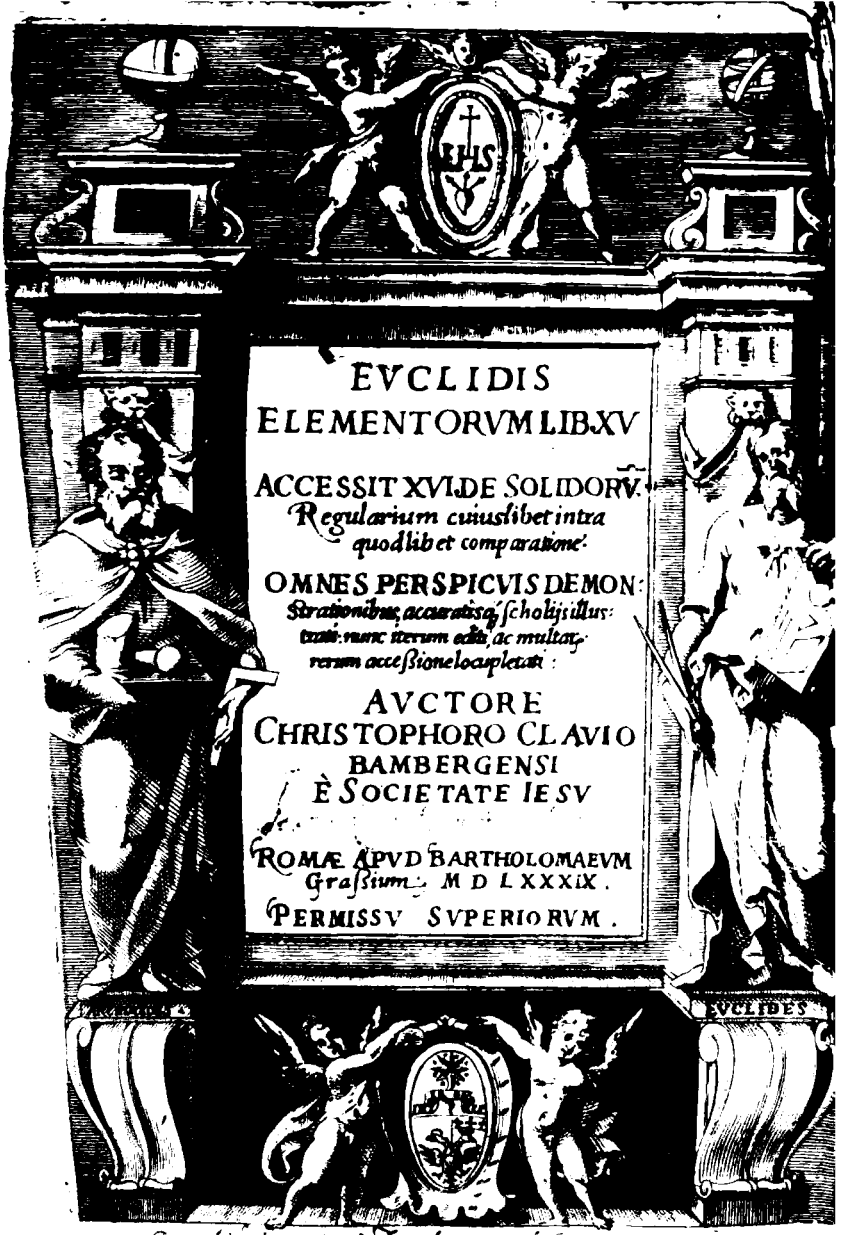
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres



Ex libris Christophori

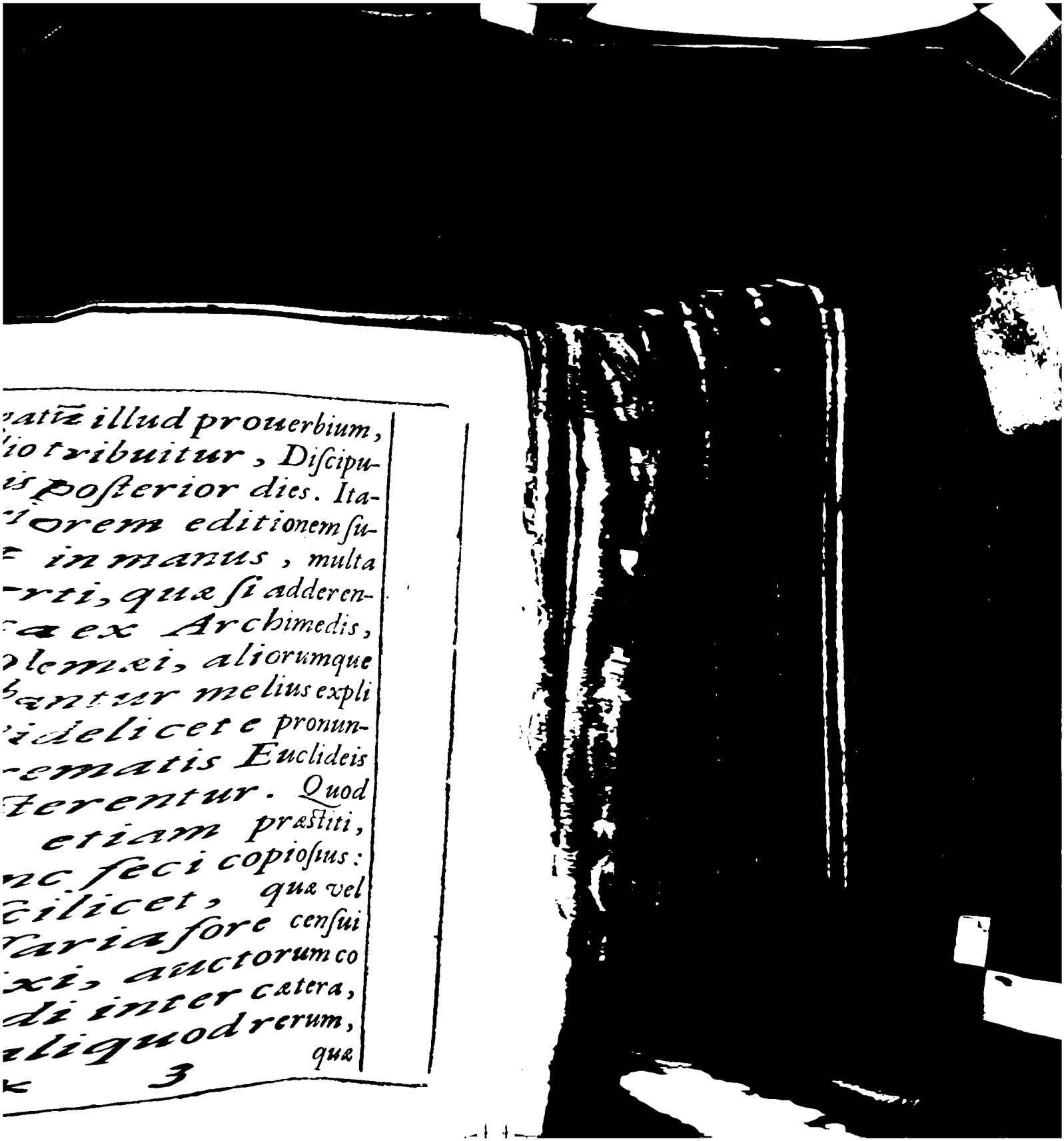
BIBLIOTECA
REGIA
MONACENSIS

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

Christophorus Clauius e Societate Iesu S.P.D.

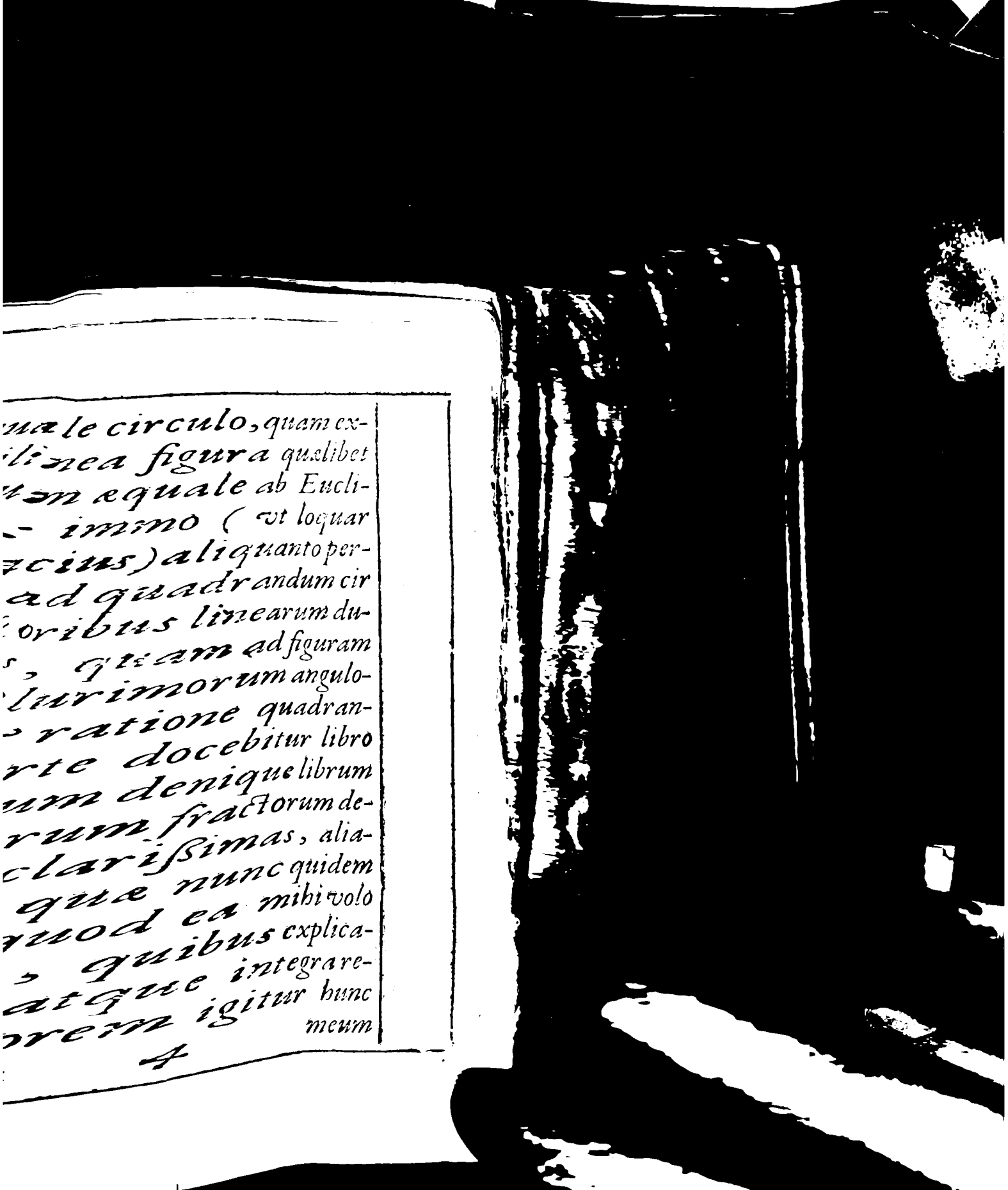
SCRIPSERAM *superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathemati*

carum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudēda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quod te non fugit, Dux Sereniſsime, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui a principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparēt iterum ac sæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret



ratiẽ illud prouerbium,
io tribuitur, Discipu-
is posterior dies. Ita-
iorem editionem su-
e in manus, multa
rti, quæ si adderen-
a ex Archimedis,
olemæi, aliorumque
bantur melius expli
i delicet e pronun-
ematis Euclideis
ferentur. Quod
etiam præstiti,
nc feci copiosius:
cilicet, quæ vel
aria fore censui
xi, auctorum co
di inter cætera,
liquod rerum,
que

quæ hoc volumine accesserunt, demonstrationem Geometricam, eamque apertißimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam scimus a Proclo mutila eße atque imperfecta videatur. Descriptionẽ item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum a veteribus, tum a recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accurate, ac subtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum



ma le circulo, quam ex-
ilinea figura quælibet
tum æquale ab Eucli-
- immo (vt loquar
cius) aliquanto per-
ad quadrandum cir
oribus linearum du-
, quam ad figuram
laurium angulo-
ratione quadran-
rte docebitur libro
um denique librum
rum fractorum de-
clarissimas, alia-
que nunc quidem
quod ea mihi volo
, quibus explica-
atque integrare-
rem igitur hunc
meum

meum, qualiſcumque eſt, cum iterum eſſem daturus in vulgus, nemini arbitratus ſum rectius, quã tibi, Dux Sereniſsime, dedicari poſſe. Primum quidem quod cum ſuperiorem illam editionem ſub Emmanuelis Philiberti clariſsimi Ducis patris tui nomine apparere uoluerim, ſtulte feciſſem, ſi posteriorem hãc alij, q̃ tibi, qui eius es & ditionis, & humanitatis, et pietatis hæres, eiusque imago corporis, atque animi, conſecraſſem: Deinde vero quod in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera ſua iudicabat inſcribenda, niſi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuiſſet. Quod cum ita ſit, quid ni hoc tibi po-

simum deberetur donum,
nem donum dicendum est
od qui dat videtur acce-
uem Ioannes Baptista Be-
s scientissimus rerũ Ma-
carum ita testatur excel
s artibus, illa præcipue in
ue principes viros, atque
s Imperatores decet, vt
ertinent ad instruendos
ppidaque munienda,
nplere possis. Neque
trema fuit causa, etsi
loco ponitur: vt tibi,
uorum in manus hæc
enerint, hæc saltem
erem ita tibi obliga-
tatem nostram vni-
ure tibi omnia nea
opera

opera, & labores vindicare poſſis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictiſsime: quod etſi paruum alicui videatur, atque exile, non dubito tamen futurũ, quin vbi tuam iſtam attigerit dexteram fortitudine fideque præſtantem, plurimum ſit acceptũrum vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept. M. D. LXXXIX.

AD

AD LECTOREM.

ETSI summam diligentiam adhibuimus, vt hi commentarij quam castigatissimi in lucem prodirent: fieri tamen non potuit, (vt est humani ingenij imbecillitas) quin errata aliquot irrepserint; quæ, ne cursum impediant, monitum te paucis uolo, ut ea, antequam ad demonstrationes te conferas, ad normam quam hic descripsimus, prius corrigere ne graueris. Vale.

ERRA-

ERRATORVM PRIORVM sex lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata	Correcta.
31.	21.	*in se distent*	*inter se distent*
38.	13.	*recta* CD,	*rectæ* CD,
65.	1.	*lineam AE,*	*lineam A* B,
69.	3.	*in E.*	*in* G.
95.	13.	*limitem E,*	*limitem F,*
97.	16.	*anguli AED, EDA,*	*anguli EAD, EDA,*
102.	2.	*fuit 3.*	*fuit ;*
107.	17.	*angulos ad E,*	*angulos ad D ,*
122.	4. *a fine.*	*supra ED,*	*supra* BD,
123.	25.	*angulum ABC,*	*angulum BAC,*
136.	5.	*8. primi.*	*4. primi.*
140.	4. *a fine.*	*ad* AC.	*ad* BC,
170.	14. *a fine.*	*angulo* ABC,	*angulo BAC,*
188.	27.	*Et quia latus BA, latere AC, ponitur non minus, erit*	*Et latus* BA, *latere AC , ponatur minus ; erit q;*
188.	31.	*non maior*	*minor*
195.		*Deest littera* A, *in fig.*	*in extremo lineæ FE .*
212.	1.	*æqualium*	*parallelarũ æqualiũ*
256.	10.	*ipsi* AB:	*ipsi AC:*
256.	11.	*ipsi* AC, *vel BI ;*	*ipsi AB, vel CI ;*
300.	5.	*ex* AB, BD,	*ex* AB, BC,
314.	2.	AC, EC	*AC,* BC,
315.	10. *a fine.*	*3 secundi*	*5. secundi*
317.	1.	*ad DH,*	*ad DE,*
336.	12. *a fine.*	*maxima vel minima propinquiores,*	*maxima propinquiores,*
378.	7. *a fine.*	*7. primi.*	*4. primi.*
402.	16.	BC D, BDA,	BCA, BDA,
417.	9.	*18. primi.*	*18. tertij.*
423.	8. *a fine.*	*in easdem partes*	*non in easdem partes*
424.	27.	*æqualia*	*æqualia duobus lateribus* GE, GF,

. 24.		in ADB,	in A, & B.
. 17.		& minus CH.	& minus PH.
. 20.		a ſeſquialtera	a ſeſquitertia
. 12.		vel vna excedant,	vel vna deficiant, vel vna æqualia ſint, vel vna excedant.
8.	1.	vt nunquam	vt nonnunquam
5.	5. a fine.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{64}$.
7.	16.	[illegible]	erit ea
16.	17.	ad C, quartam.	ad D, quartam.
96.	1.	ita DH, ad HE.	ita DH, ad HF.
06.	5.	erit quoque HE,	erit quoque HF,
23.	10.	Ergo componendo	Ergo permutando
788.		In rectangulo AC, deeſt litera B.	
795.	2. a fine.	AE, primam	AB, primam
798.	1.	Ducta per D.	Ducta per A,
799.	9.	Erit igitur, vt GB, ad BA,	Erit igitur vt GC, ad CA,
792.	13.	vt GB, ad BA.	vt GL, ad AK,
818.	vltima.	22. quinti.	12. quinti.
911.	17. a fine.	ita SR, ad KR,	ita SK, ad KR.
913.	16.	cuius diameter	cuius ſemidiameter.

Alia errata minoris momenti facile quiuis corriget. Errata vero poſteriorum librorum, ad finem totius Euclidis reperies.

QVÆ

QVAE PRAECIPVE Prioribus Commentarijs posteriore hac editione addita sint.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quã Proclus affert.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. pp. lib. 1. absque ope proportionũ sexti lib.

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12, & 13. lib. 2.

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi

cobi Peletarij, de angulo contactus.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima ad finem lib. 4. de figuris æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoq; æquilatera.

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica.

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquemultiplicia definierit.

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra: Et denique

alia

alia ſcitu iucundiſsima perficiuntur.

IX.

QVO pacto pleraque theorēmata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non.

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorū fractorum demonſtrationes clariſsimæ.

XI.

DE Proportionum cōpoſitione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regulariū in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierū conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe.

Cætera quæ paſſim hiſce commentariis adiecta ſunt non pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.

IN EV-

IN EVCLIDIS

ELEMENTA

PROLEGOMENA.

PRAEFATIO.

SI QVIS forte miratur, cur poſt tot præclariſsimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis ſcriptoribus editos, nouas adhuc ipſi commentationes conſcripſerimus, is facile ſibi perſuadebit, non temere id a nobis eſſe factum, ſi conſilij noſtri rationem cognouerit. Cum enim lõga, diuturnaq; experientia nobis eſſet perſpectum, atque exploratum, eam eſſe vtilitatem, atque adeo neceſsitatem horum elementorum, vt fruſtra quiſquam ſe ſperet ſine ipſorum præſidio, acutiſsimas, ſubtiliſsimaſque Archimedis, Apollonij, Theodoſij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illuſtrium Mathematicorum demonſtrationes poſſe percipere; vehementer dolebamus, tam inſignem, & illuſtrem auctorem a pleriſq; omnino negligi, a perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc noſtro ſeculo re-

periantur, qui ſedulam operam, ac ſtudium in perdiſcendis his elementis ponant, ob eam potiſsimum, vt arbitror, cauſam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obſcuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem ſibi citra erroris periculum ſequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in ſingulos Euclidis libros ſane eruditi, qui ſatis eſſe poſsint cuiuis ad facile conſequendam horum elementorum doctrinã: Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinẽ, ac methodum peruerterunt, verbaque propoſitionum eiuſdem locis non paucis immutarunt, vt verus, germanuſque auctoris ſenſus perdifficile poſsit intelligi; id quod maxime in decimo libro perſpicitur: Alter (Theonẽ intelligo) pene innumeris mendis, vitijſque incuria librariorum ita eſt deprauatus, & propter notas grẽcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas, ac male expreſſas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem ſine maximo labore, ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram vſque memoriam maius aliquod ſtudium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel ſex priores tantum libros expoſuerunt, vel ſi qui in vniuerſum Euclidem commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demõſtrationibus certiſsimis, proprias alias, ac nouas con-

erunt, quæ plerunq; non tam firmę sunt,
em ipsam simpliciter, & absolute consi-
, præsertim quod modo e propositionibus
quasdam perperam detrahūt, modo alias
e apponunt, modo denique nonnullas te-
immutant, vt merito de vero, proprioque
dis sensu dubitare quis possit. Qua tamen
Federicum Commādinum Vrbinatē Geo-
ram non vulgarem excipio, qui nuper Eu-
lem latinè redditum in pristinum nitorem re
uit, paucis locis exceptis, in quibus non pa-
n à vero aberrauit, vt suo loco monebimus.
uæ cum ita sint, resq; ac scientia tam præcla-
digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs
diuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre
ossunt post diuturni temporis in rebus mathe-
aticis operam collocatam; faciendum puta-
imus, vt lucubrationes nostras, ac vigilias stu-
iosis harum rerum nōnihil (nisi fallimur) sub-
dijallaturas in publicum ederemus. Accessit
ditionis causa altera: Nam cum Euclides, pro-
ter singularem vtilitatē, instar enchiridij, ma-
nibus semper debeat circumgestari, neque vn-
quam deponi ab his, qui fructū aliquem serium
ex hoc suaui Matheseos studio capere volunt, in
eoque progredi; id vero in hunc diem, exempla-
ribus omnibus maiore forma impressis, necdū
factum videamus; hoc nostra editio certe, si ni-
hil aliud, attulerit commodi, atque emolumen-
ti. Sunt enim hi nostri commentarij in vniuer-
sum Euclidem cōscripti commodiore nunc for-

ma, quam vulgo cæteri, (id quod magnop
nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) v
mineque editi, vt facile iam queant, nullo
negotio, e loco in locum, cum res tulerit,
atque portari. Nunc quo modo, via, ac rat
res tota a nobis pertractetur, quidque in hac
terpretatione præstitum sit, paucis accipe.
monstrationes aliorum, maxime Theonis, q
quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus ar
mentis adducti cum plerisque assueramus
Proclus etiam testatur, breuiores, quantum
rei difficultatē licuit, vel certe planiores, qu
do illud non potuimus, dilucidioresque redd
conati sumus. Non enim illas nude, ac totid
verbis, quot erāt scriptæ, proposuimus. Eteni
ea est interdum illarum breuitas, vt illud acc
dat, quod ab elegantissimo poeta dictum est
Breuis esse laboro, obscurus fio: Interdum etiam
cum breuius, atque succinctius efferri possin
magna, ob longiorem, quam satis est, serm
nem, affertur molestia legenti. Quare vtrunc
vitantes, eas, velut ἀπεφασιστικῶς, atque ad eun
fere mōdum tradidimus, quem, cum public
Euclidem interpretaremur, obseruauimus; ha
etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quar
tum est in nobis, satisfacere cupiētes. Ita enim
nostra sententia, Euclides facilius a studiosis,
ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathema-
tica studia nunc primum auspicantur, ac maio-
re voluptate, vtilitateqūe cognoscetur. Præter
hæc adiunximus multis in locis varia problema

ta,

coremata ſcitu non iniucunda, neque a
cometriæ aliena, quæ partim ex Proclo,
o, aliiſq; auctoribus decerpſimus, partim
io (vt aiunt) Marte, aſsiduiſq; meditationi
pſi confecimus. Data inſuper in hoc dili-
opera, vt definitiones Euclidis, præſertim
uriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere dif-
tatis, (in quas plurimi, tãquam in ſcopulos
ſdam, incidentes, a recto curſu deflexerũt,
n errores varios, atque abſurdos, prorſumq;
inſtituto diſciplinæ abhorrẽtes, dilapſi ſunt.)
lucide, atque perſpicue, quoad eius fieri po-
it, explicarentur; id, quod harum artium ſtu-
ioſi facile iudicabunt. Quæ res cum in amplio-
m magnitudinem excreſcerent, quam vt vnius
ibri ſpatijs, hac præſertim forma, commode
includi poſſent, in duas partes totam tra-
ationem diuiſimus. Altera ſex prio-
ribus libris continetur: altera
nouem reliquos, vna cum
decimoſexto ad com
parationes quin-
que corpo-
rum
regularium pertinente, quem ex
Franciſco Fluſſate Candalla adijcere vo-
luimus, complectitur.

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingrato fuisse Mathematicarũ disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi, benigne Lector, alteram editionem priore multò locupletiorẽ: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationẽ vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce commentarijs est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquã, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentã, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quòd eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquã enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam, quia tamen

men eorum demonſtrationem diu at diligenter quæſitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuerſa eſt) coactus ſum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam neceſſario iam dubitationi locus eſſet. Neq; enim Procli demonſtratio, quam ad propoſ. 28. lib. 1. Euclid. de re eadem affert, omni ex parte abſoluta, ac Geometrica cenſeri poteſt; cuius rei cauſa eodem loco à nobis explicata eſt. Deinde ex Pappo Alexandrino inſcriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis deſiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam, & ratio ad circulũ quadrandum (res tot ſeculis à doctiſſimis viris exagitata) conficitur: quod alibi docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè oſtendimus, cur Euclides magnitudines proportionales, & improportionales per æquemultiplicium habitudinem deſcribere coactus ſit. Poſtremò (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari ſolent, Geometricè demonſtrauimus. Hæc ferè præcipua ſunt, quæ hac poſteriore editione ad commentarios noſtros in Euclidem acceſſerunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc poſterior priorem ſuperat, quæ ſanè plurima ſunt, & Euclidis propoſitionibus ſparſim inſerta, inter legendum facilè comperies, ſi vtramque editionem cum altera conferens attentius paulò conſiderabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa oſtium, atque aditum ad omnes alias diſciplinas Mathematicas referant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam

ad ipſa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenã Mathematicæ diſciplinæ hoc nomen acceperint: quæ ſit earum diuiſio: à quibus primùm ortæ, & per quos deinde ſingulæ fuerint excultæ: quanta ſit illarum præſtantia, atq; vtilitas; & ſi qua ſunt aliarei noſtræ opportuna.

MATHEMATICAE DISCIPLINAE CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem verſantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca μάθημα, ſiue μάθησις, quæ ſignificat diſciplinam, ſeu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen diſciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes ſolę ſint adeptæ, duas potiſſimum cauſas apud probatos ſcriptores inuento. Pythagorei enim, atque Platonici exiſtimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, eaſque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Chriſtiana fides falſum eſſe perſpicue docet) teſtantur, eas nomen doctrinæ, ſiue diſciplinæ obtinere, quod maxime ex ipſis nanciſcamur recordationem, reminiſcentiamque illius ſcientiæ, quæ anima noſtra, (vt eorum eſt error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facilè, ac familiari quodam exemplo cõprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inſcribitur, vbi Socratem introducit puſionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimenſione, ad quæ licet in principio reſponderit, vt puer, gradatim tamen aſcendens eo deductus eſt, vt reſponderit id, quod tandem dicturus fuiſſet, ſi diutiſſime perdidiciſſet Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen ſcientiæ, & doctrinæ ſibi vendicare, quod ſola modum, rationemq; ſcientiæ retineant. Procedunt enim ſemper ex præcognitis quibuſdam principijs

nes demonſtrandi es, quod eorum eſt doctrina, ſiue diſciplina, vt ſine diſcipquam aliquid non probatum affirmat andecunque aliquid docere velint, ſi et eorum, quæ ante docuerunt, id ſuobitò: illud vero modo explicant, de eſt. Quod quidem alias artes, diſſeruare vidimus, cum plerunque in quæ oſtendere volunt, ea, quæ non monſtrataue, adducunt.

1. Poſter.

RVM MATHEMATIrum diuiſio.

DREI, quos deinde ſecuti ſunt omdem Mathematici, atque Philoſoici. Mathematicas diſciplinas vniatuor partes diſtribuerunt, Arithmecriam, atq; Aſtronomiam. Cũ enim iam verſantur, ſit vel diſcreta, ſub ontinua, ſub qua omnes magnitudiiraque tam ſecundum ſe, quam com onſiderari; Viſum fuit illis conſentafacultates inſtituere, qua vtramque conſideratione diligenter contempla etica agit de quantitate diſcreta ſe& accurate explicando omnes nume aſſiones. Muſica tractat eãdem quãumerum comparatum cum alio, qua conſentus reſpicit, atque harmoniã. ine ſiue quantitate continua, ſecunobilis exiſtit, diſputat. Aſtronomia ulinem, vt eſt mobilis, conſiderat; pora, prout continuo motu cientur. Ad ias Mathematicas, quarum Arithtura, Muſica vero, atque Aſtronomia ia quouis modo de quantitate agentes, eographia, & cætera huiuſmodi, vel quibus dependent, reduci poſſunt.

ALIA

ALIA ratione a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor eſt Proclus in commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica diſciplina diuidũtur. Quam quidem diuiſionem, quoniam eleganter, copioſeq; docet, ad quanam ſeſe extendat Mathematica diſciplina, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptam hic ſubijcere ſtatui. Volunt itaq; pradicti auctores, ſcientiarum Mathematicarum quaſdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam vero in ſenſilibus, ita vt attingant materiam ſenſibus obnoxiam, verſari. Prioris generis ſtatuunt duas longe primas, praecipuaſq; ſcientias, Arithmeticam, & Geometriam: In poſteriori vero genere conſtituunt ſex, Aſtrologiam, Perſpectiuã, Geodeſiam, Canonicam ſiue Muſicam, Supputatricem, atq; Mechanicam. Aſtrologiam dicunt eſſe eam facultatem, qua de mundanis ediſſerit motibus, de corporum caleſtium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque diſtantijs, ac de alijs huiuſmodi rebus. Huius rurſum tres conſtituuntur partes; Gnomonica, qua in horarum dimenſione, poſitu gnomonum, exercetur: Metheoroſcopica, qua eleuationum differentias, ſiderumq; reperit diſtantias, nec non multa alia, & varia Aſtrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, qua planetarum, caterarumq; ſtellarum diſtantias huiuſcemodi Dioptricis dignoſcit inſtrumentis. Perſpectiuam aiunt a Geometria gigni, atque vti radijs viſorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hiſce conſtituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, qua proprio nomine dicitur Perſpectiua, qua quidem reddit cauſam earum apparentiarum, qua aliter, quam ſint, ſeſe nobis offerre ſolent, ob eorum, qua ſub viſum cadunt, alios ſitus, & diſtantias, vt parallelarum coincidentia, vel quadratorum, tanquam circulorum, aſpectionis: Et in vniuerſam ſpecularem, qua circa varias, multiplicesq; verſatur refractiones: Nec non in eam, qua Scigraphice, hoc eſt, vmbrarum deſignatrix appellatur, qua oſtendit, qua ratione fieri poſſit, vt ea, qua in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudinesq; videantur. Geodeſiam appellant eam ſcientiã, qua res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tãquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem

non

ilibus rectis lineis, vt Geometria, sed
erdum quidem certioribus quodam pa-
; interdum vero crassioribus, vt spar-
Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam
in eam, quæ solida dimetitur. Cano-
vocant eam scientiam, quæ apparen-
rationes, sensusq; vbique vtitur ad-
lato inquit, talis existit, vt mouri an-
eatur. Supputatrix eadem apud ipsos
metica practica. Hæc enim numeros
stellectilibus, sed vt sunt in sensilibus
ue, quæ in cognitione rerum sensilium,
consistit, apud ipsos multiplex est. Qua
rorum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ
n, quæ geredis sunt bellis idonea, qua-
rum fertur construxisse, Syracusas ter-
resistentia; Quædam mirabilium
quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quip-
ribus maximo cum artificio efficiat,
tesselatis, atque Heron operantur, alia
um motus quidem inæqualibrium, sta-
causam consendum est, vt Limaus
ia vero nervis, sparisq; animatas co-
itantibus: Quædam est æquilibran-
quæ centroponderantia vocantur, co-
ue sphærarum effectrix, quæ σφαιρο-
estium circumuolutionum imitatio-
des etiam fabricatus est: Atque vt
is, quæ materiam motui vim habet.
a Mathematicæ apud antiquos Mili-
rum inquam, quæ ad instruendas, coer-
icies, quam Græci τακτικὴν vocant,
thematices partibus dicendam esse non
y voluere, sed vti eã volunt modo qui-
vt in enumerandis legionibus, modo ve-
ndis, dimetiendisque castrametatio-
quemadmodum neque Historicam, neq;
natices partem vllam esse dicunt, licet
orici, tum etiam medici Mathematicis

vtantur

vtantur theorematibus ; Rerum quidem geſtarum ſcriptore. vel climatum ſitus referendo , vel vrbium magnitudines, diametros , vel ambitus , circuitusve colligendo : Medici v ro quamplurimas res in arte ſua huiuſcemodi vſis dilucida do. Nam vtilitatem , quæ in Medicinam ab Aſtrologia pertu nit , ipſe etiam Hippocrates oſtendit , ac fere omnes , quitung aliquid de opportunis temporibus , lociſq; dixere. Eadem ſan ratione ille etiam , qui aciebus inſtruendis operam accommodat , Mathematicis quidem vtetur theorematibus , nec tamẽ ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam , quæ numeroſa eſt , pauciſſimam oſtendere multitudinẽ, caſtra , ſuoſq; exercitus ad figuram circuli formet ; interdum vero ad figuram quadranguli , vel quinquanguli , vel alterius cuiuſdam multanguli , vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt , quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATIcarum diſciplinarum.

OMNES *diſciplinas Mathematicas a variis, & diuerſis auctoribus ortum , originemque duxiſſe , perſpicue hiſtoria teſtantur : Immo vero ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio, ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſſiſſe , memoriæ quoque proditum eſt . Arithmeticen.n. inuentores primi creduntur Phanices , propter frequentes mercaturas, atque commertia , vt auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pythagoras , eiuſque ſucceſſores, nec nõ Aegyptij , Græci denig; atque Arabes ampliſicarunt, variiſq; problematis , atque theorematis illuſtrarunt. Muſicam deinde a Mercurio primum eſſe inuentam , multi ſcriptores tradunt ; quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendauit , atque concredidit ; Hic autem Thamyri, & Lino ; Linus vero Herculi, & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra vſque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo , ab Aegyptijs reperta eſt, ortumque habuit ab agrorum emenſione . Cum enim anniuerſaria Nili inundatio agrorum terminos , ac limites ita confunderet , vaſtaretque*

vt nemo

n dignoſcere poſſet ſinum, cæperunt à ipſis an
em menſurandorum agrorum artificio, vtha
, quod ſinum erat, reddere rectum. Quæ quidem ra
iendi, quanquam tunc temporis non neceſſaria ad
it, ac impolita, ab ipſo tamen ipſius Geometriæ
. γεωμετρέομαι enim, ſiue γεωμετρία ſtatim
od, terram metior. Cæterum paulatim deinde
cepta eſt expoliri, & non contenta ſimplici ſp
a etiam cæleſtia dimetiendi contemplatione, in
niuerſa Aſtronomia, Perſpectiua, Muſica, Geo
iplinis quam plurimis, quæ ex ipſa, velut fonte et
Hanc Thales Mileſius ex Aegypto in Graeciam pri
cliſſe fertur: Deinde eam inſignes Philoſophi, ac
ti plurimis, acutiſſimiſque demonſtrationibus locu
gli exornarunt: Inter quos hi ſunt præcipui ex
Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippo
Oppi-ito, Oenopides, Zenodorus, Eudo, Amphio,
Apollonius, Ariſtarchus, Eratoſthenes, Archimedes
Euclides, Serenus, Hyppicles Alexandrinus,
Euſebius, Apollonius Pergæus, Theodoſius Tri
Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexan
Geber, Eutocius Aſcalonita, Pappus, Proclus,
Egyptii, quos omnes longum eſſet recenſere.
Egregie non pauci ab Atlante primum inuenta
entique non parci ab Atlante primum inuenta
Prælude ob eximiam, quæ primas inter mortales
Aſtronomiæ cognitionem, exortam ipſe ve
illis Ipſius humeris cælum ſuſtinere; Alij putant,
rma obſeruatione (quod etiam Cicero affirmat
inatione) ſiderum ſitientiam animum e. Alij
mos huius ſcientiæ faciunt inuentores. Alij Aſſy
enique Gloriam hanc, & laudem Babylonijs eſſe
m, conſentit. Hæc autem inſtientia, vt eſt perſpicu
ta quoq; maxime illuſtres auctores claruerunt, qui a
uius loci declarare. Cæterum præcipuus huius qui inter
nis Mathematicis inuenis, reliqua omnia de quorum
uonis modo agemus, facile ex ipſis, tam quam riuulis ex
, derivata ſint, atque deducta.

NOBI-

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM *disciplinę Mathematicę de rebus agunt, quę absque vlla materia sensibili considerā tur, quamuis re ipsa materia sint immersę; perspicuum est, eas medium inter Methaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earū con sideremus, vt recte a Proclo probatur. Methaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alias duo. Si vero nobilitas, atque præstantia scientia ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda haud dubie Mathematicę disciplinę inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq;, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitatione tollant; Id quod aliis scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum sectę, (vt alios interim philosophos silentio inuoluam) quę ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortę, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij deniq; Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripatetices se esse gloriātur) tanquam duces sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demōstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorū, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam*

tiam eſſe digniorem, præſtantioremque, qua magis ſyncera-tis, veritatiſque eſt amans. Cum igitur diſciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non ſolum nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantum probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentq; dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias ſcientias omnes ſit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMATICARUM diſciplinarum.

