : donc la raison de AC à NC est aussi donnée. Parquoy la raison de AB à CM est donnée : (car c'est la mesme que de AC à CN.) Mais CM est égal à EH : donc la raison de AB à EH est donnée.

Maintenant, AB ne soit équiangle à EH, & sur

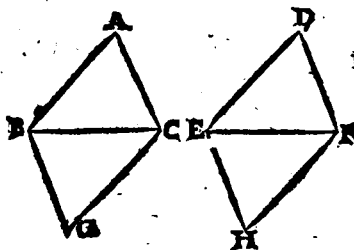
la ligne droite CB , & au point C donné en icelle, soit constitué l'angle BCK égal à l'angle donné F , & soit achevé le parallélogramme CL . D'autant que l'angle ACB est donné, & l'angle BCK aussi donné, le reste ACK est donné : donc le triangle ACK est donné par espèce; & partant la raison de AC à CK est donnée : Mais la raison de AC à EF est aussi donnée : donc la raison de CK à EF est donnée. Mais la raison de BC à HF est aussi donnée, & l'angle BCK est égal à l'angle F : donc (par la première partie de cette prop.) la raison de CL à EH est donnée. Mais à iceluy CL est égal AB : donc la raison de AB à EH est donnée.

PROP. LXXI.

Si de deux triangles les côtez d'autour angles égaux, ou bien d'autour des inégaux, toutesfois donnez, ont entr'eux une raison donnée: les mêmes triangles auront aussi entr'eux une raison donnée.

Soient deux triangles ABC , DEF , desquels les côtez d'autour les angles A & D égaux, ou bien inégaux, toutesfois donnez ayent entr'eux une raison donnée, c'est à sçavoir que la raison de AB à DE soit donnée, & aussi celle de AC à DF : Je dis que la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnée.

Car soient accomplis les parallélogrammes AG , DH . Donc puis que des deux parallélogrammes AG , DH , les côtez d'autour les angles égaux A & D , ou bien inégaux & toutesfois donnez,

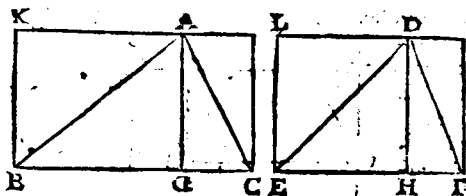


ont entr'eux raison donnée; & la raison d'iceluy AG à DH est donnée: Mais le triangle ABC est moitié de AG, & le triangle DEF moitié de DH: donc la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnée, 70.p. 34.1.

PROP. LXXII.

Si de deux triangles, les bases sont en raison donnée, & que des angles soient tirées à icelles bases des lignes droites faisans angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, lesquelles ayent entr'elles raison donnée: iceux triangles auront aussi entr'eux raison donnée.

Soient deux triangles ABC, DEF, & soient tirées aux bases les lignes droites AG, DH, qui fassent les angles AGC, DHF égaux, ou bien inégaux mais toutesfois donnez; & soit la raison de BC à EF donnée; mais la raison de AG à DH aussi donnée: Je dis que la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnée.



Car soient accomplis les parallelogrammes KC, LE; d'autant que les angles AGC, DHF sont égaux, ou bien inégaux & toutesfois donnez, & que l'angle AGC se est égal à l'angle KBC, mais l'angle DHF à l'angle LEF: les angles aux points B, E sont égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez. Et pource que la raison de AG à DH est donnée, & AG est 29.1.

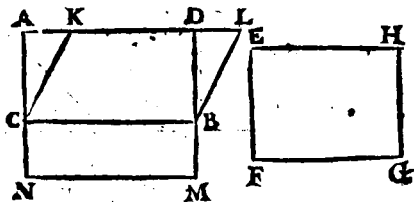
égale à KB mais DH à LE : aussi la raison de KB à LE est donnée. Mais la raison de BC à EF est aussi donnée, & les angles aux points B, E sont égaux ou bien inégaux, & toutesfois donnez : donc la raison du parallélogramme KC au parallélogramme LF est donnée : & partant la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnée, attendu qu'iceux triangles sont moitié des parallélogrammes,

PROP. LXXIII.

Si de deux parallélogrammes les côtez d'autour angles égaux, ou bien d'alentour des inégaux, mais toutesfois donnez, sont tellement entr'eux, que comme le côté du premier est au côté du second, ainsi l'autre côté du second, soit à quelque autre ligne droite, mais que l'autre côté du premier ait aussi à la même ligne droite une raison donnée : iceux parallélogrammes auront aussi entr'eux une raison donnée.

Soient deux parallélogrammes AB, EG , desquels les costez d'autour les angles des points C, F égaux, ou bien iné-

gaux, mais toutesfois donnez, soient tellement entr'eux que come CB à FG , ain-



si EF à quelque autre ligne droite CN , mais la raison de AC à icelle CN soit donnée : Je dis que la raison du parallélogramme AB au parallélogramme EG est donnée.

Gar le parallélogramme AB soit premierement équiangle à EG , & ayant posé CN directement à

AC, soit achevé le parallelogramme CM. D'autant que comme CB ou NM son égale est à FG, ainsi EF à CN, & que les angles N & F sont égaux; (car N est égal à l'angle ACB qu'on a posé estre égal à F) les parallelogrammes CM, EG sont égaux. Mais i comme AC à CN¹ ainsi le parallelogramme AB à 14.6. CM ou EG : partant puis que la raison de AC à CN est donnée; aussi la raison de AB à EG est donnée. 1.6.

Maintenant, le parallelogramme AB ne soit équi-angle au parallelogramme EG, & soit constitué à la ligne droite CB, & au point C donné en icelle, l'angle BCK égal à l'angle EFG, & soit parachevé le parallelogramme CL. Donc puis que chacun des angles ACB, KCB est donné, le reste ACK est aussi donné. Mais m l'angle CAK est donné, comme aussi le m sch. restant AKC : donc n le triangle ACK est donné par 69. pr. espece; & partant la raison de AC à CK est donnée. n 40. p. Mais la raison d'icelle AC à CN est aussi donnée: donc o la raison de CK à CN est donnée. Et puis que o 8. p. comme CB à FG, ainsi EF a la ligne droite CN, à laquelle l'autre côté KC a raison donnée, & que l'angle BCK est égal à l'angle F, la raison du parallelogramme CL au parallelogramme EG est donnée, (par la premiere partie de cette prop.) Mais le parallelogramme CL est égal au parallelogramme AB : donc la raison du parallelogramme AB au parallelogramme EG est donnée.