NON *ſolum vtiles, verumetiam neceſſarias admodum cenſeri debent diſciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfectè perdiſcendas, tum ad rem etiam publicam rectè inſtituendam, & adminiſtrandam. Neque enim ad Methaphyſicam, vt elegantèr oſtendit Proclus, vlli patet aditus, niſi per Mathematicas diſciplinas. Nam ſi a rebus ſenſibilibus, quas Phyſicus conſiderat, ad res ab omni materia ſenſibili ſecretas, ſeiunctaſq; quas contemplatur Metaphyſicus, vires, aciemque noſtri intellectus attollere abſque vllo medio tentemus, noſmetipſos excæcabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus phyſicis, qua materia ſenſibus obnoxia ſunt coniunctæ, ad res methaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maximè auulſæ, intellectus aſcendat, neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſuefieri rebus minus abſtractis, quales a Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti ha diſciplinæ ad ſacras literas rectè percipiendas, interpretandaſque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Auguſt. lib. 2. de Doctrina Chriſtiana demonſtrans, numererum inſcitia multa non intelligi a multis, quæ translatè, ac myſticè poſita ſunt in ſcripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque ſententiam longè poſt pluribus verbis repetit eodem lib. Hoc* Cap. 16. Cap. 37.

idem

idem docet D. Hieron. tomo 1. Epiſt. 5. aſſerens, magnam
eſſe numeris vim ad multa myſteria in ſcripturis intelligé
Quo item loco, Geometriam magnam aſſerre Theologis
Cap. 16. litatem, perhibet. Rurſum B. Auguſt. loco, quem paulo a
retuli, teſtatur, Muſicam perneceſſariam eſſe doctori Cl
Cap. 19. ſtiano, ſubiungens paulo poſt, Theologos debere etiam Geo
phia diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans D. Gre
rius Nazianzenus, ſummis laudibus D. Baſilium præcep
rem ſuum extollit, quod in Aſtrologia, Geometria, numer
rum cognitione, cæteriſque ſcientijs Mathematicis, fuerit
mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ art
ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & a
reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas
vt perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumi
na antiquorum philoſophorum, maximè Ariſtotelis, & Pla
tonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene rectèque phi
loſophandum proponimus, eorumque fere omnium interpreti
cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis
ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, vt ea, quæ alioquin
multis obſtructa difficultatibus videbantur eſſe, per exempla
huiuſmodi clariora, magiſque perſpicua fierent; quæ procul
dubio nulla ratione percipere is, qui ſcientiarum Mathemati
carum omnino eſt expers. Quid? quod olim nemo auſus eſſet
celeberrimum Diuini Platonis gymnaſium frequentare, qui
prius optimè Mathematicis diſciplinis non fuiſſet exornatus?
Vnde pro foribus Academiæ hoc ſymbolum dicitur pinxiſſe,
ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω. Immo verò idem Plato in
Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles eſſe nō du
bitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de Rep. præcipit: Math-
maticas diſciplinas primo omniū eſſe addiſcendas, propter va-
rias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copioſè ſcribit) non
ſolum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad
remp. bene adminiſtrandam: Cuius egoraci multa exempla
cum prateriti temporis, tum noſtræ ætatis, ſi id neceſſe foret,
in medium poſſem adducere. Ibidem clariſſimis verbis affir-
mat, præcipuè Arithmetices naturā ad omnes doctrinas aptos
eſſe, idoneoſque, adeò, vt etiāſi nullam aliam nobis ha ſcien-
tia afferret vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum
alia commoda ex ipſis percipiamus) perdiſcendas tamen omni

ſtudio

esse statuat, quod ingenium, mentem q; ad reliquas
studio ea
artes om
quidē e
enim eo
scipli
percip
nimer
optim
rum
ment
tho, i
nis sti
aum
N
s capessendas aptiorem reddant, & acutiorē: Quod
perientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus
, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce di-
accommodatur, fructus non exiguos ex aliis scientijs
: Contra vero, eos qui ad hasce facultates idonei mi-
periuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure
Platonem frequenter in suis operibus iterum atque ite-
arum disciplinarum utilitatem nobis inculcat, atq; e m
at; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philoso-
Timæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditio-
enua viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus
enumerandis brevitatis memor de industria supersedeo.
omnes utilitates accedit maxima iucunditas, atque
sque animus his artibus colendis, exercen-
. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus
bus non solum ingenui adolescentes, verum
principes, reges, ac imperatores ad hone-
eque liberalem oblectationem animi, quā
utilitate coniunctam pariunt, diu multū-
: Quorum exemplum multos adhuc no-
i conspicimus. Testatur, magnam ani-
artibus percipi. Diuinus Plato in 7. de
cit, & non temere confirmat, oculum ani-
is excacatur, defoditurq;, a Mathema-
is recreari, excitarique rursus ad eius,
ionem. Omitto plurima alia testimonia
grauissimorum Philosophorum, quibus ha
utilitas cum necessitate, & delectatione
præstantia abunde potest comprobari.

DIS ATQVE GEOMETRIAE commendatio.

VISNAM fuerit Euclides horum elementorum
institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem no
bis interpretandum proposuimus, deq; Geometria
vniuersa, in medium proferamus) & quo tem-
rueris, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim,

vt teſtatur vulgata elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe philoſophum illum Megaris natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratiſque auditorem, qui ſectam inſtituit a ſe dictam Megaricam, qua alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod ſectatores illius interrogando, reſpondēdoque (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de vitis philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Quaſt. Acad. lib. 2. vbi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megareus, a quo iidem illi Megarici dicti, qui id bonum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet vnum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. ſcribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiā diſcipulus fuit, cōductores ara ſacra de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verum ſi Proclo nobili ſcriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum eſt, Euclides hic noſter iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemaei primi, qui Ægypto, poſt Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Chriſtum natū anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius eſſe crediderim, hoc maxime adductus argumēto, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentiſſime enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquā morituram famā ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monumentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus vel ſcientem voluiſſe praterire, vel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum, ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo philoſopho lōge alius eſt, qui, cum in doctrina Academicorum eſſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo vendicarit. Scripſit autem volumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam rapeſſendam pertinentes,

nomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, nulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de ierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptũ, per Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini atis opera in lucem est editus. Conscripsit item conica ta, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum perue- & alia id genus opuscula. Maxime vero hoc volumen entorum Geometricorum nunquam omnium consensione laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione cõ- it, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt enta, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt mmum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ Extrem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea dũ- sunt esse necessaria, atque vtilia, ad cõmu- vtilitatem, argumentis, & rationibus firmissi- comprobanda. Caterum, quanta sit horum Eu- um Geometricorum, ac proinde vniuersæ Geo- ia, ac vtilitas, partim ex ijs, quæ ante scri- ijs, quæ nunc dicemus, non obscure perspici enim Geometrica elementa, eã ob causam, Dicuntur lum opus Mathematicum possimus aggredi, aliquem inde percipere: Omnes siquidem rerum scriptores, vt Archimedes, Apollo- in suis demonstrationibus vsurpant tanquam principia omnibus iam diu demonstrata. Quamobrem sicut is, qui lege- literarum discit prius, & illis assidue repe- vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias di- maticas desiderat sibi reddere familiares, cle- Geometrica plene, ac perfectè calleat prius, necesse elementis, veluti fonte vberrimo, omnis la- longitudinum, altitudinum, profunditatum, om- agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, in cælo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horo- sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarũ, qualis cer- nitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere varie illumi nato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ

totius huius mundanæ eſt inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis deniq; totius exploratæ figura, ac quantitas. Oſtenditur, atque demonſtratur vnius huius ſcientiæ vi cæli vniuerſi, ſiderumque perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppoſitiones, aſpectuſque varij tam expedite cognoſcuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis, ac Lunæ defectiones certiſſimæ, antequam fiant, in omne poſterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mẽtis noſtræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe videntur, omniumq; fidem ſuperant, perſpicua facere, credibiliaq; eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtãtur hiſtoriæ. Cum enim Hieron Syracuſarum rex nauem, quã Ptolemæo Ægyptiorum regi mittere ſtatuerat, tanta eſſet molis fabricatus, vt eã omnes vna Syracuſij a loco dimouere minime valerent, Archimedes Geometræ peritiſſimus vnius Geometriæ viribus fretus regi promiſit, ſe effecturum, vt ipſam ſolus rex abſque vllo labore ſubduceret: Quod cum præſtitiſſet, in conſpectu omnium rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendũ eſt. Non diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, non diſſoluta, ſingula auri, & argenti põdera, qua inter ſe aurifices fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſime offendit. Neque ſilentio prætereri debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonſtrationum Geometricarum innixum ſæpenumero iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtram, quã incolimus, e loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis viribus quibuſcunque, pondus quodcunque ſe poſſe mouere: Et alia id genus non ſolum ab Archimede, verum etiam ab alijs præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe memoriæ proditum eſt. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit,

vt

ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quē diu Syracusam
dam p
ctus, in
chime
rium
ctum
huius,
se, cu
mirae
curi
Acc
cum
sum
esse
sin
ne
ut
ra
ta
ar
ni
ph
ant
me
ra
su
res
ca
ma
tur
mo
bi
lium
sus
bri
int

ellus Romani exercitus imperator, contra quē diu Syracusam urbem defenderat Archimedes, machinis quibusGeometricas demonstrationes adinuentis, & construexpugnata urbis direptione, ac cade ciuium vnius Arcis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra impetum, & voluntatem a gregario quodam milite interfectum vidit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo haeum viuo habere nō potuit. Cuius sepulchrum Cicero a in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, ndum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. dit quoq; ad prestantiam, utilitatemq; Geometria, quod demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo ipsis satis perspiciet, quæ sit vis demonstrationum, nemoq; perfectus erit artifex methodi. Quod quidē Galenus insignis philosophus, ac medicorum quem de libris propriis inscripsit. Is enim bus Dialecticis, cum scholas Peripateticorū, temporis percurrisset omnium, & precepta ardore, studioq; arripuisset, nihil fere ab ipgur, quod ad demonstrationis cognitionem mo pleraque eorum, qua tradiderant, ab posita, nonnulla etiam naturali rationi pu ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrho deuenturus fuerit, nisi Arithmetica, Geque (quibus artibus ab auis, & patre sue cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde e characteres illos Arithmeticos, & linea Plato etiam cum ob alias, tū ob eā etiam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio alia artes facilius, & rectius percipiantrema laus Geometria, omnibusque non hasit in exiguis, & inferioribus originem traxit, sed euoluit in ca a quibus mentes humi abiectas in illam rurusque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurcœlestem sedem mouit, & admirandam mundi huius fa cam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectus subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuerse sibi hunc primum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque vero mirum cui videri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus tenet propria contemplationes, vt diximus, non autem de linea vel etiam punctis: Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimũ circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel linea figuram vllam constituunt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propria de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus vero sine planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus vero quinq; de solidis acutissime disputat, eorumq; proprietates maxime illustres perueſtigat. Quoniam vero cum res oēs Geometricæ, tum præsertim solida illa quinq; regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absq; linearum cōmensurabilium, atq; incommensurabilium notitia; Immo vero quam plurimæ magnitudines sub mensurã cadere nulla ratione absq; earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenumero sint talia, vt ea cōmunis, & nota mensura data metiri nequeat, vt liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; vsum: idcirco vt hisce elementis Geometricis cōpleteretur oīa documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimensionemq; requisita, Stereometria sua præposuit decimum libri, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi linea disserit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum com-

men-

bilium, & incommensurabiliũ sine numerorum cogni
tione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorũ
passionibus, easq; copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc
antecedunt, est persecutus. Quamobrem totũ hoc volumen ele-
mento rum ũ Geometricorum quindecim libris cõprehensum (quo-
rum idẽ priores tredecim sine vlla cõtrouersia Euclidi aſcri
buntur ab omnibus, posteriores vero duo a nonnullis Hypſiclis
Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor par
tes, ut prima pars contenta sex prioribus libris agat de pla-
nis: Secunda tres sequentes cõplectens, passiones numerorum
nisi rutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de
per s commensurabilibus, incommensurabilibusq; disputet;
linea rta denique reliquis quinq; libris absoluta scientiam solido
rum, siue corporum cõplectatur. Prima pars rursum triplex est;
Primus in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, in-
quinto aequalitatem, & inaequalitatem: In quinto
proportionibus magnitudinum in genere disputa-
tis; proportionibus figurarum planarum disputiã
Euclides in singulis alijs libris pertractet, pro-
nemus.

DE PROBLEMA, QVID THEOREMA PROPOSITIO, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorũ dividitur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocãt eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid conſiſtere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe trian-
gulum aequilaterum conſtitui, appellabitur huiuſmodi demon-
ſtratio problema, quoniã docet, qua ratione triangulum aequi-
laterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Di-
ctum eſt autem hoc genus demonſtrationum Problema ad ſimi-
litudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecti-
cos problema dicitur quaeſtio illa, cuius vtraq; pars contradi-
ctionis (vt ipſi loquuntur,) eſt probabilis, qualis haec eſt quaeſtio;
An totum diſtinguatur realiter a ſuis partibus ſimul acceptis:
Sic etiã quaeſtum illud apud Mathematicos, quo aliquid iu-
bent cõſtruere, & cuius contrarium effici etiã poteſt, problema
appellatur. Vt ſi quis proponat, ſe demonſtraturum, ſupra lineã

rectum finitam triangulum aquilaterũ posse constitui, e
problema, quia & triangulum non aquilaterum, nempe I
les, vel scalenũ, supra eandem lineam constitui potest. Par
tione, qui instituit angulum rectilineũ secare bisariam, pro
ma nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi pote
partes non aquales. Est tñ discrimen non parvum inter Dia
ëticorum, & Mathematicorum problema. Nã in problema
Dialectico vtrauis pars contradictionis susceptæ confirma
rantũ probabiliter, ita vt intellectus cuiusq; ambigat, vtra
illius pars vera sit: In Mathematico vero, quamcunq; quis p
tẽ elegerit, eam firma demonstratione, ita vt nihil omnino d
bij sit reliquum, cõprobabit. Si.n. Geometra statuat ex punc
quolibet linea recta propositæ lineã perpendicularem educere
efficiet vtiq; hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eode mo
do dicendũ est, si ex eodem puncto velit educere lineã non per
pendicularem. Theorema aũt appellant eam demonstrationẽ
qua solũ passionem aliquam, proprietatemue vnius, vel pluriũ
simul quanetatum perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare,
in omni triãgulo tres angulos esse aquales duobus rectis, voca-
bũt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut do
cet triangulũ, aut quippiam aliud construere, sed contẽplatur
tantũmodo trianguli cuiuslibet constituti passione hanc, quod
anguli illius duobus sint rectis aquales. Vnde a contemplatione
ipsa, hac demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri
nulla ratione potest, contradictionis vtraq; pars vera vt sit. Si
enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duo-
bus esse rectis angulis aquales, nullo poterit modo fieri, vt in-
aquales quoq; sint duobus rectis. Eadẽ ratio in alijs theorema-
tibus est intelligenda. Itaq; vt vno verbo dicã, quasitum illud
Mathematicũ construere aliquid docens, cuius etiam oppositũ
potest effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet construere,
& cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appella
tur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semi-
circulo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino
esset, & Geometriæ prorsus ignarus indicandus; quoniam oẽs
anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstrabitur
lib. 3. propositione 31. Quamobrẽ theorema hoc, & non proble-
ma dicendũ erit. Caterum tam problema, quã theorema dici
cõsueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod vtrũ-

que

quæ alicuius Euclidis lumina, & Archimedis, Apollonij, Heronis, Pappi, Theonis, Proclique Diadochi, ac reliquorum Mathematicorum, qui huius scientiæ fundamenta posuerunt, & ad hanc nostram ætatem propagarunt, ut in Euclidis Elementis, Archimedis libris, Apollonij Conicis, Pappi Collectionibus, Theonis & Proclique commentarijs videre licet. Quæ quidem omnia, ut ad nostrum institutum accommodemus, ea ratione tractanda sunt, quam breuissimis explicabimus.

Quid nobis proponat, ut in exemplis adductis constat. Hactenus quid dixerim, ut studiosus lector non miretur quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositiones dici problemata, alias theoremata. Elementa namque Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut alioquin interim volumina tacitè,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concludunt ea verbis: Quod faciendum erat: Theorematum vero hisce: Quod ostendendum vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate, plures demonstrationes continentur et non una tantum, quamlibet syllogismus demonstrationis solum concludat id, quod propositio demonstrandum proponitur, ut declarabimus in prima propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM vero ad demonstrationes problematum, atque theorematum plerumque requiruntur alia quædam theoremata, & a minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ assumpta sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, de quibus præcipue agitur, ut breuius & facilius demonstrationes possint fieri. Vocant autem illa Lemmata, propterea quod assumuntur ad alias demonstrationes, non autem de quibus demonstratio instituatur, quemadmodum de alijs. Lemma igitur dici potest demonstratio, seu constructio illius, quæ assumitur ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, ut demonstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAE NAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

QVM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente cognitione, ut auctor est Aristoteles, atque ex assumptis, & concessis quibusdam principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumque philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt utique & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In prima re-

ponuntur ꝺes definitiones, quas nonnulli cum Arist. suppositio-

nes,

nes, vt vult Proclus, appellant. His autē vocabula artis explicanti, ne in tractatione ipsa, nominū ambiguitate, aut obscuritate circūuenti in paralogismos incidamus. Secundū genus complectūr petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo claræ sunt, & perspicuæ in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeāt confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiū genus referuntur Axiomata, seu cōmunes animi notiones, quæ non soliū in scientia proposita, sed etiam in cēteris alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula rectè perceperit. Atq; his principijs rectè mihi videt accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles. A ianua quis aberrabit? Vt præclarè a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igiti hoc in volumine Geometricorum elementorū præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum oīa hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidē facile a quouis intelligunt, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquā assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarent. Vnde hoc etiā nomine summis laudibus efferenda est Geometria, oībusq; seculis prædicanda, quod ex tā exiguis initijs cuilibet quantūuis rudi et ignauo notissimis, et quidem perfacilibus prograditur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tñ omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq; certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquat. Porro inhuiusce modi principijs tradēdis hic ordo ab Euclide seruat, vt in ipso quidē introitu scientię proponat principia toti Geometriæ cōmunia, in alijs autē deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadā ratione, ad materiam illorum subiectam videtur spectare. Neq; vero oīa principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tū ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possint & intelligi. Verū ne in hac quoq; parte desuisse videamur rerū Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

HOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus, proprietatesque triangulorum tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdũ, interdum vero vnumquodq; per sẽ inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem, atque inæqualitatem, rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in diuersis quandoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas cõstitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quæ facto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Proclis sententia, rectilinearum figurarũ maximè prima, ac præcipua,

cipua, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propoſitã exorditur à principijs, inſtio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate cõtinua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, ſi prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas ſecundum longitudinem, alteras ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, ſed quædam vnitas tantum ſecundum longitudinem; quadam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quadam deniq; prater duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, ſiue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa ſolum eſt, aut longa ſimul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimenſionem habere poteſt res vlla quanta, vt recte demonſtrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatem reſtituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimenſione, qui quidem, quod ſciam, adhuc nondum eſt excuſus. Itaque quod in quantitate continua, ſiue magnitudine exiſtit, intelligiturq; ſine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum eſſe cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Inſtans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris pũctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperire nullum poteſt, niſi velis, extremitatem alicuius acus acutiſſimæ, ſimilitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremitas diuidi poteſt, & ſecari infinite, punctum vero indiuiduum prorſus debet exiſtimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore inſtans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua. punctum

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam ſpeciem magnitudi-

nis,

nis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, no autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas removetur, non autem contra. Lineam autem hanc, sive longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quadam est, ad longitudinem ipsius inet luminis, & umbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes utriusq;. Mathematici quoq;, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vero interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quadam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari atque diuidi.

III.

LINEAE autem termini, sunt puncta.

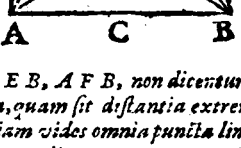
DOCET, *quanam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineã terminari, sive claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim linea infinita terminos assignare potermus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita ut earum extremitates sola esse puncta cogitemus.*

RE-

IIII.

RECTA linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

TRIPLEX *omnino eſt linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, ſiue compoſita ex vtraq;. Ex his deſcribit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit eſſe eam, qua æqualiter inter ſua puncta extenditur, hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atq; illuc deflectè do ſubſultat; in qua deniq; nihil flexuoſum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue ſumma vi extenſum: In eo enim omnes partes media cum extremis æqualem obtinent ſitum, neque vlla eſt alia ſublimior, aut humilior, ſed omnes æquabiliter inter extremos fines poſita progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo ſua interiacere puncta, quando æquale occupat ſpatium ei, quod inter ſua ſitum eſt puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præciſe ſpatiũ, quanta eſt diſtantia puncti A, a puncto B: Linea uero A D B, A E B, A F B, non dicentur recta, cum maiora obtineant ſpatia, quam ſit diſtantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta linea A C B, inter quæ eſt punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, ſubſultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineã perpulchre ſic definit. Linea recta eſt, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, ſi punctum C, aut quodvis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique eſſet C, punctum interiectũ, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rurſus oculus in A, exiſtens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis*



non

n est in lineis A D B, A E B, A F B.
ram rectam esse minimam earum, quæ
; qualis est A C B, comparata cum
B. Si enim A C B, non esset minima
inos A, & B, possident, non ex æquo
sed ea potius linea, quæ inter dicere-
mpanus describens rectam lineam
ex uno puncto in aliud extensionem.
Mathematici per fluxum puncti ima
ribi lineam, ita per qualitatem flu-
ea descripta intelligunt. Si namque
ipiatur per brevissimum spatium, ita
ıq; in illam deflectat, sed æquabile
cessim teneat, dicetur linea illa de-
ctum fluens cogitetur in motu va-
bare, appellabitur linea descripta,
fluens in suo motu non vacillet,
mi quodam motu, atque distantia
quod fertur, vocabitur d scripta
e si duo puncta moueãtur similibus
er æqualiter ~~in~~ se distent; dese-
les, hoc est, si una earum fuerit
ero una fuerit curua, erit & al-
a, &c. Lineas non rectas, quæ
n definit hoc loco Euclides, sed
decimaquinta, mistam prorsus
ntis Geometricis nullum ha-
a genera linearum misturæ
xedam differentes. Vide Pro-
solido. In plano sunt Hyper-
us agit copiosissime Apollonius
boides, de qua Nicomedes; li-
s in libro de lineis spiralibus
nuscodã. In solido, sin super-
linea helica, quam ea ab Ar-
, quæ circa cylindrum aliquo
a conum existit, vel etiam qua
spira illa, quas Sol describit ob
oculimus. Dissimilium autem
infinitus

infinitus eſt numerus, quas non eſt opus hic recenſere. Ex his conſtat, duas tantum eſſe lineas ſimplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; ſiunt, miſtas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingenioſe concludit Ariſtoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum eſſe motus, duos quidem ſimplices, rectum, & circularem, tertium vero miſtum, ſiue ex illis duobus compoſitum.

Lib. 1. tex. 5.

SED *quoniam lineas rectas regula ducere ſolemus, doceamus, qua ratione regulam propoſitam examinare poſſimus, num linea per illam deſcripta recta ſit, nec ne. Sit ergo regula A B, ſecundum cuius latus C D, recta C D, deſcribatur.*

qua ratione regula examinari oportet an recta ſit nec ne.

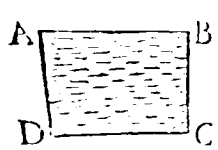
Deinde regula inuertatur, vt ſuperior ſuperficies fiat inferior, & inferior euadat ſuperior, dextraque pars tranſeat in ſiniſtram, & contra, hoc eſt, partes regulæ prope B, ſtatuantur iuxta punctum C, recta deſcripta, & partes prope A, iuxta punctum D; & ſecundum idem latus regulæ C D, à puncto C, ad D, recta ducatur. Nam ſi poſterior hac priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis ſidere poſſimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfectè rectum non erit, ſed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES eſt, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST *lineam, quæ eſt prima quantitatis continuæ ſpecies, vnicamq; habet dimenſionem, definit ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit, additq; prima dimenſioni ſecundum longitudinem, alteram ſecundum latitudinem. Nam in ſuperficie reperitur non ſolum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate.*

Vt quantitas A B C D, inter
B, B C, C D, D A, com-
, consideratáq; secundum lon-
em A B, vel D C, & secun-
tudinem A D, vel B C, om-
ers profunditatis, appellatur su-
es. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corpo-
ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue
, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei
exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem tor
artem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ.
thematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt
lligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestí-
m enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter
ngitudinem lineæ, latum quoq;, propter motum, qui in trans-
ersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit,
um linea ipsam describens omni careat profunditate; quare
superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficie-
tur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt,
eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duo-
bus constantem intervallis. Potest enim superficies diuidi, &
secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, al-
tero vero secundum latitudinem.



V I.

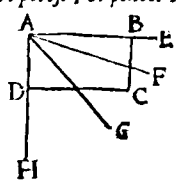
SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON *dissimilis est hæc definitio superiori, qua termini*
linea fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse
lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superio-
ris superficiei A B C D, extrema sunt lineæ A B, B C, C D,
D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extre-
ma habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non au-
tem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæ-
ricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, &
terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies,
vt dicemus in definitione circuli.

VII.

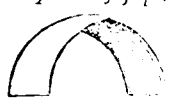
PLANA ſuperficies eſt, quæ ex ę ſuas interiacet lineas.

HAEC *quoq; definitio ſimilitudinem quandam de*
ptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo l
ſuas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis ſurſum, d
ſumue ſubſultando, non recedant, appellabitur plana: quali
ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omne
rectum ſunt collocatæ, ita vt nihil habeat inciſum angu
nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac en
partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitun
nec vlla eſt alia ſublimior, humiliorue, ſed omnes æquabi
ter protenduntur. Alij ſuperficiem planam definiunt, dice
tes eam eſſe, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel ę
ſe minimam, ſiue breuiſſimam omnium, quæ eadem habe
extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommoda
ri poteſt, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt ſuperficie



A B C D, tum demum plana dici debet,
quando linea recta A E, circa punctum
A, immobile circumducta, ita vt nunc
eadem ſit, quæ A B, nunc eadem, quæ
A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc ea-
dem, quæ A H, nihil in ſuperficie offen-
dit depreſſum, aut ſublatum, ſed omnia
puncta ſuperficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo
raduntur. Quod ſi minima ſuperficiei particula alijs humilior
a linea recta non tangeretur, vel ipſa linea recta libere non
poſſet circumduci, propter aliquem tumorem, ſeu eminentiam
in ſuperficie occurrentem, iam non poſſet nuncupari plana.
Itaq; vt ſit plana, requiritur vt omnibus modis poſſit recta li-
nea commenſurari, hoc eſt, vt ei applicari poſſit recta linea
ſecundum A B, & A F, & denique ſecundum omnes partes.
Hac autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelli-
gere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectæ in tranſuerſum, qui
ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta
A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur ſuperficies
perfecte

...lima, iuxta omnes definitiones. Non enim de ſphæ-
...e ſuperficiei tradituras deſcriptiones accommodare. So-
...arithmatici ſuperficiem planam ſæpe ſæpius appellare
...ctam vt quando loquuntur de plano, intelligendo ſem-
...per ſuperficiem planam. Cæteræ omnes ſuperficies, quibus non
...ex parte accommodari poteſt linea recta, quales eſt ſuper-
...ficies interior alicuius formicis, vel exte-



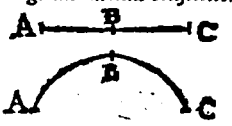
...rior circuli globi, columnæue rotundæ, vel
...coni &c. appellantur curuæ, & non
...planæ. Quamuis enim ſuperficies columnæ
...rotundæ, ſeu cylindri, ſecundum longitudinem adaptari poſſit
...linea recta, tamen ſecundum latitudinem minime potest. Ide-
...mq; dicendum eſt de alijs. Superficies autem curua duplex
...eſt, conuexa videlicet, vt exterior ſuperficies ſphæræ, vel cylin-
...dri; & concaua, vt interior formicis, ſiue arcus alicuius. Quo-
...niam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereo-
...metriam, ideirco Euclides hoc primo libro ſolum planam no-
...bis explicauit, de qua eſt diſputaturus prioribus ſex libris.

VIII.

PLANVS vero angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, *quidnam ſit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie inuicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex huiuſmodi concurſu, ſeu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & no iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtente ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ*

linea non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum cōtactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16 tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ linea se mutuo tangāt iacentes in directum, ita vt alterutra producta cōgruat tori alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed amba vnā integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta cōuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundū suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaq; vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productę se mutuo secent: Curuę autem lineę, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotę cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in solu inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quia in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.



CVM

IX.

n, quæ angulum conti-
æ fuerint, rectilineus ille
tur.

*is planus conficitur aut ex lineis dua-
ectilineus dicitur, & de quo ſolum hic
tabus curuis, quem curuilineum vo-
erua, & altera recta, qui non inepte
ſce porro lineis poſſunt curuilinei an-*

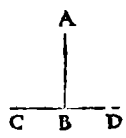
*, utpote ſecundum cõnexum, & con-
ngulis plane, & aperte perficitur:
non poteſt ratione inclinationis, ha-
maiorem, vel minorem inclinatio-
re habitudinem, quod eſt abſurdũ;
intum angulus rectilineus, aut di-
mmune eſt, non autem ita varietur,*

X.

ecta linea ſuper rectam
eos, qui ſunt deinceps,
inter ſe fecerit, rectus
im angulorum: Et quæ
perpendicularis voca-
tit.

*es reperitur in Geometria anguli
ris, nec non anguli obtuſi, & acu-*

ri, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus
neus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam lin
pendicularis: In sequentibus autem docebit us definitionis
plicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim ad
potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, &
Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat
angulos deinceps æquales inter se, qui quidem ideo dicuntur a
thematicis esse deinceps, quod eos unde linea C D, protra
præter idem punctum B, efficiat inter se æquales, quod
demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in
inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet, vocabitur vt



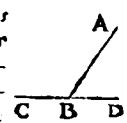
angulus B, rectus, & recta A B, perpendi
laris rect. C D, cui insistit. Eadem ratione
minabitur recta C B, perpendicularis re
A E: quamvis enim C E, tantum faciat an
A B, vnum angulum, tamen si A B, ex to
deretur in rectum & continuum versus pu
Cum E, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero ar
te linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æqua
les, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri
Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem es
rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicu
larem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ex
deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis an-
gulus rectus, aut linea, quæ ipsum construit, perpendicularis
ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quo-
que esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps fuerint inter
se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsis
efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10 definitionem. Si autem
autem non fuerint æquales, non dicitur neque illorum rec-
tus, vt constabit ex sequentibus duabus decimo octavo, & pro-
pterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur.
Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione col
ligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum ha-
beant apud Geometras definitiones vocabulo-
rum. Non enim magno labore hæc, quæ di-
ximus, ad alias definitiones pue-
runt transferri.

OBTV-

XI.

; angulus eſt, qui recto

B, rectæ C D, inſiſtens
nulum B, æquales, &
rectum, ſed omnium qui-
um vero minorem, di-
ſus, qualis eſt angulus
gens, qui continetur rectis lineis



XII.

vero, qui minor eſt

a, minor angulus B, ad punctum
ir rectis lineis A B, B D, vocatur
ctus, vt ex dictis colligitur, nullam
us altero maior, minorue detur, cum
efficiens non debeat magis in vnam
alteram: Obtuſus vero, & Acutus
nfinitis modis, cum ab illa inflexibi
s infinitis etiam modis recta linea
um eſt. Quoniam vero ad quemuis
r dum concurrunt duæ lineæ, & ali-
s exiſtunt anguli, ſolent Mathema
ngulum quemlibet exprimere tribus
dit punctum, in quo lineæ conficiũt
nificant initia linearum, quæ angu-
aria, in ſuperiore figura angulum
ulum A B C, acutum vero, per an
nter eſt notandum, vt facile digno-
nentio ſit in demonſtrationibus.
bis angulo aliquo rectilineo, ſi expe-
an obtuſus, acutuſue, efficiemus id

C 4 hoc

:dum auctor, conſtituit lineam rectam, [illegible]
: aliquod ſectum inſinite, adu-

hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ductæ recta B C, vtcunque, qua angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro, ad interuallum D A, circumferentia circuli, qua si per puncta B, C, transeat, [a] *erit angulus A, rectus, vt pote qui in semicirculo B A C, existat: si verò ide semicirculus rectã B C, secet in E, F, erit angul*[s] *B A C, obtusus; propterea quòd ductis rectis E A, F A,* [b] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem pars est anguli B A C: Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea quòd ductis rectis E A, F A,* [c] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.*

[a] 31. tertij.

[b] 31. tertij.

[c] 31. tertij.

A L I T E R *idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: quisi transeat per punctum* A, [d] *datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si verò idem semicirculus transeat supra punctum* A, *datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C;* [e] *eritque angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus* [f] *maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur rectæ E B, E C;* [g] *eritq; angulus B E C, rectus in semicirculo: qui cum* [h] *maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuiquam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ*

[d] 31. tertij.

[e] 31. tertij.

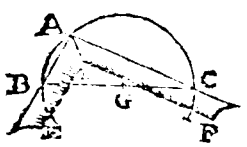
[f] 21. primi.

[g] 31. tertij.

[h] 21. primi.

c. Satis est, ut praxis huiusce rei hoc l-
sferiabimus in normalibus praxibus ce-
ropriis in locis, quando eius heri poterit,
em angulo rectilineo in quotis partes
umus, ubi Euclides docet diuidere
equales partes, &c. quamuis ad ea
tiones necessaria sint propositiones pe-

e cognoscemus beneficio normæ cu-
qualem reserat instrumentum A B C,
A E, A F, ad angulum rectum in A,
B, huius
ur, cu-
m A; si
C, re-
angulus
E A C,



erit angulus A, obtusus: si denique
centrum A C, cadat, acutus erit angu-

examinabimus, num accuratè sit
eo semicirculo B A C, ex centro G,
taq; diametro B C, ten atur angulus
ferentiæ, ut in A, latusq; eius nor
extremum diametri trãsiat. Nam
ter alterum hũ ctum extremum C,
it norma A B C, quòd tunc angu-
B A C, rectus sit: si uero latus A C,
danda erit norma; quia eius angu-
Eadem ratione interiorem partem
gulum D, circumferentiæ applice-
uncti extremis B, C, &c.

quæ rõa
examinetur
norma.

3 31. tertij.

I I I.

s est, quod alicuius ex-

xta hanc definitionem. Punctum
epius

et præcedere terham.

enim terminus est, seu extremum linea: Linea superficies: & superficies corporis Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quę sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

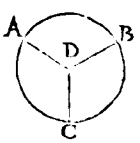
NON *omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, nec lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, qua latitudinem habent, nempe superficies terminatas; & qua profunditatem adepta quoque sunt, ut solida finita, Figura nomine appellabiitur. Ha enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, qua figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, uel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura uocari nulla ratione potest. Figura unico comprehensa termino sunt, Circulus, Ellipsis, Sphæra, Sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus uero terminis inclusa figura sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminata nuncupantur figura plana: solida autem circunscripta, figura solida, siue corporea. Porro quia formas, seu typos uariarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in primis 10. libris, solidarum uero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse uidetur.*

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quę peripheria appel-

d quam ab vno puncto co-
a figuram ſunt poſita, ca-
; rectæ lineę inter ſe ſunt

c circulum, figuram inter planas perfe-
uram illam planam, quæ vnica linea
uam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab
a figuram continent, ſint æquales, vocari
ens, ſuumque punctum conſtituitur vnica li-
Hanc conditionem, vt



ſit ſcripto, vtpote D,
es ad terminũ A B C,
B, D C, inter ſe ſint
alis figura plana cir-
vero ratione in circulo
reperire deberet, docebat Euclides propo-
nunciat quoque Euclides, lineam extre-
A B C, appellari Peripheriam, ſeu, vt
nferentiam. Poſſet circuli peripheriam hac
ris eſt figura plana, quæ deſcribitur a li-
rorum ſupremum extremum qui ſemel
ndem rurſus locum reſtituta fuerit, cu-
quidem deſcripto perſimilis eſt ei, qua
bitur lib. xi. Vt ſimilis natura recta
quieſcens moueri, donec ad eundem re-
ueri capit, deſcribet ipſa recta tor-
rum vero alterum extremum A, di-
B C: Erit quoque punctum quieſcens D,
a cadentes in peripheriam ſint inter ſe
recta A D, circumducta, omnes lineas,
ad peripheriam, æquemetiatur. Igitur
ſit plana vna linea circumſcripta, ta-
ur punctum, a quo ad ipſam lineam ter
linea ſint æquales, circulus dici nequit.

HOC

XVI.

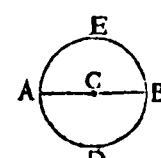
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, *punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.*

XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI *in circulo ducatur recta linea* A B, *per centrum* C, *ita vt extrema eius* A, & B, *terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrũ duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest,*



l diameter per medium circulum, ex quo per centrum,
. Hinc enim fit, vt propter dimidium diametri per cen-
ntrum, vtrinque æquales circuli circumferentiæ abscindan-
od tamen Thaletem Milesium hac demonstrasse testatur Proclus. Cen-
es animo, portionem A D B, accom-
, & coaptari portioni reliquæ A E B,
diameter A B, communis sit vtrique
ni: Si igitur circumferentia A D B, congruat penitus cir
rentiæ A E B, manifestum est, duas illas portiones a dia-
ſectas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alte-
xcedit: Si uero circumferentia A D B, non omni ex parte
e dicatur super circumferentiam A E B, sed vel extra
vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta re-
. centro C, secante circumferentiam A D B, in D, & cir-
ferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ducta
entro ad circumferentiam eiusdem circuli æquales, per cir-
definitionem, cum tamen una sit pars alterius, quod est ab-
dum. Non ergo cadet una circumferentia extra aliam, uel
ra, uel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptan-
ntur, ideoque æquales erunt. quod demonstrandum propo-
batur.

EX hac demonstratione constat, diametrum non solum cir
unferentiã, uerumetiã totam aream circuli secare bifariam.
ã enim semicircumferentia sibi mutuo congruant, ut osten-
m est, congruent etiam superficies ipsa inter diametrum,
& utramque circumferentiam comprehensa, cum neutra alte-
am excedat. Quare æquales inter se erunt.

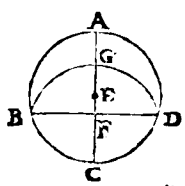
XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quę continetur sub diametro, & sub ea linea, quę de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura A D B, continetur sub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur se-
mi-

micirculus, quia, ut in præcedenti definitione oſtendimus, diuidiatur pars circuli. Eadem ratione erit figura A E. micirculus. Idem autem punctum C, diametrum ſecans, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.

QVOD ſi recta linea B D, non tranſeat per centrum ſecabitur circulus ab ea non bifariam, ſed in duas partes inæquales B A D, B C D, quarum in qua centrum circuli exiſtit, cuius di eſt portio B A D, maior eſt, quam B C D, extra quam centrum E, reperitur. Eſſe autem portiones B A D, B C inæquales, ita probari poteſt. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad



etam B D, perpendicularis A C. Si igitur dictæ portiones dicantur eſſe æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, ut uber portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui oës inter ſe æquales ſunt ex 8. fin. 1 o. cũ ſint ſibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem eſt, quæ F A, maior erit, quam E A, pars ipſius F A. Cum ergo ipſi E A, ſit æqualis E C, quod ambæ ducantur à centro ad circumferentiam, erit quoque F C, maior quam E C, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, ſed intra eam cadet, cuiuſmodi eſt portio B G D, ut recta F G, eadem tunc exiſtens, quæ F C, minor poſſit eſſe quam E A, uel E C. Si namque diceretur cadere extra, ut ſi circulus eſſet B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis eſt portio B A D, eſſet rurſus F A, eadem tunc exiſtens, quæ F C, maior quam E G, hoc eſt, quam E C, atque ita pars F C, maior rurſum foret toto E C, quod abſurdum eſt. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, exiſtit, maiorem eſſe reliqua portione B C D, cum hæc æqualis ſit portioni B G D, quæ pars eſt portionis B A D.

XIX.

RECTILINEAE figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

POST

POST definitionem circuli, & addituros iam Euclidis descriptiones variarum figurarum, explicare prius, quæ nam ſint figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potiſſimum ſermo fiet in hiſce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis claudantur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perſpicuum eſt, figuras planas curuis lineis comprehenſas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumſcribuntur, appellari mixtas. Variæ autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide deſcribentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ ſub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumſcribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot ſint anguli, quot latera, ſeu rectæ lineæ, ex quibus conſtant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes ſpecies iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quę ſub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ ſpecies mox ſubſequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM ſpecies rectilinearum figurarum ſunt innume-

numerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum. tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam ſpe ſub qua omnia triangula continentur; quatuor conſtitu cundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quingu tiam componunt ſpeciem; ſex quartam, atque ita deincep finite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cog perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ plurib quam quatuor, rectis lineis circunſcribuntur, generali va bulo Multilateras; contentes denominatione trilaterarum gurarum, & quadrilaterarum, fortaſſis eam ob cauſam, qu præcipue in prioribus his libris de Triangulis, eique Qu drangulis ferme habeatur, & quod facile ad ſimilitudine harum duarum ſpecierum cæteræ omnes à quolibet defini poſſint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinqu lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & ſex linea comprehenſam ſexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiuſmodi figuræ quinquangula, ſexangu la, ſeptangula, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT *iam ad ſingulas ſpecies triangulorum. Quia vero triangula dirimi poſſunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius ſpecies prioris diviſionis, quæ tres ſunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis ſeſe poſſint habere. Aut enim omnia æqualia ſunt; aut duo tantum, tertio exiſtente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; eſſe, ceu ad quintam propoſitionem huius libri demonſtrabimus.*

XXIIII.