PROP. LXXIV.

Si deux parallelogrammes en angles égaux, ou bien en inégaux, mais toutesfois donnez ont une raison donnée; comme un côté du premier sera à un côté du second, ainsi l'autre côté du second sera à celle à laquelle l'autre côté du premier à raison donnée.

Que les deux parallelogrammes AB, EG ayans aux points C, F angles égaux ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, soient entr'eux en raison donnée:

Je dis que comme CB à FG, ainsi EF à celle que AC a raison donnée.

Car ou AB est équiangle ou non : soit premièrement équiangle, & à la ligne droite BC soit appliqué le parallélogramme CM égal à EG, & tellement posé que AC, CN soient directement : donc p DB, BM seront aussi directement. Et puis que la raison de AB à EG est donnée, & que CM est égal à EG; la raison de AB à CM est aussi donnée : & partant la raison de AC à CN est donnée : (attendu que AB est à CM q comme AC à CN.) Et pource que CM est égal & équiangle à EG : les côtez d'autour les angles égaux d'iceux CM, EG sont reciproquement proportionnaux; & partant comme CB à FG, ainsi EF à CN : Mais la raison de AC à CN est donnée; donc comme CB est à FG, ainsi EF est à celle que AC a raison donnée. (*Voyez la figure precedente.*)

Maintenant, AB ne soit équiangle à EG, & soit constitué à la ligne droite CB & au point C donné en icelle, l'angle BCK égal à EFG, & soit achevé le parallélogramme CL. Donc puis que la raison de AB à EG est donnée, & que AB est égal à CL; aussi la raison de CL à EG est donnée & l'angle, BCK est égal à l'angle F : & partant CL est équiangle à EG. Donc (par la premiere partie de cette prop.) comme CB à FG, ainsi EF à celle à laquelle CK a raison donnée. Mais la raison de AC à CK est donnée : (ainsi qu'il appert par ce qui a esté démontré à la derniere partie de la prec. prop.) donc comme CB à FG ainsi EF à celle que AC a raison donnée.

PROP. LXXV.

Si deux triangles en angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux une raison donnée; comme le côté du premier sera au côté du second, ainsi l'autre côté du second sera à cette ligne droite-là à laquelle l'autre côté du premier a raison donnée.

Soient deux triangles ABC , DEF , qui aient entr'eux une raison donnée, & aux points A , D , soient angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez : Je dis que comme AB est à DE , ainsi DF est à celle que AC a raison donnée.

(Voyez la figure de la page ss. cy-devant.)

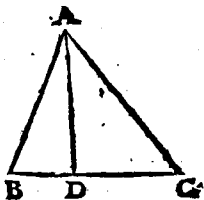
Car soient accomplis les parallelogrammes AG , DH . D'autant que la raison du triangle ABC au triangle DEF est donnée, aussi la raison du parallelogramme AG au parallelogramme DH est donnée. Veu donc que les deux parallelogrammes AG , DH en angles égaux, ou bien inégaux, mais toutesfois donnez, ont entr'eux une raison donnée; comme $^x AB$ $^x 74.p.$ est à DE , ainsi DF à celle à laquelle AC a raison donnée.

PROP. LXXVI.

Si du sommet d'un triangle donné par espece est tirée à la base une ligne perpendiculaire, elle aura à la base une raison donnée.

Soit le triangle ABC donné par espece, & du point A soit tirée à la base BC la perpendiculaire AD : Je dis que la raison d'icelle AD à BC est donnée.

Car puis que le triangle ABC est donné par espece, la raison de AB à BC est donnée, & l'angle B aussi donné. Mais l'angle ADB est donné : Donc l'autre angle BAD est donné. Parquoy ^{a} le triangle ABD est donné par espece; & partant la raison de AB à AD est donnée. Mais la raison de AB à BC est donnée: Donc ^{b} la raison de AD à BC est donnée. $^a 40.p.$ $^b 8.pr.$

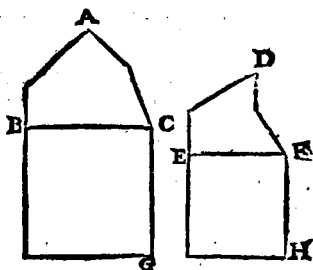


PROP. LXXVII.

Si deux figures données par especes ont entr'elles une raison donnée ; aussi sera donnée la raison duquel on voudra des côtez de l'une d'icelles figures auquel on voudra des côtez de l'autre.

Que les deux figures ABC, DEF données par espece aient entr'elles une raison donnée : Je dis que le quel que ce soit des costez de ABC a raison donnée auquel que ce soit des côtez DEF.

Car sur les lignes droites BC, EF soient décrits les quarrés BG, EH. D'autant que sur une même ligne droite BC sont décrites deux figures ABC, BG données par espece & la raison d'i-



49.p.

celle ABC à BG est donnée. Semblablement la raison de DEF à EH est donnée. Et puis que la raison de ABC à DEF est donnée, & aussi celle de la même figure ABC à BG ; & encore la raison de DEF à EH : la raison de BG à EH est donnée ; & partant la raison de BC à EF est aussi donnée.

8.pr.

PROP. LXXVIII.

Si une figure donnée a raison donnée à quelque rectangle, & qu'un côté ait raison donnée à un côté ; le rectangle est donné par espece.

Que la figure donnée ABC ait raison donnée au rectangle DF, & soit donnée la raison de BC à DE : Je dis que le rectangle DF est donné par espece.

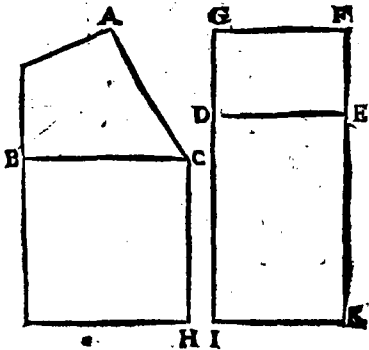
Car sur la ligne droite BC soit décrit le quarré

BH, & à la ligne droite DE soit appliqué le parallélogramme DK égal à BH, de telle sorte que GD, DI soient posées directement, & par conséquent FE, EK aussi directement. Donc puis que sur une même ligne droite BC sont décrits les deux rectilignes ABC, BH donnez par espece, la raison de ABC à BH est donnée. Mais la raison d'icelle ABC à DF est aussi donnée: Donc la raison de BH à DF est donnée. Mais BH est égal à DK: Donc la raison de DK à DF est aussi donnée.

sch. 1.
68. pr.

49. pr.

Et puis que BH est égal & équianglé à DK, l'un & l'autre étant rectangle; & les côtez d'iceux sont reciproquement proportionnaux, & comme BC à DE, ainsi DI à CH. Mais par l'hypothese la raison de BC à DE est donnée: Donc aussi la raison de DI à CH est donnée. Mais la raison de DI à DG est aussi donnée: (car DI est à DG^h comme DK à DF)^h 1. 6. donc la raison de DG à CH est donnée. Mais CH est égale à BC, attendu que BH est carré: Donc la raison de BC à DG est donnée. Mais la raison de la même BC à DE est aussi donnée: Donc la raison de DE à DG est donnée, & l'angle à D est droit: Donc DF est donné par espece.



514.6.

1. 6.
8. pr.

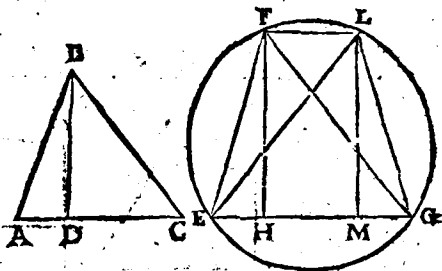
1 sch.
61. pr.

PROP. LXXIX.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, mais des angles égaux soient tirées des perpendiculaires aux bases, & que comme la

base du premier triangle est à la perpendiculaire, ainsi aussi la base de l'autre soit à la perpendiculaire: iceux triangles sont équiangles.

Soient
les tri-
angles
ABC,
EFG,
ayans
les an-
gles aux
pointés
B, F
égaux,
& d'i-



ceux pointés B & F soient tirées les perpendiculaires BD, FH; & comme AC à BD, ainsi EG soit à FH: Je dis que le triangle ABC est équiangle au triangle EFG.

Car allentour du triangle EFG soit décrit le cercle EFLG, puis sur la ligne droite EG, & au point E donné en icelle soit fait l'angle GEL égal à l'angle C, & soient tirées FL, LG, & la perpendiculaire LM. Veu donc que l'angle GEL est égal à l'angle C, & l'angle ELG est égal à l'angle EFG, iceux éras en un même segment de cercle: le troisième angle EGL est égal au troisième angle A. Parquoy le triangle ABC est semblable au triangle ELG, & sont tirées les perpendiculaires BD, LM: Donc † comme AC à BD, ainsi EG à LM. Mais par l'hypothèse comme AC à BD, ainsi EG à FH: Donc ° LM est égale à FH. Mais icelle ° 28. † LM est ° parallèle à FH: Donc † FL est aussi parallèle à EG; & partant l'angle FLE q est égal à l'angle LEG. Mais l'angle c est aussi égal à iceluy angle LEG; & l'angle FLE à l'angle ° FGE: Donc aussi l'angle C est égal à l'angle FGE. Mais par l'hypothèse l'angle ABC est égal à l'angle FEG: D'oc le troisième angle BAC est égal au troisième angle FEG. Parquoy le triangle ABC est équiangle au triangle EFG.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

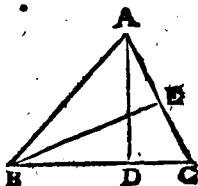
† Or que comme AC à BD , ainsi EG soit à LM , le sieur Hardy la démontré ainsi. D'autant que l'angle C est esgal à l'angle GEL , & l'angle BDC à l'angle LME , chacun étant droit; l'autre angle GBD est esgal à l'autre ELM : Donc comme EM à ML , ainsi CD à DB . Derechef, pource que l'angle ABC est esgal à l'angle ELG , & l'angle CBD à l'angle ELM , le reste ABD est esgal au reste MLG : mais l'angle ADB est aussi esgal à l'angle LMG , & partant le troisieme angle A est esgal au troisieme LGM : Donc comme AD à DB , ainsi GM à ML . Mais il a été démontré que comme CD à DB , ainsi EM à ML : Dont comme AC à BD , ainsi EG à LM : 4. 6. 24. 5.

PROP. LXXX. •

Si un triangle a un angle donné, & que le rectangle sous les côtez comprenans iceluy angle donné ait une raison donnée au quarré de l'autre côté; le triangle est donné par espee.

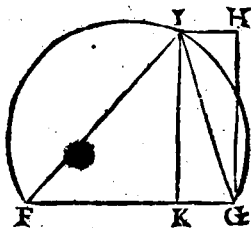
Soit le triangle ABC ayant l'angle A donné, & que le rectangle contenu sous AB , AC ait raison donnée au quarré de la ligne droite BC : Je dis que le triangle ABC est donné par espee.

Car des poinctz A & B soient menées les perpendiculaires AD , BE . D'autant que l'angle BAE est donné, & aussi l'angle AEB , le triangle ABE est donné par espee: & partant la raison de AB à BE est donnée: Donc la raison du rectangle de AB , AC au rectangle de BE , AC est aussi donnée. (Car c'est la même raison que de AB à BE .) Mais le rectangle de AC , BE est égal au 40. p. 1. 6.



rectangle de BC , AD , pource que chacun d'iceux
 x 41. I. rectangles est x double du triangle ABC : Donc la
 raison du rectangle de AB , AC au rectangle de BC ,
 AD est aussi donnée. Mais la raison du rectangle de
 y 8. pr. AB , AC au carré de BC est donnée : Donc y aussi
 la raison du rectangle de BC , AD au carré de BC
 est donnée ; & partant la raison de la ligne droite BC
 à la ligne droite AD est donnée. (Pource que le
 rectangle est au carré, comme AD à BC .) Main-
 tenant soit exposée la ligne droite FG donnée par
 position & par grandeur, & sur icelle soit décrit le
 segment de cercle FIG capable d'un angle égal à
 l'angle A . Et puis que iceluy angle A est donné,
 aussi sera donné l'angle au segment FIG ; & partant
 z 8. def. z iceluy segment est donné par position. Du point
 G soit élevée à angles droits sur FG la ligne GH ;

a 4. def. laquelle a est donc
 donnée par position.
 Soit fait que comme
 BC est à AD , ainsi
 FG soit à GH : &
 puis que la raison de
 BC à AD est donnée,
 aussi le sera celle de
 FG à GH . Mais FG
 est donnée : Donc
 b 2. pr. GH est donnée par
 grandeur. Mais elle