ISOSCELES autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

EX hac rurſum æqualitate duorum laterum trianguli Iſoſcelis efficitur, duos angulos ſuper reliquum latus etiam eſſe æquales, vt demonſtrabit Euclides propos. 5. huius libri. Appoſuimus autem duo triangula Iſoſcelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, poſterius autem idem minus obtinet: ita vt dua ſint ſpecies trianguli Iſoſcelis; alterum, cuius tertium latus ſit vtrouis æqualium maius; & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus ſit.

XXV.

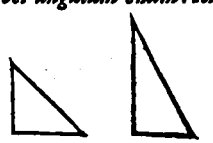
SCALENVM vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt oſtendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his conſtat, eodem modo potuiſſe diuidi triãgulum in tres ſpecies, ſi æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli ſint inter ſe æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore exiſtente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, ſecundum vero Iſoſceli, tertium denique Scaleno reſpondet triangulo. Cæterum quanam arte cõſtruendæ ſint triangula huius partitionis ſuper quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diuiſionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſupra diximus,) ſit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nulluſque obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17, & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum angulum habet.

TRIANGVLVM Amblygonium, ſiue obtuſangulum eſſe quoq; poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur, nõ autem æquilaterum, alias eadem ratione eſſent omnes tres anguli

liper ea, quæ propos. 5. oſtendemus, æquales. Ideoq; cum
s penatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod multo magis
nat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

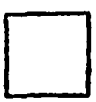
OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, po-
ſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cer-
poteſt licet in triangulis, quæ in ſpecibus prioris diuiſionis ſpe-
ſigna-
tim exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex di-
ctis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe
neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles,
quam Scalenum, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium,
vel Oxygonium; atque Iſoſceles Oxygonium rurſum duplex,
Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis
æqualium maius, atq; Iſoſceles Oxygonium habens tertium
latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli
æquilateri, quatuor vero Iſoſcelis, & tres Scaleni: atq; in vni-
uerſum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo
Oxygonium eſſe diximus, Iſoſceles rectangulum, Iſoſceles am-
blygonium, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtro-
ueis æqualium maius, Iſoſceles Oxygonium habens latus ter-
tium vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Sca-
lenum amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam
hiſce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum
Iſoſceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Iſoſceles,
Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygo-
nium Iſoſceles, habens tertium latus vtrouis æqualium ma-
ius, Oxygonium Iſoſceles habens tertium latus vtrouis æqua-
lium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perſpicuum
eſt, quamnam connexionem, ſiue affinitatem habeant inter ſe
triangula vtriuſq; partitionis. Poſſe autem dari triangulum
Iſoſceles Oxygonium, cuius duorũ laterum æqualium vtrum-
uis tertio ſit minus, vt rectè animaduertit Franciſcus Baro-
cius in ſua Coſmographia, oſtendemus ad propos. 15. lib. 4. In
omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expreſſe no-
minantur,

minantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in base trianguli, intelligeresq́; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera



dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

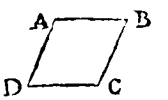
ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter

se quoque æqualia sunt, cum A B C D, propter angulorectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad prop. 34. ostendemus.

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HAEC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Harum enim omnia latera æqualia, anguli vero non recti, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

EST hæc figura, quæ Rhomboides nocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, C D, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existũt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquę quadrilaterę figurę, trapezia appellentur.

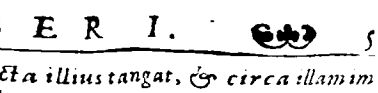
RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, sta vt neque latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita, neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineę sunt, quę cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multa siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata,

lata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest sedi omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana recta A B, applicetur, omnia eius tangens punctă, ita vt circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ C D; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Sitque hæ duæ rectæ lineæ eædem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & producta in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc producta continuentur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eode existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

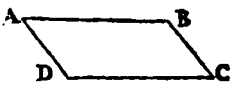


HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, necnon earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitio-

tionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.



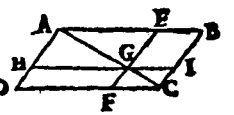
VT figura quadrilatera A B C D, si quidem latus A B, æquidistet lateri D C, *& latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor sălŭ parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora uero duo nō rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammŭ rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterŭ, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorŭ quoq; aliud quidē habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, dicitur; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapezium; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.*

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo dia-

meter

meter ducta fuerit, duęq́, lineę lateribus parallelæ ſecantes diametrũ in vno eodemq́ue puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



SIT *parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC; et linea EF, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus AD, BC; Item linea HI, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq́; lateribus AB, DC, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC. non tranſit, vocantur a Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.*

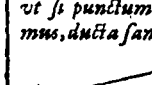
PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM *hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi recte conſiderentur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo*

adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod

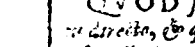


prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctũ B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.

II.

ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

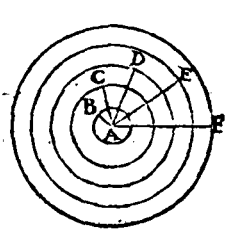
QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus modo directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam.



Sic linea recta A B, producta est primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM vero, si terminatam rectam lineã cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatã esse secundum alterum extremum ad quoduis punctũ, itaq; circa hoc punctũ fixum circũduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cepit; describetur erit circulus, effectũq;, quod tertia petitio iubet. Exemplũ habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, qua singula circa centrum A, circum-

simoluta singulos circulos describentur tuncta quantitates, seu internallum ipsarum.

PRAETER hæc tria postulata quibus Euclid. contentus fuit, sunt multa alia æque facilia, & quidem dignissima in medium proferre decretum illud, quod frequentissime reprehenderunt in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IIII.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quantitas continua vel magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam qualibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quę & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitu

dine

dine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI *nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse. Reliquæ quoque partes Axiomatis à nobis adiectæ, quod frequentem vsum habeant, clarissimæ sunt.*

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI *enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, procul dubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.*

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM *si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.*

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæquali-

bus

b Si inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, *si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adijciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.*

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC *etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuū maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferātur ab inæqualibus. Cæterū Euclides non docet, quidnā simpliciter, & absolutè signatur ex additione quantitatum inæqualium ad quātitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim compositæ quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia.*

lia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3 & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt. Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eadem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

V I.

ET quę eiusdem duplicia sunt, inter se sũt ęqualia. Et quod vnius ęqualiũ duplũ est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forèt, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c, alicuius quantitatis, deficeret vtique minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si contrà, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertiæ illa addatur, erunt compositæ duplices illius tertiæ, [a] *sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cum igitur* [b] *& æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eadem q̃ sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porrò partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron.

b 2. pron.

ET

VII.

ET quę eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ęqualia ſunt. Et contra, Quę ęqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia eoque ipſa ſunt. Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertiæ, vel quartæ, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt. Partem quoque ſecundam huiuſce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, a Geometris vſurpatur.

VIII.

ET quę ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt ęqualia.

HOC eſt, *duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed amba inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo excedittur, ſed linea illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.*

ECONTRARIO, *Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuo congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuo congruentes, eſſe æquales, ſecundum id dumtaxat, in quo ſibi congruunt, Congruit autem longitudo longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.*

ET

IX.

ET totum ſua parte maius eſt.

CVM *pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte maius.*

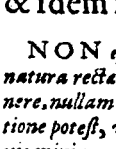
IN ſequentibus porrò pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inſerenda eſſe cenſuimus valde neceſſaria, cùm ex ijs Axioma 12. quod Euclidi eſt decimum, demonſtrari poſſit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

o

X.

DVAE lineæ rectę non habent vnum & idem ſegmentum commune.

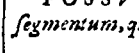
NON *eſt difficile iſtud Axioma, ſi perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo ſemper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo ſe mutuo interſecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonſtrat. Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA,* [a] *deſcribatur circulus ſecans duas rectas propoſitas in punctis B, & C;* [b] *Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC, inter ſe æquales, (Sunt enim circunferentiæ ſemicirculorum æqualium, cum ADB, ADC, ponantur eſſe diametri) pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem ſegmentum commune. Quod eſt propoſitum.*



[a] 3. petit.

[b] 17. def.

POSSVNT tamen duæ linea rectæ commune habere ſegmentum, quando vnam & eandem rectam lineam conſtituunt. Vt in hac figura, rectæ AD, BC, commune habẽt ſegmentũ CD; quia amba vnam rectam conſtituũt lineam

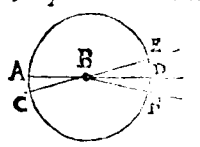


gam AB. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales sunt AB, AC, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonstratum.

XI.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuò in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CD, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem segmentũ commune BD, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, producta cadat in F, sicq; vna recta linea CBF. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus ACFD, secans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF, vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.

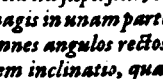


DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

XII.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuiue nequeat, ſed prorſus ſit immutabilis. Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, qua quidem alteri linea recta ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos aquales, neq; magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos aquales inter ſe eſſe, cum ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis linea ſint inaquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico eſſe inter ſe aquales. Si enim fieri poteſt, ſint inaquales, ſitque A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, recta A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis eſt B G, propterea quod angulus D E F, minor ponitur angulo A B C. [a] *Producatur C B, in rectum & continuum vſque ad H; Cum igitur angulus A B C ſit rectus,* [b] *erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior etiam angulo A B G.* [c] *Producta autem G B, in rectum & continuum vſq; ad I, cadet portio producta B I, infra C B, productam, vt in pracedenti Axiomate eſt demonſtratum. Quare cum angulus A B G, ponatur rectus,* [d] *fiet angulus A B I, illi deinceps, aqualis. Quapropter angulus A B H, maior quoque erit angulo A B I, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inaquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed aquales. Quod eſt propoſitum: eademque eſt ratio in cateris.*



[a] 2. petit.
[b] 10. def:
[c] 2. petit.
[d] 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud non poſſe conuerti; non enim omnis angulus recto angulo aqualis rectus eſt, cum & curuilineus recto aqualis eſſe queat, vt in 5. lib. demonſtrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus aqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe aquales erunt, ſine vlla exceptione.

XI.

XIII.

ET ſi in duas rectas lineas altera re-

cta incidens, internos ad eaſdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

VT ſi in duas lineas rectas AB, CD, *incidens alia recta* EF, *faciat duos angulos internos, & ex eadem parte* BEF, DFE, *minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem cõuenturas eſſe ad aliquod punctum vnũ, verſus eam partem, in qua duo anguli minores exiſtunt duobus rectis, vt appoſitum exemplum commonſtrat. Ratio huius perſpicua eſt, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protenduntur, vt propoſ. 28. huius lib. demonſtrabitur. Quare ſi duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt ex ea parte dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc ſubobſcurum videri ſolet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quiuis ei aſſenſum præbeat; præſertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum ſpatium, licet ſemper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum, & in duabus rectis* AB, CD, *accidit, vt ad propoſ. 28. huius lib. demonſtrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinitè producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis: Idcirco pleniorem illius explicationem in ſcholium propoſ. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli ſententia Geometricè demonſtrabimus, vt firmè, ac ſine vlla dubitatione, tanquam veriſſimum, ad propoſitionis 29. huius lib. (vbi primum eius vſus incipit apparere) & ad aliarum propoſitionum demonſtrationes poſſit aſſumi. Quod tamen nos aliter,*

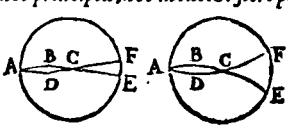
ter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonſtrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

xii.

XIIII.

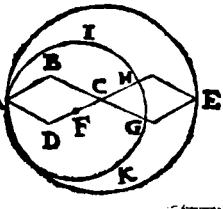
DVAE rectæ lineę ſpatium non comprehendunt.

NVLLAM prorſus habet difficultatem hoc principiũ, Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis diſiungentur, ſi producantur, vt in exemplo propoſito perſpicuum eſt. Quare vt ſuperficies, ſpatiumue quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri poteſt, vt duæ linea recta claudant ſuperficiem, comprehendant duæ rectæ A B C, ADC, *ſuperficiẽ* ABCD, *ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis* A, & C.



[a] 3. pet. *Facto deinde cẽtro* C,[a] *deſcribatur circulus interuallo* C A, [b] 2. pet. *& producantur rectæ* A B C, A D C, *in rectum, & continuum vſque ad circunferentiam, nempe ad puncta* E, & F. *Itaq; quia rectæ* A C E, A C F, *tranſeunt per centrum* C, [c] 17. def. *erunt ſemicirculi* A E, A E F, *inter ſe æquales, & idcirco circunferentia quoque* A E, *circunferentiæ* A E F, *æqualis erit, pars toti, quod fieri non poteſt. Non ergo rectæ duæ lineæ ſpatium comprehendunt. Quod eſt propoſitum.*

SED quia fortaſis aduerſarius dicet, rectas ABC, ADC, *productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in* E, *vel* F, *atque adeo non ſequi, partem æqualem eſſe toti, demonſtrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ linea iterum, ſi fieri poteſt, in* E. *Sumpto puncto* F, *in recta* A D C, *quocunque, erit* A F, *minor, quam* F E, *cum minor ſit, quàm* A F C, *hoc eſt, quam* C H E, *qua ipſi* AFC, *æqualis eſt, atque adeo multo minor, quàm* F E. *Circulus igitur*



igitur ex F, ad interuallum FA, descriptus secabit rectam FE, in H, atque adeo CGE, in G. Quoniam igitur AFH, diameter circuli est, erit AIH, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia AIG, minor quam AIH, pars quam totum, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio AIG, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendicularis, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, intra circumferentiam AKG, ne pars maior sit quàm totũ, vt supra demõstrauimus.

CONSTAT hoc etiam Axioma ex defin. linea recta. Cũ enim recta linea sit breuissima extẽsio ab uno pũcto ad aliud, duci poterit unica tantũ linea ab uno puncto ad aliud. Quare si ABC, recta est, non erit ADC, recta. Quod etiam patet ex defin. Platonis. Nam si ABC, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta linea ADC, non obumbrant extrema, cum visus per rectam ABC, feratur. Non ergo recta est ADC.

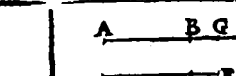
HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atque Theorematum cum Euclidis, tum caterorum Mathematicorum, quam ea, qua nobis tradidit Euclides.

XV.

o.

SI equalibus inequalia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui equalis.

HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus AB, CD, addantur



inæquales B E, D F, *sitq́;* B E, *maior quam* D F. *Et ex* B E, *auferatur* B G, *æqualis ipsi* D F, *vt sit* G E, *excessus, quo quantitas addita* B E, *superat quantitatem additam* D F. *Quoniam igitur æqualibus* A B, C D, *addita sunt æqualia* B G, D F, [a] *erũt tota* A G, C F, *æqualia. Quare constat, totam quantitatem* A E, *superare totam* C F, *eodem excessu* G E, *quo magnitudo* D F, *adiuncta a magnitudine adiuncta* B E, *superatur. Quod est propositum.*

[a] 2. pron.

O. XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

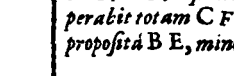
IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, *addantur æquales* A B, C D. *Et ex maiore* B E, *auferatur* B G, *æqualis ipsi* D F, *vt* G E, *sit excessus, quo quantitas* B E, *quantitatem* D F, *superat. Quoniam igitur æqualibus* B G, D F, *addita sunt æqualia* A B, C D, [b] *erunt tota* A G, C F, *æqualia. Quamobrem tota quantitas* A E, *superabit totam* C F, *eodem excessu* G E, *quo maior quantitas proposita* B E, *minorem* D F, *superat. Quod est propositum.*

[b] 2. pron.

O. XVII.

SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

A B *æqualibus* A B, C D, *auferantur inæqualia* B E, D F.



Sitq́; E G, *excessus, quo quantitas* B E, *superat quantitatem* D F; *ita vt* B G, *æqualis sit ipsi* D F. *Quia igitur ab æqualibus* A B, C D, *ablata sunt æqualia* B G, D F, [c] *remanebunt*

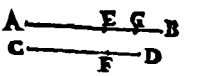
[c] 3. pron.

manebunt AG, CF, aqualia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduũ AE, ſuperari a reſiduo CF, eodem exceſſu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum.

XVIII.

o.

SI ab inęqualibus ęqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum ęqualis.



AB inaqualibus AB, CD, auferantur aqualia AE, CF. Sitq; BG, exceſſus, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD, ita ut AG, aqualis ſit ipſi CD. Quoniam igitur ab aqualibus AG, CD, ablata ſunt aqualia AE, CF, [a] remanebunt EG, FD, aqualia. Quare reſiduum EB, ſuperabit reſiduũ FD, eodem exceſſu BG, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD. Quod eſt propoſitum. [a] 3. pron.

IN his quoque quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum aqualium intelligenda eſt vna etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inaqualia adijciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui aqualis. Et ſi inaqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, qua a principio erant, aqualis. Et ſi ab eodem communi inaqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum aqualis. Et ſi ab inaqualibus idem commune dematur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum aqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. ſiunt 11. & 9. quorum exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. ſiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorum 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Denique ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

o.

XIX.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM *omnes partes ſimul ſumpta conſtituunt totum, cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.*

o.

XX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam eſt reliqui huius 7. In vniuerſum autem hoc demonſtrabitur propoſ. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI *poteſt ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc diſcrimen inter poſtulata, & Axiomata, quod cum vtraque ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturam ſupium Problematum, propterea quod aliquid fieri expoſcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, ſed ſolum ſententiam aliquam notiſſimam proponant. Differt autem Poſtulatum a problemate, quod conſtructio poſtulati non indigeat vlla demonſtratione, problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eo quod difficile aliquid nobis exhibeat conſtruendum. Idem diſcrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonſtrari non debet, hoc vero concedendum nulla eſt ratione, niſi demonſtretur. Nam nemo huius propoſitionis demonſtrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter ſe quoque æqualia ſunt. Huius autem ſtatim demonſtrationem deſiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales ſunt duobus rectis. Idē iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de poſtulatis, problematisq;.*

CON-

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometrie, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quæ vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nusquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dicas de Axiomatis, siue prænotatis. Nam octauæ, decimæ, undecimæ, duodecimæ, tertiædecimæ, & quartædecimæ sōt Geometrarum communes; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablata a magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus floris, perfectius & principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane enim plurima non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem in ipsis demonstrationibus sumus secuti. Primum, ac modum in ipsis propositioni duos numeros assumimus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab aliis vero iuxta Theonis serium citentur, maximeq; interdum eodem loci interstices inter se discrepent, in serie atq; ordine propositionū, id quod maximè in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quādo numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur,

cita-

citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt facilius cognoſcatur, ad quem locum qualiber citatio ſit referenda. Porrò citationes intelligenda ſunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & ſic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Poſtulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propoſitio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.*
6. tertijd.	*Sexta tertijdecimi libri.*
9. ſextid.	*Nona ſextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi. &c.*

Ex his alia citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PRO-

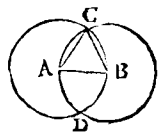
PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

I.

SUPER data recta linea terminata triangulũ AEquilaterum constituere.

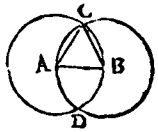
IN omni problemate duo potiſsimum ſunt conſideranda, conſtructio illius, quod propo nitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem recte eſſe inſtitutam. Vt quo-*d ad primum* hoc problema iubet conſtituere triangu-*lum æquilaterum* ſuper data recta linea terminata qua-unque, ita vt linea recta propoſita ſit vnum latus trian guli, (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta li-nea, quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcir co primum oportet conſtruere ex principijs conceſsis triangulum aliquod, deinde demonſtrare, ipſum ea ra-tione conſtructum, eſſe æquilaterum, hoc eſt, habere om nia tria latera inter ſe æqualia. Quod idem in alijs pro blematibus perſpici poteſt. Hæc etiã duo reperiũtur fe re in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demon ſtretur id, quod proponitur, conſtruẽdũ eſt, atq; efficien dum prius aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pauca verò admodum ſunt theoremata, quæ nullam re quirant conſtructionem.

SIT igitur propoſita recta linea terminata A B, ſu-per quam conſtituere iubemur trian-gulum æquilaterum. Centro A, & in-teruallo rectæ A B, [a] deſcribatur cir-culus C B D: Item centro B, & inter-uallo eiuſdem rectæ B A, alius circu lus deſcribatur C A D, ſecans prio-rem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [b] ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; [c] Eritque ſuper rectam A B, conſtitutum triangu-lum



a 3. pet.

b 1. pet.
c 20. def.



lum A B C, hoc eſt, figura rectilinea cõtenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita conſtructum neceſſario eſſe æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, [a] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rurſus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis eſt rectæ A B. [b] Quare & A C, B C, inter ſe æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

[a] 15. def.

[b] 1. pron.

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonſtrationes in vna propoſitione contineri, placuit primam hanc propoſitionem reſoluere in prima ſua principia, initio facto ab vltimo ſyllogiſmo demonſtrationis. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, conſtructum methodo prædicta, eſſe æquilaterum, vtetur hoc ſyllogiſmo demonſtrante.

[c] 23. def.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, [c] eſt æquilaterum.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, eſt æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio ſyllogiſmo.

[d] 1. pron.

Quæ eidem æqualia ſunt, [d] inter ſe quoque ſunt æqualia.

Duo latera A C, B C, æqualia ſunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter ſe æqualia ſunt. Ac proſterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia exiſtunt.

Minorem verò huius ſyllogiſmi hac ratione colliget.

[c] 15. def.

Linea recta a centro ducta ad circunferentiam circuli, [c] inter ſe ſunt æquales.

Linea A B, A C, ſunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

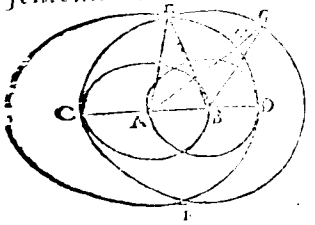
Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter ſe.

Eadem ſi ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis ſyllogiſmi tota confirmata erit.

Non aliter reſolui poterunt omnes aliæ propoſitiones non ſolum

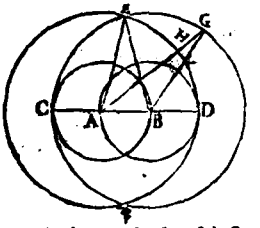
lum Euclidis, verum etiam caeterorum Mathematicorum. Nec eligunt tamen Mathematici resolutionem ipsam in suis demonstrationibus, eo quod brevius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, ut perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI QVIS autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta data A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, ut primus. Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circumferentias vsq; ad puncta C, & D. Atque centro A, & interuallo vero A D, describatur circulus E D F. Itē centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit super recta A B, triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiorum duo latera A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circumferentiam E D F, erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circumferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C. Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter se, (vtraque enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediatur.) Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur communi recta A B erit tota A D, toti B C, æqualis. Igitur A E, B E æquales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque A E, B E, maior sit quam A B, perspicuum est, cum A D, æqualis ostensa ipsi A E, maior sit, quam A B; Item B C, æqualis demonstrata ipsi B E, maior quoque sit, quam A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Proclo, aliorumq; interpretum Euclidis.



a 2 petit.
b 3. pet.
c 1. pet.
d 20. def
e 15. def.
f 15. def.
g 1. Axiom.
h 2. pron.
i 1. pron.
k 9. pron
l 9. pron.

BRE-



BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triãgulum A B E, esse Isosceles, hac ratione. [a] Quoniã A E, æqualis est rectæ A D, & rectæ A D, est dupla rectæ A B, propterea quod B A, B D, æquales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus [b] quia B E, æqualis est rectæ B C, & B C, dupla est ipsius A B, propterea quòd [c] A B, A C, æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cũ igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdẽ A B, [d] erũt A E, B E, inter se æquales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triãgulũ A B E.

IAM vero, si ex puncto A, [e] ducatur linea recta A G, ad circumferentiam E G F, quæ non sit eadem quæ A E, vel A D, secans circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B [f] ducatur alia recta G B, [g] constitutum erit triangulum A B G, super recta A B, quod dico esse scalenum. [h] Quoniam A G, maior est quam A H: [i] Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & A G, maior quam A E, hoc est, quàm B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, [k] cum B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior, quam A B, propterea quod tota B C, æqualis ipsi B G, [l] maior sit quam A B, pars. Omnia ergo tria latera trianguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

BREVIVS quoque ostendemus, triangulum A G B, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [m] A H, A D, ex centro A, ductæ, sunt æquales, quam B G, B C, ex centro B, ductæ: Sunt autem A D, B C, ipsius A B, duplæ, quod A B, vtrique B D, A C, æqualis sit; erunt quoque A H, B G, ipsius A B, duplæ, ac propterea maiores, quã A B. Cum ergo [n] A G, maior sit, quam A H, sive quam B G, scalenum erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum; B G, medium, & A B, minimum.

[a] 15. def.
[b] 15. def.
[c] 15. def.
[d] 6. pron.
[e] 1. pet.
[f] 1. pet.
[g] 20. def.
[h] 9. pron.
[i] 15. def.
[k] 15. def.
[l] 9. pron.
[m] 15. def.
[n] 9. pron.

PRAXIS.

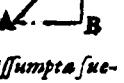
CONABIMVR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & brevem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere;

construere; Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentio rem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

ITAQVE triangulum æquilaterum ita facile construetur super data recta A B. *Ex centris* A, *&* B, *interuallo vero data rectæ* A B, *describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto* C, *siue hoc infra lineam contingat siue supra. Post hæc ducantur duæ rectæ* A C, B C, *ex puncto* C, *ad puncta* A, *&* B; *factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transiret enim necessario per puncta* A, *&* B.

ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, *&* B, *interuallo vero maiore quam* A B, *si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in* C. *Postea ducantur rectæ* A C, *&* B C; *constructumq; erit Isosceles: quoniam* A C, B C, *æquales erũt propter æqualem interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta* A B.

SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. *Ex centro* B, *interuallo vero maiore, quam* B A, *describatur arcus aliquis: Item ex centro* A, *interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in* C. *Deinde ducantur rectæ* A C, B C; *constituturq; erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.*

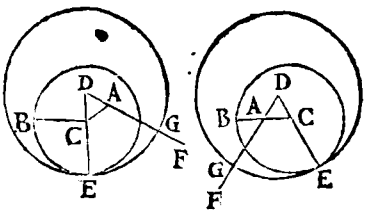


CÆTERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

AD datum punctum, datę rectę lineę æqualem rectam lineam ponere.

SIT



SIT punctũ datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualẽ ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta vero A C, [c] constituatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, extendantur; D C, quidem opposita puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; D A, vero opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam E G, [f] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, [g] remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, [h] æqualis est recta B C, (cum ambæ rectæ C B, C E, cadãt ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidẽ vtraque æqualis est ostensa rectæ C E, inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

[a] 3. pet.
[b] 1 pet.
[c] 1. primi.
[d] 2 pet.
[e] 3. pet.
[f] 15. def.
[g] 3. pron.
[h] 15. def.
[i] 1 pron.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, [k] describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta [l] ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C, [m] æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

[k] 3. pet.
[l] 1 pet.
[m] 15. def.

SCHO-

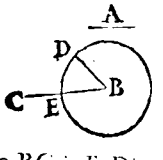
SCHOLIVM.

HIIS Problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumq; iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel e directo data linea, ita vt producta in rectum, & coniunctum per ipsum punctum transeat; vel non e directo, ita vt ipsa ad data lines extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra eam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DATAS rectis lines inæquales de maiore æqualem minori rectam auferre.

Sint duæ rectæ inæquales A, minor; & B C, maior: oportet à maiore B C, detractæ; æqualem minori A. Ad alterum extremorum lineæ maioris B C, punctum B, [a] ponatur recta æqualis ipsi A, quæ sit B D, & centro B, interuallo D B, describatur [b] circulus secans B C, in E. Dico rectam B E, ipsi A, esse æqualem. Quoniam B E, & A, sunt ex centro B, [c] & eidem B D, æquales, erunt [d] A, & B E, inter se æquales. Quare datis rectis &c. quod erat faciendum.



[a] 2. primi.
[b] 3. pet.
[c] 15. def.
[d] 1. pron.

Si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, & ex eis sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo B, describendus erit circulus ex B, ad interuallum B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi A, constat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de quare lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, cõtentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoq; esse æquales,

les. Quoniam enim recta AB, rectę D E, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri ſupponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, ipſę ſibi mutuo congruant, punctumq; B, in punctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectę A B, rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem ſegmentum commune, [b] quod eſt impoſsibile. Quòd ſi quis dicat, poſito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, ſed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad ſiniſtram D E, claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem, [c] quod fieri non poteſt. Quare recta A B, rectæ D E, congruet, vt dictum eſt. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc eſt, recta A C, rectę D F, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum A C, D F. Baſis igitur B C, baſi E F, congruet quoque: alias ſi ſupra caderet, aut infra, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, claderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectã eſſe, cum vtraq; ponatur eſſe eadem, quæ recta BC.) quod eſt abſurdum. Duæ enim rectę ſuperficiem [e] claudere non poſſunt. Quocirca [f] baſis B C, baſi E F, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem cauſam, exiſtet. Quare ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 8. pron.

[b] 10. pron.

[c] 14. pron.

[d] 8. pron.

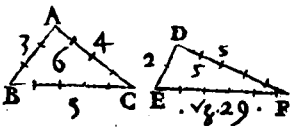
[e] 14. pron.

[f] 8. pron.

SCHOLIVM.

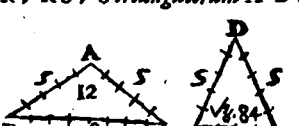
RECTE Euclides duas conditiones poſuit in antecedente huius theorematis, quarum prima eſt, vt duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis ſit angulo alterius contento lateribus, quę iſtis ſunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque baſes, neque reliqui anguli poterunt vnquam eſſe æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonſtratur: Triangula vero ipſa licet poſſint eſſe æqualia, poſteriore

dunt axae conditione deficiente, vt ex scholio propoſ. 37. huius lib. conſtabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, aequales, nempe recti, & latera A B, A C, aequalia lateribus D E,



D F, non quidem vtrumque vtrique, ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſit q. AB, 3. AC, 4. vt ambo ſimul efficiant 7. At vero D E, ſit 2. & D F, 5. vt ambo quoque ſimul 7. conſtituant. Quibus poſitis, erit baſis B C, 5, & baſis E F, radix quadrata huius numeri 29. quae maior quidem eſt quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area vero trianguli D E F, 5. Anguli denique ſuper baſim B C, inaequales erunt angulis ſuper baſim E F. Quae quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quae nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inaqualia eſſe, propterea quod non vtrumque latus vtrique lateri aquale exiſtit in dictis triangulis A B C, D E F.

RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, aqualia ſint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, ſit q. vnumquodque 5; anguli vero A, & D, contenti dictis lateribus inaquales, ſit q. A, maior, quã D. Quibus conceſſis, erit baſis B C, maior baſe E F, vt propoſ. 24. huius libri oſtendetur. Quod ſi baſim B C. ponamus eſſe 8. baſim autem E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area vero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quae maior quidem eſt quam 9. minor vero, quam 10. id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triangula ipſa aqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, vt vtrumque latus vnius aquale ſit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti aquales exiſtant, vt optime dixit Euclides.

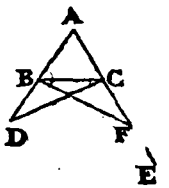


THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

5.

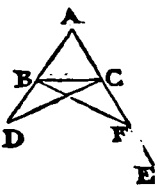
ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.



SIT triangulum Iſoſceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vſque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra baſim eandem B C, eſſe æquales. Ex linea enim A E, producta infinite[a] abſcindatur A F, æqualis ipſi A D, [b] & ducantur rectæ B F, C D. Conſiderentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia ſunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B ipſi A C, ex hypotheſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; angulusq; A, contentus lateribus A B, A F, æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A, communis eſt vtrique triangulo: [c] Erit baſis B F, æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rurſus conſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam vero rectæ A D, A F, æquales ſunt per conſtructionem, fit vt, ſi auferantur ex ipſis æquales A B, A C, [d] & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B. trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B, vt probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis

[a] 3. primi.
[b] 1. petit.
[c] 4. primi.
[d] 3. com.

lateribus æqualibus æquales, vt oſtenſum etiam fuit. Igitur [a] erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quam poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntque ſupra communem baſim B C, vtriuſque trianguli BDC, CFB. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demonſtrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe æquales) [b] remanebunt anguli A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; Ac propterea Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *4. primi.*

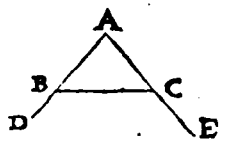
[b] *3. pron.*

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera etiam eſt in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualibus, ſiue reliquum latus* B C, *ipſis quoque ſit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, ſiue inæquale, vt in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, vt conſtat ex demonſtratione tradicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum quibus nondum ſint aſſueti. Verumtamen, ſi diligenter theorematis præcedentis vis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem*

quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

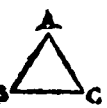
VERITAS porrò huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoq; demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4.



Sint enim rursum in triangulo A B C, *duo latera aqualia* AB, A C, *quæ producantur quantumlibet vsque ad* D, *&* E. *Dico tam angulos* A B C, A C B, *supra basim* B C, *inter se aquales esse, quam angulos* D B C, E C B, *infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum* ABC, *triangulo* A C B, *(ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta* A B. *recta* A C, *superponatur, cadet punctum* B, *in* C, *ob aqualitatem laterum* A B, A C. *Quo posito, cadet recta* A C, *super rectam* A B, *ob aqualitatem, siue identitatem anguli* A; *atque punctum* C, *in punctum* B, *incidet, propter aqualitatem laterum* AC, AB. *Quapropter angulus* ABC, *angulo* ACB, *& angulus* DBC, *angulo* E C B, *congruet,* [a] *ac proinde tam illi, quàm hi, inter se aquales erunt.* [a] *8. pron.*

COROLLARIVM.

EX hac propositione quinta liquet, omne triangulum aquilaterum esse aquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli aquilateri esse inter se aquales. Sit enim triangulum aquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera AB, AC, sunt aqualia, [b] *erunt duo anguli B, & C, aquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt aqualia, erunt & anguli C, & A, aquales. Quare omnes tres A, B, & C, aquales erunt. Quod ostendendum erat.*

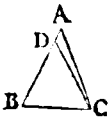


[b] *5. primi.*

6.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.



IN triangulo ABC, ſint duo anguli ABC, ACB, ſuper latus BC, æquales. Dico duo latera illis oppoſita AB, AC, eſſe quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, exiſtentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; ſit igitur AB, maius quam AC, ſi fieri poteſt: [a] Et ex AB, abſcindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur eſſe quam AB,) ducaturque recta CD. Conſiderentur iam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia ſint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi DB, abſcidimus enim ex AB, ipſi AC, conceſſu aduerſarij, æqualem DB, & CB, ipſi BC, cum ſit vnum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: [b] Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum, & pars, quod fieri non poteſt. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 3 primi.

[b] 4 primi.

SCHOLIVM.

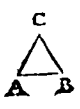
CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic vero, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quo-

que

...positas esse equalia. Non autem virum alij Mathematici interdum concedunt propositiones antecedentes quasdam concessas ad id, ut in consequentis aliquid, unde necessario inferatur veritas alterius propositionis, ut ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus conspicimus: Non debet aequum, cum non sit de re vel vetus Mathematica recisa & consequens. Nam in propositionibus vere & rectè positionibus Geometrae, postquam interrogatus fuerit subiecto, vt cum Duabus rectis non potest comuni propositio, ...pr postulo, omnis horno ...natural... Universaliter, cum non omni... ...ere potest in propositionibus Geometricis ergo vel unam dumtaxat rectam, ...per ...ram. Demonstrat Euclides tri... ...aequalis cuiusvis vnius lateris re... ...ri rectilineam esse duobus interni... ...per propositionem modo antecedentem, &c. Nec enim sequitur, si ...que cuiuslibet ...rectilineo, angulos externos aequales ...figuram illam esse aequilaterum, cum ...clusterus figura, vt dicitur 16. huius magis in vno triangulo aliquot propositiones eam ob rem necesse esse, prius demonstrari eam aliquam conuertibilem effectionis ...cognosci, aut aequalem ex consequentibus ...nis. Non conuertitur autem Euclidis omnes ...verti possint, sed eas dum ...quarum indigeo. Nos examinandas omnes, ...ramus, quis aliquam inde ...ar ...fer-

OLLARIVM.

...R ex hac propositione, omne trian... ...um, id est, cuius omnes anguli sunt aequa-



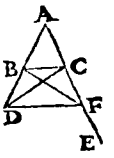
æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollary quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, [a] erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.

[a] 6. primi

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta [b] abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: [c] erunt & bases C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus, [d] remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus

[b] 3. primi.
[c] 4. primi.
[d] 3. pron.

quibus quoniam latera D B, B F, *aqualia sunt lateribus* F C, C D, *vtrumque vtrique, nempe* D B, *ipsi* F C, *per constructionem, &* B F, *ipsi* C D, *vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus* D B F, F C D, *aquales, vt etiam fuit nuper demonstratum:* [a] *Erit angulus* B D F, *super basim* D F, *trianguli* D B F, *aqualis angulo* C F D, *super eandem basim* F D, *trianguli* F C D. *Hi enim aqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo* A D F, *duo anguli* A D F, A F D, *sint aquales, vt nunc ostendimus,* [b] *erunt latera* A D, A F, *aqualia. A quibus si recta* B D, C F, *per constructionem, aquales demantur,* [c] *remanebunt* A B, A C, *latera trianguli* A B C, *aqualia. Quod erat ostendendum.*

[a] *4. primi.*

[b] *6. primi*

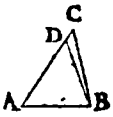
[c] *3. pron.*

THEOR. 4. PROPOS. 7.

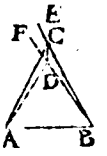
SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis alię duæ rectę lineę æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes; eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

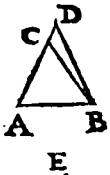
SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, vtraque vtrique, nempe A C, ipsi A D, quę eundē habent terminū A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam A C, vel B D, in ipsam B C, cadat; aut intra

tra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctum D,



in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, sit pars ipsius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia [a] erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; [b] Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alterã cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duę lineę ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idē absurdum incidemus, nempe angulū D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, vt ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponuntur æqualia, [d] erunt anguli A C D, A D C,





supra

[a] 5. primi.
[b] 9. quinti.
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.

ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde [a] cum angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, [b] erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autem iam oſtenſum, angulum B C D, multo eſſe minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B D C, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandũ.

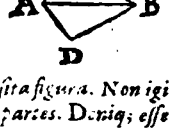
[a] 9. pron.

[b] 5. primi.

SCHOLIVM.

FIERI poteſt, *vt* duæ *linea* A D, B D, *æquales ſint duabus* A C, B C, *vtraque vtrique, vt* A D, *ipſi* B C, & B D, *ipſi* A C, *vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto linea illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Sola enim* A C, A D, *eundem limitem poſſident* A; *Item* B C, B D, *eundem* B; *optimeq; demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt* A C, A D, *inter ſe ſint æquales, ita vt* B C, B D, *quoque inter ſe æquales exiſtant. Recte igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poſſunt eſſe duæ linea ſimul ſumptæ* A D, B D, *æquales duabus lineis* A C, B C, *ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe vtramque vtrique eſſe æqualem, &c.*

Eadem ratione poſſunt ex A, & B, *infra* A B, *baſim trianguli* A B C, *hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ linea rectæ* A D, B D, *conuenientes ad aliquod punctum, ita vt* A D, *exiens e puncto* A, *æqualis ſit ipſi* A C; & B D, *egrediens ex* B, *æqualis ipſi* B C, *vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Deniq; eſſe*



poterunt

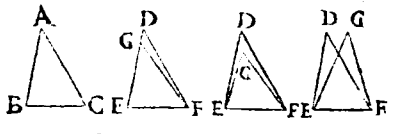
poterunt duæ lineæ A C, A D, *æquales inter ſe, eundem termi num* A, *poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ* B C, B D, *terminum habentes eun dem* B, *inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figu ra apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſitè igitur dictum eſt in propoſitione : duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane ſcopus Euclidi in hac propoſitione propoſitus intelligatur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.*

8. ## THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, æqualia; habuerint vero & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqua lem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, vtrumque vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; ſit autem & baſis B C, baſi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam ſi mente intelligatur baſis B C, ſuperponi baſi E F, [a] neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ baſes ponantur æquales inter ſe. Deinde ſi trian gulũ A B C, cogitetur cadere ſuper triangulum D E F, cadet punctũ A, aut in ipſum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipſum

a 8. pron.



ipſum punctum D, cadat, congruent ſibi mutuo triangu lorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea an gulus A, æqualis erit angulo D; cum neuter alterum ex cedat. Quod ſi punctum A, alió dicatur cadere, vt ad G, quomodocunque id contingat, hoc eſt, ſiue in la tus E D, ſiue intra triangulum E D F, ſiue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadē eſt, quæ B A,) æqualis ipſi E D; & F G, (quae eadem eſt, quae C A) aequalis ipſi F D, propterea quod latera vnius trianguli aequalia ponantur lateribus alterius. Hoc autem fieri non poſſe, iamdudum [b] demóſtratum eſt, cum tam rectae E G, E D, terminum eundem E, quàm rectae F G, F D, eundem limitem ſibi poſſideant. Non igitur punctum A, cadet alió quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, aequalis erit. Quare ſi duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 8. prop.

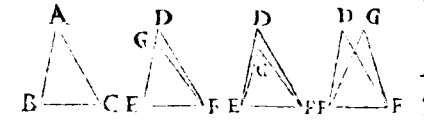
[b] 7. prim.

SCHOLIVM.

VT vides, hac propoſitio conuertit primam partem propoſitionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit baſium æqualitas; ita hic ex æqualitate baſium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Poſſumus eodem modo ex prima, & tertia parte concluſionis quartae propoſitionis inferre totum antecedens eiuſdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrunque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtenduntur, angulóſque reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

SIT enim baſis B C, *æqualis baſi* E F, *& angulus* B, *angulo* E, *angulusq;* C, *angulo* D F E. *Dico latus quoque* A B, *lateri* D E, *& latus* A C, *lateri* D F, *æquale eſſe, angulumq;*



gulum ex A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, [a] congruet sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea ex omnia inter se æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis probrie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.

[a] 8. pron.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis B C, basi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, quale est triangulum A E F. Quia igitur duo latera, nempe D F, F A, constituunt vnam lineam

lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti exiterint; aut non. Si constituant unam lineam rectam, veluti D A, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur aqualia (est enim nunc A E, recta eadem, quæ A B, quæ per hypothesin recta D E, qualis est) [a] erunt anguli A, & D, super basin A D, aquales, quod erat ostendendum. Si vero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam constituant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primùm intra, quæ quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniã igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, aqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli A E D, E D A, aquales ad basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, aqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, aquales. Si igitur hi aquales illis aqualibus addantur, [c] fient toti anguli E A F, E D F, aquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur aqualia, [d] erunt anguli E A D, E D A, aquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin aqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, aquales. His ergo à prioribus ablatis, [e] remanebunt anguli E A F, E D F, aquales; Quod demonstrandum proponebatur.

[a] 5. primi.

[b] 5. primi.

[c] 2. pron.

[d] 5. primi.

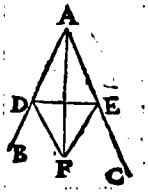
[e] 3. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

9

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT diuidendus rectilíneus angulus BAC, bifariam, hoc eſt, in duos angulos æquales. In recta AB, ſumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, [a] ſecetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde ſuper DE, [b] conſtituatur triangulum equilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia ſint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumque vtrique, quod DA, ipſi EA, per conſtructionem, ſit æquale, & AF, commune; Sit autem & baſis DF, baſi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, conſtructum ſit æquilaterum: [c] Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuiſus bifariam, quod erat faciendum.



[a] 3. primi.

[b] 1. primi.

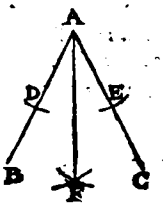
[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum Iſoſceles, nihilominus idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

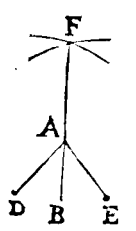
DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam ſecabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſes tamen ipſum variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta AF, ſecabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonſtrabitur, angulum DAF, æqualem eſſe angulo EAF. Non deſcripſimus autem dictas lineas, vt nudæ



praxis

…bat erectur. Id quod in alijs quoque praxibus, quoad ri potest, obseruabimus, ne inextricata multitudo te… is offundat, pariatq; confusionem.

D si quando angulus rectilineus breuissimis lineis …s, & in extremo alicuius plani posi… …dendus sit bifariam, describemus ex … duos arcus sese mutuo intersecantes …pra angulum A, quia infra punctu… E, spatium deest, in quo describi pos… …recta enim ex F, per A, usque ad B, se… …cabit angulum A, bifariam, vt prius, … apposita figura apparet.



SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis …idi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in …4. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum du…plex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum vterque iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidatur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides vsquam, quamnam sectione angulus rectilineus in quotuis partes æquales possit diuidi, quia id à nemine vsque ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdam linea curuæ, vel inflexæ, adsciscemus, lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quemcunque propositum in quotuis partes æquales diuidere desideret ridi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunque interuallũ, secans rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo reflingendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in

quæ angulus propositus est diuidendus, vt in exẽplo proposito in quinq; punctis scilicet in D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, [2] æqualia duobus lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumque vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E, vt dictum fuit, æqualis est: [b] Angulus igitur B A D, angulo E A D æqualis existet; Eadem que ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sint omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei eiusmodi in quolibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales: Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur recte esse per ipsius effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium, quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

2

2 15. defin.

b 8. primi.

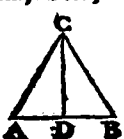
PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

10

DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id eſt, in duas partes æquales. [a] Deſcribatur ſuper A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, [b] per rectam C D, diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, ſecet in D. Dico rectam A B, bifariam eſſe diuiſam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipſi B C, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, eſt commune; Eſt autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per conſtructionem: [c] Erit baſis A D, baſi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam ſecuimus in D, quod facere oportebat.



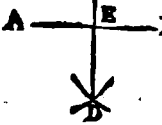
a 1. primi.

b 9. primi

c 4. primi

PRAXIS.

EX centro A, ad quodvis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, deſcribantur duo arcus, vnus ſuperne, alter inferne; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores ſecent in C, & D. Recta igitur ducta C D, ſecabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter ſe æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum deſcripti ſunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera A C, C D, æqualia ſunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & baſis A D, baſi B D, [d] erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rurſus quia latera A C, C E, æqualia ſunt lateribus



d 8. prim

BC, CE, vtrumque vtrique, & angulus ACE, angulo BCE, vt ostensum fuit [a] 4. erit basis AE, basi BE, aqualis.

[a] 4. primi.

IAM vero si linea bifariam diuidenda, posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in D, siue hoc fiat infra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, educta secabit rectam AB, bifariam.

SCHOLIVM.

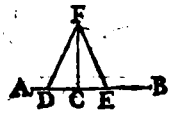
PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes aquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione precedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes aquales, vberrime trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longè facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, & non iucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonstrentur. Neque vero vnquàm diuisione linea in plures, quàm in duas partes aquales, ad eum locum usque indigebimus.

11. PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit AB; & in ea punctum C, a quo

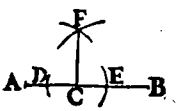
a quo iubemur erigere ſuper A B, lineam ad angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſumatur recta C D,[a] cui æqualis auferatur C E. Deinde ſuper D E, [b] conſtituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico eſſe perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia ſunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumque vtrique, nempe D C, ipſi E C, per conſtructionem, & C F, commune; Eſt vero & baſis D F, baſi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea a puncto in ea dato &c. Quod faciendum erat.

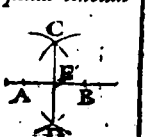


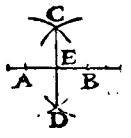
[a] 3. primi.
[b] 1. primi.
[c] 8. primi.
[d] 10. def.

PRAXIS.

EX puncto C, abſcindantur vtrinque linea æquales C D, C E. *Et ex* D, & E, *deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in* F. *Recta namque ducta* F C, *erit perpendicularis. Demonſtratio eadem eſt, quæ Euclidis, ſi modo ducantur rectæ* D F, E F, *quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex* D, & E, *deſcriptos, qui ſe interſecant in puncto* F. *Quod ſi punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur ſecundum praxim datam linea perpendicularis. Vt ſi linea data fuerit* A C, & *punctum datum* C, *extremum; protrahenda erit* A C, *in* B, & *ſumenda æquales* C D, C E, &c. *Si vero ad aliquam lineam conſtituenda ſit linea perpendicularis, non quidem in puncto aſſignato, ſed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis* A, & B, *quibuſcunque linea propoſita deſcribantur tam ſuperne, quam inferne duo arcus ſeſe interſecantes in* C, & D. *Nam*



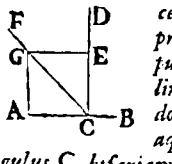




recta ducta C D, *erit perpendicularis ad* A B, *hoc eſt, faciet duos angulos ad* E, *rectos, ſeu æquales. Quod non aliter probabis, quam ſupra praxim, qua lineam in duas æquales diuiſimus partes, demonſtrauimus. Nam per 4. propoſ. erunt anguli ad* E, *æquales, quippe qui ſuper æquales baſes* A E, B E, *conſiſtant, oppoſitanturque æqualibus lateribus* A C, B C, *quæ ex* C, *ad puncta* A, & B, *ducerentur.*

EX PROCLO.

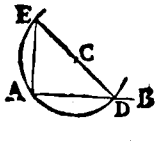
SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & *punctum* A. *Ex* C, *puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis* C D, *vt docuit Euclides; &* [a] *abſcindatur* C E, *æqualis ipſi* A C: *Deinde* [b] *diuidatur angulus* C, *bifariam, ducta recta* C F: *Et ex* E, *rurſus, vt docuit Euclides, educatur* E G, *perpendicularis ad* C D, *ſecans rectam* C F, *in* G. *Ducta igitur recta* G A, *perpendicularis erit ad* A B. *Quoniam cum latera* A C, C G, *trianguli* A C G, *æqualia ſint lateribus* E C, C G, *trianguli* E C G, *vtrumque vtrique, & anguli hiſce lateribus contenti æquales quoque, per conſtructionem:* [c] *Erunt anguli* A, & E, *oppoſiti communi lateri* C G, *æquales; Sed* E, *eſt rectus per conſtructionem; igitur &* A, *rectus erit,* [d] *ideoque* A G, *ad* A B, *perpendicularis.*



3. primi
b 9. primi.
c 4. primi.
d 10. def.

SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, ſiue extremum illud ſit, ſiue non, hoc modo. Sit data linea A B, *punctumq; in ea* A. *Ex centro* C, *extra lineam aſſumpto, vbi libuerit, (dummodo recta* A B, *producta cum ipſo non conueniat) in-*



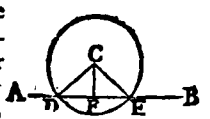
terualle

teruallo vero accepto vsq; ad A, describatur arcus circuli secãs AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcũ in E. Recta igitur ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo D A E, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

A L I A M praxim, quando punctum datum est in extremo lineae, inuenies in scholio propos. 31. huius lib.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.



SIT recta A B, interminatae quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam A B; alias eam non secaret.) [a] Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, aequalia duobus lateribus E F, F C, trianguli, E F C, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, aequalis, cum hac sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare [b] erit angulus D F C, angulo E F C, aequalis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

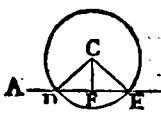
[a] *10. primi.*

[b] *8. primi.*

SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam: Infinitam. *Si*

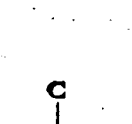
Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, *& punctũ* C, *non posset ex* C, *describi circulus secans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex* C, *perpendicularis duci ad* B E. *Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam producta perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si* B E, *producatur, donec circulus ex* C, *descriptus secet totam* B A, *productam in* D, *&* E, *&c.*



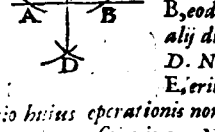
PRAXIS.

CENTRO *facto* C, *& interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in* A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodemq; interuallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in* D. *Nam ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *erit perpendicularis ad* A B. *Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi propositionis 10. Nam anguli ad* E, *erunt recti,*[a] *nempe inter se aequales.*

[a] 7. primi.

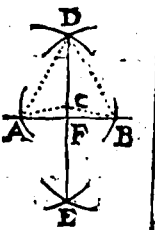


IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, *in linea data, & interuallo quolibet vsque ad* C, *assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto* B, *interualleq; vsque ad idem* C, *alius arcus describatur priorem secans in* C, *&* D; *Eruntq; ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *perpendicularis ad* A B. *Demonstratio eadem est, quae prior. Non est autem necesse, vt interuallum* B C, *aquale sit interuallo* A C, *vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & brevior operatio, si idẽ semper interuallum accipiatur.*



QVOD

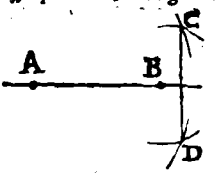
QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ AB, ita agendū erit. Centro C, ad quoduis interuallū secetur recta AB, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam AC, vel BC, bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta necessario p punctū E, transibit, perpendicularis erit ad rectam AB, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC. Quoniam duo latera DA, DC, trianguli ACD, duobus lateribus DB, DC, trianguli BCD, æqualia sunt, nec non & bases AC, BC, æquales sunt, [a] erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera DA, DF, trianguli ADF, duobus lateribus DB, DF, trianguli BDF, æqualia sint, contineantque angulos ad D, æquales, vt ostendimus; [b] erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.



[a] 8. primi.

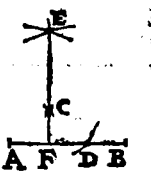
[b] 4. primi.

IAM vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ AB, describantur duo arcus supra, & infra lineam AB, ad interuallum BC. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B, (Quò autem magis distabunt inter se puncta A & B, eò commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum AC, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam AB.



SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ AB, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum AC, vbicunque punctum A, sumatur, de-

scri

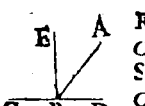


scribatur ex C, arcum secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, se se intersecantes in E. Recta namque ex E per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt supra demonstratum est, quando punctum G, erat prope lineam A B.

QVOD vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

13. THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea A B, consistens super rectã C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, [a] erunt dicti anguli duo recti. Si vero A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnũ quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [b] Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero angulus rectus E B D, æqualis est duobus angulis D B A, A B E, [c] erunt, apposito cõmuni angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus quia [d] angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; erunt, apposito communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiã esse

[a] 10. defin.
[b] 11. primi.
[c] 19. pron.
[d] 2. pron.
[e] 19. pron.
[f] 3. pron.

esse duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, [a] inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam cõsistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

[a] 1. pron.

SCHOLIVM.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C; A B D, duobus rectis æquales esse comprehenduntur: siquidem tantum unus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

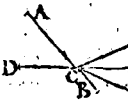
THEOR. 7. PROPOS. 14.

14

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

A D punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum *A B*, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse cõstitutas in directũ, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim non est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cum A C, consistat super rectam D C F, [b] fient duo anguli A C D, A C F, duobus rectis æquales;

[b] 13. primi.



[a] 12. peon. aequales; Ponuntur autem & duo anguli A C D, A C E, aequales duobus rectis; [a] & omnes recti sunt inter se aequales. Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt aequales. Ablato igitur communi angulo A C D, [b] remanebunt anguli A C F, A C E, inter se aequales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, aequales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quae C E; propterea que, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 3. pron.

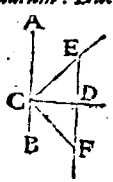
SCHOLIVM.

EST hac propositio praecedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E, sit recta, angulos A C D, A C E, duobus esse rectis aequales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis aequales, rectas D C, E C, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac: & non ad easdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius, fieri potest; vt ad punctum aliquod linea data ad easdem partes duae lineae ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis aequales, quae tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductae partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, [c] perpendicularis ad A B, [d] diuidaturque rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. Deinde ex D, quolibet puncto rectae C D, [e] ducatur D E, perpendicularis ad C D, secans rectam C E, in E. Producta autem E D, ad partes D, [f] sumatur D F, aequalis rectae D E, & ducatur recta F C. Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli E D C,

[c] 11. primi. [d] 9. primi. [e] 11. primi. [f] 3. primi.



aequalia

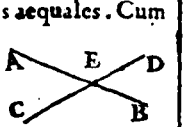
aqualia sunt lateribus F D, D C, *trianguli* F D C, *utrumque utrique, & anguli* D, *ipsis contenti aequales, nempe recti;* [a] *erit basis* E C, *basi* C F, *aqualis, & angulus* E C D, *angulo* F C D. *Sed angulus* E C D, *dimidium est recti.* (*Est enim rectus* A C D, *divisus bifariam.*) *Igitur & angulus* F C D, *dimidium erit recti. Quare* C F, *cum* A C, *facit angulum* A C F, *constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem* C E, *cum eadem* A C, *angulum* A C E, *dimidium etiam recti. Duo igitur anguli* A C F, A C E, *quos ad easdem partes faciunt rectae* C F, C E, *cum* A B; *aequales sunt duobus rectis: Et tamen* C F, C E, *non sunt una linea recta, propterea quod non sunt ducta ad diuersas partes, sed ad easdem.*

[a] 4. prim.

THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duae rectae A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse aequales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, [b] erunt duo anguli A E D, D E B, aequales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis aequales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint aequales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, aequales. Dempto igitur communi angulo D E B, [d] remanebit angulus A E D, angulo B E C, aequalis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se aequales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, qui duobus sunt rectis [e] aequales, aequales erunt duobus quoque angulis D E B, B E C, [e] qui duobus rectis sunt aequales. Ablato igitur angulo communi B E C, [f] remanebunt anguli A E C, B E D, aequales inter se. Si igitur



[b] 13. prim.

[c] 14. prim.

[d] 3. prim.

[e] 13. prim.

[f] 3. prim.

igitur duae rectae lineae se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exēplaria hōc corollarium nō habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis aequales. Num in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis aequales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti aequipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis aequales existunt.

COROLLARIVM II.

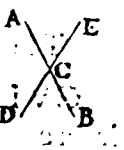
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis aequales esse. Si enim ex E, aliae lineae quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plurimas partes, [a] *quae omnes simul sumptae totis suis adaequantur. Cum ergo illi quatuor anguli aequales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis aequales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circūstans, aequiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis aequales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos aequales quatuor rectis.*

[a] 19. prop.

EX

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

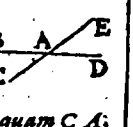


EX puncto C, rectæ AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE, [a] *erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed* [b] *anguli ACE, ECB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE,* [c] *erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimaquintæ.*

[a] 2. pron.
[b] 13. primi.
[c] 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ ductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales: Item duos BAC, DAE. inter se æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æquales illis addantur anguli BAC, DAE, [d] *erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt qua-*

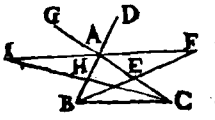
[d] 2. pron.

tuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propoſ. Igitur duo anguli
[a] 14. primi. B A E, BAC, æquales ſunt duobus rectis; [a] atque adeo CA, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto oſtendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt prius, concludetur propoſitum. Peletarius autem demonſtrat hoc idem ratione ducẽte ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonſtrationem noſtram oſtendimus eius demonſtrationi iure optimo præpoſuimus.

16. THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito, maior eſt.

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem eſſe interno, & oppoſito A C B, itemque maiorem interno, & oppoſito A B C. Diuidatur [b] enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt E F, [c] abſciſſa ſit æqualis rectæ EB; ducaturque recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli CEB, æqualia ſunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per conſtructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehenſi, [d] inter ſe æquales, cum ſint circa verticem E, & oppoſiti: Erit [e] baſis C B, æqualis baſi AF, & angulus E C B, angulo EAF; Eſt autem angulus D A C, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & oppoſito angulo A C B. Quod ſi latus C A, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis ſit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonſtrabitur eadem prorſus ratione, angulum externum GAB, maiorem eſſe interno angulo, & oppoſito ABC;



[b] 10. primi.
[c] 3. primi.
[d] 15. primi.
[e] 4. primi.

Eſt

Eſt autem [a] angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cum lineæ B D, C G, ſe mutuo ſecent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & oppoſito angulo A B C. Eſt autem idem angulus D A C, maior quoquè oſtenſus angulo interno, & oppoſito A C B. Cuiuſcunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonſtrandum erat.

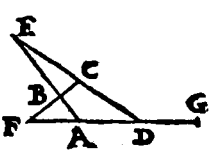
[a] 15. primi.

SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem eſſe angulo B A C, *interno, qui ſibi eſt deinceps; ſed ſolum magnitudine ſuperare vtrumlibet* A C B, A B C, *internorum, ſibique oppoſitorum: quoniam externus angulus æqualis poteſt eſſe angulo interno ſibi deinceps, quando ſcilicet externus rectus eſt; Tunc enim neceſſario is, qui ſibi eſt deinceps, rectus quoque erit: Poteſt & eſſe minor, quando nimirum eſt acutus; Hoc enim poſito, angulus illi deinceps obtuſus erit. Solum ergo, quando obtuſus erit externus, ſuperabit internum ſibi deinceps; Hic enim neceſſario acutus exiſtet. Quæ omnia facile colliguntur ex propoſ. 13. per quã angulus externus, & internus illi deinceps, æquales ſunt duobus rectis.*

I D vero, quod in ſcholio propoſ. 6. huius libri nos demonſtraturos recepimus, nimirum hanc propoſ. non poſſe converti; cum & vno latere figura quadrilatera producto, externus angulus quolibet interno, & oppoſito poſſit eſſe maior; hac ratione abſoluemus.

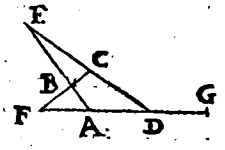
SIT figura quadrilatera A B C D, *cuius angulus* B A D, *obtuſus, &* A B C, *rectus conſtituatur, hac tamen lege, vt rectæ* A B, D C, *productæ ad partes* B, & C, *in puncto* E, *nec non & rectæ* D A, C B, *ad partes* A, & B, *in puncto* F, *coeant. Quod quidem fiet, ſi conſtituatur triangulum A D E, obtuſangulum, & productæ D A, verſus A, ducatur ex quouis puncto* F, *ad A E, perpendicularis* F B, *ſecans latus* D E, *in* C. *Dico, ſi* A D, *producatur ad* G, *angulum externum* C D G, *maiorem eſſe quolibet trium internorum* B A D, A B C, B C D, *ſibi oppoſitorum.*



rum. Cum enim ADE, triangulum sit, [a] erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursus cum DAB, obtusus maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipso ABC. Postremo, quia & in triangulo CDF, [b] angulus externus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis BAD, ABC, BCD. Quam ob rem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.

[a] 16. primi.

[b] 16. primi.



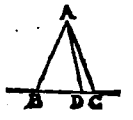
EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se aequales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineae rectae aequales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, sunt aequalia, [c] erunt anguli ACB, & ABC, aequales super basim BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt aequalia, [d] erunt anguli ADB, & ABC, super basim BD, aequales. Quare cum vterq; angulus ACD, & ADB, aequalis sit angulo ABC, [e] erit angulus ADB, aequalis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineae rectae, quam duae, inter se aequales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.

[c] 5. primi.

[d] 5. primi.

[e] 1. post.



THEOR.

17. ~~PROBL.~~ 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

SIT

SIT triangulum A B C; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos G B A, & C A B; Itemque duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur [a] angulus A B D externus maior est interno & opposito angulo A C B; si addatur communis angulus A B C, [b] erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: [c] Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur A B C, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, [d] maior sit angulo CAB, interno & oppósito; [e] erunt, appósito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo [f] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus B A E, [g] maior sit interno & oppósito angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, [h] erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo [i] sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 16. primi.
[b] 4. pron.
[c] 13. primi.
[d] 16. primi.
[e] 4. pron.
[f] 13. primi.
[g] 16. primi.
[h] 4. pron.
[i] 13. primi.

EX PROCLO.

HINC *perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum.* [k] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.*

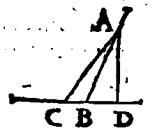
[k] 17. prim

COROLLARIVM. I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inaequales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inaequales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD.



Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat, si fieri potest, perpendicularis AC, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus, & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis: a sed & duobus rectis sunt minores, qd est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

a 17. primi.

COROLLARIVM. III.

PARI ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes

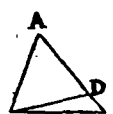
omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; [b] *sintque simul tam illi duo, quàm hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.*

[a] *5. primi.*

[b] *17. primi.*

THEOREMA 11. PROPOS. 18. 19.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum a maiori latere AC, maiorem esse angulo ACB, qui a minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, [c] auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, [d] erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem [e] angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum [f] angulus totus ABC, maior adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, maius ponatur latere BC. ostendes angulum ABC, maiorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

[c] *3. primi.*

[d] *5. primi.*

[e] *16. primi.*

[f] *9. pron.*

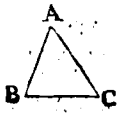
COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15 huius

lib. *Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit, per hanc propoſ. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.*

18. THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.



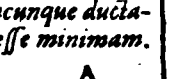
IN triangulo ABC, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus AC, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere AB, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus AC, maius non eſt latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale eſſe ipſi AB, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero AC, minus eſſe dicatur latere AB, erit angulus B, ſubtenſus a minori latere AC, minor angulo C, ſubtenſo a maiore latere AB; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale ſit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius eſſe latere BC, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.

a 5. primi.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac prcpos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, qua perpendicularis est, esse minimam. Ducatur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque linea AD, AE, AF, & alia, quarũ AD, sola sit perpendicularis ad BC, et nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, [a] *sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare* [b] *maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.*



[a] 17. primi.

[b] 19. primi.

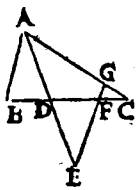
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo precedentis, si tamen prius demonstretur hcc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori.

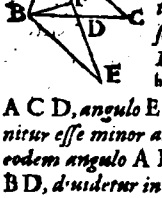
TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, qua secet basin BC, in partes inaquales, maius autem segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse

[a] 3. primi. esse latere A B. Producatur enim A D, ad E, [a] vt sit D E, aqualis ipsi A D. Deinde ex maiori segmento D C, auferatur recta D F, aqualis minori segmento D B, & per F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, trianguli A D B, aqualia sunt lateribus E D, D F, trianguli E D F, vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem [b] anguli A D B, E D F, dictis lateribus contenti aquales; [c] Erunt bases A B, & E F, aquales, & angulo B A D, angulus F E D, aqualis: Est vero & angulus C A D, angulo B A D, aqualis, per hypothesin; Igitur [d] anguli G A D, G E A, trianguli A G E, aquales erunt, [e] ideoque latera A G, E G, aqualia erunt. Est autem recta A C, maior quam A G; quare & A C, maior erit, quam E G. Et quia E G, maior est, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonstratum sit rectam E F, aqualem esse recta A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.



[b] 15 primi.
[c] 4. primi.
[d] 1. pron.
[e] 6. primi.

HOC ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inaquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, [f] vt sit D E, aqualis ipsi A D; ducaturque recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, aqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrumque vtrique, per constructionem, [g] sunt autem & anguli A D C, E D B, dictis comprehensi lateribus aquales: [h] Erit bases A C, & B E, aquales, angulus q; A C D, angulo E B D, aqualis: Et quia angulus A C D, ponitur esse minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoque angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inaquales. Si igitur bifariam secetur per rectã B F, cadet B F, supra B D, eo quod angulus A B D, [i] maior sit angulo E B D. Quia vero E F, [k] maior est, quam E D, & E D, posita est aqualis ipsi A D, erit E F, maior, quã A D; [k] Sed adhuc A D, maior est, quam A F; Multo igitur maior



[f] 3. primi.
[g] 15. primi.
[h] 4. primi.
[i] 9. pron.
[k] 9. pron.

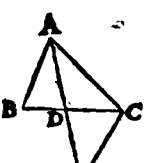
maior erit E F, *quam* A F. *Itaque quia recta* B F, *diuidens angulum* A B E, *bifariam, secat basin* A E, *inæqualiter in* F, *estque maius segmentum* E F, *minus autem* A F; *erit per theorema a Proclo proxime demonstratum, latus* B E, *maius latere* A B. *Ostensum est autem* B E, *æquale esse lateri* A C. *Igitur &* A C, *latus latere* A B, *maius erit. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

HÆC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit deducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POTERIMVS quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



DVO latera A B, A C, *trianguli* A B C, *sint inæqualia;* A C, *maius, &* A B, *minus. Recta autem* A D, *diuidens angulum* A B C, *bifariam, secet basin* B C, *in* D. *Dico segmentum* D C, *maius esse segmento* D B. *Si.n. non est maius, erit vel æquale, vel minus: Si dicatur esse æquale; producatur* A D, *ad* E, *vt* D E, *æqualis sit ipsi* D A, *ducaturq; recta* E C. *Quoniam igitur latera* A D, D B, *æqualia sunt lateribus* E D, D C, *vtrumque vtrique;* A D, *videlicet ipsi* E D, *per constructionem, &* D B, *ipsi* D C, *per hypothesin aduersarij, Sunt autem &* [b] *anguli ad* D. *dictis lateribus contenti æquales:* [c] *Erit basis* A B, *basi* E C, *æqualis*

[a] 3. primi.

[b] 15. primi.

[c] 4. primi.

æqualis & angulo BAD, angulus CED. Positus aũt est & angulo BAD, angulus CAD, æqualis; Igitur & anguli CED, CAD, æquales erunt; [a] Ideoq; latus AC, lateri EC, æquale. Cũ igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoq; latus AB [b], erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdum, quia AC, maius ponebatur, quam AB. Non erit igitur segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB; maius; erit, per theorema Procli, latus AB, maius latere AC; Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.

a 6. primi.

b 1. pron.

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM recta AD, secans anguli BAC, bifariam diuidat quoque basin BC, in D, bifariam. Dico latera AB, AC, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in precedenti theoremate ostensum fuit, latus AC, æquale esse lateri AB, si DC, segmentum segmento DB, æquale ponatur; dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera AD, DB, æqualia sint lateribus ED, DC; [c] & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; erunt bases AB, EC, æquales, & angulus CED, angulo BAD, hoc est, angulo CAD, æqualis. Quare [c] AC, æquale erit ipsi EC, hoc est, ipsi AB.

c 15. prim.
d 4. prim
e 6. prim

DEINDE sint latera AB, AC, æqualia, & recta AD, secans basin BC, in D, diuidat angulum BAC, bifariam;

riam. Dico *segmentum* D C, *æquale esse segmento* D B: *Cum enim latera* A D, A B, *æqualia sint lateribus* A D, A C, *vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin*, [a] *erunt bases* B D, D C, *æquales*. [a] 4. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnū ex illis, vt C A, vsque ad D, [b] sitque recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter se sunt, per hypothesin, [c] erunt anguli A B D, A D B, æquales inter se: Est autem angulo A B D, [d] maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppositum maiori angulo C B D, [e] maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim æqualibus A B, A D, commune addatur A C, [f] fiet tota æqualia; nimirum linea composita ex A B, A C, & linea composita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 3. primi.
[c] 5. primi.
[d] 9. pron.
[e] 19. primi.
[f] 2. pron.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphy-

Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C. *trianguli* A B C, *maiora eſſe latere* B C. *Diuidatur angulus* BAC,

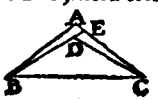
[a] *9. primi.* *illis lateribus contentus* [a] *bifariam per rectam* A D. *Quoniam igitur trianguli* C D A, *latus* C D, *protractum eſt ad* B, [b] *16. primi.* [b] *erit angulus externus* B D A, *maior interno & oppoſito* C A D; *igitur & maior angulo* B A D. *Quare in triangulo* [c] *19. primi.* A B D, *latus* A B, *maiori angulo* A D B, *oppoſitum* [c] *maius erit latere* B D, *quod minori angulo* BAD, *opponitur. Eadem ratione oſtendetur, latus* A C, *maius eſſe, quam* C D, *qua* [d] *16. primi.* *angulus* C D A, [d] *maior eſt angulo* B A D, *hoc eſt, angulo* CAD, *&c. Quamobrem duo latera A B,* AC, *maiora erunt latere* B C. *Eademque eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus bifariam ſecetur.*

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutę fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ



B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At vero angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera BA, A E, [e] maiora ſunt latere B E, ſi addatur commune E C, [f] erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rurſus quia in triangulo C E D, duo

[e] *20. primi.* [f] *4. pron.*

duo latera C E, E D, maiora ſunt latere C D; ſi commune apponatur D B, [b] erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Oſtenſum vero iam fuit, A B, C A, maiora eſſe, quam B E, E C. Multo igitur maiora erunt B A, C A, quam B D, C D, quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, [c] maior eſt angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque eſt, eandem ob cauſam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod ſecundo proponebatur. Si igitur ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 20. primi.
[b] 4. pron.
[c] 16. primi.

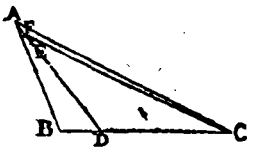
SCHOLIVM.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper vnum latus circa angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur, qua maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, qua minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtuſum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci poſſe duas lineas intra triangulũ ad aliquod punctum, qua maiores ſint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B, [d] *minores ſunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtuſus;*

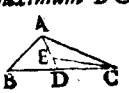
[d] 16. primi.



sus; erit A D B, minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, [a] *maius erit latere A B. Ex D A,* [b] *abscindatur recta D E, aequalis rectae A B; Et reliqua linea A E,* [c] *bifariam dividatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duae lineae rectae constitutae C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C,* [d] *maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, aequalis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur aequalia addantur E D, & A B, fient rectae C F, F D,* [e] *maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duae rectae constitutae C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, vt Euclides demonstrauit.*

[a] 19 primi.
[b] 3. primi.
[c] 10. primi.
[d] 20. primi.
[e] 4 prop.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, [f] *auferatur B D, aequalis rectae A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constitutae igitur erunt intra triangulum duae lineae C E, D E, quae minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, aequalia sint,* [g] *erunt duo anguli B A D, B D A, aequales: Sed B D A, angulus* [h] *maior est angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*



[f] 3. primi.
[g] 5. primi.
[h] 16. primi.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quae maiores sint, vel aequales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

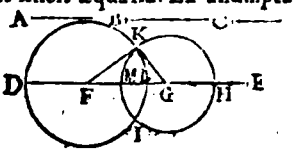
PROBL.

PROBL. 8. PROPOS. 22.

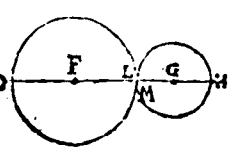
22.

EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex propoſ. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quęuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis DE, infinitę magnitudinis [a] abſcindatur recta DF, æqualis rectæ A; Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus deſcribatur DIK: Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus deſcribatur HIK, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K. (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; ſi ex FE, ſumatur recta FL, æqualis ipſi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipſi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, eſſent GL, FL, hoc eſt, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eędem duę FL, GM, hoc eſt, DF, GH, minores recta FG; quorum vtrumq; eſt contra hypothe-

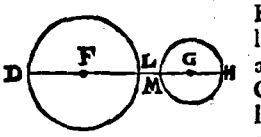


[a] 3. primi.



I ſin.)

ſin.)Id quod ex appoſitis figuris apparet.) ex quorũ quolibet,nimirum ex K,ducantur ad puncta F,G,rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A,B,& C.Cum enim recta FK, [a] æqualis ſit rectæ FD,& recta A, per conſtructionem eidem FD, æ-



a 15.def.

[b] qualis; [b] erit latus FK, rectæ A, æquale. Rurſus quia GK, æqualis eſt ipſi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C,æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale.Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A,B,C, æqualia ſunt. Conſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales,triangulum: Quod faciendum erat.

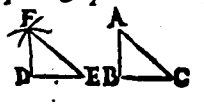
b 1.pron.

PRAXIS.

SVMATVR recta DE, aqualis cuicunque rectarum datarum,nempe ipſi B,quam nunc volumus eſſe baſin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus deſcribatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus ſecans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipſius A, aſſumptum: & latus EF, ipſi C, propter aſſumptum interuallum C; DE, vero latus, acceptum eſt rectæ B, æquale, ab initio.

SCHOLIVM.

HAC arte cuicunque triangulo propoſito alterum prorſus æquale & quoad latera, angulosq́, & quoad aream ipſius, conſtituemus. Sit namq; triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte eſt conſtruendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas

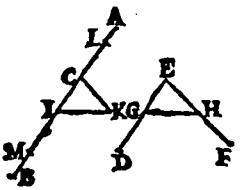


rectas datas AB, BC, CA, quarum qualibet duæ [a] *maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam* DE, *æqualem vni lateri, nempe BC; & ex* D, *interuallo lateris* AB, *arcum describo, item alium ex* E, *interuallo reliqui lateris* CA, *qui priorem secet in* F, *&c.* [a] 20. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 23. 23.

A D datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

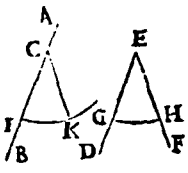
DATA recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde [b] constituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si CI, sumatur æqualis ipsi EG; & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GH. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulũ C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, vtrumque vtrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; [c] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. [b] 22. primi. [c] 8. primi.



PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in

præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum conſtituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perſpicuum eſt. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus deſcribatur G H;



Eodemq; interuallo ex centro C, arcus deſcribatur I K, ſumaturq; beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam ſi ducerentur rectæ I K, G H, eſſent ipſæ æquales, propterea quod circino non variato vtramq; diſtantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera IC, C K, *æqualia ſint duobus* G E, E H, *ob æqualia interualla,* [a] *quibus arcus ſunt deſcripti;* [a] *erunt anguli* I C K, G E H, *æquales.*

a 8. primi.

CÆTERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam propoſito recta duci poſſit, qua cum data recta angulum conſtituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propoſ. 31. huius lib.

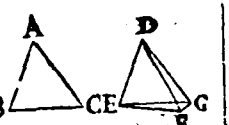
24. THEOR. 15. PROPOS. 24.