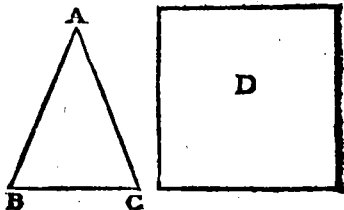


est aussi donnée par position, & le point G est
 donné : Donc le point H est c aussi donné. Main-
 tenant par le point H soit menée HI parallèle à
 d 28. p. FG ; & icelle sera donnée d par position. Mais le
 segment de cercle FIG est aussi donné par position.
 e 25. p. Donc e le point I est donné. Soient tirées les lignes
 droites IF , IG , & la perpendiculaire IK : Donc
 IK est donnée par position. Mais le point I est don-
 né, comme aussi chacun des points F , G : Donc
 f 26. p. chacune des lignes, FG , FI , IG est donnée par
 position & par grandeur. Parquoy g le triangle FIG
 g 39. p. est donné par espèce. Et puis que comme BC à AE ,
 ainsi FG à GH , & h qu'à icelle GH est égale IK ;

comme BC à EA, ainsi FG à IK, & l'angle A est égal à l'angle FIG : Donc ⁱ le triangle ABC est équiangle au triangle FIG. Mais iceluy FIG est donné par espece : Donc aussi le triangle ABC est donné par espece. 179. p.

AUTREMENT.

Soit le triangle ABC, lequel ait l'angle A donné, & la raison du rectangle sous AB, AC au carré de BC soit donnée : Je dis que le triangle ABC est donné par espece.



Car puis que l'angle A est donné, cet espace là duquel le carré de la composée BAC est plus grand que le carré de BC ¹ a raison donnée au triangle ABC : Or cet espace là soit D. Donc la raison d'iceluy D au triangle ABC est donnée. Mais la raison d'iceluy triangle ABC au rectangle de AB, AC est donnée, ^m vu que l'angle A est donné. Donc ⁿ la raison de l'espace D au rectangle de AB, AC est donnée. Mais la raison d'iceluy rectangle de AB, AC au carré de BC est aussi donnée : Donc ⁿ la raison de l'espace D au carré de BC est donnée : Parquoy en composant, ^o la raison de l'espace D avec le carré de BC à iceluy carré de BC est donnée : Donc la raison du carré de la composée BAC au carré de BC est donnée ; (pource que l'espace D avec le carré de BC est égal à iceluy carré de la composée BAC) & partant ^p la raison d'icelle composée BAC à BC est donnée. Mais l'angle A est aussi donnée : Donc ^q le triangle ABC est donné par espece. 167. p.
m 66. p.
n 8. p.
o 6. p.
p sch.
q 46. p.

PROP. LXXXI.

Si de trois lignes droites proportionnelles à trois lignes droites proportionnelles, les extrêmes sont en raison donnée, aussi les moyennes seront en raison donnée : Et si un extrême a raison donnée à un extrême, & la moyenne à la moyenne ; l'autre aura aussi à l'autre une raison donnée.

Que les trois lignes droites A, B, C, soient proportionnelles à trois lignes

A
B
C

D
E
F

droites proportionnelles D, E, F, & que les extrêmes soient en raison donnée, c'est à sçavoir que A soit à D, & C à F en raison donnée : Je dis que la raison de B à E est donnée.

Card'autant que la raison de A à D, & de C à F est donnée le rectangle de A, D aura raison donnée au rectangle de C, F. Mais le rectangle de A, D, est égal au carré de B ; & le rectangle de C, F au carré de E : Donc la raison du carré de B au carré de E est donnée, & partant la raison de la ligne B à la ligne E est aussi donnée.

Derechef, soit donnée la raison de A à D, & de B à E : Je dis que la raison de C à F est aussi donnée. Car puis que la raison de A à D, & de B à E est donnée ; aussi la raison du carré de B au carré de E est donnée. Mais le carré de B est égal au rectangle de A, C, & le carré de E au rectangle de D, F : Donc la raison du rectangle de A, C au rectangle de D, F est donnée. Mais la raison d'un côté A à un côté D est donnée : Donc la raison de l'autre côté C à l'autre côté F est aussi donnée.

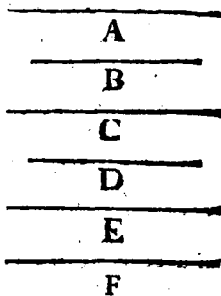
PROP. LXXXII.

S'il y a quatre lignes droites proportionnelles, comme la première sera à celle à laquelle la seconde a raison donnée, ainsi la tierce sera à celle à laquelle la quatrième a raison donnée.

Soient quatre lignes droites proportionnelles A, B, C, D; & soit A à B, comme C à D: Je dis que comme A est à celle que B a raison donnée, ainsi C est à icelle à laquelle D a raison donnée.

Car E soit celle à laquelle B a raison donnée; & soit fait que comme B est à E ainsi D soit à F. Or la raison de B à E est donnée: Donc est aussi donnée la raison de D à F. Et puis que comme A à B,

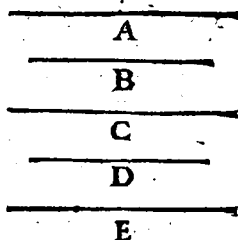
ainsi C à D, & en outre comme B à E ainsi D à F; par raison égale comme A à E, ainsi C à F. Mais E est celle à laquelle B a raison donnée, & F celle à laquelle D a aussi raison donnée: Donc comme A est à celle à laquelle B a raison donnée, ainsi C est à celle à laquelle D a raison donnée.



PROP. LXXXIII.

Si quatre lignes droites sont tellement entr'elles, que de trois d'icelles qu'elles soient, & d'une quatrième prise proportionnelle à laquelle celle qui reste des quatre lignes ait une raison donnée, se fassent quatre lignes droites proportionnelles: comme la quatrième sera à la tierce, ainsi la seconde sera à celle à laquelle la première a raison donnée.

Soient quatre lignes droites A, B, C, D, telles qu'ayant pris E quatrième proportionnelle à trois quelconques d'icelles A, B, C, à laquelle D a raison donnée, icelles quatre lignes A, B, C, E sont proportionnelles : Je dis que comme D à C, ainsi B à celle que A a raison donnée.



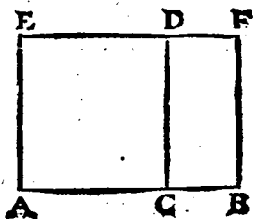
- Car d'autant que comme A à B, ainsi C à E, le rectangle contenu sous A, E est égal à celui compris sous B, C. Et puis que la raison de D à E est donnée, aussi sera donnée la raison du rectangle de A, D au rectangle de A, E. (car ^b c'est la même raison que de D à E.) Mais le rectangle de A, E, est égal à celui de B, C : Donc la raison du rectangle de A, D à celui de B, C est donnée. Parquoy ^d comme D est à C, ainsi B à celle à laquelle A a une raison donnée.