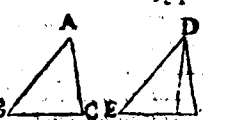
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; Angulus vero A, maior ſit angulo E DF. Dico baſin BC, maiorem eſſe baſe E F. Ad lineam enim DE, ad eiuſq; punctum D, [b] conſtituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus EDF, minor ponatur

b 23. primi.

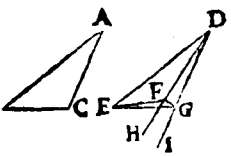
ponatur angulo A)[a] ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; [b] Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG, inter se sunt æqualia; [c] erunt anguli D F G, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, [d] maior angulo EGF. Igitur & angulus D F G, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur E F G, [e] maius erit latus E G, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.





CADAT deinde E G, in ipsam E F. Et quia rursus, vt prius, basis E G, [f] æqualis est basi BC: Et E G, [g] maior quam E F; erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, [h] basis E G, basi B C, æqualis. Deinda quia duo latera D F, DG, æqualia sunt inter se, per constructionem, [i] erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autem angulus F G I, [k] maior angulo F G E. Igitur & angulus GFH, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodé angulo FGE. In triangulo ergo E F G, [l] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis basi E F. Si igitur duo trian-

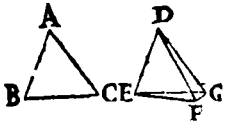


[a] 3. primi.
[b] 4. primi.
[c] 5. primi.
[d] 9. primi.
[e] 19. primi.
[f] 4. primi.
[g] 9. prop.
[h] 4. primi.
[i] 5. primi.
[k] 9. prop.
[l] 19. primi.

gula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

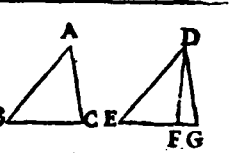
SI quis forte roget, cur in 4. propoſitione Euclides ex eo, quod duo latera unius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti diſtis lateribus æquales, concluſerit non ſolum æqualitatem baſium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique, anguli vero lateribus illis comprehenſi inæquales, colligat tantum inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic reſpondendum eſt, neceſſario id ab Euclide peritiſſimo Geometra eſſe factum. Nam ex antecedente huius theorematis ſemper conſequitur baſium inæqualitas, ita vt baſis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus aſſumptis eſt maior, ſuperet baſin alterius, cuius angulus minor exiſtit, vt demonſtratum eſt; non autem neceſſe eſt, triangulum illud maius hoc eſſe. Vt enim clariſſime ex Proclo demonſtrabimus ad propoſ. 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale eſt triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuerſum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior eſt angulo alterius, triangulum etiam maius eſſe, cum modo æquale ſit, modo minus, & modo maius. Idem dici poteſt de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor eſt ſemper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui æqualis eſt per 4. propoſ. angulo ABC,) minor ſit eodem angulo DEF, pars toto. In ſecunda autem figura, exiſtit quidem angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 4. propoſ. At vero angulus ACB, minor eſt angulo DFE, cum angulus DFE, [b] maior ſit angulo DGF. externus inter[a], & oppoſito; & angulus DGF, æqualis ſit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC,



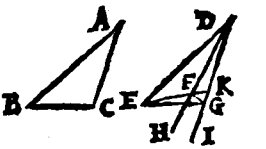
[a] 9. pron.

[b] 16. prim.

ABC, *maior quidem est angulo* DEF, *propterea quod angulus* DEG, *(aequalis existens per 4. propos. angulo* ABC,*) maior sit eodem angulo* DEF, *totum parte: Sed angulus* ACB, *minor est angulo* DFE. *Nam si recta* EF, *producatur secans rectam* DG, *in* K, *fiet angulus* DFE, *maior angulo* DKE, *externus interno; Est autem & angulus* DKE, *maior adhuc angulo* DGE, *externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus* DFE, *angulo* DGE, *qui per 4. propos. aequalis est angulo* ACB. *Quare neque certi quicquam colligi potuit de inaequalitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit maior, modo minor, & modo aequalis.*



[a] 9. prop.



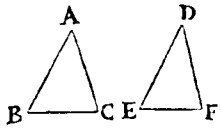
[b] 16. primi.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit basi EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit



vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypotheſin; [a] erit & baſis BC, æqualis baſi EF; quod eſt abſurdū; Ponitur enim baſis BC, baſe EF, maior: Si vero angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis EF, maior baſi BC; quod magis eſt abſurdum, cum EF, ponatur eſſe minor quam BC. Quare cum angulus A, neque poſsit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

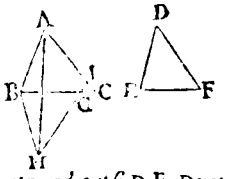
[a] 4. primi.

[b] 24. primi.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuerſum eſt præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonſtratum eſt, baſin illi reſpondentem eſſe maiorem: In hoc autem ex maiori baſi oſtenſum fuit, angulum illi reſpondentem maiorem eſſe. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata ſunt in propoſ. 18. & 19. Nam in 19. demonſtratum eſt, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus reſpondere: At in 24. idem oſtenſum fuit in duobus diuerſis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia ſunt duobus lateribus alterius &c. Ideinq; diſcrimen reperies inter propoſ. 18. & 25.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonſtrat hoc idem theorema oſtenſiue, hac ratione. Poſitis eiſdem triangulis, ex baſe maiore BC, [c] abſcindatur recta BG, æqualis baſi minori EF. Fiat quoque angulus GBH, [d] æqualis angulo DEF, [e] & ſit BH, æqualis ipſi BA, atq; adeo ipſi DE. Ducta aut recta linea AH, ducatur quoque recta per G, ex H, ſecans AC, in I. Quoniam igitur duo latera



[c] 3. primi.

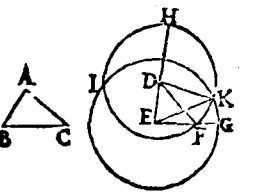
[d] 23. primi.

[e] 3. primi.

latera B A, B H, aequalia sunt, [a] erunt anguli B A H, B H A, aequales. Rursus quia latera B G, B H, aequalia sunt lateribus E F, E D, utrumque utrique, & angulus G B H, aequalis angulo D E F, per constructionem, [b] erit basis H G, basi D F, atque adeo ipsi A C, aequalis, angulusque G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, [c] maior est quam H G, quae est ostensa aequalis ipsi A C, erit quoque maior H I, quam A C; Sed A C, [d] maior est adhuc, quam A I. Multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H, [e] maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui ostensi sunt aequales, fiet [f] totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonstratus fuit aequalis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

[a] 5. primi.
[b] 4. primi.
[c] 9. pron.
[d] 9. pron.
[e] 18. primi.
[f] 4. pron.

HERON autem idem ex eodem Procli hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F, ad G, ut sit E G, [g] aequalis basi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, describatur circulus, producaturq; E D, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur D H, [h] est aequalis ipsi D F, erit quoque D H, aequalis ipsi A C. Additis igitur aequalibus D E, A B, [i] fient A C, A B, simul aequales toti H E: Sed A C, A B, [k] simul maiores sunt, quam B C, atque adeo quam E G. Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo E G, intersecabit rectam E H, atque adeo circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectae D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, aequalia sunt duobus lateribus D E, D K, utrumque utrique, (est enim D K, aequale ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est aequale lateri A C) & basis B C, basi E K, aequalis: (cum E K aequalis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit aequalis basi B C.) [l] Erit angulus B A C, angulo E D K, aequalis: Sed angulus E D K, maior est [m] angulo E D F. Quare & an-



[g] 3. primi.
[h] 15. def.
[i] 2. pron.
[k] 20. primi.
[l] 8. primi.
[m] 9. pron.

& angulus A, angulo E D F, maior existet. Quod est propositum.

26. THEOR. 17. PROPOS. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtriq; & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri

[a] 3. primi. DE, sit D E, maius, a quo [a] abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; [b] Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale

[b] 4. primi.

æquale. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum. [a] 4. primi.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; [b] ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturq; [b] 3. primi.

recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtriq; & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; [c] Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [d] Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat. [c] 4. primi. [d] 16. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, [e] erunt tota quoque triangula æqualia inter se. [e] 4. primi.

SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulo-

angulorum ipſis contentorum, collecta fuit æqualitas baſium, & angulorum ſuper baſes. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate baſium B C, E F, *& angulorum ſuper has baſes, demonſtratum eſt, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia eſſe, reliquumq; angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonſtrauimus ad propoſitionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.*

HOC loco demonſtrandum eſt theorema quoddam admodum neceſſarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, ſiue Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſin bifariam, perpẽdicularis eſt ad baſim, & ſi quidem angulum bifariam diuidat, ſecabit quoque baſin bifariam. Si vero baſim ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad baſin ducta diuidit & baſin, & angulum bifariam.

SINT in triangulo A B C, duo latera æqualia A B, A C, *diuidatq; primum recta* A D, *angulum* A, *bifariam. Dico rectam* A D, *eſſe ad* B C *perpendicularem, ſecareq; baſin* B C, *bifariam. Cum enim duo latera* A B, A D, *duobus lateribus* A C, A D, *ſint æqualia, angulosq; æquales contineant, ex hypotheſi,* [a] *erunt & baſes* B D, C D, *æquales, & anguli ad* D, *atque adeo recti.*

[a] 4. primi.

DIVIDAT deinde recta A D, *baſin* B C, *bifariam. Dico rectam* A D, *ad* B C, *perpendicularem eſſe, & angulum* A, *ſecare bifariam. Cum enim duo latera* B D, D A, *duobus lateribus* C D, D A, *æqualia ſint, & baſis* A B, *baſi* A C, *ex hypotheſi,* [b] *erunt quoque anguli ad* D, *æquales, atque*

[b] 8. primi.

que adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, aequales erunt.

SED iam recta A D, *sit ad* B C, *perpendicularis. Dico & basim* B C, *& angulum* A, *secari bifariam.* [a] *Erunt enim anguli* B, C, *supra basin* B C, *aequales. Itaque quoniam duo anguli* D, B, *trianguli* A B D, *duobus angulis* D, C, *trianguli* A C D, *aequales sunt, uterq; vtriq; latusq; latusq;* A D, *aequalibus oppositum angulis* B, C, *communis;* [b] *erunt & reliqua latera* B D, C D, *aequalia & reliqui anguli ad* A, *aequales. Quod erat demonstrandum.*

SED & hoc theorema verum est.

[a] 5. primi.

[b] 26. primi.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

IN eodem triangulo A B C, *sit* A D, *ad* B C, *perpendicularis, diuidatque primum basin* B C, *bifariam. Dico & latera* A B, A C, *esse aequalia & angulos ad* A, *aequales. Quoniam enim duo latera* B D, D A, *duobus lateribus* C D, D A, *aequalia sunt, angulosq; comprehendunt aequales, nempe rectos;* [c] *erunt quoque & bases* A B, AC, *& anguli ad* A, *aequales. quod est primum.*

[c] 4. primi.

SECET deinde perpendicularis AD, *angulum* A, *bifariam. Dico & latera* AB, A C, *aequalia esse, & rectus* B D, C D. *Quoniam enim duo anguli* D, A, *trianguli* A B D, *duobus angulis* D, A, *trianguli* A C D, *aequales sunt, latusq; communeq;* A D, *illis adiacens;* [d] *erunt quoque & latera* A B, A C, *& latera* B D, C D, *aequalia. Quod est secundum.*

[d] 26. primi.

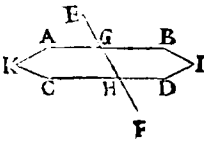
THEO-

27.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineę.

IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter ſe æquales. Dico lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, coibunt tandem, ſi producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ eſſent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum eſt G I H, (cum



A B, recta continuata ſit, item recta C D, vſque ad punctum I,) angulus A G H, poſitus eſt æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & oppoſito D H G; quod eſt abſurdum; [a] quoniam externus interno maior eſt. Quod ſi A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rurſus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & oppoſito A G H, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonſtrabitur, lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.

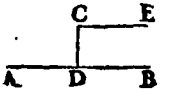
[a] *16. primi.*

SCHOLIVM.

NECESSE eſt, vt lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem exiſtant plano, vt ex definitione conſtat: Quare non ſatis eſt duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, vt duæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in vno, eo-

demq;

dem ꝑ existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos aequales. Sit enim C D, *perpendicularis ad* A B, *rectam, quae in subiecto plano existit; & ex* C, *in alio plano, ad* C D, *ducatur alia perpendicularis* C E, *ita vt punctum* E, *intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuum est, rectam* C D, *incidentem in rectas* C E, A B, *facere duos angulos* E C D, A D C, *alternos aequales, cum sint recti; & tamen* C E, A B, *non sunt parallelae, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, vt supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro & aliis, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris disseritur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.*



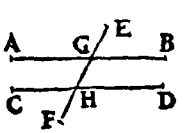
THEOR.

~~PROBL.~~ 19. PROPOS. 28. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidēs linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erūt inter se ipsæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidēs E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam enim angu

lo A B,



[a] 15 primi. [b] 1. pron. [c] 27. primi.

lo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, [a] æqualis est angulus H G B; [b] erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, [c] parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

[d] 13. primi.

D E I N D E faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, [d] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

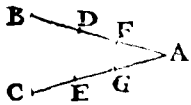
SCHOLIVM.

IAM DVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. cum multis alijs illis ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, opera pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, qua ex eo nullâ ratione dependent, Geometrica demõstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Proeli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

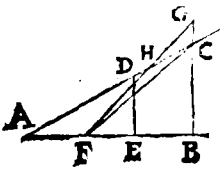
EXEANT

EXEANT a puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniã igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quam D, & E,



& ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinite iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ AB, AC, quò longius protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit, puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare quàm F, & G, Item B, & C, plus, quàm D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in rectam AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à rectæ AB, metientur, cum sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico CB, maiorem esse, quàm DE, ac proinde plus distare rectam AC, à rectæ AB, in puncto C, remotiore, quàm in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est maior, quàm DE, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis, & rectæ AE, abscindatur æqualis BF, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B; ducaturque recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vtpote rectos: [a] erunt & bases AD, FC, & anguli DAE, CFB, inter se æquales. Igitur cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit [b] parallelæ erunt AC, FC, quod est absurdum, cum concurrant in C.



[a] 4. primi.

[b] 27. primi.

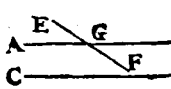
SIT deinde CB, *minor quàm* DE, *si fieri potest, & producta* BC, *fiat* BG, *ipsi* DE, *æqualis, iungaturq; recta* FG. *Quia igitur duo latera* AE, ED, *trianguli* AED, *duobus lateribus* FB, BG, *æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales, puta rectos;* [a] *erunt & bases* AD, FG, *& anguli* EAD, BFG, *inter se æquales. Igitur cum externus angulus BFG, interno* EAD, *æqualis sit* [b] *erunt* AC, FG, *inter se parallelæ, quod absurdum est, cum se mutuo secent in H. Quocirca* BC, *ipsa* ED, *maior erit, cum neque æqualis, neque minor esse possit, vt demonstratum est.*

[a] 4. primi.

[b] 27. primi.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiusmodi est.

SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

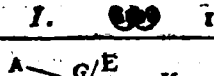


SINT duæ parallelæ AB, CD, *& recta* EF, *secet ipsam* AB, *in* G. *Dico rectam* EF, *si producatur, secturam esse quoq; ipsam* CD. *Quoniam duæ rectæ* GB, GF, *in puncto* G, *angulum faciunt, si producantur infinite, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela* AB, *à parallela* CD, *distant, cum hæc distantia sit finita, alioquin enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia* GB, *à* GF, *maior iam fuerit ea, qua inter parallelas est, necesse est rectam* GF, *productam secuisse rectam* CD. *Nam quamdiu* GF, *continebitur inter duas parallelas, minori distantia a* GB, *remouebitur, quam* CD, *ab eadem* GB, *vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.*

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

IN

IN rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt BGH, DHG, duobus rectis minores.



Dico rectas AB, CD, coire ad eas dem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli BGH, DHG, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli DHG, DHF, [a] duobus rectis aquales; Erunt duo anguli DHG, DHF, maiores duobus angulis DHG, BGH. Ablato ergo communi angulo DHG, remanebit angulus DHF, [b] maior angulo BGH. Si igitur ad rectam FG, & ad punctum G, [c] constituatur angulus KGH, aqualis angulo DHF, cadet GK, supra GB, & secabit [d] productam rectam AB. Quoniam igitur in duas rectas IK, CD, recta incidens EF, facit angulum externum DHF, aqualem interno, & opposito KGH; [e] Erunt recta IK, CD, parallela. Secat autem recta AB, ipsam IK, in G; Producta igitur secabit quoque ipsam CD, vt demonstratum est. Quare AB, cum CD, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum.

a 13. primi.

b 5. pron.

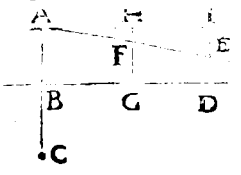
c 23. primi.

d 11. pron.

e 28 primi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertium decimum demonstrare: Sed quoniam principium, quod primo loco premisit, aque dubium, & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, asserimus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, que semper sibi mutuò fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit veriſſimum; cuiusmodi sunt due recte, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuò appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus; Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quòd dari possunt in eodem plano duæ linea, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuò magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum amba producatur, quorum illud ab Apollonio Pergeo,

hoc vero à Nicomede demonſtratum eſt: Ita quoque non videtur ſine demonſtratione admittendum eſſe, (quamquam veriſſimum ſit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur ambæ, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, vt nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ cochoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia data qua mcunque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq;

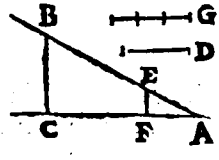


ſit recta A B. *Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum nunquam æqualem eſſe rectæ* A B, *aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim recta* A B, *quantumlibet vſque ad* C, *ducatur per* B, *ad* A C, *perpendicularis* B D; *& polo* C, *interuallo autem* A B, *deſcribatur linea conchoideos* A E, *inflexa nimirum linea, quæ rectæ* B D, *fiat quidem ſemper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per* A, *excitetur recta* A I, *ad* A C, *perpendicularis,* [a] *quæ ipſi* B D, *parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis* H, I, *vtcunque in recta* A I, *acceptis demittantur ad* BD, *perpendiculares* H G, I D, [b] *quæ parallelæ,* [c] *atque adeo æquales inter ſe erunt, angulosque* [d] *conſtituent ad* H, I, *rectos. Admittantur enim nunc, vt propoſitum oſtendamus, omnes demonſtrationes Euclidis, ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit demonſtratum ante propoſ. 29. huius lib, vbi primum vſus illius apparere incipit: vti verè à nobis mox ante propoſ. 29. demonſtrabitur. Itaque quoniam* F G, *maior eſt, quam* E D, *vt Nicomedes demonſtrauit, erit* F H, *reliqua minor, quam reliqua* E I. *Magis ergo inter ſe diſtant lineæ* A I, A E, *in punctis* I, E, *quam in punctis* H, F; *atque ita ſemper eas probabimus magis ac magis diſtare, ſi longius protendantur. Diſtantia nihilominus ſemper minor erit*

[a] 28. primi.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.
[d] 29. primi.

eris, quàm recta A B, *hoc eſt, quàm perpendicularis ex recta A I, ad rectam BD, demiſſa, cum inflexa linea* A E, *ad rectam B D, nunquam perueniat, vt demonſtratum eſt à Nicomede.*

SCIO principium illud Procli in lineis rectis eſſe veriſſimum, & quod facili negotio, ſi omnes demonſtrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonſtrari poſſit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, *angulum* A, *& data ſit recta D, cuiuſuis magnitudinis. Dico diſtantiam rectarum* A B, A C, *in infinitum productarum excedere magnitudinẽ D. Nam ex quouis puncto E, in rectam A B, ſumpto demittatur ad* AC, *perpendicularis* EF, *quæ ſi maior fuerit, quàm* D, *conſtat propoſitum: ſi verò non eſt maior, ſumatur eius multiplex proximè maior, quàm* D, *nempe G. Sumpta autem* A B, *ipſius A E, ita multiplici, vt multiplex eſt G, ipſius E F, demittatur ex B, ad A C, perpendicularis B C, quam dico maiorem eſſe data recta D. Quoniam enim*[a] *eſt, vt* A B, *ad* B C, *ita* A E, *ad* E F; *(quòd ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Eucl. triangula* ABC, AEF, *ſimilia ſint, ob rectas* BC, EF, *quæ*[b] *parallelæ ſunt.) Et permutando, vt A B, ad A E, ita B C, ad E F: erit ita multiplex B C, ipſius E F, vt multiplex eſt A B, ipſius* A E, *hoc eſt, vt multiplex eſt G, ipſius E F. Cum ergo* B C, *& G, æque multiplices ſint ipſius E F, erunt inter ſe æquales. Eſt autem, ex conſtructione, maior G, quàm D. Igitur & B C, diſtantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. quod eſt propoſitum.*



VERVM demonſtratio hæc ſine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli aſſumi non poteſt ad illud axioma 13. demonſtrandum, ne principium in eo demonſtrando petatur. Quæ cum ita ſint, ſedulò dedimus operam, vt illud ipſum Euclidis axioma demonſtraremus ex ijs ſolum, quæ ante propoſ. 29. primi lib. demonſtrata ſunt. Ante enim propoſ. 29. vſus illius axiomatis apud Euclidem nullus eſt. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam eſſe accepi, ſed nunquam facta mihi eſt copia demonſtrationẽ

recta B C, iungat rectas BE, CF, angulis ad B et C ſint duabus rectis minores; ergo et BC, EF productæ BE et CF, tandem conſtituent triangulum BEC, iuxta prop. 17 huius libri.

[a] 4. ſexti.

[b] 13. primi.

illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

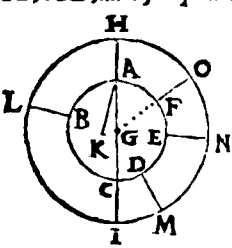
I.

LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.

VT si omnia puncta lineæ A B, à rectâ DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint. (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex defin. linea recta liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ A B, æqualiter distant à rectâ DC, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilque in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta DC, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, una cum ijs, quæ vsque ad propos. 29. huius lib.

lib. oſtenſa ſunt, Axioma 13. demonſtrabimus, adeo clarum vt lumine naturali cognitum ſit, nemoque ſanæ mentis illud negare poſſit. Aut certè citra omnem controuerſiam eſt eiuſmodi, vt longe facilius ei quilibet aſſentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorſus in linea circulari contingit. Nã etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari diſtant, id eſt, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales ſunt, circularis quoque eſt; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali ſemper diſtantia abeſt, induat: quemadmodum linea æqualiter ſemper à recta linea diſtans, naturam lineæ rectæ, cui ſemper æquidiſtat, induit, propterea quæ recta eſt, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem ſit quoque perfectè circularis, facile oſtendemus, ſi prius demonſtremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos conſtituat, per centrum tranſire. Sit igitur circulus A B C D E F, *cuius centrum* G. *Dico rectam* GC, *ex cẽtro ductam efficere tam angulos internos* GCB, GCD, *quàm externos* ICB, ICD, *inter ſe æquales. Producta enim* IG, *vſque ad* A, *ſi ſemicirculus* A B C, *circa diametrum* A C, *intelligatur circumuerti, congruet is ſemicirculo* A E C, *cum ſemicirculi eiuſdem circuli ſint inter ſe æquales. Anguli igitur ad* C, *tam interni, quam externi inter ſe congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta* H A K, *æquales angulos ad* A. *Dico eam per centrum tranſire. Si enim non tranſeat, ducatur ex centro* G, *ad* A, *recta* G A, *quæ ex proximè demonſtratis angulos* G A B, G A F, *conſtituet æquales. Non ergo æquales ſunt* K A B, K A F. *Quod eſt contra hypotheſin.*



HOC oſtenſo, ambiat inflexa linea H L I M N O, *circularem lineam* A B C D E F, *omniaque eius puncta ab hac æqualiter abſint, id eſt, omnes rectæ ab ea linea in circularem*

lineam cadentes, efficientesq; angulos aequales, sint inter se aequales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Ha enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant [a] erūt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in connexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Eucl. propos. 8. lib. 3. qua solum ex propositionibus, qua 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeò eorum distantiæ à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, esse circularem. Cum enim omnes, vt proximè ostendimus, per centrum G, transeāt, si aequalibus H A, O F, addantur aequales A G, F G, erunt totæ H G, O G, aequales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ aequales erunt & rectis H G, O G, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum, videlicet.

[a] 8. tertij.

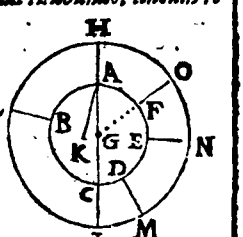
II.

S.I recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

VT si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed aequabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoque lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus, propterea quod omnia puncta lineæ A B, descripta aequaliter à rectæ D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed aequaliter inter ipsa iaceant, quippe cum

cum nullum eorum magis aut minus a recta CD, *abſcedat ſurſum, aut deorſum vergẽdo, quam aliud. Patet hoc etiã ex his, quae ad definitionem lineae rectae ſcripſimus.* Cum *enim duo puncta* D, A, *ſimilibus prorſus motibus ferantur, (quod recta* A D, *in ſuo motu non titubet, aut vacillet, ſed pũcta* D, A, *aeque velociter incedant, aequaliterque ſemper inter ſe diſtent.) deſcribent vtique lineas ſimiles, vt in eadem definitione docuimus.* Cum *ergo punctum* D, *rectam* DC, *deſcribat, erit quoque linea* AB, *quam punctum* A, *deſcribit, recta.* Neque *vero imaginari quis poterit, ſi linea recta in tranſuerſum moueatur vniformiter ſine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema deſcribere duas differentes inter ſe lineas; ſed qualem vnum extremum deſcribit, talem quoque ab altero extremo deſcribi neceſſe eſt, propter vniformem illum, aequabilemq; motum vtriuſque puncti extremi. Eſt principium hoc aeque clarum, & euidens, atque antecedens.*

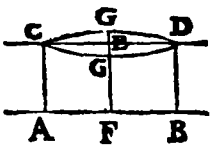
CONTINGIT *autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea ſuper lineam circularem in tranſuerſum fluens aequabiliter, conſtituens nimirum in ſuo extremo cum circulari aequales ſemper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero ſuo extremo deſcribit, ita vt naturam circularis lineę ſubiectae, à qua aequaliter ſemper diſtat, linea illa deſcripta induat: quemadmodum linea recta* AD, *ſuper rectam* DC, *in tranſuerſum fluens aequabiliter, conſtituens nimirum cum ea in ſuo extremo* D, *angulos ſemper rectos, ita vt nuſquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam* AB, *altero extremo* A, *delineat: adeo vt linea deſcripta* AB, *naturam induat rectae lineae ſubiectae* DC, *à qua aequaliter ſemper recedit. Rectam autem, qua ſuper lineam circularem in trã ſuerſum fluit aequabiliter, deſcribere altero ſuo extremo lineam quoque circularem, facile demonſtrabimus. Moueatur enim in figura poſteriore recta* HA, *in tranſuerſum*



uersum super peripheriam ABCDEF, *aequabiliter, faciens semper in extremo* A, *cum ea angulos aequales. Dico lineam* HLIMNO, *ab altero extremo* H, *descriptam esse quoque circularem. Cum enim recta* HA, *in omni situ motus illius imaginarij faciat aequales angulos cum peripheria* ABCDEF, *fit vt ea producta in centrum* G, *cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis aequalibus* HA, OF, *ad rectas aequales* AG, FG, *fient totae rectae* HG, OG, *& omnes aliae, inter se aequales: ac propterea ex defin. circuli* HLIMNO, *circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.*

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



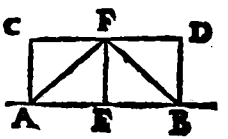
SINT ad rectam AB, *rectae duae perpendiculares* AC, BD, *inter se aequales: Et ducta recta* CD, *demittatur ex quolibet eius puncto* E, *ad* AB, *perpendicularis* EF. *Dico* EF, *vtrique* AC, BD, *esse aequalem. Si namque aequalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo aequali* FG, *si intelligatur recta* AC, *moueri in transuersum per rectam* AB, *faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum* C, *lineam rectam per* G, *transeuntem, vt supra ostensum est, qualis est* CGD. *Duae ergo rectae* CED, CGD, *superficiem claudent. Quod est absurdum. Æqualis igitur est* EF, *vtrique* AC, BD. *Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.*

SI

IIII.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam A B, *erectæ duæ perpendiculares* A C, B D, *æquales inter se, ducaturq́; recta* C D. *Dico vtrumq; angulum* C, D, *rectum esse. Secta namque recta* A B, *bifariam in* E, *excitetur in* E, *ad* A B, *perpendicularis* E F, *iungaturq́; rectæ* A F, B F. *Quoniam igitur duo latera* A E, E F, *trianguli* A E F, *duobus lateribus* B E, E F, *trianguli* B E F, *æqualia sunt, vtrumq; vtrique, angulosq́; continent æquales. puta rectos, erunt quoque & bases* A F, B F, *et tã anguli* F A E, F B E, *q́* A F E, B F E, *inter se æquales.* [a] *Ablatis igitur æqualibus angulis* F A E, F B E, *ex rectis æqualibus* C A E, D B E, *reliqui erunt æquales anguli* C A F, D B F. *Itaque cum duo latera* C A, A F, *trianguli* C A F, *duobus lateribus* D B, B F, *trianguli* D B F, *æqualia sint, angulosq; complectantur æquales, vt ostendimus,* [b] *erunt quoque & bases* C F, D F, *& tam anguli* C, D, *quam* C F A, D F B, *inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis* C F A, D F B, *addantur anguli* A F E, B F E, *ostensi æquales, fient toti anguli* C F E, D F E, *æquales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis* E F, *vtriq; A C, B D, æqualis est, vt proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ* A C, E F, *ad* A E, *perpendiculares, inter se æquales. Quare, vt de angulis* C, D, *proximè probatum est, anguli* C, *& E F C, æquales inter se erũt. Est autem E F C, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus* D, *qui ostensus est ipsi* C, *æqualis.*



[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

CÆTERVM angulos C, D, *rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.*

SI

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.

RECTA linea A B, *in rectas* A C, B D, *incidens faciat angulū A* B D, *rectum*, & B A C, *acutum*. *Dico rectas* A C, B D, *minus semper inter se distare versus* C, D, *productas, magis vero, si versus* E, F, *producantur.* Ducatur *enim ex* B, *ad* A C, *perpendicularis* B G, *quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli* B A C, *cadet. ac propterea angulus* G B D, *pars recti anguli* A B D, *acutus erit.* Demissa *ergo ex* G, *ad* B D, *perpendicularis* G H, *cadet quoque ad partes anguli acuti* G B D, *ex eodem coroll. angulusq; propterea* H G C, *pars recti anguli* B G C, *acutus erit.* Rursus *ergo ducta perpendicularis* H I, *ad* A C, *per idem coroll. ad partes acuti anguli* H G C, *cadet, ideoq; angulus* I H D, *pars recti anguli* G H D, *acutus erit.* Atque *ita deinceps in infinitum. si ex I, ad* B D, *perpendicularis* I K, *ducatur, & ex* K, *perpendicularis* K C, *ad* A C, *& ex* C, *ad* B D, *perpendicularis* C D, *&c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam.* Quoniam *igitur in triangulo* A B G, *angulus* B A G, *acutus est, &* A G B, *rectus,* [b] *erit recta* A B, *maior quam* B G; *& in triangulo* B G H, *recta* B G, *angulo recto* G H B, *opposita, maior quam* G H; *& in triangulo* G H I, *recta* G H, *maior quam* H I: Atque *ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ipsi* A B, *propiores fient, remotiores ijs, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cum nunquam possit esse finis ducendarum perpendicularium.* Quapropter *recta* A C, *in* G, *minus distabit à recta* B D, *quam in* A, *& in* I, *minus, quam in* G, *& in* C, *minus, quam in* I, *&c. quandoquidem perpendiculares* A B, G H, I K, C D, *&c. quæ ordinatim decrescunt, vt*

[a] 12. primi.

[b] 19. primi.

ostendam

oſtendimus, minimae ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, vt ex corell. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantias ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes. quod eſt primum.

DVCATVR rurſus [a] ex A, ad A C, perpendicularis A L, qua angulum obtuſum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq; angulus A L B, acutus, cum ambo A B L, A L B, [b] ſint duobus rectis minores, atque A B L, rectus ſit; ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadem ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, facietq; angulum L M A, acutum, & L M E, obtuſum: Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumq; M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atque ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigatur N O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos, vna poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt, & A L B, acutus, [c] erit A L, recta maior, quam A B, & in triãgulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita, maior quam A L; atque in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quam M L: Atq; ita deinceps erunt ſemper rectae, quae ab A B, longius abſunt, maiores ijs, quae propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis à recta B F, diſtabit, quam in A, & in O, magis, quam in M, & in E, magis, quã in O, &c. quandoquidem perpendiculares A B, M L, O N, E P, &c. quae ordinatim augeri oſtenſae fuere, minimae ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam B F, cadentium, &c. Liquido ergo conſtat, rectas A C, B D, ad partes E F, productas continẽter fieri magis inter ſe diſtãtes, quod eſt ſecundum. Quod ſi proteruus quiſpiam vellet contendere, rectam A L, quae ad A C, perpendicularis eſt, non concurrere cum D B, producta; conſtabit multò magis id, quod demonſtrandum proponitur. Nam linea D B, vltra punctum B, multò magis à recta C A, diſtabit, quam in puncto B; quandoquidem A L, ad A C,

[a] 11. primi.
[b] 17. primi.
[c] 19. primi.

AC, *perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum* DB, *cum tamen* GB, *ad eandem* AC, *perpendicularis cum* DB, *concurrat in* B, *&c.*

HÆC cum ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos C, D, *eſſe rectos. Nam ſi angulus* C, *verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta* CA, *in rectas* AB, CD, *incidens efficit angulum* CAB, *rectum, &* C, *acutum, minus ſemper inter ſe diſtabunt rectae* CD, AB, *ad partes* D, B, *productae, hoc eſt, perpendiculares ex* CD, *in* AB, *demiſſae ordinatim minores fient, quam* CA, *vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis* DB, *quam* CA, *quod eſt abſurdum, cum ponatur aequalis. Non igitur acutus eſt angulus* C. *Eademque ratione neque angulus* D, *acutus erit. Sit deinde angulus* C, *obtuſus. Quia igitur recta* CA, *in rectas* CD, AB, *incidens facit angulum* CAB, *rectum, &* C, *obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectae* CD, AB, *ad partes* D, B, *productae, hoc eſt, perpendiculares ex* CD, *in* AB, *demiſſae continenter augebuntur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis* DB, *quam* CA, *quod eſt abſurdum, cum aequalis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus* C. *Eademq; ratione neq; angulus* D, *obtuſus erit. Sed neque acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterque eſt, quod erat oſtendendum.*

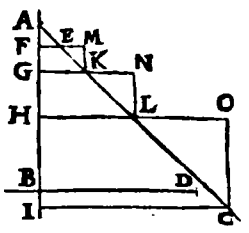
EX *his demonſtratis, facile iam Axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.*

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duę illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

HOC *eſt Axioma 13. apud Euclidem in noſtris commentarijs; apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſce-*

ſuſcepimus. Incidens ergo recta A B, *in rectas* A C, B D, *faciat internos, ad eaſdemq́; partes angulos* A B D, B A C, *duobus rectis minores. Dico rectas* A C, B D, *ad partes* C, D, *productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe* A B D, *rectus, & alter* B A C, *acutus. Sumpto in recta* A C, *puncto quolibet* E, [a] *ducatur ex eo ad rectam* A B, *perpendicularis* E F, *& rectae* A F, *aequalis accipiatur* F G, *&* G H, *aequalis ipſi* A G, *&* H I, *ipſi* A H, *ita vt* A G, *ipſius* A F, *&* A H, *ipſius* A G, *&* A I, *ipſius* A H, *dupla ſit. Et quoniã ſi rectae* A F, *abſcindãtur continuò aequales rectae ex* A B, *aliqua tandem pars vltra* B, *punctum cadet, quod finita recta* A B, *per continuam ablationem vnius eiuſdemq́; quantitatis abſumatur tandem, quandoquidem linea* A F, *ita multiplicari poteſt, (quod fit, ſumendo ipſi in* A B, *continenter partes aequales) vt tandem aliquando finitã lineam* A B, *ſuperet: Id quod Euclides frequenter aſſumit in lib. 5. & alijs ſequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaequalibus proportionem inter ſe habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit vt multò magis, ſi ipſi* A F, *aequalis abſcindatur* F G, *& toti deinde* A G, *non autem ſoli* A F, *aequalis auferatur* G H: *Item toti* A H, *non autem ſoli* A F, *vel* A G, *aequalis dematur* H I, *& ſic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum* B. *Statuatur ergo punctum* I, *terminans tertiam duplam in dato exemplo, exiſtere vltra punctũ* B. *Accipiatur quoq; in recta* A C, *recta* E K, *ipſi* A E, *&* K L, *ipſi* A K, *&* L C, *ipſi* A L, *aequalis, ita vt tot ſint partes in recta* A C, *quot in recta* A I; *ducanturq́; rectae* K G, L H, C I, *producanturq́; vnà cum* E F, *vt* E M, K N, L O, *ipſis* E F, K G, L H, *fiant aequales, ac tandem rectae iungantur* M K, N L, O C. *Itaque quoniam duo latera* K E, E M, *trianguli* K E M, *duobus lateribus* A E, E F, *trianguli* A E F, *per conſtructionẽ aequalia ſunt, vtrumque vtrique,* [b] *angulosq́; ad verticem* E, *continẽt aequales,* [c] *erit & baſis* M K, *baſi* A F, *& angulus* M, *angulo* F,

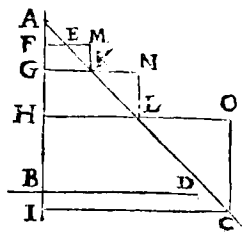


[a] 12. primi.

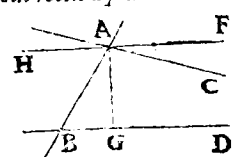
[b] 15 primi.

[c] 4. primi.

lo, F, æquales. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, [a] æquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad F M, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus MK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione, [b] anguleq; comprehendunt æquales ad K, verticem, [c] erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se [d] erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiã angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ IC, BD, [e] parallelæ sunt; ac propterea BD, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum.



SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores; [f] sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo BAC. [g] Constituatur in A, ad rectam AE, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Cadetq; recta AF, supra rectã AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, cõstituat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte opposito æqualis est, [h] erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad



[a] 1. pron.
[b] 15. primi.
[c] 4. primi.
[d] 1. pron.
[e] 28. primi.
[f] 13. primi.
[g] 23. primi.
[h] 28. primi.

ad BD, a perpendicularis AG, qua ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritque angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, effieiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, vt proximè demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tãdem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, B, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum. a 12. primi.

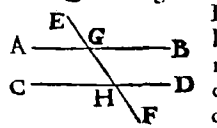
QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertium decimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29.