PROP. LXXXIV.

Si deux lignes droites comprenant un espace donné en angle donné, & que l'une soit plus grande que l'autre d'une donnée, aussi chacune d'icelles sera donnée.

Que les deux lignes droites AB, AE comprenant un espace donné AF en angle donné BAE, & soit AB plus grande que AE d'une donnée CB : Je dis que chacune des lignes AB, AE, est donnée.

Car puis que AB est plus grande que AE de la donnée CB, le reste AC est



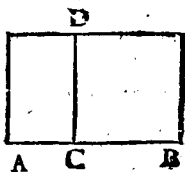
égal à AE : Soit accompli le parallelogramme AD.
 Donc puis que AE est égale à AC, la raison de AE à
 AC est donnée ; & l'angle A est aussi donné : Donc
 AD est donné par espece, Parquoy l'espace donné *sch.*
 AF est appliqué à la ligne droite donnée CB, exce- 61. pr.
 dant de la figure AD donnée par espece ; & partant
 la largeur de l'excez est donnée : Donc AC est don- 59. p.
 née. Mais CB est aussi donnée : Donc la route AB est
 donnée. Mais AB est aussi donnée : Donc chacune
 des lignes droites AB, AE est donnée.

P R O P . L X X X V .

Si deux lignes droites comprenant un espace
 donné en angle donné, la composée d'icelles
 est donnée ; aussi chacune d'icelles sera
 donnée.

Soient deux lignes droites
 AC, CD comprenant un espa-
 ce donné AD en angle donné
 ACD, & la composée d'icelles
 lignes ACD soit donnée : Je
 dis que chacune desdites li-
 gnes AC, CD est donnée.

Car soit prolongée AC, jus-
 ques au point B, & posé CB
 égale à CD, puis par le point

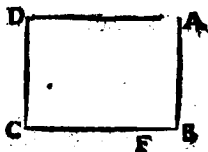


B soit menée BF parallele à CD, & achevé le paralle-
 logramme CF. Veu donc que CB est égale à CD, &
 l'angle DCB est donné ; car celui qui est de suite est
 le donné ; & partant le parallelogramme DB est don-
 né par espece ; & en outre puis que la composée ACD
 est donnée ; & CB est égale à CD ; aussi AB est don-
 née. Par ainsi à la ligne droite AB est appliqué l'es-
 pace donné AD defaillant de la figure DB donnée par
 espece ; & partant les largeurs du deffaut sont don- 58. p.
 nées : Donc les lignes droites DC, CB sont données.
 Mais la composée ACD est aussi donnée : Donc
 chacune des lignes AC, CD est donnée.

PROP. LXXXVI.

Si deux lignes droites comprenant un espace donné en angle donné, le quarré de l'une est plus grand que le quarré de l'autre d'un donné, qu'en raison; aussi chacune d'icelles sera donnée.

Soient deux lignes droites AB, BC comprenant l'espace donné AC en angle donné ABC , & le quarré de la ligne BC soit plus grand que le quarré de AB d'un donné qu'en raison: Je dis que chacune des lignes AB, BC est donnée.



Car puis que le quarré de BC est plus grand que le quarré de AB d'un espace donné qu'en raison, soit

- osté le donné, c'est à sçavoir le rectangle sous CB, BE : Donc la raison du reste, qui est le rectangle sous BC, CE au quarré de AB est donnée. Et d'autant que le rectangle, sous AB, BC est donné, & aussi celui de CB, BE ; leur raison est donnée. Mais comme le rectangle sous AB, BC au rectangle sous CB, EB , ainsi AB à BE ; & partant la raison de AB à BE est donnée: Parquoy est aussi donnée la raison du quarré de AB au quarré de BE . Mais la raison du quarré de AB au rectangle sous BC, CE est donnée: Donc aussi est donnée la raison du rectangle sous BC, CE au quarré de BE . Parquoy la raison de quatre fois le rectangle sous BC, CE au quarré de BE est donnée; & en composant, la raison de quatre fois le rectangle sous BC, CE , avec le quarré de BE au quarré de BE est donnée. Mais quatre fois le rectangle de BC, CE , avec le quarré de BE , est le quarré de la composée BCE : Donc la raison du quarré de la composée BCE au quarré de BE est donnée: Parquoy la raison de la composée de BC, CE à BE est donnée; & en composant, la raison de la com-

posée des lignes BC , CE , BE , c'est-à-dire le double de BC . BE est donnée; & partant la raison de la seule BC à BE est aussi donnée. Mais comme BC à BE , ainsi le rectangle sous BC , BE au carré de BE : Donc la raison du rectangle sous BC , BE au carré de BE est donnée. Mais le rectangle de BC , BE est donné: Donc le carré de BE est aussi donné, & conséquemment la ligne BE est donnée. Parquoy BC est aussi donnée, puis que la raison de BE à BC est donnée. Mais l'espace AC est donné, & aussi l'angle B : Donc AB est donnée. Parquoy chacune des lignes AB , BC est donnée.

SCHOLIE.

† Au lieu de dire icy ce qui est sous, &c. nous avons usé du mot rectangle, étant manifeste par la suite de cette démonstration que l'intention d'Euclide est telle, puis qu'il se sert en ladite démonstration des deux & huitièmes propositions du deuxième élément: & aussi que l'espace ou parallelogramme donné n'étant rectangle, il y peut être réduit faisant sur EC , & au point de l'angle donné B , un angle droit CBA , tellement qu'on auroit deux parallelogrammes constitués sur une même base BC , & entre mesmes paralleles, ainsi qu'en la 64. prop. au moyen de laquelle se tireroit la conclusion de cette-cy.

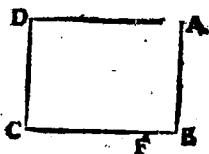
Cecy a aussi lieu à la proposition suivante.

PROP. LXXXVII.

Si deux lignes droites comprenant un espace donné en angle donné, le carré de l'une est plus grand que le carré de l'autre d'un donné; aussi chacune d'icelles sera donnée.

Soient deux lignes droites AB , BC , comprenant un espace donné AC en angle donné B , & le carré de BC soit plus grand que le carré de AB d'un donné: Je dis que chacune d'icelles AB , BC est donnée.

Car puis que le quarré de BC est plus grand que le quarré de AB d'un espace donné, soit ôté le donné, & soit le rectangle sous BC , BE : Donc le reste, γ qui est le rectangle de BC , CE , est égal au quarré de AB . Et puis que le rectangle de BC , BE est donné, & aussi l'espace ou rectangle AC ; la raison d'iceluy rectangle de BC , BE à AC est donnée. Mais comme a le rectangle de BC , BE au rectangle de AB , BC , ainsi BE à AB : Donc la raison de BE à AB est donnée ; & partant b est aussi donnée la raison du quarré d'icelle BE au quarré de AB . Mais à iceluy quarré de AB est égal le rectangle de BC , CE : Donc la raison d'iceluy rectangle de BC , CE au quarré de BE est donnée ; & partant est aussi donnée la raison du quadruple d'iceluy rectangle de BC , CE au quarré de BE . Et en composant c la raison de quatre fois le rectangle de BC , CE avec le quarré de BE à iceluy quarré de BE est donnée. Mais quatre fois le rectangle de BC , CE avec le quarré de BE d est le quarré de la composée BCE : Donc la raison du quarré d'icelle composée BCE au quarré de BE est aussi donnée ; & partant e la raison de la composée BCE à BE est donnée. Parquoy en composant, f est aussi donnée la raison d'icelles BCE , EB , c'est-à-dire deux fois BC à BE : Donc la raison de la seule BC à BE est donnée. Mais la raison de la même BE à AB est aussi donnée. Donc g la raison de AB à BC est donnée. Et puis que la raison de BC à BE est donnée, & que comme icelle BC à BE , ainsi le quarré de BC h au rectangle de BC , BE ; la raison du quarré de BC au rectangle de BC , BE est aussi donnée. Mais iceluy rectangle de BC , BE est donné, car c'est ce qui a été ôté qui étoit donné : Donc le quarré de BC h est donné ; & partant est donnée la ligne BC . Mais la raison d'icelle BC à BA est donnée : Donc AB est aussi donnée.

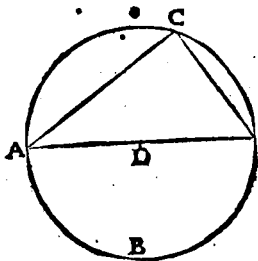


PROP. LXXXVIII.

Si en un cercle donné par grandeur est tirée une ligne droite laquelle este un segment qui comprennent un angle donné ; icelle ligne est donnée par grandeur.

Au cercle ABC donné par grandeur, soit tirée la ligne droite AC ostant le segment ABC qui comprennent l'angle donné AEC : Je dis que la ligne AC est donnée par grandeur.

Car soit pris le centre du cercle D, tiré le diamètre ADE, & joint EC. Donc l'angle ACE est donné, car il est droit : Mais l'angle AEC est aussi donné ; & partant l'autre angle CAE est donné. Parquoy le triangle ACE^m est donné par espèce ; & partant la raison de EA à AC est donnée. Mais AE est donnée par grandeur, puis que le cercle ABC est donné par grandeur : Doncⁿ AC estⁿ 2. prⁱ aussi donnée par grandeur.



PROP. LXXXIX.

Si en un cercle donné par grandeur, est tirée une ligne droite donnée par grandeur ; elle ostera un segment comprenant un angle donné.

Au cercle ABC donné par grandeur soit tirée la ligne droite AC donnée par grandeur : (*Voyez la figure precedente.*) Je dis qu'elle ôte un segment qui comprennent un angle donné.

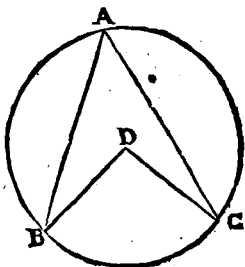
Car ayant pris le centre du cercle D, soit tiré le diamètre ADE, & la ligne droite EC. D'autant que chacune des lignes droites AE, AC est donnée, la
 • 1. pr. raison d'icelle AE à AC est donnée; & l'angle
 P 43. p. ACE est droit: Donc le triangle ACE est donné par espèce, & partant l'angle AEC est donné.

P R O P. X C.

Si en la circonférence d'un cercle donné par position & par grandeur, on prend un point donné, & que d'iceluy point à la circonférence du cercle se flechisse une ligne droite faisant un angle donné; l'autre extrémité d'icelle ligne flechie sera donnée.

En la circonférence du cercle ABC donné par position & par grandeur soit pris un point donné B, & d'iceluy point B soit flechie ou brisée à la circonférence la ligne droite BAC, qui fasse l'angle BAC donné: Je dis que le point C est donné.

Car soit pris le centre du cercle D, & tirées les lignes BD, CD. D'autant que chaque point B, D est donné, la ligne
 126. p. droite BD est donnée par position: & vû que l'angle BAC est donné, l'angle BDC est aussi donné. Parquoy à la ligne droite BD donnée par position, & au point



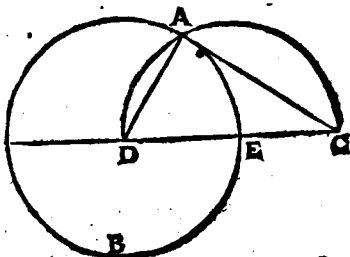
D donné en icelle est menée la ligne droite CD qui
 129. p. fait l'angle donné BDC: & partant la ligne DC est donnée par position. Mais le cercle ABC est donné
 16. def. par position & grandeur: Donc la ligne droite DC est donnée par position, & par grandeur. Mais le
 127. p. point D est donné: Donc le point C est aussi donné.

PROP. XCI.

Si d'un point donné est tirée une ligne droite qui touche un cercle donné par position; icelle ligne est donnée par position & par grandeur.

D'un point donné C soit menée la ligne droite CA touchant le cercle AB donné par position: Je dis qu'icelle ligne droite AC est donnée par position & par grandeur.

Car ayant pris le centre du cercle D, soient tirées les lignes droites DA, DC. D'autant que chaque point C, D est donné, la ligne droite CD est donnée par position & par grandeur. Mais l'angle CAD



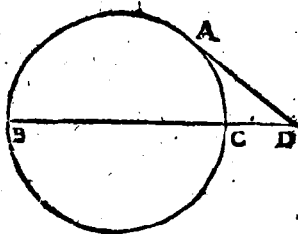
26. p.

est droit; & partant le demy cercle décrit sur CD ^{x 18. 3.} passera par le point A: Qu'il y passe donc, & soit ^{sch. 31. 3.} DAC: D'autant qu'iceluy DAC y est donné par po- ^{7 6. def.} sition, & aussi le cercle ABE, ^{a 25. p.} le point A est donné. Mais le point C est aussi donné: Donc ^{b 26. p.} la ligne droite AC est donnée par position & par grandeur.