29

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad eadem partes æqualem; & internos, & ad eadem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB,CD, recta incidat E F. Dico primum,angulos alternos AGH,DHG,inter ſe eſſe æquales . Si enim non ſunt æquales,ſit alter,nempe AGH,maior. Quoniam igitur angulus A G H , maior eſt angulo D H G,ſi addatur communis angulus BGH, [a] erũt duo AGH,BGH, maiores duobus DHG , BGH: At duo AGH , BGH, [b] æquales ſunt duobus rectis . Igitur duo D H G, BGH, minores ſunt duobus rectis. [c] Quare cum ſint interni,& ad eaſdem partes B,& D,[c] coibunt lineæ AB,CD, ad eas partes , quod eſt abſurdum , cum ponantur eſſe parallelæ . Non eſt igitur angulus A G H, maior angulo DHG:Sed neque minor . Eadem enim ratione oſtenderetur , rectas coire ad partes A , & C. Igitur æquales erunt anguli alterni AGH , DHG. Eademque eſt ratio de angulis alternis BGH , CHG.



a 4. pron.
b 13. primi.
c 13. pron.

DICO ſecundò , angulum externum AGE , æqualem eſſe interno,& ad eaſdem partes oppoſito C H G . Quoniã enim angulo BGH,æqualis eſt alternus CHG, vt oſtenſum eſt ; & eidem B G H, [d] æqualis eſt angulus A G E ; Erunt anguli A G E, C H G, [e] inter ſe quoque æquales . Eodem modo demonſtrabitur,angulum BGE, æqualem eſſe angulo D H G.

d 15. primi.
e 1. pron.

DICO tertio,angulos internos ad eaſdem partes , AGH,CHG,æquales eſſe duobus rectis. Quoniam enim oſtenſum fuit , angulum externum AGE , æqualem eſſe angulo CHG,interno;ſi addatur cõmunis AGH, [f] erũt duo AGE,AGH,duobus CHG,AGH,æquales:Sed duo AGE,AGH, [g] æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG , AGH, æquales duobus rectis erunt . Eodem modo anguli BGH , DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos &c. Quod erat demonſtrandum .

f 2. pron.
g 13. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT autem hoc præſens theorema duo præcedentia theoremata, vt perſpicuum eſt .

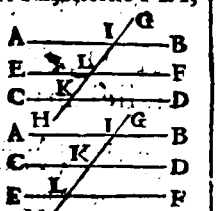
THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelę, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ A B, C D, eidem rectæ E F, parallelæ. Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta G H, secabit omnes, nimirum A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, [a] erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I, [c] æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, [d] erunt rectæ A B, C D, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



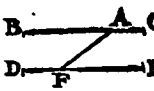
[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 1. pron.
[d] 27. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Constat autem A I, productam coincidere cum B I. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemque lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, *coeuntes in A, parallelæ ipsi* DE. *Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim* A, *ducatur recta* AF, *secans* DE, *in* F, *vtcunque. Quoniam igitur* AB, DE, *sunt parallelæ,* [a] *erunt anguli alterni* BAF, AFE, *æquales. Addito ergo communi angulo* CAF, [b] *erunt duo anguli ad* A, *æquales duobus angulis* CAF, AFE, *Sed hi duo* [c] *æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas* AC, DE. *Igitur & duo anguli ad* A, *duobus erunt rectis æquales; ac propterea* [d] *in rectum erunt constituta ipsæ* AB, AC. *Quod est propositum.*

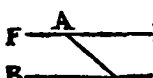


[a] 29. primi.
[b] 2. pron.
[c] 29. primi.
[d] 14. primi.

31 PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, [e] æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, qnantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem, [f] Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.



[e] 23. primi.
[f] 27. primi.

SCHOLIVM.

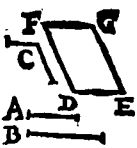
DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo nō conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam nō plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17.

ex

ex Proclo; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallelæ, quam una, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, concurrerent ipſæ in puncto illo eodē, quod eſt abſurdum, [a] *cum ſint parallelæ inter ſe, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, ſunt parallelæ.* [a] 30. primi.

EX *hoc porro problemate, & illo, quod propoſ. 23. continetur, facile negotio cõſtituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendētia datis duabus rectis lineis æqualia.*

SINT *enim data recta A, B, oporteatq; conſtituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo recti lineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ recta A, ſit æqualis,* [b] *fiat angulus EDF, angulo C,* [c] *& recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E,* [d] *agatur recta E G, ipſi D F, parallela, & per F, recta F G, ipſi DE, parallela ſecans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela ſunt, ex conſtructione;* [e] *parallelogrammum erit DEGF. Quod cum ex conſtructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.*



[b] 23. primi.
[c] 3. primi.
[d] 31. primi.
[e] 35. def.

PARI *ratione ex hoc problemate, & propoſ. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam propoſito lineam rectã, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propoſ. 23. polliciti ſumus.*

SIT *enim datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea BC,* [f] *conſtituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datum punctum A, tranſeat, factum erit, quod iubetur. Si vero non tranſeat per A,* [g] *ducatur per A, recta AB, ipſi EF, parallela ſecans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualem eſſe. Cũ enim parallelæ ſint AB, EF,* [h] *erit,*

[f] 23. primi.
[g] 31. primi.
[h] 29. primi.

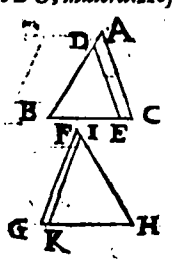
angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte oppoſito æqualis. Cum ergo & angulus D, angulo E, per conſtructionem ſit æqualis, [a] æquales inter ſe erunt anguli ABC. & D. quod eſt propoſitum.

a 1. pron.

NON videtur autem alienum oſtendere hoc loco, rectè Euclidem propoſ. 26. vt demonſtraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepiſſe, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè ſubtendere angulum æqualem. Nam niſi altera harum conditionum adſit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum ABC, ſintq; latera AB, AC, latere BC, maiora. Abſcindatur BD, æqualis ipſi BC, [b] ducaturq; DE, ipſi AC, parallela: [c] eritq; angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales ſunt, vterque vtrique, latusq; BC, lateri DB, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim BE, minus, quàm BC, atque adeo neque lateri AC, neq; lateri AB, æquale eſſe poteſt; quòd hæc latera maiora ponantur latere BC. Cauſa huius rei eſt, quòd latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis eſt.

b 31. primi. c 29. primi.



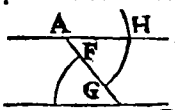
SIT rurſus triangulum FGH, ſintq; iterum latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius, quàm FG. Abſcindatur HI, ipſi FG, æqualis, [d] ducaturq; IK, ipſi FG, parallela: [e] eritq; angulus HKI, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, æquales, vterque vtrique, latusq; FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim HK, minus, quàm HG, atque adeo neq; lateri HG, neque lateri FH, æquale eſſe poteſt; quòd latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei eſt, quòd latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo H, ſed angulo G, eſt æqualis, [f] qui maior eſt

d 31. primi. e 29. primi. f 18. primi.

ior est angulo H, propterea quòd latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

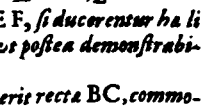
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad BC, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C: Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, aqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, 2 erit hæc parallela ipsi BC. Nam anguli EDF, HAG, sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.

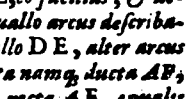


2 27. primi.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela linea datæ BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta BC: Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secãtes se se in F. Nam ducta recta AF, erit parallela rectæ BC. Quoniam enim propter idem interuallum assumptum rectæ AF, æqualis est recta DE; & rectæ A, D, rectæ EF, si ducerentur hæ lineæ; erit AF, oppositæ DE, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.

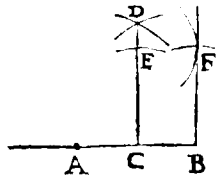


QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectæ BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum distet a puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta nam, ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, æqualis



est recta D F, *ob idem interuallum; & recta A D, recta E F, si hæ rectæ ductæ essent, &c.*

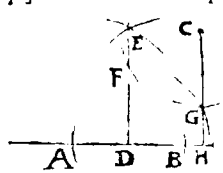
EX his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta A B, ex cuius extremo puncto B, *educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis* C, *abscindatur recta* C B, *æquale* C A, *& ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in* D, *ducaturq; recta* D C, *quæ ad A B, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per* B, *ducatur ipsi* C D, *parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propos. proximè explicatam.*



EX C D, *abscissa recta quantacunque* C F, *describatur ex* B, *ad interuallum* C E, *arcus, quem in* F, *secet alius arcus ex* E, *ad interuallum* C B, *descriptus, ducaturq; recta* B F. *Hæc namque ipsi* C D, *parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igitur cum angulus* A C D, [1] *æqualis sit interno* C B F; *sit autem* A C D, *rectus, erit &* C B F, *rectus, ac proinde* B F, *ad* A B, *perpendicularis erit.*

[1] 29. primi.

SIMILITER si data sit recta A B, & punctum extra ipsam C, *in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex* C, *ad* A B, *perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto* D, *vtcunq; in linea A B, abscindantur vtrinque inter se æquales* D A, D B, *& ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in* E, *ducaturque recta* E D, *quæ ex praxi propos. 11. ad A B, perpendicularis erit. Deinde per* C, *ducatur ipsi* D E, *parallela, hoc modo, secundum praxim huius propos. 31. Ex dato puncto* C, *ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam* D E, *in* F: *eodemq; interuallo ex* D, *versus* C, *alius arcus describatur, quem in* G, *intersecet alius arcus*



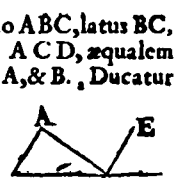
arcus ex C, ad interuallum D F, delineatus. Recta namq; ducta ex C, per G, ſecans A B, in H, parallela erit recta D E, ex praxi huius propoſ. 31. Quare, ut proximè ſcripſimus, C H, ad AB, perpendicularis erit, ſicuti & E D, ad eandem perpendicularis eſt.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et triãguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A, & B. [a] Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, [b] erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rurſus, quia recta BD, in eaſdem parallelas incidit, [c] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, [d] fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, ſimul æqualis. Quod eſt propoſitum.



DICO ſecundo, tres angulos internos eiuſdem trianguli A, B, & ACB, duobus eſſe rectis æquales. Cum enim externus angulus A C D, vt oſtenſum fuit, æqualis ſit duobus internis A, & B; ſi addatur communis A C B, [e] erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, A C B, [f] æquales ſunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus ſunt rectis æquales. Quare cuiuſcunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

[a] 31. primi.
[b] 29. primi.
[c] 29. primi.
[d] 2. pron.
[e] 2. pron.
[f] 13. primi

SCHOLIVM.

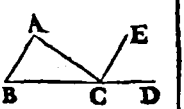
CVM *demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiuuis trianguli maiorem esse utrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, euidentium est, alterutrum externorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo inte. no angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, externo: Et æqualis B, internus superatur ab eod. in exterco angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quoscunq; loco cunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eod. triangulo A B C, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt angulo A C B, &c.*

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, ut refert Eudemus, Pythagorei demonstrauit hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, a ducatur rectæ B C, parallela D E. Quoniam igitur b anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt; si addatur æqualis E A C, & A C B, fiunt enim & hi alterni c æquales duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Adiuncto igitur communi angulo A B C, erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. lib. 1. & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod ostendendum erat. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit productum, æqualem esse duobus internis, & oppositis A B C, B A C. Quoniam enim anguli A B C, B A C, A C B, æquales sunt duobus rectis, at æquales sunt duobus rectis, anguli autem æquales sunt A C F, A C B, inter se æquales, erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, æquales. Detracto igitur communi angulo A C B, remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, æqualis.

a 31. primi.
b 29. primi.
c 2. post.
d 2. primi.
e 13. primi.
f 3. post.

FA-

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propoſitionis Euclidis: Hoc *eſt, ſi ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis ſit duobus internis, & oppoſitis, illam lineam eſſe in directum ipſi latera conſtituentem. Ex C enim ducatur* CD, *recta, ſitq; angulus* ACD, *æqualis duobus angulis* ABC, BAC. *Dico, rectas* BC, CD, *in directum iacere. Cum enim angulus* ACD, *æqualis ſit angulis* ABC, BAC; *ſi addatur communis angulus* ACB, [a] *erunt anguli* ACD, ACB, *æquales angulis* ABC, BAC, ACB: *Sed* ABC, BAC, ACB, [b] *æquales ſunt duobus rectis. Igitur & anguli* ACD, ACB, *duobus erunt rectis æquales. Quare* BC, CD, *vnam lineam rectam conſtituunt.*



[a] 2. *poſt.*

[b] 32. *primi.*

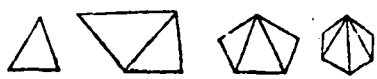
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propoſ. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

HOC *eſt, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis vni recto, id eſt, duobus rectis; Anguli vero ſecundæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis tribus rectis, ſex videlicet rectis; Et ſic de reliquis. Eũ autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, ſeu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ ſuperficiem non concludunt, vnde nec figuram conſtituunt, ſed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ conſtitutionem requirũtur. Ex quo ſit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, eſſe.*

esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur unum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum bina rius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cũ sit decimaoctaua, habebit 20. angulos aequiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figurę 10. lateribus contentae, aequialebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autẽ hac ratione demonstrabitur. *Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos laterales, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineae rectę, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulũ in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituãt omnes angulos rectilineae figurae propositae, & omnes anguli cuiuslibet trianguli aequales sint duobus rectis; perspicuum est omnes angulos figurae cuiusuis rectilineae aequales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspici tur in propositis figuris.*



SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figura rectilinea, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, dẽptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.

HOC *est, anguli cuiuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figura continentis 20. latera aequialebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.*

Demon-

Demonſtratio autem huius rei talis eſt. Si à quouis puncto intra figuram aſſumpto

ad omnes angulos rectae lineae ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosue figura ipſa continet. Cum igitur anguli cuiuſcunque trianguli [a] aequales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figurae rectilineae propoſitae, vt conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figurę propoſitę, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum aſſumptum conſtitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum exiſtentes aequales 4. rectis tãtummodo, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiuſque figura bis tot rectis ſunt aequales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod eſt propoſitum. [a] 32. primi.

EX hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figurae cuiuſuis rectilineae producantur ordinatim verſus eandem partem, omnes angulos externos aequales eſſe quatuor rectis. Nã quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] aequantur duobus rectis; atque adeo omnes externi vna cum omnibus internis aequales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosue figura continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis aequales, minus quatuor, vt demonſtrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis aequales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni et externi ſimul aequales ſunt ſex rectis. Cum igitur interni [c] duobus ſint rectis aequales, erunt ſoli externi aequales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni ſimul aequales ſunt octo rectis. Cum igitur interni ſoli aequales ſint quatuor rectis, vt oſtendimus, erunt & ſoli externi quatuor etiam rectis aequales. In pentagono, ſeu quinquangulo, [b] 13. primi.

[c] 32. primi.

gulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.

IN pentagono A B C D E, latera in vtrãque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, sit protractũ ad F, [a] erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, [b] erũt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinque angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, [c] æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.

[a] 32. primi.
[b] 2. prop.
[c] 32. primi.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiusli bet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, [d] æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reli-

[d] 32 primi.

& reliquus illius reliquo huius aqualis, aequiangula q3 erunt ipsa triangula.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isosceles, cuius angulus lateribus aequalibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, [a] cum omnes tres sint aequales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare [b] cum duo reliqui inter se sint aequales, erit quilibet eorum semirectus. At ver> si angulus aequalibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.

[a] 32. primi.
[b] 5 primi.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque est, quemuis anguluz triāguli aequilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [c] quibus aequales sunt tres anguli trianguli aequilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

[c] 32. primi.

COROLLARIVM. IIII.

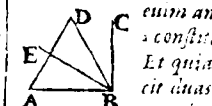
LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli aequilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli aequilateri; reli-

90. 9. 1.
60. 6. 2.
30. 3. 1.

reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.

PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, [a] *constituatur triangulum æquilaterum A B D. Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuisa igitur angulo A B D,* [b] *bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.*



[a] 1. primi.

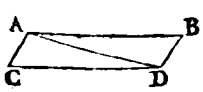
[b] 9. primi.

THEOR.

PROBL. 23. PROPOS. 33.

33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, [c] erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [d] erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, [e] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales.

[c] 29. primi.

[d] 4. primi.

[e] 27. primi.

Rectæ

Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt ipſæ coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neque eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo, & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita A B, D C, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita A D, B C. Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non & angulos oppoſitos DAB, & DCB: Denique ducta diametro A C, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cum enim A B, D C, ſint parallelæ, [a] erunt anguli alterni B A C, D C A, æquales. Rurſus quia A D, B C, ſunt parallelæ, [b] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique; & latus A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [c] erit recta A B, æqualis oppoſitæ rectæ D C, & recta B C, oppoſitæ rectæ A D. quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æqua-

[a] 29. primi

[b] 29. primi

[c] 26. primi

[a] 2. prop.

les anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD, [a] fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumq; vtriq;, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iã ostendimus, [b] erunt triãgula ABC, CDA, æqualia, ideoq; parallelogrammum ABCD, diuisum erit bifariã a diametro AC, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso &c. Quod ostendendum erat.

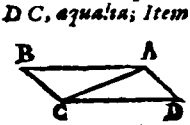
[b] 4. primi.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhombeidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

Sunt quatuor hæ figuræ parallelogramma, ex suis definitionibus, quæ opus alior habent.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.



SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, æqualia; Item opposita latera A D, BC. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & basis A C, communis. Igitur [c] *erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera A B, B C, æqualia sunt lateribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli B, D, ostensi æquales;* [d] *erit angulus B A C, anguli D C A, alterno æqualis, & angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare* [e] *erunt A B, & D C, parallelæ; Item A D, & B C, quod est propositum.*

[c] 8. primi.

[d] 4. primi.

[e] 27. primi.

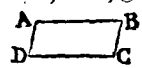
HINC

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorũ latera sunt inter se aqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat aqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se aqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

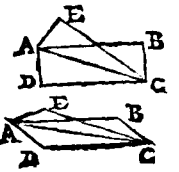
SINT in quadrilatero A B C D, *anguli oppositi* A, & C, *æquales: Item oppositi anguli* B, & D. *Dico* A B C D, *esse parallelogrammum; hoc est, lineas* A B, D C, *esse parallelas; Item & lineas* A D, BC. *Nam si æqualibus angulis* A, & C, *addantur æquales angulis* B, & D; [a] *erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, et B, dimidiũ facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare* A D, B C, [b] *parallelæ sunt. Eadem ratione erunt* A B, DC, *parallelæ. Erunt enim duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiã manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex corum definitionibus.*



[a] 2. primi.

[b] 28. primi.

HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum esse ostensum est; in quo, ducta diametro A C, constituatur super A C, triangulo A B C, æquale triangulum A E C, inuerso



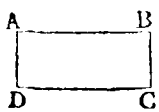
ordine, ita vt latus C E, sit æquale lateri A B, & A E, ipsi C B, vt in scholio propos. 22. docuimus; fiatque trapezium A E C D. Quoniam verò triangulum A B C, triangulo A D C, æquale est, [a] quòd diameter A C, bifariam secet parallelogrammum D B: Erit & triangulum A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.

[a] 34. primi.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogrammum erit, vt ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.



SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; itemque A D, B C. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti; [b] erunt A D, B C, parallelæ. Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod est propositum.

[b] 28 primi.

HINC ruesum constat, Quadratum, & Altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos verò figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus

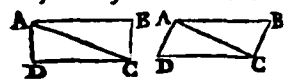
A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, vtrumque vtrique, & basis B C, basi D C; sunt enim hæ figuræ æquilateræ: [c] erunt anguli B A C, D A C, æquales.

[c] 8. primi.

Quare

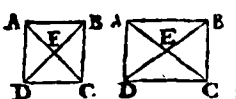
Quare angulus BAD, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.

SIT rursus Altera parte longius, vel Rhöboides ABCD, in quo diameter AC, sitque, maius latus AB. Quoniam igitur in triangulo ABC, latus AB, maius est latere BC, a erit angulus BCA, maior angulo BAC. Est autem angulus BCA, b aqualis angulo DAC, alterno; quod BC, AD, parallela sint. (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inaqualiter diuiditur a diametro AC. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.



a 18. primi.
b 29. primi.

EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore aquales esse; At vero in Rhombo, & Rhomboide inaequales, maiorem quidem eam, qua angulos acutos, minorem vero eam, qua obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico esse aquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, aqualia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD; vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus; c erit basis AC, basi BD, aqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore aquales sunt.



c 4. primi.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo diametri AC, BD; sitq; angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim aquales sunt, quia alias vterque esset rectus, cum ambo d aquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem esse diametro AC. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, aqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, vtrumque vtrique, & angulus

d 29. primi.

[a] 24. primi. BA D, angulo ABC, maior existit; erit basis BD, maior base AC. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC. quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, [b] æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique; & [c] latus AD, æquale lateri BC, oppositio in parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; [d] Erit & AE, recta rectæ CE, & recta DE, rectæ BE, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.

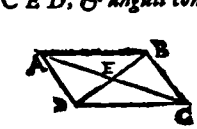
[b] 29. primi. [c] 34. primi. [d] 26. primi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidãt in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E, [e] æquales quoque; [f] erunt & bases AB, CD, æquales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis. [g] Quare rectæ AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.

[e] 15. primi. [f] 4. primi. [g] 27. primi.



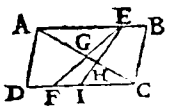
HVC quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunq;, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea

Hoc theorema verum etiam est in omni figura rectilinea, regulari. parium laterum.

nea diuidēs parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

IN parallelogrammo ABCD, *diametrum* AC, *bifariā secet recta* EF, *in puncto* G. *Dico parallelogrammum diuidi bifariam.* Quoniam enim angulus EAG, [a] *æqualis est angulo alterno* FCG, & [b] *angulus* EGA, *angulo* FGC: *Est autem & latus* AG, *lateri* CG, *æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis* AEG, CFG, *opponūtur,* [c] *erunt & latera* EG, FG, *æqualia.* Quare cum latera AG, GE, *æqualia sint lateribus* CG, GF, *& anguli quoque contenti æquales,* [d] *erit triangula* AGE, CGF, *æqualia.* Addita igitur communi quātitate BCGE, [e] *erit triangulum* ABC, *trapezio* BCFE, *æquale:* Sed *triangulum* ABC, [f] *dimidiū est parallelogrammi* ABCD. Igitur & *trapezium dimidiū erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta* EF, *parallelogrammum bifariam secat.*



[a] 29. primi.
[b] 15. primi.
[c] 26. primi.
[d] 4. primi.
[e] 2. pron.
[f] 34. primi.

SECET iam EF, *parallelogrammum bifariam;* Dico & *diametrum* AC, *bifariam secari in* G. Si enim *diameter* AC, *non bifariam diuiditur in* G, [g] *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in* H, *per quod ducatur recta* EHI. Erit ergo, *vt iam demonstrauimus,* EICB, *trapezium dimidium parallelogrammi* ABCD, *atque adeo æquale trapezio* EFCB, *quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum.* Diuiditur igitur AC, *bifariam in* G, & *non in alio puncto, quod erat propositum.*

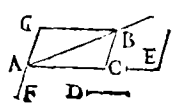
[g] 10. primi.

HINC *facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusq; punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi is sum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, qua parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere* AB, *ducenda est recta* EF, *per* G, *punctum, in quo diameter* AC, *bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis.*

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non inuecundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quę cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem esse duobus rectis.

DVÆ rectæ infinitæ A B, A C, *contineant angulũ* B A C, *sitq; data recta finita quæcunqu.* D, *& angulus datus* E, *hac lege, vt duo anguli* E, *&* B A C, *minores sint duobus rectis.*



Oportet igitur inter rectas A B, A C, *collocare rectam æqualem quidem rectæ* D, *cum alterutra* ~~vtr~~ *illarum, nimirũ cum* A C, *facientem angulum æqualẽ angulo dato* E. *a Fiat angulus* C A F, *æqualis angulo* E, *& producta* F A, *ad* G, *b sit* A G, *æqualis rectæ* D, *& per* G, *c ducatur* G B, *parallela ipsi* A C, *secans* A B, *in* B: *Denique per* B, *ducatur* B C, *parallela ipsi* A G, *secans* A C, *in* C. *Dico rectam* B C, *collocatam inter rectas* A B A C, *æqualem esse rectæ* D, *angulumq;* B C A, *angulo* E. *Cum enim parallelogrammum sit, per constructionem,* A C B G, *d erit recta* B C, *rectæ* G A, *æqualis: At* G A, *æqualis est, per constructionem, rectæ* D. *Igitur &* B C, *rectæ* D, *æqualis erit. Rursus quia anguius* B C A, *angulo alterno* C A F, *æqualis est; & eidem angulo* C A F, *æqualis est, per constructionem, angulus* E; *erunt anguli* E, *&* B C A, *æquales. Quod est propositum. Ceterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur datus angulus datis minores esse debeant duobus rectis. Nimirum quia non fiet triangulum* A B C, *si anguli* B A C, *&* B C A *æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.*

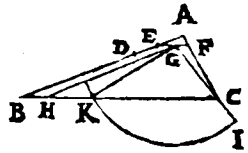
a 23. primi.
b 3. primi.
c 31. primi.
d 34. primi.
e 33. primi.

SCHO-

SCHOLIVM. II.

NON *alienum erit à noſtro inſtituto, adiicere quedam hoc loco ad lineas intra triangulum conſtitutas pertinentia, quę à* Pappo Alexandrino *lib. 3. Mathematicarum collectionum demonſtrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non ſit æquilaterum, vel Iſoſceles habens baſim latere minorem, non ſolum à duobus punctis baſis conſtitui poſſunt duæ rectæ intra triangulum, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint duobus lateribus ſimul ſumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtuſangulis oſtenſum eſt ad propos. 21. ſed etiam æquales.*

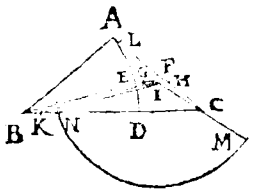
SIT enim primum triangulum A B C, *habens latus* A B, *latere* A C, *maius, ſitq; B D, dimidium vtriuſque lateris* A B, A C, *ſimul: Sumpto autem inter* A D, *puncto* E, *vtcunque, agatur* E F, *ipſi* B C, *parallela; & ex quouis puncto* G, *lateri* A B, *parallela ducatur* G H, *rectaq; iungatur* G C, *Et quoniam* E A, A F, [a] *maiores ſunt, quam* E F: *Itẽ* C F, F G, *maiores, quàm* G C; *erunt* E A, A C, F G, *ſimul maiores, quam* E F, G C, *ſimul: ablataq; communi* F G, *erunt* E A, A C, *ſimul maiores, quam* E G, G C, *ſimul; ac proindè multò maiores, quam* G C, *ſola. Producatur ergo* G C, *fiatq;* G I, *ipſis* E A, A C, *ſimul æqualis. Quia vero* B E, *maior eſt, quam vtraque* E A, A C, *ſimul, quod* B E, *ſuperet* B D, *dimidium vtriuſque* B A, A C, *ſimul, at* E A, A C, *ſimul deficiant à dimidio earundem, numerum ab vtraque* D A, A C, *ſimul; erit quoque* B E, *maior, quam* G I, *quę ipſis* E A, A C, *ſimul eſt æqualis. Cum igitur* [b] *ipſi* B E, *æqualis ſit* G H, *in parallelogrammo* B E G H; *erit quoque* G H, *maior, quam* G I. *Sit igitur centro* G, *& interuallo* G I, *circulus deſcribatur, ſecabit is rectam* G H, *ac propterea & ipſam* C H, *prius ſecabit in* K. *Connectatur* G K. *Dico vtramque* G H, G K, *ſimul æqualem eſſe vtriq;* A B, A C, *ſimul. Id quod ex conſtructione perſpicuum eſt. Nam* G H, *ipſi* B E, *æqualis eſt, &* G I, *hoc eſt,* G K, *ipſis* E A, A C, *ſimul.*



[a] 20. primi.

[b] 34. primi.

mul. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt, prout punctum E, remotius à D, ſumptum fuerit, & punctum G, à puncto E; hoc eſt, prout tam A D, quam E F, infinitis in punctis ſecari poteſt.



SIT deinde Iſoſceles A B C, habens baſin B C, vtrouis latere maiorem. Dico ex centro B, per A, arcu A D, ſecante rectam B C, in D, ducatur vtcunque recta B F, ſecans arcum in E, & latus A C, in F; & in E F, per quoduis punctum G, ipſi B C, parallela agatur G H, & per quodcunque eius punctum I, ipſi B F, parallela ducatur I K, rectaq; iungatur I C; atque ipſi E G, æqualis abſcindatur A L. Erit igitur B G, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, at I C, minor quam B E, ſine A B, & ob id multo minor, quam B G. Et quia ipſi B G, [a] æqualis eſt I K, in parallelogrammo B G I K; erit quoque I K, ipſis A B, A L, ſimul æquales, maior autem, quam I C. itaque [b] quia G F, F H, maiores ſunt, quam G H; & H C, H I, maiores, quam I C: erunt G F, F C, H I, ſimul maiores, quam G H, I C; & ablata communi H I, erunt reliquæ G F, F C, ſimul maiores, quam G I, I C, ſimul; ac proinde aqualia rectangula contenta B G, ſub B F, F C, ſimul maiores ſunt B A, A C, ſimul. Ergo multo maiores erunt B A, A C, ſimul, quam B G, G I, I C, ſimul. Cum ergo B G, ipſis B A, A L, ſimul æqualis ſit, erit reliqua I C, maior, quam ſit reliqua G I, I C, ſimul, ac proinde multo maior, quam I C, ſola. Ponatur I M, [c] reducta I C, ipſi L C, æqualis. Et quia I K, obiecta eſt maior, quam I C, hoc eſt, quam I M, ſive contra I, ſit M, arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam I L, ac proinde prius ipſam C K, ſecabit in N. Connectantur I N. Dico vtramque I K, I N, ſimul æqualem eſſe vtrique A B, A C, ſimul. Id quod ex conſtructione patet. Est namque I K, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, & I N, hoc eſt, I M, ipſi I C, æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt: cum B F, infinitis modis duci poſſit, & tam E F, quam G H, infinitis modis ſecari.

[a] 34. primi.

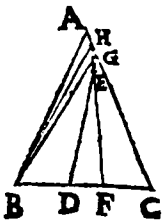
[b] 20. primi.

[c] 20. primi.

CON-

CONSTAT autem, si intra idem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I, I N, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus A B, A C, simul sumptis: quippe quæ [a] maiores forent rectis H G, G K, in priore triangulo, vel rectis K I, I N, in posteriori. [a] 21. primi.

AT verò in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim A B C, cuius duo latera A B, A C, æqualia, & basis B C, nō maior, [b] sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ D E, E F, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus A B, A C, simul sumptis. Producatur enim D E, secans latus A C, in G, iungaturq; recta G B. Quoniam igitur [c] duo anguli A B C, & C, æquales sunt, estq; A B C, maior angulo G B C, erit quoque C, maior angulo G B C. Est autem [d] & angulus G D B, angulo C, maior, externus interno. Igitur multò maior erit angulus G D B, angulo G B C; [e] ac proinde latus G B, latere G D, maius erit. Quia verò [f] angulus B G A, maior est angulo C, externus interno; angulusq; C, vel æqualis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoq; angulus B G A, angulo A, maior. Quare latus A B, latere G B, maius erit: Sed recta G B, ostensa est maior, q̄ G D; ac proinde multò maior, quam D E. Igitur latus A B, multò etiam maius erit, quam D E. Eadem ratione, si F E, producatur secans A C, in H, iungaturq; recta H B, ostendemus latus A B, ac proinde & A C, maius esse, quam F E. Quocirca latera A B, A C, simul maiora sunt duabus rectis D E, E F, simul sumptis. Quòd si F E, producta secaret latus A B, demonstraremus eodem modo, latus A C, maius esse recta E F.



[b] 5. vel 18. primi.

[c] 5. primi.

[d] 16. primi.

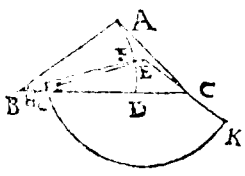
[e] 19. primi.

[f] 16. primi.

[g] 19. primi.

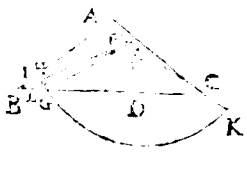
IAM verò, si admirabile videatur iis, qui Geometria ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interio-

interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sanè erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primum constituendæ duæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo A B C, cuius latus A B, minus non sit latere A C, at latus B C, utrouis latere A B, A C, maius. Descripto ex centro B, arcu circuli A D, sumatur quoduis punctum E, inter arcum A D, & latus A C, ducaturq; recta B E, secans arcum in F; ita vt B E, maior sit, quam B F, hoc est, quam B A, iungaturq; E C.



[a] 21. primi. Quia vero a B E, E C, simul minores sunt, quam A B, A C, simul, est q; B E, maior, quam A B, erit E C, multò minor, quam A C. Producta igitur E C, fiat E K, ipsi A C, æqualis, ac propterea minor, quam E B; describaturq; ex E, per K, arcus circuli, qui rectam E B, secabit, ac proinde & ipsam C B, prius secabit in G. Sumpto deinde inter B, & G, quouis punctò H, iungatur recta E H, secans arcum in I: factumq; erit, quod proponitur. Nam B E, maior est, quam B A, & E H, maior, quam E I, hoc est, quam E K, vel A C.

DEINDE sint singulæ lineæ singulis lateribus æquales constituendæ intra idem triangulum: factoq; eadem constructione, ducatur linea E H, sed arcus K G, secet rectam E B, in H. Et quia latus D A, latere A C, ~~posterius~~ maius, erit E E, recta maior, quam A B, cum maior sit, quam B F, hoc est, quam A B. Sumpta igitur E I, æquali ipsi A B, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem E B, maior est, quam A B, & E H, ~~minor~~, quam A B. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans B C, in L, iungaturq; recta E L, quæ facit quod proponitur. Nam E L, ~~ipsi~~ E I, hoc est, ipsi A B, æqualis est, & L G, ipsi E K, hoc est, ipsi A C.



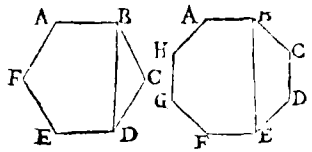
PRAETER hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ diximus,

diximus, ex triangula constitui posse duas rectas duplas latitudinibus maiores, & quæ habeant ad eam, in latera proportionem tam, quæ tamen dupla proportione minor sit, quod euidens cuiquam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cum ex propositionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habẽte numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraque parte latera habent æqualia numero, vt in hexagono A B C D E F, latera opposita erunt A B, E D, quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono vero A B C D E F G H, latera opposita erunt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quam ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris æquilateris partiũ laterum, ex vtraque parte oppositorum laterum erunt tot latera,

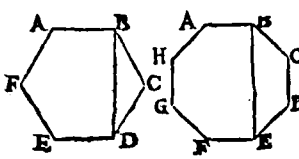


quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur quælibet latera opposita esse parallela; A B, namque ipsi E D, in hexagono; & A B, ipsi F E, in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdẽ partes linea recta, qualis est in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, [a] duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis

[a] 32. primi.

[a] 28. primi. ctis æquales erunt. Quare [a] parallela erunt A B, & E D. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis æquales, [b] atq; adeo A B, F E, parallelæ erũt. Eodẽ modo demonstrabitur, in omnibus alijs figuris huiusmodi, an-

[b] 28. primi.



gulos duos ad lineam rectam extrema opposítorũ laterum coniungentemexistentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiãgula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales: At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea que in definitionibus. Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INTER duas parallelas A B, C D. super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quãdo duo latera opposita partes sunt parallelarum, vt in

vt in exemplo propoſito cernitur. Dico ipſa parallelo-
gramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & la-
tera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadat enim pri-
mo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in paralle-
logrammo CDEA, recta AE, [a] æqua
lis eſt rectæ CD, oppoſitæ; & eidem
CD æqualis eſt FB, in parallelogrã
mo CDBF, oppoſita; Erunt AE,
FB, [b] inter ſe æquales. Dempta igitur communi FE, [c] re
manebit AF, ipſi EB, æqualis: [d] Eſt autem & AC, ipſi
ED, oppoſitę æqualis in parallelogrammo CDEA; [e] &
angulus BED, angulo FAC, externus interno. [f] Quare
triangulum FAC, triangulo BED, æquale erit. Addito
igitur communi trapezio CDEF, [g] fiet totum paralle-
logrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF,
æquale. Quod eſt propoſitum.

[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 3. pron.
[d] 34. primi.
[e] 29. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. pron.

CADAT ſecundo punctum F, in punctum E. Dico
rurſus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia eſ-
ſe. Erunt enim, vt prius, rectæ AE, EB,
æquales, nec non & anguli BED, EAC;
atq; adeo [h] triãgula EAC, BED, æqualia.
Addito igitur cómuni triangulo CDE,
[i] fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.

[h] 4. primi.
[i] 2. pron.

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta
CF, ſecet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt prius, re
ctæ AE, FB, ſunt æquales; ſi communis addatur EF;
[k] erit tota AF, toti EB, æqualis,
nec nó & anguli BED, FAC,
æquales erunt; atque adeo [l] triã
gulum FAC, triangulo BED,
æquale. Ablato ergo communi
triangulo EGF, [m] remanebit trapezium AEGC, trape-
zio FGDB, æquale. Quocirca addito communi trian-
gulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, to
ti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma
igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtitu-
ta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

[k] 2. pron.
[l] 4. primi.
[m] 3. pron.

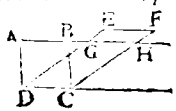
SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propoſitionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes conſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

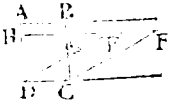
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, *ſuper eandem baſin* C D, *& ad eaſdem partes. Dico rectam* A B, *productam in directum iacere ipſi* E F, *&*



propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Alias enim A B, *producta vel cadet infra* E F, *vel ſupra. Cadat primo infra, qualis eſt* A H.

35. primi. *Erunt igitur parallelogrammum* C D G H, *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur autem eidem parallelogrammo* A B C D, *æquale parallelogrammum* C D E F. *Quare parallelogramma* C D E F, C D G H, *æqualia erunt, totum, & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet* A B, *infra* E F.

CADAT ſecundo A B, *producta ſupra* E F. *Cadet igitur* F E, *ſecundum infra* A B. *Quare, vt prius, erunt parallelogramma* A B C D, C D H G, *æqualia, totum & pars,*



quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi C F, D E, *producerentur vſque ad* A B, *protractam. Eadem demonſtratio conuenit omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum* E *ſit vltra* B, *ſiue non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet* A B, *ſupra* E F, *ſed nec infra, vt demonſtratum eſt: ergo producta in directum iacet ipſi* E F; *ac proinde parallelogramma* A B C D, C D E F, *in eaſdem ſunt parallelis.*

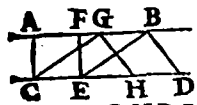
36. THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA ſu-

per

per æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, [a] æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, [b] æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, [c] parallelæ erunt, & æquales, ideoq; CEBG, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, [d] erit parallelogrammũ ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, [e] erit quoq; parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, [f] inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallalelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.
[d] 35. primi.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

SINT primum duo parallelogramma aqualia ABCD, EFGH, ſuper baſes aquales BC, FG, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut ſupra. Quo poſito ſequitur, totum & partem eſſe aquàlia, quemadmodum in conuerſa precedentis propoſitionis eſt dictum, & figura facile commonſtrat. Intelligenda ſunt autem baſes aquales data in eadem linea recta BG.