PROP. XCII.

Si hors un cercle donné par position, on prend quelque point, & d'iceluy point donné soit tirée quelque ligne droite couppant le cercle; le rectangle compris sous toute la ligne & la partie d'entre le point & la circonférence convexe sera donné.

Hors le cercle ABC
donné par position
soit pris quelque
point, c'est à sca-
voir D, duquel soit
menée la ligne droite
DB coupant le cer-
cle : Je dis que le
rectangle sous BD,
DC est donné.



Car du point D
soit menée la ligne
droite DA qui touche le cercle en A : Donc icelle

91. p. DA est donnée par position & par grandeur ; & par

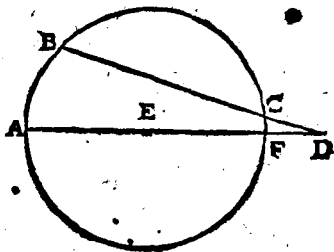
52. p. tant le carré d'icelle DA est donné. Mais iceluy

36. 3. carré de DA est égal au rectangle de BD, DC :

Donc iceluy rectangle de BD, DC est aussi donné.

AUTREMENT.

Soit pris le cen-
tre du cercle E, &
par iceluy soit tirée
de D la ligne droi-
te DA. D'autant
que chaque point
D, E est donné, la
ligne droite DE^f



26. p. est donnée par po-
sition & par gran-
deur. Mais le cer-
cle ABC est aussi donné par position & par grandeur :

25. p. Donc chaque point A, F est donné ; & le point D

est aussi donné ; & partant chaque ligne AD, FD est

donné. Parquoy le rectangle d'icelles AD, DF est

Cor. aussi donné. Mais iceluy rectangle de AD, DF est égal

56. 3. au rectangle de DB, DC : Donc le rectangle de BD,

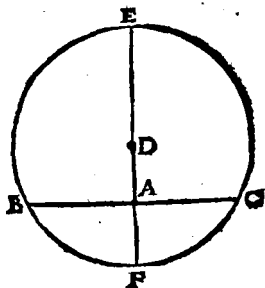
DC est donné.

PROP. XCIII.

Si dans un cercle donné par position on prend
quelque point donné, & par iceluy on tire

quelque ligne droite au cercle ; le rectangle compris sous les segmens d'icelle ligne sera donné.

Dans un cercle donné par position soit pris quelque point donné A , & par iceluy soit tirée la ligne droite BC : Je dis que le rectangle contenu sous AB , AC est donné.



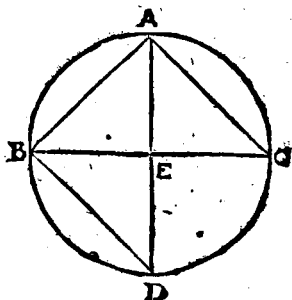
Car soit pris le centre du cercle D , & ayant tiré la ligne droite AD soit prolongée jusques aux points E , F. D'autant que chaque point A , D est donné , la ligne droite AD est donnée par position. Mais le cercle BEC est aussi donné par position : donc chaque point E , F est aussi donné par position ; & le point A est donné. Parquoy chaque ligne AE , AF est donnée : Donc le rectangle d'icelles AE , AF est donné : & est égal au rectangle de AB , AC ; partant iceluy rectangle de AB , AC est donné. 126. p⁴
155. 3.

PROP. XCIV.

Si dans un cercle donné par grandeur est tirée une ligne droite , laquelle ôte un segment qui comprenne un angle donné , & qu'iceluy angle estant au segment soit coupé en deux également : la composée des lignes droites qui comprenant l'angle donné aura raison donnée à la ligne qui coupe iceluy angle en deux également ; & le rectangle contenu sous la composée d'icelles lignes

comprenant l'angle donné, & la partie d'icelle ligne coupante qui est au dessous du segment entre la base & la circonference sera donné.

Au cercle ABC donné par grandeur soit tirée une ligne droite BC , laquelle ôte un segment qui comprenne l'angle donné ABC , & iceluy angle soit coupé en deux également par la ligne droite AD : Je dis que la raison de la composée des lignes



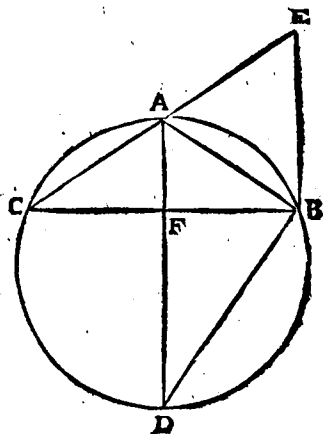
droites BA , AC , c'est-à-dire BAC à AD est donnée; & aussi que le rectangle contenu sous la composée BAC & la ligne droite ED est donné.

Soit menée BD . D'autant que dans le cercle ABC donné par grandeur est tirée la ligne droite BC , qui ôte le segment BAC comprenant un angle donné
 = 88. p. BAC ; icelle ligne BC est donnée; & partant BD est
 1. p. aussi donnée: Donc la raison d'icelle BC à BD est
 donnée. Et puis que l'angle donné BAC est coupé
 3. 6. en deux également par la ligne droite AD ; comme
 BA à CA , ainsi BE à CE ; & en composant, comme
 BAC à CA , ainsi BC à CE ; & en permutant, comme
 BAC à BC , ainsi CA à CE . Et veu que l'angle BAE
 21. 3. est égal à l'angle CAE , & l'angle ACE à l'angle
 BDE ; l'autre angle AEC est égal à l'autre angle
 ABD ; & partant le triangle ACE est équiangle au
 4. 6. triangle ABD : Donc comme AC à CE , ainsi AD
 à BD . Mais comme AC à CE , ainsi la composée
 BAC à BC : Donc comme la composée BAC à BC ,
 ainsi AD à BD ; & en permutant, comme la compo-
 sée BAC à AD , ainsi BC à BD . Mais la raison d'i-
 celle BC à BD est donnée: Donc la raison de la com-
 posée

posée BAC à AD est aussi donnée. Je dis en outre que le rectangle sous icelle composée BAC & ED est donné. Car d'autant que le triangle AEC est équiangle au triangle BDE, (car l'angle ACE est égal à l'angle BDE, & l'angle AEC à l'angle BED) comme q 15. 1. BD à DE, ainsi AC à CE. Mais comme AC à CE, ainsi est aussi la composée BAC à BC : Donc comme la composée BAC est à BC, ainsi BD à DE. Parquoy le rectangle d'icelle composée BAC & DE est égal r 16. 6. au rectangle de BC, BD. Mais iceluy rectangle de BC, BD est donné : (pource qu'icelles lignes BC, BD sont données) donc le rectangle sous la composée BAC & ED est aussi donné.

AUTREMENT.

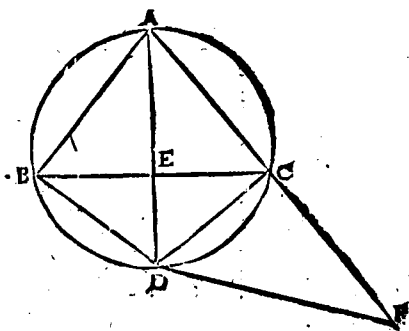
Soit prolongée CA jusques au point E, & posé AE égale à BA, & soient conjoints BE, BD. D'autant que l'angle BAC est double de chacun des angles CAD, ABE ; (car iceluy BAC est coupé en deux également par AD, & égal aux deux angles ABE, ADB qui sont u 32. 1. égaux) l'angle ABE est égal à l'angle CAD, c'est u 5. 1. à dire x à l'angle CBD : adjôutant donc l'angle commun ABC l'angle total ABD sera égal au total FBE. Mais l'angle ACB x est égal à l'angle ADB : Donc le troisième angle AEB est égal au troisième BAD ; & partant le triangle CEB est équiangle au triangle ABD : Parquoy comme CE à CB, ainsi AD à BD. Mais la ligne



droite CE est composée des deux CA, AB : Donc comme la composée BAC est à CB ainsi AD à BD ; & en permutant, comme la composée BAC est à AD, ainsi CB à BD. Mais la raison de CB à BD est donnée, attendu que chacune d'icelles lignes est donnée: Donc la raison de la composée BAC à AD est aussi donnée. Et puis que le triangle CEB est équiangle au triangle FBD : (car l'angle AFC est égal à l'angle BFD & l'angle ECB à l'angle ADB) comme EC à CB ainsi BD à DF. Mais EC est égale à la composée BAC ; Donc comme la composée BAC est à CB, ainsi BD à DF. Parquoy le rectangle de la composée BAC & DF est égal au rectangle de CB & BD. Mais iceluy rectangle de CB, BD est donné, attendu que chacune des lignes CB, BD est donnée : Donc le rectangle de la composée BAC & DF est donné.

AUTREMENT.

Soit prolongée AC jusqu'en F, & posé CF égale à AB, & soient menées BD, DF. D'autant que BA est égale à CF, & BD à DC, les deux côtes AB, BD



26. 3. sont égaux aux deux CD, DF, chacun au sien, & l'angle ABD est égal à l'angle DCF, puis que le quadrilatère ABDC est dans le cercle : Donc la base AD est égale à la base DF, & l'angle DAB à l'angle DFC. Mais iceluy angle BAD est donné : (car c'est la moitié du donné BAC.) Donc l'angle DFC l'est aussi. Mais DAF est aussi donné : Donc le triangle

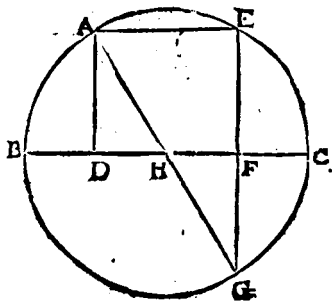
22. 3. 13. 1. 4. 1. sont égaux aux deux CD, DF, chacun au sien, & l'angle ABD est égal à l'angle DCF, puis que le quadrilatère ABDC est dans le cercle : Donc la base AD est égale à la base DF, & l'angle DAB à l'angle DFC. Mais iceluy angle BAD est donné : (car c'est la moitié du donné BAC.) Donc l'angle DFC l'est aussi. Mais DAF est aussi donné : Donc le triangle

ADF est donné par espece. Parquoy la raison de FA à AD est donnée. Mais AF est la composée de BA, AC, attendu que CF est égal à AB : Donc la raison de la composée BAC à AD est donnée. Or par même raison que dessus nous démonstrerons que le rectangle contenu sous la composée BAC & ED est donné.

P R O P. X C V.

Si au diametre d'un cercle donné par position on prend un point donné, & que d'iceluy point on tire quelque ligne droite à la circonference du cercle, mais que de la section d'icelle on mene une ligne droite perpendiculaire à cette - là, & par le point auquel cette perpendiculaire rencontrera la circonference on mene une parallele à la premiere ligne tirée : ce point là auquel la parallele rencontre le diametre est donné, & le rectangle contenu sous les lignes paralleles est aussi donné.

Soit le cercle ABC donné par position, & son diametre AC, auquel soit pris le point donné D, & d'iceluy soit tirée la ligne droite DA coupant la circonference en A, duquel soit menée la ligne droite AE perpendiculaire à DA, &



par le point E où elle rencontre la circonférence soit menée EF parallèle à AD : Je dis que le point F est donné, & aussi le rectangle compris sous AD, EF;

Car soit prolongée la ligne droite EF jusques au point G, & tirée la ligne droite AG. D'autant que l'angle AEG est droit, la ligne droite AG est diamètre du cercle. Mais AB est aussi diamètre : Donc le point H est le centre du cercle. Or le point D est donné :

- ^d 16. p. né : & partant ^a la ligne DH est donnée par grandeur. Mais puis que AD est parallèle à EG, & AH égale à ^e 26. p. GH ; ^c DH est égale à FH & AD à FG : (car les angles ^f 15. 1. AHD, FHG ^f sont égaux, & DAH, FGH ^g 29. 1. aussi égaux.) Mais la ligne DH est donnée : Donc FH est aussi donnée. Mais une chacune d'icelles lignes DH, HF est aussi donnée par position, & le ^h 27. p. point H est donné : Donc ^h le point F est aussi donné. Et puis que dans le cercle ABC donné par position est pris un point donné F, & par iceluy est tirée la ligne ⁱ 93. p. droite EFG ; le rectangle sous EF, FG est donné. Mais FG est égale à AD : Donc le rectangle compris sous AD, EF est donné : Ce qu'il falloit démontrer.

Fin des Donnez d'Euclide.