SINT ſecundo eadem parallelogramma aqualia inter eaſdem parallelas AH, BG. Dico baſes BC, FG, eſſe aquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, [a] abſcindatur BI, aqualis recte FG, & [b] ducatur IK, parallela ipſi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, [c] aquale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo BC, maior eſt, quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare baſes BC, FG, aquales ſunt.

[a] 3. primi.
[b] 31. primi.
[c] 36. primi.

SEQVENS quoq; theorema facile hinc demonſtrabitur.

SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contra ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in poſteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, ſitq; baſis BC, maior baſe FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius eſſe. [d] Auferatur enim recta BI, ipſi FG, aqualis, [e] ducaturq; IK, ipſi AB, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma BK, FH, ſupra aquales baſes BI, FG, aqualia. Cum igitur BD, [g] maius ſit, quàm BK, erit idem BD, maius, quàm FH.

[d] 3. primi.
[e] 31. primi.
[f] 36. primi.
[g] 9. pron.

SINT rurſum parallelogramma BD, FH, inaqualia, & BD, maius. Dico baſim BC, maiorem eſſe baſe FG. Nam ſi

foret

foret æqualis, [a] *essent parallelogrãma æqualia, quod est absurdum, cum* B D, *ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum* F H, *maius, quam* B D, *vt proximè ostendimus. quod multò magis est absurdum, cùm* BD, *maius ponatur, quàm* F H. *Basis ergo* B C, *cum neq; æqualis sit ipsi* FG, *neque minor, erit maior, quàm* F G, *quod est propositum.*

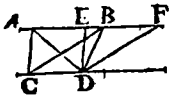
[a] 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

37.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

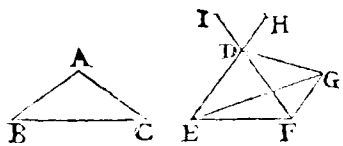
INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula ACD, BCD. Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quãdo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [b] ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectę BC. [c] Erunt igitur parallelogramma A C D E, B C D F, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; [d] quod A D, B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, [e] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 31. primi.
[c] 35. primi.
[d] 34. primi.
[e] 7. pron.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. pollicitis sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F,



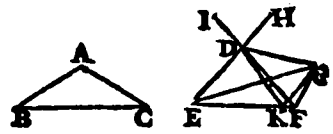
DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, *& angulus A, maior angulo E D F, ſintq; primum hi duo anguli duobus rectis æquales.*

Dico triangula eſſe æqualia. Producatur enim ED, ad H, & [a] *FD, ad I; & ſiat ſuper angulus E D G, æqualis angulo A,* [b] *& recta* D G, *recta* D F, *ſeu AC, ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus E D G, æqualis factus eſt angulo A, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli E D G, G D H,* [c] *duobus rectis æquales. Igitur anguli* EDG, EDF, *angulis* EDG, GDH, *æquales erunt. Quare ablato communi angulo* E D G, [d] *remanebit angulo* E D F, *æqualis angulus* G D H: *Eſt autem eidem angulo* E D F, [e] *æqualis angulus* H D I. *Igitur & anguli* G D H, H D I, *æquales erunt; atque adeo angulus* G D H, *dimidium erit totius anguli* G D I. *Rurſus quia latera* D F, D G, *ſunt æqualia in triangulo* D F G, [f] *erunt anguli* D F G, D G F, *æquales, qui cum* [g] *æquales ſint externo angulo* G D I, *erit vterlibet eorum, ſcilicet* D G F, *dimidium anguli G D I: Oſtenſum eſt autem, angulum* GDH, *dimidium quoque eſſe eiuſdem anguli* G D I. [h] *Quare angul:* GDH, D G F, *æquales erunt. Et quia ſunt alterni inter* I. H, F G, [i] *erunt* E H, F G, *parallelæ. Quamobrem* [k] *triangula* D E G, D E F, *æqualia erunt, cũ habeant eandẽ baſin* DE, *ſintq; inter eaſdẽ parallelas* D E, F G. *Quoniam vero triangulum* D E G, [l] *æquale eſt triangulo A B C, propterea quòd latera* DE, DG, *æqualia ſunt lateribus A B, A C, & angulo A, æqualis angulus* E D G, *erit & triangulum ABC, triangulo* D E F, *æquale, quod eſt propoſitum.*

SINT deinde anguli A, & E D F, duobus rectis maiores. Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulũ, minus eſſe triangulo DEF. *Producatur enim* E D, *ad H, &* [m] *F D, ad I;* [n] *& ſiat ſuper angulus* E D G, *æqualis angulo* A, [o] *& recta* D G, *recta* D F, *ſeu* A C, *æqualis, ducanturque rectæ* EG, GF. *Quoniam igitur anguli A, & E D F, ponuntur maiore*

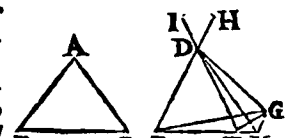
[a] 23. primi.
[b] 3. primi.
[c] 13. primi.
[d] 3. pron.
[e] 15. primi.
[f] 5. primi.
[g] 32. primi.
[h] 7. pron.
[i] 27. primi.
[k] 37. primi.
[l] 4. primi.
[m] 23. primi
[n] 3. primi.

iores duobus rectis, erũt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sũt aũt anguli EDG, GDH, [a] æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores ſunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero [b] angulus EDF, angulo HDI, æqualis eſt, erit quoque HDI, maior quam GDH; atq; adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rurſus quia latera DG, DF, æqualia ſunt: [c] erunt anguli DFG, DGF, æquales: qui cum ſint [d] æquales externo GDI, erit vterque eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Oſtenſum eſt autem, angulum GDH, minorem eſſe dimidio eiuſdem GDI. Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abſcindatur ex angulo DGF, angulus DGK, [e] æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK, [f] parallela ipſi DE, ſecabitq; GK, rectam EF. Ducatur ex D, ad K, vbi GK, ſecat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, [g] æquale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, [h] æquale eſt triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqualia ſunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, [i] minus ſit triangulo DEF; erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod eſt propoſitum.



[a] 13. primi.
[b] 15. primi.
[c] 5. primi.
[d] 32. primi.
[e] 23. primi.
[f] 27. primi.
[g] 37. primi.
[h] 4. primi.
[i] 9. prop.

SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, minus eſſe triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [k] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [l] & recta DG, rectæ DF, ſeu AC; ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores: Sunt [m] autem anguli EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igi-

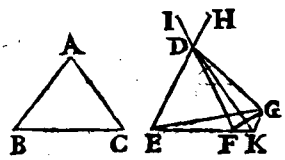


[k] 23. primi.
[l] 3. primi.
[m] 13. primi.

tur EDG, EDF, *minores ſunt, quàm* EDG, GDH; *demptoq; communi* EDG, *remanebit* EDF, *minor, quã* GDH. *Eſt autẽ* EDF, [a] *æqualis ipſi* HDI. *Quare &* HDI, *minor erit, quàm* GDH; *atque adeo* GDH, *maior eſt dimidio anguli* GDI. *Quoniam autem* DGF, *dimidium eſt eiuſdem anguli* GDI, *vt iam ſupra oſtenſum fuit; erit* GDH, *maior, quam* DGF. *Fiat igitur angulus* DGK, [b] *æqualis angulo* GDH, *ducta recta* GK, *quæ ſecabit rectam* EF, *protractam in* K; *& ducatur recta* DK. *Erit ergo, vt prius,* GK, [c] *parallela ipſi* DE; [d] *triangulum quoq;* DEG, *triangulo* DEK, *æquale: Eſt autem iterum* DEG, [e] *æquale ipſi* ABC. *Igitur &* ABC, *æquale eſt ipſi* DEK. *Quocirca cum* DEK, [f] *maius ſit, quàm* DEF; *erit &* ABC, *maius, quàm* DEF. *Quod demonſtrandum erat.*

EX his perſpicuum eſt, cur Euclides in propoſ. 24. ſolum collegerit inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

[a] 15. primi.



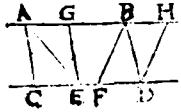
[b] 23. primi.
[c] 27. primi.
[d] 37. primi.
[e] 4. primi.
[f] 9. pron.

38. THEOR. 28. PROPOS. 38.

TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & ſuper æquales baſes CE, FD, ſint conſtituta triangula ACE, BFD. Dico ipſa eſſe æqualia. [g] Ducatur enim EG, parallela ipſi AC, & DH, ipſi BF: Eruntq; [h] parallelogrãma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum [i] dimidia ſint triangula ACE, BFD; [k] erunt hæc inter ſe æqualia. Triangula ergo ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat oſtendendum.

[g] 31. primi.
[h] 36. primi.
[i] 34. primi.
[k] 7. pron.

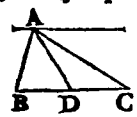


SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostenditur ab Euclide propos. 40.

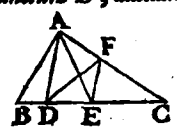
COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo A B C, ex angulo A, recta A D, diuidens bifariam latus B C, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi B C, erunt duo triangula ABD, A D C, inter easdem parallelas; & super aquales bases. [a] Quare aequalia erunt. [a] 38. primi.



EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt est ostensum: Si vero D, non diuidit B C, bifariam [b] secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta D A, & per E, [c] parallela E F, ipsi D A, secans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifariam à linea D F. Nam ducta recta E A, [d] erunt triangula E F A, E F D, aequalia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E, [e] erunt tota triangula A E C, C D F, aequalia: Est autem A E C, dimidium totius A B C, vt iam fuit ostensum. Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.



[b] 10. primi.

[c] 31. primi.

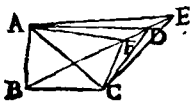
[d] 38. primi.

[e] 2. pron.

QVOD *si punctum D, fuerit in altera medietate* E C, *eodem modo problema conficiemus : sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium vero ad partes* C, *vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur littera B, in* C, *& C, in* B. *Hoc tamen problema multo nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.*

39. THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primum supra, qualis est A E, coeatque cum B D, protracta in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum E B C, æquale : Est autem per hypothesin, triangulum quoq; DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

[a] *31. primi.*

[b] *37. primi.*

[c] *1. pron.*

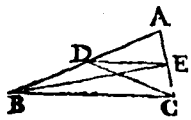
SCHO-

SCHOLIVM.

EX his infert Campanus ſequens hoc theorema.

LINEA recta ſecans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea DE, latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam in D, & E. Dico DE, parallelam eſſe lateri BC. Cum enim triangula ADE, BDE, ſint ſuper æquales baſes AD, DB, & inter eaſdem parallelas; (ſi per E, ducatur parallela ipſi AB,) erit triangulum BDE, triangulo ADE, æquale: Eadem ratione erit triangulum CED, eidem triangulo ADE, æquale. Quod etiam conſtat ex ſcholio præcedentis propoſ. Recta enim ED, ſecabit triangulum AEB, bifariam, & recta eadem DE, triangulum ADC, bifariam etiam, quòd baſes AB, AC, ſectæ ſint bifariam à recta DE, ex hypotheſi. Igitur triangula DBE, CED, [b] æqualia erunt: Habent autem eandem baſin DE, & ſunt ad eaſdem partes conſtituta. Quare [c] inter eaſdem erunt parallelas, & idcirco DE, BC, parallela erunt. Quod eſt propoſitum.



[a] 38. primi.

[b] 1. præm.

[c] 39. primi.

ID autem, quod ad finem ſecundi theorematis in ſcholio propoſ. 34. polliciti ſumus, facile ex hac propoſ. demonſtrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum eſt.

NAM quadrilaterum ABCD, diuidatur bifariam ab vtraque diametro AC, BD. Dico ipſum eſſe parallelogrammum. Cum enim triangula ADC, BDC, dimidia ſint eiuſdem quadrilateri ABCD, [d] ipſa inter ſe æqualia erunt. Quare cum eandem habeant baſin DC, ad eaſdemq; partes ſint, [e] ipſa in eiſdem parallelis erunt; Atque idcirco recta AB, DC,

[d] 7. præm.

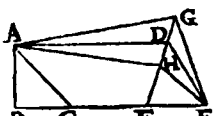
[e] 39. primi.

parallela

parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. *Parallelogrammum igitur est* A B C D. *Quod est propositum.*

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, super bases æquales B C, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam patallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primum supra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ sunt A G, B F, [a] erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale. Ponitur autem & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale. Igitur [b] triangula DEF, GEF, æqualia erũt, pars & totũ. Quod est absurdũ. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triãgula HEF, DEF, æqualia, pars & totũ, quod est absurdum. Est igitur A D, parallela ipsi B F. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 38. primi.

b 1. prop.

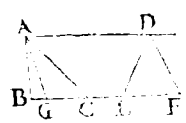
SCHOLIVM.

Hæc propositio convertit uno modo propos. 38. Alio autem modo converti potest, quemadmodum propos. 36. convertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter easdem paralle-

parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

SINT triangula æqualia A B C, D E F, *inter parallelas* A D, B F, *& ſuper baſes* B C, E F, *quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit* B C, *maior. Abſciſſa ergo recta* C G, *æqualis ipſi* E F, *& ducta recta* G A, *erit triangulum* A G C, *triangulo* D E F, *æquale. Ponatur autem & triangulum* A B C, *eidem triangulo* D E F, *æquale. Ergo triangula* A G C, A B C, *æqualia erunt, pars & totum, quæ eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes* B C, E F, *ſed æquales. Quod eſt propoſitum.*



[a] 3. primi.
[b] 38. primi.
[c] 1. pron.

SEQUENS etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contra, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, ***triangula*** A B C, D E F, ***ſitq; baſis*** B C, ***baſe*** E F, ***maior. Dico triangulum*** A B C, ***maius eſſe triangulo*** D E F. ***Abla ta enim recta*** C G, [d] ***æquali ipſi*** E F, ***ductaq; recta*** A G; [e] ***erũt triangula*** A G C, D E F, ***ſupra æquales baſes*** G C, E F, ***æqualia. Cum ergo*** [f] ***triangulum*** A B C, ***triangulo*** A G C, ***maius ſit; erit idem triangulum*** A B C, ***maius, quam*** D E F.

SINT rurſus triangula A B C, D E F, ***inæqualia, &*** A B C, ***maius. Dica baſin*** B C, ***baſe*** E F, ***maiorem eſſe. Si enim dicatur æqualis,*** [g] ***erit triangulum*** A B C, ***triangulo*** D E F, ***æquale. quod eſt abſurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur eſſe minor, erit triangulum*** D E F, ***maius trian gulo*** A B C, ***vt proximè oſtendimus, quòd multò magis eſt abſurdum, cum*** A B C, ***ponatur maius, quam*** D E F. ***Recta igitur*** B C, ***maior erit, quam*** E F, ***cum neque æqualis ſit oſten ſa, neque***

[d] 3. primi.
[e] 38. primi.
[f] 9. pron.
[g] 38. primi.

ſu, neque minor. Quod eſt propoſitum.

QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq́, inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoque demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partesq́, ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur A B, C D, *ſuper eadem baſi* C D, *conſtituta ſint duo trapezia* A C D E, F C D B, *quorum baſes oppoſitæ* A E, F B, *æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis* E C, F D, [a] *erunt tã triangula* E C D, F C D, *ſuper eadem baſi* C D, *& in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia,* [b] *quam triangula A C E,* F D B, *ſuper æqualibus baſibus* A E, F B, *& in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus* E C D, F C D, *addantur æqualia* A C E, F D B, [c] *erunt tota trapezia* A C D E, F C D B, *inter ſe æqualia.*

[a] 37. primi.

[b] 38. primi.

[c] 2. pron.

SINT iam trapezia A C D E, F C D B, *æqualia. Dico baſes oppoſitas A E,* F B, *æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus* [d] *triangula* E C D, F C D, *æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [e] *æqualia erunt reliqua triangula* A C E, F D B. *Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* A E, F B, *æquales erunt.*

[d] 37. primi.

[e] 3. pron.

TRA-

II.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſq; eſt illud, cuius baſis maior eſt; Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

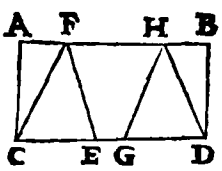
VT in eadem figura, ſi baſis A E, dicatur eſſe maior baſe F B; Dico trapezium A C D E, *maius eſſe trapezio* F C D B. [a] *Erunt enim rurſus triangula* E C D, F C D, *æqualia: At triangulum* A C E, *triangulo* F D B, *maius, vt in hac ſcholio demonſtrauimus.* [b] *Totum ergo trapezium* A C D E, *toto trapezio* F C D B, *maius erit.* [a] 37. primi. [b] 4. pron.

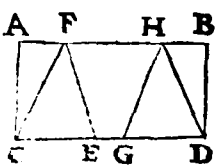
RVRSVS ſi trapezium A C D E, *dicatur eſſe maius trapezio* F C D B; *Dico baſin* A E, *baſe* F B, *maiorem eſſe.* [c] *Erüt.n.rurſus triãgula* E C D, F C D, *æqualia. Quare reliquum triangulum* A C E, *reliquo triangulo* F D B, [d] *maius erit: ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum eſt, baſis* A E, *maior erit baſe* F B. *Quod oſtendendum erat.* [c] 37. primi. [d] 5. pron.

III.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.

INTER parallelas A B, C D, ſuper æquales baſes C E, G D, *conſtituta ſint duo trapezia* A C E F, H G D B, *quorum baſes oppoſitæ* A F, H B, *æquales quoque ſint. Dico ipſa trapezia æqualia eſſe. Ductis enim rectis* F C, H D,





[a] 38. primi. [b] 2. pron. HD,[a] *erunt tam triangula* FCE, HGD, *super æquales baſes* CE, GD, *quam* ACF, BDH, *ſuper baſes æquales* AF, BH, *inter ſe æqualia.*[b] *Tota ergo trapezia æqualia erunt.*

[c] 38. primi. [d] 3. pron. *SINT iam trapezia* ACEF, HGDB, *æqualia ſuper baſes æquales* CE, GD. *Dico baſes oppoſitas* AF, BH, *æquales quoque eſſe.*[c] *Erunt namque rurſus triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula* ACF, BDH, [d] *æqualia erunt; ac proinde, vt paulo antè in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* AF, BH, *æquales erunt.*

IIII.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq; eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorq; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

[e] 38. primi. [f] 4. pron. *VT in eadem figura, ſi baſis* AF, *dicatur eſſe maior baſe* HB, *erit trapezium* ACEF, *trapezio* HGDB, *maius.*[e] *Erunt enim rurſum triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: At triangulum* ACF, *maius triangulo* BDH, *vt ſupra oſtenſum eſt, quod baſis* AF, *maior ponatur baſi* BH.[f] *Totum ergo trapezium* ACEF, *toto trapezio* HGDB, *maius erit.*

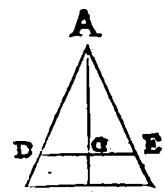
[g] 38. primi. [h] 5. pron. *RVRSVS ſi trapezium* ACEF, *maius ponatur trapezio* HGDB, *erit baſis* AF, *baſe* BH, *maior.*[g] *Erunt enim rurſus triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum* ACF, *reliquo triangulo* BDH,[h] *maius erit;*

erit; ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum fuit, baſis A F, baſe B H, maior erit. Quod erat oſtendendum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema ſequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes aequales diuidemus: quod nos in ſcholio propoſ. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem confici poſſit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. oſtendemus, iucundum tamen eſt intelligere, nullo labore idem abſolui poſſe per propoſitiones hactenus demonſtratas, ſine proportionum adiumento. Theorema ergo eſt huiuſmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam.

IN triangulo A B C, aquidiſtet D E, ipſi B C, & recta A F, ſecet alterutram B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam ſecari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo poſito, [a] & anguli ad G, recti erunt. Si igitur B C, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 26. huius lib. demonſtrauimus; ac proinde recta A G, ad baſim D E, trianguli A D E, perpendicularis, diuidensq; angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque baſim D E, vt ibidem oſtendimus, quod eſt propoſitum. [a] 29. primi.



SI vero D E, ponatur diuidi bifariã, diuidetur, per idem ſcholium propoſ. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariam; ac proinde recta A F, ad baſim B C, perpendicularis; diuidensq; angulum A, bifariam, baſim quoque B C, bifariam ſecabit, quod eſt propoſitum.

SINT deinde anguli ad F, non recti, ſed A F C, obtuſus, & A F B, acutus. Quo poſito, erit & A G E, obtuſus, & A G D, acutus, [b] cum his illi ſint aequales, externi internis. [b] 29. primi.

Si

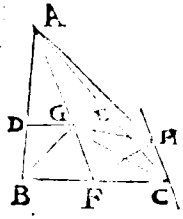
[a] 23. primi. Si igitur B C, diuidatur bifariam, [a] constituatur acuto angulo A G D, aequalis angulus A G H, [b] & recta G H, rectae G D, aequalis, ducanturque rectae A H, H F, F D, F E. Quia igitur tam triangula tota A B F, A C F, ex scholio propos. 38. huius lib. aequalia sunt, [c] quam triangula ablata D B F, F C F, ob aequales bases B F, C F: [d] erunt quoque reliqua triangula A D F, A E F, aequalia. Rursus quoniam duo latera A G, G D, trianguli A G D, duobus lateribus A G, G H, aequalia sunt, angulosq; comprehendunt aequales A G D, A G H, ex constructione, [e] erunt quoque triangula A G D, A G H, aequalia. Pari ratione, quia duo latera D G, G F, duobus lateribus H G, G F, aequalia sunt, ex constructione, angulosq; continent aequales D G F, H G F, (cum enim per constructionem anguli A G D, A G H aequales sint; erunt quoque reliqui duorum rectorum D G F, H G F, aequales.) [f] sunt enim tam A G D, D G F, quam A G H, H G F, duobus rectis aequales.) [g] erunt quoque triangula D G F, H G F, aequalia: [h] ac proinde & tota triangula A D F, A H F, aequalia erunt. Est autem eidem triangulo A D F, aequale ostensum triangulum A E F. Igitur & inter se [i] aequalia erunt triangula A H F, A E F: [k] ac propterea inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta E H, erit basi A F, communi parallela. Igitur [l] & triangula H G F, E G F, inter easdem parallelas, & super eadem basi F G, aequalia inter se erunt. Est autem triangulum H G F, triangulo D G F, ostensum aequale. Igitur triangula quoque D G F, E G F, aequalia inter se erunt; propterea q; basis quoque D G, basi G E, aequalis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

[b] 3. primi. [c] 38. primi. [d] 3. pron. [e] 4. primi. [f] 13. primi. [g] 4. primi. [h] 2. pron. [i] 1. pron. [k] 39. primi. [l] 37. primi.

[m] 23. primi. [n] 3. primi. [o] 34. primi. [p] 2. pron.

SI vero D E, ponatur bifariam diuidi, [m] constituatur angulo acuto A F B, aequalis angulus A F H, [n] & recta F H, rectae F B, ducanturq; rectae A H, H G, G B, G C. Quoniam igitur tam triangula A G D, A G E, ex scholio propos. 38. huius lib. aequalia sunt, [o] quam triangula D G B, E G C, ob aequales bases D G, E G; [p] erit tota etiam triangula A G B, A G C, aequalia. Rursus quia duo latera A F, F B, duobus lateribus

lateribus AF, FH, æqualia ſunt, continentq; angulos æquales AFB, AFH, ex conſtructione; [a] erunt triangula quoque AFB, AFH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, æqualia ſunt, æqualesq; continent angulos GFB, GFH, ex conſtructione; [b] erunt quoq; æqualia triangula GFB, GFH: quibus demptis ex æqualibus AFB, AFH, [c] æqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Eſt autem eidem triangulo AGB, oſtenſum æquale triangulum AGC. [d] Igitur & triangula AGC, AGH, inter ſe erunt æqualia. [e] Quare & inter eaſdem parallelas erunt; hoc eſt, ducta recta CH, ipſi AF, parallela erit; ac proinde [f] æqualia inter ſe erunt triangula GHF, GFC. Fuit autem oſtenſum triangulum GHF, triangulo GBF, æquale. [g] Igitur & æqualia inter ſe erunt triangula GFC, GFB; ideoq; (vt in hoc ſcholio demonſtrauimus) & baſes FC, FB, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.



[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 3. pron.

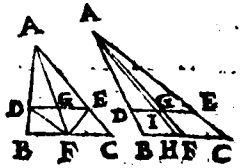
[d] 1. pron.

[e] 39. primi.

[f] 37. primi.

[g] 1. pron.

ALITER. Diuiſa ſit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam eſſe diuiſam in G. Si enim DG, GE, non ſunt æquales, ſit maior DG, ducanturq; recta FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quàm triangulum FDG, triangulo FEG, maius. [h] Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus ſi addantur triangula DBF, ECF, [i] quæ propter baſes æquales BF, CF, æqualia ſunt, [k] fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, vt in hoc ſcholio monſtrauimus, baſis BF, baſe FC, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod eſt abſurdum. Bifariam ergo ſecta eſt DE, in G. Quod eſt propoſitum.



[h] 4. pron.

[i] 38. primi.

[k] 4. pron.

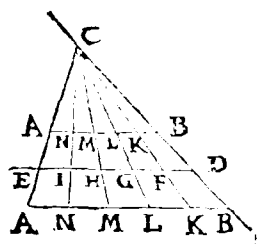
SIT iam DE, ſecta bifariam in G. Dico & BC, diuidi bifariam in F. Sin minus, [l] diuidatur BC, in H, bifariam, ducaturque recta AH, ſecans DE, in I. Quoniam igitur AH, ſecat BC, bifariam in H, ſecabit eadem ipſam DE,

[l] 10. primi.

quoque bifariam in I, vt proximè ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si D I, aqualis est ipsi I E, cum I E, maior sit, quàm G E, erit quoque D I, maior, quam G E, hoc est, quàm D G, qua ipsi G E, aqualis ponitur. Diuiditur ergo B C, bifariam F. Quod erat demonstrandum.

HOC ostenso theoremate, ad diuisionem linea recta in quotuis aquales partes iam veniamus.

DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



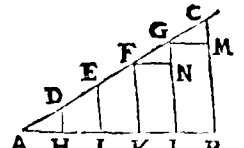
SIT data recta A B, secanda in quinque partes aquales. Per extremum punctum B, *ducta recta* B C, *vtcunq;, & assumpto in* B C, *puncto quocunq;* D, *siue infra* B, *sine supra,* [a] *ducatur per* D, *ipsi A B, parallela* D E, *in qua* [b] *abscindantur quinque partes inter se aquales* D F, F G, G H, H I, I E, *hac tamen lege, vt existente puncto* D, *infra* B, *recta* D E, *ex quinque partibus aqualibus composita maior sit, quàm data A B, minor vero, existente puncto* D, *supra* B, *vt nimirum recta A C, per alterum extremum A, & per* E, *ducta cum* B D, *concurrere possit in puncto aliquo, vt in C: A quo si per puncta* F, G, H, I, *recta ducantur, secta erit data recta A B, in quinque partes aquales* B K, K L, L M, M N, N A. *Quoniam enim in triangulo C B L, recta* D G, *ipsi B L, est parallela, vel in triangulo* C D G, *recta B L, ipsi* D G; *secta que est* D G, *bifariam in* F, *secta quoque erit bifariam B L, in* K, *vt in proxime theoremate demonstrauimus. Eademque ratione recta* K M, *in* L, *secta erit bifariam, quemadmodum &* F H, *in* G, *bifariam secta est. Sunt ergo tres partes* B K, K L, L M, *inter se aquales, sicuti tres* D F, F G, G H, *atque ita de cæteris.*

[a] 31. primi.

[b] 3. primi.

ALITER. Ad extremum A, linea A B, secanda in quinque

quinque partes æquales, cõstituatur angulus rectilineus quicunq; A, & in rectæ AC, [a] abscindantur quinque partes quantæcunq; inter se æquales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB, [b] agantur ei parallelæ GL, FK, EI, DH. Dico rectam AB, sectam esse in quinque partes æquales. [c] Ductis enim per G, F, ipsi AB, parallelis GM, FN; [d] quæ inter se etiam parallelæ erunt, [e] & ipsis BL, LK, æquales in parallelogrammis GB, FL; [f] erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GL, CB, quàm anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli GFN, æquales sunt, vterq; vtrique, lateraque illis adiacentia CG, GF, æqualia per constructionẽ; [g] erunt quoque latera GM, FN, æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis BL, LK, erunt quoque BL, LK, inter se æquales. Eademque ratione ostendemus KL, KI, æquales esse, necnon IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

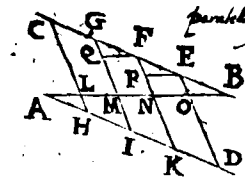


[a] 3. primi.
[b] 31. primi.
[c] 31. primi.
[d] 30. primi.
[e] 34. primi.
[f] 29. primi.
[g] 26. primi.

ALITER. Ad extrema puncta A, B, linea AB, in quinque partes æquales diuidenda constituantur duo æquales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in vtraque linea BC, AD, [h] quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter se sunt, [i] sumantur quatuor partes inter se omnino æquales, tot nimirũ, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt BE, EF, FG, GC, AH, HI, IK, KD, iungantur quæ rectæ CH, GI, FK, ED, [k] quæ inter se erunt parallelæ, cum coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam AB, in quinque partes æquales sectam esse. [l] Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, FQ, [m] quæ inter se quoque parallelæ erunt, [n] & ipsis NO, MN, æquales in parallelogrammis EN, FM: (Sũt enim & GI, FK, inter se parallelæ, cum coniungant extrema

[h] 27. primi.
[i] 3. primi.
[k] 33. primi.
[l] 31. primi.
[m] 30. primi.
[n] 34. primi.

[a] 29. primi.



parallelogrammorum FG, KI,) [a] erunt eam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli GFQ, FEP, externus, & internus in parallelis QF, PE, inter se æquales, itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales sunt, vterque vtrique, laterá; illis adiacentia FG, EF, æqualia, per constructionem, [b] erunt quoque latera FQ, EP, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eadem; ratione æquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea; recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

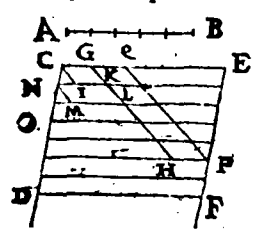
[b] 26. primi.

[c] 33. primi.

PRAXIS hac breuius ita demonstrabitur. [c] Quoniam rectæ ED, FK, GI, CH, parallelæ sunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL. LM. MN, NO, OB, æquales erunt.

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, [d] sumantur in vtraq; partes omnino inter se æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicę quantitatis, puncta; respondentia lineis rectis iungantur, [e] quæ parallelæ inter se erũt, cum coniungant extrema parallelarũ æqualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque dividenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G, vsq; ad punctum H, ita vt quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta GH, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus si in data AB, [f] sumantur partes æquales, diuisa quoque erit AB, in quinq;

[d] 3. primi.



[e] 33. primi.

[f] 3. primi.

æquales

æquales partes. Sectam autem esse GH, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi GH, parallelis CI, NM, quæ inter se quoque parallelæ erunt; a ipsis GK, KL, æquales in parallelogrammis GI, KM, a 30. primi. b 34. primi. c 29. primi. d 26. primi.

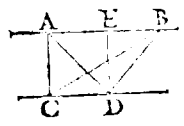
erunt tam anguli CNI, NOM, externus & internus in parallelis NK, OL, quàm anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter se. Igitur cùm duo anguli N, C, trianguli CNI, duobus angulis O, N, trianguli NOM, æquales sint, uterque utrique, lateraque illis adjacentia CN, NO, æqualia, ex constructione, erunt quoque latera CI, NM, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis GK, KL, erunt quoque GK, KL, inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ GH, ostendentur æquales; ac proinde recta GH, in quinque partes æquales erit divisa.

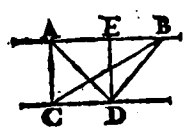
PRAXIS etiam hac brevius demonstrabitur hoc modo. Sumptis quinque internallis rectæ EF, ab E, usque ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, ut ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, divisa à parallelis in quinque partes æquales, ut in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ PQ, quæ datæ rectæ AB, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB, divisa quoque erit AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD.



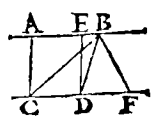


[a] 37. primi. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo,[a] erũt triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum eſt trianguli ACD; [b] quòd triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter ſe ſint. [c] 6. pron. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

[b] 34. primi.

SCHOLIVM.

HINC ſequitur, ſi triangulum duplam habuerit baſin, fueritque in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis CD, *producatur ad* F, *vt ſit* DF, *æqualis ipſi* CD, *ducaturque recta* FB, *erit triangulum* BCF, *duplum trianguli* BCD, [d] *quòd triangula* BCD, BDF, *æqualia ſint: Eſt autem & parallelogrammum ACDE,* [e] *duplum eiuſdem trianguli BCD.* [f] *Igitur æqualia erunt triangulum* BCF, *& parallelogrammum* ACDE.



[d] 38. primi. [e] 41. primi. [f] 6. pron.

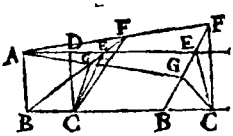
IDEM hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem; fuerintque in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, *& triangulo* BFG, *quorum baſes* CD, FG, *æquales ſunt. Ducta enim diametro* AD, *in parallelogrammo,* [g] *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum ſit trianguli ACD;* [h] *quòd diameter* AD, *ſecet parallelogrammum* ACDE, *bifariam;* [i] *erit quoque idem trianguli* BFG, *duplum. Eadem ratione ſi baſis* FG, *duplicaretur, & recta ad* B, *duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc* [k] *eſſet duplum etiam trianguli* BFG, *&c.*

[g] 38. primi. [h] 34. primi. [i] 6. pron. [k] 38. primi.

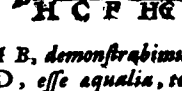
CON-

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.



SIT parallelogrammum ABCD, *duplum triãguli* EBC, *ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales. Dico rectam ductam* AE, *parallelam eſſe rectæ* BC. *Nam alias ducta parallela ex* A, *cadet aut ſupra* AE, *aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propoſitoſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat.* [a] *Nam erit quoque parallelogrammum* ABCD, *trianguli* BFC, *vel* BGC, *dupluin.* [b] *Quare triangula* EBC, FBC, *vel triangula* EBC, GBC, *æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum.* [a] 41. primi. [b] 6. pron.



SIT deinde parallelogrammum ABCD, *duplum trianguli* EFG, *in eiſdemque parallelis. Dico baſes* BC, FG, *eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe* BC, *ſit maior, abſciſſa æquali* CH, [c] *ducta* HI, *parallela ipſi* AB, *demonſtrabimus parallelogramma* ABCD, IHCD, *eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli* EFG; *illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis* FG, *maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi* BC, *æqualis* FH, *ducaturque recta* HE, *erunt triangula* EFH, EFG, *æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque æmidium* [c] 31. primi.

dium eſt parallelogrammi A B C D; Illud quidem per propoſ. 41. hoc vero per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

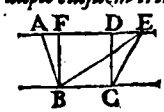
EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

INTER lineas parallelas A E, B C, ſint conſtituta trapezium A B C D, & triangulum E B C, ſuper baſim B C, eandem, quæ ſit tamen maior, quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus eſſe duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam B C, ſumatur A F, æqualis ipſi B C, & ducatur recta C F, [a] quæ erit parallela ipſi A B; atque adeo parallelogrammum erit A B C F, [b] quod duplum eſt trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli E B C. quod eſt propoſitum.

[a] 33. primi.

[b] 41. primi.



SINT rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis B C, ſit minor, quam reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, maius eſſe duplo trianguli E B C. Cum enim A D, maior ſit, quam B C, abſcindatur D F, æqualis ipſi B C, & ducatur recta B F, [c] quæ erit parallela ipſi C D; atque adeo parallelogrammum erit B C D F: [d] quod duplum eſt trianguli E B C. Quare totum trapezium A B C D, quod ſuperat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiuſdem trianguli E B C. quod eſt propoſitum.

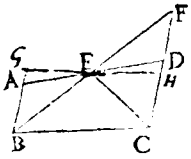
[c] 33. primi.

[d] 41. primi.

IDEM concludetur, ſi trapezium, & triangulum conſtituta fuerint ſuper æquales baſes, ita tamen vt nunc quidem baſis trapezij ſit maior latere oppoſito parallelo, nunc vero minor.

TRA-

TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppoſiti.



SIT trapezium A B C D, *cuius duo latera oppoſita* A B, D C, *ſint parallela, & ſuper baſin* B C, *conſtituatur triangulum* E B C, *verticem* E, *habens in medio puncto* E, *lateris* A D. *Dico trapezium* A B C D, *duplum eſſe trianguli* E B C. *Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe* B E, *donec coeat cum* C D, *protractis in* F. *Et quia parallela ſunt* A B, C F, [a] *erunt anguli alterni,* B A E, F D E, *æquales:* [b] *Sunt autem & anguli* A E B, D E F, *æquales, quippe qui ad verticem* E; *& latus* A E, *trianguli* A B E, *lateri* D E, *trianguli* D E F, *æquale, per hypotheſin.* [c] *Igitur & reliqua latera* A B, B E, *reliquis lateribus,* D F, F E, *æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli* A B E, D F E, *æquales: atque idcirco triangula* A B E, D F E, *ex coroll. propoſ. 26. huius lib. æqualia erũt. Quare addito communi triangulo* C D E, [d] *erunt triangulo* C E F, *æqualia triangula ſimul* A B E, C D E. [e] *Eſt autem & triangulum* B C E, *eidem triangulo* C E F, *æquale, quod baſes* B E, E F, *oſtenſæ ſint æquales, & ipſa triangula inter eaſdem ſint parallelas, ſi per* C, *duceretur parallela ipſi* B F. [f] *Igitur triangulum* C B E, *æquale erit triangulis* A B E, C D E; *& propterea* C B E, *triangulum dimidium erit trapezij* A B C D, *quod eſt propoſitum.*

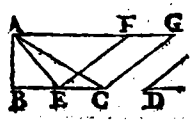
[a] 29. primi.
[b] 15. primi.
[c] 26. primi.
[d] 2. pron.
[e] 38. primi.
[f] 1. pron.

PROBL. 11. PROPOS. 42.

42.

DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

DATVM



DATVM triangulum sit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur cõstruere parallelogrammũ æquale triãgulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta A F, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, [d] duplũ est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C, [e] quod triangula A E C, A B E, super æquales bases E C, B E, & in eisdem parallelis, sint æqualia: Erunt parallelogrammum C E F G, & triangulum A B C, [f] æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.
[b] 23 primi.
[c] 31. primi.
[d] 41. primi.
[e] 38. primi.
[f] 6. pron.

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis facillima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datũ parallelogrãmum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, secetq; recta BE, rectã AD, productã in E: Extendatur quoq; BC, ad F, sitq; CF, æqualis rectæ BC, & iungatur EF. Dico triangulum BEF, habens

habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, [a] *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E: Item trianguli B E F, eiusdem trianguli B C E, duplum;* [b] *quòd æqualia sint triangula E B C, E C F. Quare* [c] *æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod est propositum.*

[a] 41. primi.
[b] 38. primi.
[c] 6. pron.

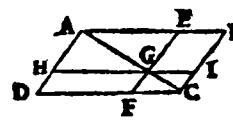
PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

43.

IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

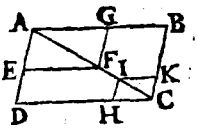
IN parallelogrāmo AB-CD, sint circa diametrum A C, parallelogramma A E-G H, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus? Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum enim [d] triangula A B C, C D A, æqualia sint; Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, [e] remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [f] Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, [g] remanebunt æqualia complementa D F-G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.



[d] 34. primi.
[e] 3. pron.
[f] 34. primi.
[g] 3. pron.

SCHOLIVM.

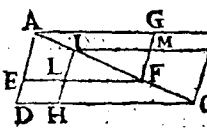
EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo, etiam



etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non coniungantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit seiunctum, vel ambo sese mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figura quinquangula. Vt in parallelogrammo A B C D, *circa diametrum* A C, *consistant parallelogramma* A E F G, C H I K. *Dico complementa* D E F I H, B K I F G, *esse aequalia. Cum enim*[a] *triangula* A B C, C D A, *aequalia inter se sint; Item triangula* A E F, C H I, *aequalia triangulis* A G F, C K I; [b] *erunt reliqua complementa* D E F I H, B K I F G, *aequalia. Quod est propositum.*

[a] 34. primi.

[b] 3. pron.



SECENT se iam mutuo parallelogramma A E F G, C H I K, *circa diametrum consistentia, ita vt communem partem habeant* I L F M. *Dico adhuc complementa* D E E H, B G M K, *esse aequalia. Cum enim*[c] *aequalia sint triangula* A B C, C D A; *Item triangula* A F G, A F E;[d] *erunt reliqua quadrilatera* B C F G, D C F E, *aequalia: Sunt*[e] *autem rursus aequalia triangula* I F M, I F L. *Igitur si haec addantur dictis quadrilateris,*[f] *erunt figura* B C I M G, D C I L E, *aequales. Cum igitur*[g] *aequalia sint triangula* C I K, C I H; [h] *erunt reliqua complementa* B G M K, D E L H, *etiam aequalia. Quod est propositum.*

[c] 32. primi.

[d] 3. pron. 34. primi,

[e] 2. pron.

[f] 34. primi.

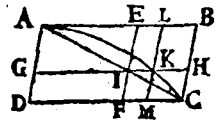
[g] 3. pron.

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis E F, G H, *quae sint parallelae rectis* B C, C D, *secent se in* I, *diuisum sit parallelogrammum* A B C D, *in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo*

sa duo B E I H, D F I G, sint æqualia. Dico reliqua duo A E I G, C F I H, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim nō transit, secet diameter C K A, rectam G H, in K, si fieri potest, & per K, [a] ducatur L M, parallela ipsi B C. [b] Erunt igitur complementa B H K L, D G K M, æqualia: Est [c] autem D G K M, maius quam D G I F. Quare & maius erit B H K L, quam D G I F. Cum ergo D G I F, æquale ponatur ipsi B E I H; [d] erit etiam B H K L, maius quam B E I H, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter A C, rectam G H, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.



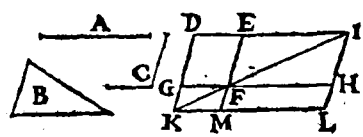
[a] 31. primi.
[b] 43. primi.
[c] 9. pron.
[d] 1. pron.

PROBL.

THEOR. 12. PROPOS. 44. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habēs æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, [e] æquale parallelogrammum D E F G, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque G F ad H, vt F H, sit æqualis rectæ A, & per H, [f] ducatur H I, parallela ipsi F E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; & [g] per K, ducatur K L, parallela ipsi G H, secans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum L M-



[e] 42. primi.
[f] 31. primi.
[g] 31. primi.

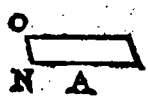
L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqualem, [a] cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, [b] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

[a] 15. primi.

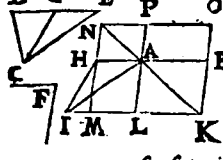
[b] 43. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam constituamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatq; super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triangulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaq; recta C G, secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eam partem, vbi parallelogrammum



constituendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatq; A H, æqualis ipsi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, [c] constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit constituendum, secus verò, si versus inferiorem. Posita autem recta A I, æqua-

[c] 23. primi.

lis ipsi

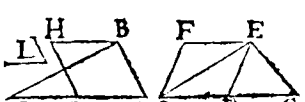
li ipſi E C, *iungatur recta* H I. *Et quia duo latera* H A, A I, *duobus lateribus* G E, E C, *æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq́; continent æquales;* [a] *erunt triangula* A H I, E G C, *æqualia. Poſt hæc,* [b] *ducta per* I, *ipſi* H B, *parallela* I K, [c] *conſtituatur in* A, *verſus hanc parallelam angulus* H A L, *angulo dato* F, *æqualis, fecetq́;* A L, *rectam* I K, *in* L. [d] *Ducta quoque per* H, *ipſi* A L, *parallela* H M, *ſecante* I K, *in* M; [e] *erit parallelogrammum* A H M L, *trianguli* A H I, *duplum: Eſt autem & triangulum* C D E, *trianguli* E G C, *duplum, quod æqualia oſtenſa ſint triangula* E G C, D G C. *Igitur cum æqualia ſint demonſtrata triangula* A H I, E G C, [f] *erũt æqualia parallelogrammum* A H M L, *& triangulum* C D E. *Iam vero, ſumpta recta* L K, *datæ rectæ* A B, *æquali, ducatur recta* K A, *producaturq́;, donec cum* M H, *producta coeat in* N, *& per* N, *agatur ipſi* H B, *parallela* N O, *donec in* O, *coeat cum* K B, *protracta, ac tandem* L A, *producatur vſque ad* P, *in rectam* N O. *Dico parallelogrammum* A B O P, *eſſe id, quod quæritur.* [g] *Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam* A B, *habetq́; angulum* B A P, *dato angulo* F, *æqualem, cum æqualis ſit angulo* H A L, *qui angulo* F, *factus eſt æqualis. Denique æquale eſt dato triangulo* C D E, [h] *cum æquale ſit parallelogrammo* A H M L, *quod triangulo* C D E, *oſtenſum fuit æquale.*

a 4. primi.
b 31. primi.
c 23. primi.
d 31. primi.
e 41. primi.
f 7. pron.
g 15. primi.
h 43. primi.

PRAXIS vero huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta H I, *duci non debet, neque recta* C G. *Hæ enim propter demonſtrationem tantum ductæ ſunt.*

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.



SIT data recta A B; *datum parallelogrammum* C D E F, *& datus angulus* L. *Producatur* C D, *ad* G, *vt* D G, *æqualis ſit ipſi* C D, *& iungatur* G E, *recta: Eritq́; triangulum* C E G, *parallelo-*

rallelogrammo C D E F, æquale, vt demonſtrauimus ſcholio propos. 41. Fiat tum ſuper data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc eſt, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem: & producatur A I, ad K, vt ſit I K, æqualis ipſi A I, iungaturq; recta B K. Dico triangulum A B K, conſtitutum ſuper datam rectam A B, habens q; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale eſſe dato parallelogrammo C D E F. Cum enim triangulum A B K, æquale ſit parallelogrammo A B H I, ex ſcholio propos. 41. quod æquale eſt conſtructum parallelogrammo C D E F, conſtat propoſitum.

a 44. primi.

PRAXIS huiuſce problematis à conſtructione non differt; difficilisq; non eſt, ſi adhibeatur precedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, ſuper data recta A B, in dato angulo A, conſtruatur.

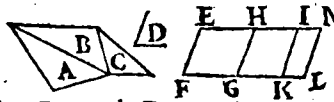
PROBL.

THEOR. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema abſolutè, non aſtringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat, tamẽ quia in ſequentibus frequenter vſurpatur in data recta linea, placuit ipſum proponere vnà cũ data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur conſtruere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Reſoluatur rectilineũ in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, *b* æquale

b 44. primi.



parallelogrammũ conſtituatur E F G H, ſuper rectã E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectam G H, paralle-

parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item ſuper rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et ſic deinceps procedatur, ſi plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma conſtructa, quæ quidem æqualia ſunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod ſic demonſtratur. Duo anguli E F G, H G K, [a] inter ſe ſunt æquales, cum vterque æqualis ſit angulo D. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, [b] qui duobus rectis æquiualent, [c] æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [d] Quarę F G, G K, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione oſtendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quòd duo anguli E H G, H I K, æquales inter ſe ſunt, ([e] cum ſint æquales oppoſitis angulis æqualibus E F G, H G K.) [f] & duo anguli H I K, I H G, duobus ſunt rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, ſint parallelæ; [g] Itemque E F, I K, quod vtraque parallela ſit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonſtrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, conſtituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineam E F, dato rectilineo A B C, conſtituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

[a] 1. *pron.*

[b] 29. *primi.*
[c] 2. *pron.*
[d] 14. *primi.*

[e] 34. *primi.*

[f] 29. *primi.*
[g] 30. *primi.*

SCHOLIVM.

PARI ratione, propoſitis quotcunq; rectilineis, conſtituemus illis parallelogrammum æquale, ſi omnia reſoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, ſingulis ſingula, per propoſ. 44. veluti factum eſt in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonſtratum fuit, conſtitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propoſitis. Vt ſi quis intelligat duo rectilinea propoſita A B, & C; Atque A B,

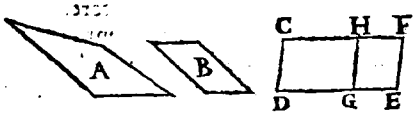
P reſol-

resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL, super rectas EF, HG, *IK, iuxta artem huius problematis, aequalia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum E F L M, aequale duobus rectilineis A, B, & C. Et sic de pluribus.*

PRAXIS autem huius problematis ex praxi praecedentis propos. sapius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema utilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus, in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



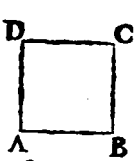
SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet
[a] *45. primi.* *rectilineum* B. [a] *Fiat parallelogrammum* C D E F, *in quocunq; angulo D, aequale maiori rectilineo A. Et super rectam* C D, *parallelogrammum* C D G H, *in eodem angulo D, aequale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum* C D E F, *superat parallelogrammum* CDGH, *parallelogrammo* E F H G; *superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo* EFHG. *Quod est propositum.*

45. ## PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta A B, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, [b] educantur A D, B C, perpendiculares ad AB, sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico ABCD, esse quadratum. Cum
[b] *11. primi.*
enim

enim anguli A,& B,ſint recti, [a] erũt A D, B C, patallelæ : Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis ſit ipſi A B. Igitur [b] & A B, D C, parallelæ ſunt & æquales: & ideo parallelogrammum eſt ABCD,in quo,cum AD, DC, CB, æquales ſint ipſi A B,omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt : Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [c] æquales ſint oppoſitis rectis A,& B. Quadratũ igitur eſt ABCD, ex definitione ; Ac proinde à data recta linea quadratum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

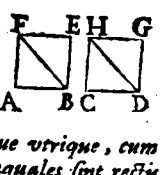


[a] 28. primi.
[b] 33. primi.
[c] 34. primi.

EX PROCLO.

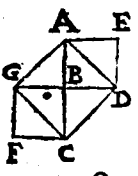
LINEARVM æqualium æqualia ſunt quadrata : & quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ.

SINT primum rectæ A B, C D, æquales. Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, *æqualia quoque eſſe. Ductis enim diametris* B F, D H, *erunt duo latera B A,* AF, *trianguli* B A F, *duobus lateribus D C,* C H, *trianguli* D C H, *æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ* A F, C H, *æquales ſint rectis* A B, C D : *Sunt autem, & anguli* A, & C, *æquales, nempe recti.* [d] *Igitur triangula* BAF, D C H, *æqualia erunt. Quæ* [e] *cum ſint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod eſt propoſitum.*

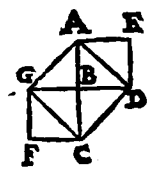


[d] 4. primi.
[e] 34. primi.

*SINT demde quadrata ABDE,*BCFG, *æqualia. Dico lineas quoque ipſorum A B, B C, æquales eſſe. Conungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, BC, in directum conſtituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, ſunt recti,* [f] *erunt & rectæ G B, B D, in directum conſtitutæ. Ducantur diametri AD, CG, jungunturque rectæ AG, CD. Quoniam*



[f] 14. primi.



niam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia ſunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo BCD, fiet totũ triangulum ACD, toti triangulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandẽ habeant baſin CD, ad eaſdemq; ſint
[a] 39. primi. partes, [a] in eiſdẽ ſunt parallelis: ideoque parallela ſunt AG, CD. Et quoniã, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtendimus, diameter in quadrato ſecat angulos quadrati biſariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni ſemirecti, ideoque æquales. Quamobrem, [b] & parallela ſunt AD, CG. Igitur parallelogrammũ
[b] 27. primi. [c] 34. primi. eſt ADCG; ac propterea [c] recta AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia ſunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter ſe etiam æquales, cum ſint ſemirecti, vt in ſcholio propoſ. 34.
[d] 26. primi. oſtenſum fuit; [d] erunt reliqua latera æqualia, nempe AB, ipſi BC, &c. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

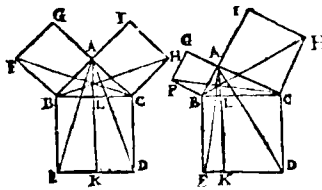
POSSENT hæc omnia multo breuius probari per ſuperpoſitionem quadrati vnius ſuper aliud. Nam ſi lineæ ſint æquales, ſi vna alteri ſuperponatur, congruent ipſa inter ſe. Cum ergo & anguli ſint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipſi inter ſe, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod ſi quadrata ſint æqualia, congruent ipſa inter ſe, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: aliam vnum quadratum alio maius eſſet.

PRAXIS autem huius problematis perfacilis eſt. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipſi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiuſdem AB, duo arcus deſcribantur ſeſe in C, interſecantes, iunganturque rectæ BC, DC, conſtructũ erit quadratũ. Nã ABCD, cũ ex cõſtructione ſit figura æqualia laterum, atque adeo latera oppoſita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initiũ ſcho-
[e] 29. primi. lij propoſ. 34. demonſtrauimus. Exiſtente ergo angulo A, recto, [e] erunt & B, D, recti, necnon [f] & oppoſitus angulus C, &c.
[f] 34. primi.

THEOR.

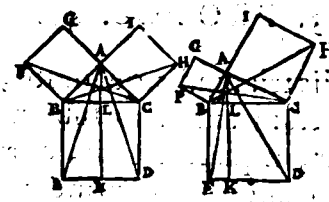
THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectangulis triangulis, quadratū, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



IN triágulo ABC, angulus BAC, sit rectus, [a] describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, [b] parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, [c] erũt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, [d] fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, [f] duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli

[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 14. primi.
[d] 2. pron.
[e] 4. primi.
[f] 41. primi.



ABE, quòd ſint inter parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE. Quare [a] æqualia erunt quadratũ A BFG, & parallelogrãmum BEKL. Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum A CHI, & parallelogrammum CDKL. [b] Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL, æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 6. pron.

[b] 4. primi.

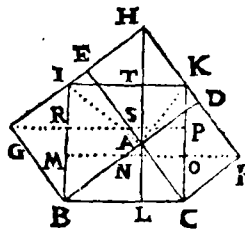
SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angulus coarctaretur donec fieret rectus, manẽtibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijſdem lateribus eũ ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris anguli recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris anguli acuto oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius ſit, & quanto hoc minus, demonſtrabit Euclides lib. 2. propoſ. 12. & 13.

QVONIAM vero theorema hocpulcherrimum eſt, vtilitatesq́ habet inſignes, operæ pretiũ iudicaui tentare, nũ illud

illud alijs vijs demonſtrari poſſit, variata aliquantulũ conſtructione; quod Peletarius ſine proportionibus fieri poſſe negauit.

Sit ergo rurſus triangulũ ABC, cuius angulus BAC, rectus ſit, productiſq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiãt AD, AE, ipſis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipſis AB, AC, parallelæ agãtur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, [a] tam latera DF, FC, oppoſitis lateribus AC, AD, quàm latera EG, GB, lateribus oppoſitis AB, AE, æqualia ſunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti ſunt. [b] Nam F, G, oppoſitis rectis DAC, EAB, æquales ſunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti ſunt, q vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB, [c] æqualis ſit duobus rectis. Quadrata ergo ſunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, ſecantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, ſi à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui AEC, GBI, æquales ſunt; ſunt aũt & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE. [d] Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Nõ aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea q duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales ſunt, (cum A, F, recti ſint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorũ, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare recta BI, CK, [e] inter ſe etiã æquales erũt. [f] Cum ergo ſint quoq; parallela, [g] erũt etiam BC, IK, æquales & parallelæ. Quadratum igitur eſt BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti, [h] quòd anguli I, K, oppoſitis rectis C, B, æquales ſint. Dico



[a] 34. primi.

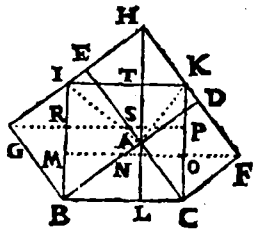
[b] 34. primi.

[c] 29. primi.

[d] 26. primi.

[e] 1. pron. 28. primi.

[f] 33. primi.



ergo, quadratum C I, duobus quadratis BE, CD, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia [a] G E, ipsi B A, æqualis est, & E H, ipsi A D, hoc est, ipsi G I, quæ ipsi AC, siue A D, ostensa fuit æqualis, erit &, addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc est, ipsi A B, æqualis. Cum ergo H I, A B, sint etiam parallelæ, [b] erunt quoque B I, A H, parallelæ & æquales. Eodemq; modo AH, ipsi C K, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur [c] tam quadratum B E, parallelogrammo B H, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin B I, æquale est [d] erit quoque quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Sic etiam quia tam [e] quadratum C D, parallelogrammo C H, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, super eandem basin C K, æquale est, [f] erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compositum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat demonstrandum.

a 34. primi.
b 33. primi.
c 35. primi.
d 1. pron.
e 35. primi.
f 1. pron.

ALITER. Loco rectæ HTAL, iungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur T A L. Quoniam ergo [g] tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli A B I, super eandem basin A B, quàm parallelogrammum B T, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est. [h] erit quadratum B E, parallelogrammo BT, æquale. Pari ratione, quia [i] tam quadratum C D, trianguli ACK, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eiusdem trianguli A C K, super eandem basin C K, duplum est, [k] erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, vt prius, totum quadratum BC K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, constatum, duobus quadratis BE, C D, æquale est. Quod erat ostendendum.

g 41. primi.
h 6. pron.
i 41. primi.
k 6. pron.

ALI-

ALITER. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipſis BC, IK, parallelę FM, GP, ſecantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipſi KO, æqualis. Quoniam enim [a] anguli O, R, recti ſunt, & OKF, RBG, æquales, quòd vterque angulo ABC, ſupra oſtenſus ſit æqualis, erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quòd vtrumque ſupra ſit oſtenſum ipſi BC, æquale. [b] Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaque quoniam [c] tam parallelogramma BCFN, BCOM, ſuper eandem baſin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, ſuper eandem baſin BC, æqualia ſunt, eſtque parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, oſtenſas æquales; (Nam hinc fit, vt ſi vnum alteri ſuperponatur, ſibi mutuo congruant, propter latera, angulorumque æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis ECOM, IKOM, compoſito æqualia. [d] Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, ſuper eandem baſin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, ſuper eandem baſin BG, æquale ſit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonſtrandum erat.

[a] 29. primi.

[b] 26. primi. 34. primi.

[c] 35. primi.

[d] 35. primi.

ATQVE in hunc modum aliæ demonſtrationes excogitari poterunt. Videc demonſtrationem Euclidis ſimpliciorem eſſe, & magis expeditam, ſed non injucundum tamen eſt intelligere, variis demonſtrationibus eandem veritatem poſſe confirmari.

INVENTIO porrò admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt ſcribit Vitruuius lib. 9. hoſtias Muſis immolauit, quòd ſe in tam tradaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolaſſe centum boues: ſi tamen Proclo credendum eſt, vnum tantummodo obtulit. Fortaſſe autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occaſionem ſumpſit; vt theorema hoc inueſtigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter eſſet contemplatus, vidiſſetq; quadratum numerum maioris æqualem eſſe quadratis numeris reliquorum, compoſuit triangulum ſcalenum, cuius maximum latus diuiſum erat in 5. partes æquales,

les, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idq; in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. observauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebāt vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi volu ptate adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descriptæ, vt ibidem ostendemus.

NB. CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorū, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, pauca explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, qua talis est. Accipiatur numerus quicūque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum,

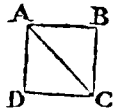
vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24 & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iucunda tam theoremata, quam problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C. Dico quadratum A C, duplum esse quadrati A B C D. Cum enim in triangulo A B C, angulus B, rectus sit, erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearum A B, B C, æqualia sint, quòd lineæ A B, B C, sint æquales; erit quadratum lineæ A C, duplum eiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B, hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.

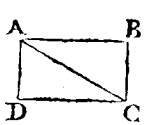


[a] 47. primi.

II.

QVADRATVM diametri figuræ alteram parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, [b] erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum inæqualium A B, B C. Quod est propositum.



[b] 47. primi.

SI

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM A B C, D E F, *angulis* A, *& D, ſint recti, lateraq; oppoſita* B C, E F, *æqualia. Dico duo quadrata laterum* A B, A C, *ſimul ſumpta æqualia eſſe duobus quadratis laterum* D E, D F, *ſimul ſumptis. Nam quadrata linearum* B C, E F, *æqualia inter ſe ſunt, cum & ipſa inter ſe ponantur æquales: Quadrato autem linea* B C, [a] *æqualia ſunt quadrata linearum* A B, A C; *Et quadrato linea* E F, *æqualia ſunt quadrata linearum* D E, D F. [b] *Quadrata ergo rectarum* A B, A C, *quadratis rectarum* D E, D F, *æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.*

[a] *47. primi.*

[b] *1. pron.*

IIII.

DVOBVS quadratis inæqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis.

SINT A, *&* B, *latera duorum quadraterum inæqualium. Fiat angulus rectus* D C E, *ſitq;* D C, *recta æqualis rectæ* B, *& rectæ* C E, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* D E, *coniungente duo puncta* D, E, *conſtituantur ſuper ipſam duo anguli ſemirecti* D E F, E D F, [c] *coeantq; rectæ* D F, E F, *in* F. *Quoniam igitur in triangulo* F D E, *anguli* F D E, F E D, *æquales ſunt; [a] erunt & latera* D F, E F, *æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum*

[c] *13. pron.*

[a] *6. primi.*

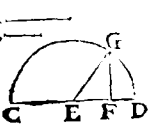
nearum D F, E F, *æqualia esse quadratis linearum* A, & B, *hoc est, quadratis linearum* C E, & C D. *Nam cum in triangulo* D E F, *anguli* F D E, F E D, *faciant vnà rectũ; erit reliquus angulus* F, *rectus.* [b] *Quamobrẽ erunt quadrata linearũ* D F, E F, *æqualia quadrato lineæ* D E. *Sed eidem quadrato lineæ* D E, *æqualia sunt quoque quadrata* C D, C E. *Igitur quadrata linearum* D F, E F, [d] *æqualia sunt quadratis linearum* D C, E C. *Quod est propositum.*

[a] 32. primi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 1. pron.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.

POTENTIA lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quauis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, *oportet eatq; cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ* A, *quam minoris* B. *Ex quauis lineæ rectæ* C D, *sumatur* C E, *æqualis rectæ* A, & E F, *æqualis rectæ* B. *Deinde centro* E, & *internallo* E C, *semicirculus describatur* C G D; & *ex* F, *ducatur* F G, *perpendicularis ad* C D. *Dico quadratum rectæ* A, *hoc est, rectæ* C E, *sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ* B, *hoc est, rectæ* E F, *sibi æqualis, quadrato rectæ* F G. *Ducta enim recta* E G, [e] *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum* E F, F G, *hoc est, quadratum rectæ* E C, *illi æquale, superabit quadratum rectæ* E F, *quadrato rectæ* F G. *Quod est propositum.*



A 10. quad. 100.
B 8. quad. 30 —
E F 7. quad. 69

[e] 47. primi.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

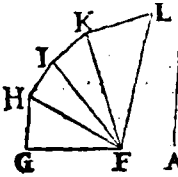
SINT

numeros quadratos colliga in unam summam.

1 — 1. C.
3 — 9. D.
4 — 16. B.
5 — 25. E.
7 — 49. A.

SOLVTIO.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq; inuenire quadratũ æquale omnibus illis quinque.



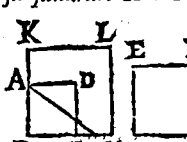
Fiat angulus rectus FGH, sitq; recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq; HI, æqualis rectæ C. Ducatur rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitque IK, æqualis rectæ D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitque KL, æqualis rectæ E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH, [a] *æquale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ FI,* [b] *æquale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK,* [c] *æquale est quadratis rectarum FI, IK, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ FL,* [d] *æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.*

[a] 47. primi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 47. primi.

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata ABCD, EFGH, propositumq; sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq; quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctam, æqualem esse quadrato



quadrato E F G H. Quoniam enim quadratum rectæ A I, hoc est, quadratum B K L M, [a] æquale est quadratis rectarum A B, B I, hoc est, quadratis A B C D, E F G H: si auferatur commune quadratum A B C D, [b] remanebit figura A D C M L K, æqualis quadrato E F G H. Quod est propositum.

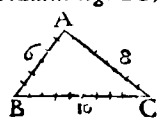
[a] 47. primi.

[b] 3. prom.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, rectus in triangulo A B C, sintq; primum cognita latera A B, A C, circa angulum rectum, quorum A B, ponatur 6. palmorum, & A C, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, nempe quadrati palmi 36. & 64. [c] æqualia sunt quadrato rectæ B C; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorũ palmorũ 100. Latus ergo BC, cõtinebit 10. palmos. Tãtũ enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera A B, B C, sitque A B, 6. palmorum, & B C, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, [d] æqualia sunt quadrato rectæ B C; si quadratum rectæ A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ B C, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectæ A C, 64. palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod est propositum. Cæterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, vt dicemus de quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpe numero extrimi nequit, nisi per radicem surdam, quam uocant: Sed de his alias.



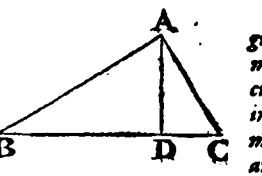
[c] 47. primi.

[d] 47. primi.

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur

bitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusq; illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.



C A D A T primum in triãgulo A B C, cuius latus A B, maius sit latere A C, perpendicularis A D, ad B C, demissa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterq; angulus B, C, acutus est, vt ex coroll. 2. propos. 17. constat. Dico segmentum B D, esse maius

[a] *47. primi.* *segmento C D. Quoniam enim [a] tam quadratum ex A B, quadratis ex A D, B D, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, C D, æquale est: Est autem quadratum ex A B, maius quadrato ex A C, quod latus A B, latere A C, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex A D, B D, maiora duobus quadratis ex A D, C D: Et ablato communi quadrato rectæ A D, reliquum quadratum ex B D, reliquo quadrato ex C D, maius erit. Quare & recta B D, maior erit, quam recta C D. quod est primum.*

F A C I A T deinde perpendicularis A D, segmentum B D, maius segmento C D. Dico latus A B, maius esse latere A C. Erit enim quadratum ex B D, quadrato ex C D, maius: Additoq; quadrato communi ex A D; duo quadrata ex B D, A D, duobus quadratis ex C D, A D, maiora erũt.

[b] *47. primi.* *Cum ergo [b] tam quadratum ex A B, quadratis ex B D, A D, quam quadratum ex A C, quadratis ex C D, A D, æquale sit; erit quoque quadratum ex A B, quadrato ex A C, maius; propterea & latus A B, latere A C, maius erit. Quod est propositum.*

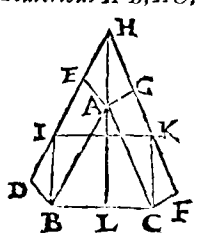
A T Q V E in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

T H E O R E M A T E porrò hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni triangulo

gulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quam Pappus.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducaturque recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipsi AH, iungaturque recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BIHA, CKHA, [a] erit vtrumque BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt BI, CK; [b] quæ cum sint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ sint; [c] erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum:

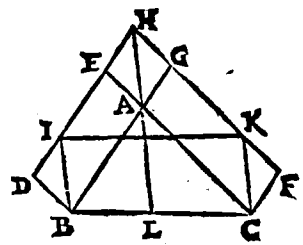


[a] 34. primi.
[b] 30. primi.
[c] 33. primi.

Cui quidem æqualia oſtendenda ſunt parallelogramma AD, AF. [a] Quia ergo æqualia ſunt parallelogramma AD, ABIH, quòd eandem habeant baſin AB, in eiſdemque ſint parallelis AB, HD; [b] Eſt autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat baſin BI, in eiſdemq; ſit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter oſtendemus, AF, ipſi KL, eſſe æquale. Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 35. primi.

b 35. primi.



PAPVS conſtruit figuram aliter. Nam ſumit rectas AC, AE; & AB, AG, in directum poſitas, ita vt parallelogrãma AD, AF, ſint æquiangula, habentia angulos AED, AGF, angulo BAC, [c] internos externo æquales, ceu hęc eius figura indicat. Sed nos vniuerſalius rem propoſuimus, vt manifeſtum eſt.

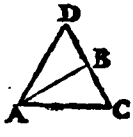
c 29. primi.

47. THEOR. 34. PROPOS. 48.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quę a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DETVR triangulum ABC, ſitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, eſſe rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, con-

connectaturque recta A D. Quoniam igitur in trianguloA B D, angulus ABD, rectus est; [a] erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; [b] erunt quadrata rectarum A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ A D, A C, æquales. Quoniam igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A BC; & basis AD, ostensa est æqualis basi A C; [c] erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 47. primi

[b] 1. pron.

[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem, [d] collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

[d] 4. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque basi æqualis, [e] intulit æqualitatem angu-

[e] 8. primi.

lorum illis lateribus comprehenſorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus eſſe æqualia.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus ſunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, [a] oſtendit baſim maiori angulo oppoſitum eſſe maiorem baſe minori angulo oppoſita. [a 24. primi.]

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtriq;, at baſes inæquales, [b] demonſtrauit angulum maiori baſi oppoſitum eſſe maiorem angulo minori baſi oppoſito. [b 25. primi.]

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales ſunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod vni æqualium angulorum opponitur, [c] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius eſſe æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus ſequi etiam, tota triangula eſſe æqualia. [c 26. primi.]

SEXTO [d] demonſtrauit, duo triangula ſuper eandem baſin, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia. [d 37. primi.]

SEPTIMO [e] oſtendit, duo triangula ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, æqualia eſſe. [e 38. primi.]

OCTAVO [f] docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſim, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. [f 39. primi.]

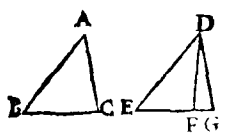
NONO

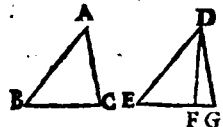
NONO denique [a] probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemq; partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. [a] 40. primi.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo; ſed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas haſce comparationes excluſimus, quòd ex iis non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.

SIT enim Iſoſceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta baſe CF, vſque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG,

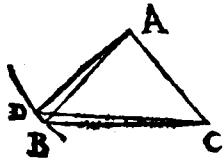




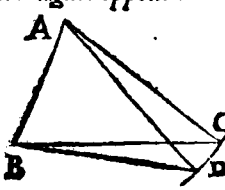
æquale triangulum constituatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia sint, & basis BC, basi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, angulique B, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppositi æquales: & tamen basis BC, maior est basi EF; quòd BC, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quòd angulus C, acutus est, [a] 5. primi. at DFE, obtusus. Nam cum [a] anguli DFG, & [b] 17. primi. G, æquales sint; [b] & simul sumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, [c] 13. primi. recto maior: quandoquidem [c] duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demum sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quàm EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quòd DF, idem [d] 5. primi. sit, quod AC, ipsi DG, æquale; [d] erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque [e] 17. primi. minor recto; [e] quòd ambo minores sint duobus rectis. [f] 13. primi. Cum igitur, [f] duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, qui à DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor est, aut maior recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior basi EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vtroque angulo

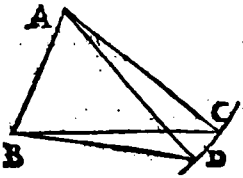
angulo C, & F, vel minore recto, vel maiore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus. quod est contra hypothesin.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus aequalia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni aequalium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi potest. Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit [a] ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, aequalis; cadetque CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secans CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, aequalia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, aequalis angulo ACD, lateri AD, opposito: Et tamen bases BC, DC, aequales non sunt; Si enim aequales essent, essent tam duae rectae AB, AD, quàm duae CB, CD, aequales, [b] quod est absurdum. [a] 18. primi. [b] 7. primi.



POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus aequalia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus, aequalis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namque triangulum ABC, cuius vtrumque latus AC, CB, maius sit latere AB; & BC, maius, quàm AC. Erit [c] ergo angulus BAC, [c] 18. primi.





cetur angulo ABC. Sitque fiat angulus ABD, angulo BAC æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD; erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia, vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur: Et tamen bases BC, BD, æquales non sunt. Alias nam recta AC, AD, quàm BC, BD, æquales essent, a quod est absurdum.

a 7. primi.

RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM SECVNDVM

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

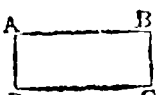
AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est,

Paralle-

Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perſpicuum eſt ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, ſi vnus angulus dumtaxat detur rectus, erunt & reliqui tres neceſſario recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque eſſe. Nam cum parallelæ ſint

29. primi.



34. primi.

A D, B C, erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales. At angulus A, rectus eſt, ex hypotheſi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero [b] quilibet ſui oppoſito eſt æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis A B, A D, vel ſub A D, D C, vel ſub D C, C B, vel denique ſub A B, B C: quoniam quælibet binarum ſecundi duæ linea exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera vero, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde extremis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram lineam ſimilis parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorſum ſecundum rectam A D, moueri in tranſuerſum, ita vt ſemper angulum rectum cum A D, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, ſi A D, ponatur moueri in tranſuerſum ſecundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo ſub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſunt duabus illis

lis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentũ, E
erit idẽ, quod parallelogrãmũ ABCD: F
quoniã latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F.

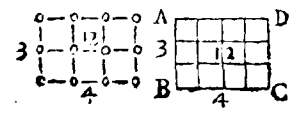
PERSPICVVM autẽ est ex dictis, parallelogrammũ rectangulum contentũ sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarũ linearum æqualium æqualis sit linea oppositæ, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectãguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, vtraque vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum sub AB, BC, æquale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales, nempe rectis; [2] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.

A G
B C
D H
E F

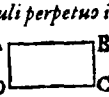
[2] 4. primi.

HABET autem comprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3 in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammũ ABCD, comprehensum sub duabus rectis AB, BC, quarum illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem



quidem ex ductu lineæ A B, 3. palmorum in lineam B C, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq; a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ A B, in lineam B C, vel (quod idem est) ex ductu lineæ B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4 in 3. producitur hic numerus 12.

OBITER quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem litera repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammũ appellant A C, vel B D.

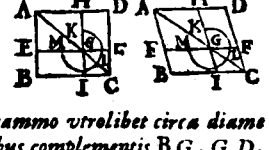


II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrammi,

grãmi, ita vt parallelogrãmum diuiſum ſit in quatuor paral lelogrãma, quorũ duo EH, IF, dicũtur eſſe circa diametrum, alia vero duo BG, GD, cõpleta, vt manifeſtũ eſt ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura compoſita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis eſt figura E B C D H G E, quam complectitur circunferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, compoſita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.



SED iam ad propoſitiones ſecundi huius lib. veniamus, in quibus ſane operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquiſitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vſum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propoſitionum demonſtrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in diſciplinis humanis præſtantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abſtruſa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum ſuperare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur eſſe nihil. Ex alijs deinde propoſitionibus huius lib. elicientur demonſtrationes, quibus inter ſe addentur, ſubtrahentur, multiplicantur, atque diuidentur numeri ſurdi, (quos dicunt) hoc eſt, qui nullo modo exprimi poſſunt; cuiuſmodi ſunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neque per Diuinam potentiam in numeris poſſunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philoſophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonſtrationem ſciri poſſe, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita ſit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulo minor ſit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4? Et tamen ſumma, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propoſitionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior eſt, quam 7. Præterea ex propoſ. 12. & 13. eiuſdem huius lib. area, & quantitas

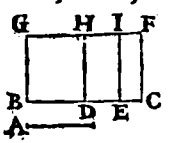
quantitas cuiuslibet trianguli exquisitissimè cognoscitur, exqua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremò ultima propos. huius lib. omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, utilitates vero contineat propè infinitas.

THEOR.

I. ~~PROBL.~~ 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetúrq; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento cóprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duę perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturque recta F G. Nam rectæ B G, C F, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur [c] erunt quoq; G F, B C, parallelæ & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit B F, contentum sub A, siue G B, & B C, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, vel C F.

[a] 28. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.

CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, [a] inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eędem, cum ex cõstructione parallelogramma sint BH, BI, [b] æquales erũt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub insecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 30. primi.
[b] 34. primi.

SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, qu. Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si dividantur, vt linea; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq; vt 6. & 10. dividatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duę rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT

SINT duæ rectæ A B, A C, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes A D, D E, E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H; E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur. Compleatur rectangulum A I, ducanturq; D K, E L, F M, parallelæ ipsi A B, vel B I: Item H N, G O, parallelæ ipsi A B, vel B I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H;

[a] *34. primi.* *& H K, sub A D, H C; ([a] quòd rectæ G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub*

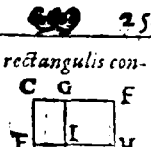
[b] *34. primi.* *D E, A G; D E, G H; D E, H C; ([b] quòd D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H; F B, H C; perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.*

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C; vna cum rectang. li com-

prehenso

prehenſo ſub partibus AD, EC, æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur. n. rectangulũ AF, agaturq; per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; nec non per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI; ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.



IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. poſterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; ſimul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, ſi ijdem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoque eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod a tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe

a+b.

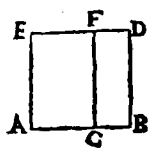
a+b
b
ab+bb.

a+b
a
aa+ab.

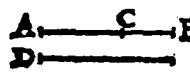
ab+bb+
ab+aa
2ab+aa
+bb.

quadrato totius lineæ A B. Deſcribatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F, parallela rectæ A E, vel B D, quæ [a] æqualis erit rectæ A E, hoc eſt, rectæ A B, cui æqualis eſt recta A E, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta A E, æqualis eſt rectę A B, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmẽto A C. Similiter erit rectangulũ C D, cõprehẽſum ſub tota A B, & ſegmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia ſint quadrato A D, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub A B, & ſegmentis A C, C B, æqualia eſſe quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 34. primi.



ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B.

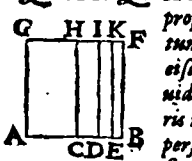


Quoniam igitur A B, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub inſecta D, & recta A B, hoc eſt, quadratum rectę A B, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehẽduntur ſub D, inſecta, hoc eſt, ſub A B, & ſingulis ſegmentis A C, C B. quod eſt propoſitum.

[b] 1. ſecũdi.

SCHOLIVM.

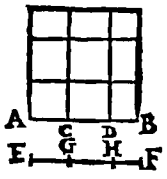
QVANQVAM Euclides ſecundum hoc theorema proponat de linea recta diuiſa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eiſdem vndijs demonſtrabitur, ſi linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifeſtum eſt. In numeris vero idem perſpicitur hoc modo. Numerus 10. diuiſus ſit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales eſſe 100. quadrato ipſius numeri 10. vt manifeſtum eſt. Simili modo, ſi numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipſius numeri 10.



SIMILI modo demonſtrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI

SI linea recta ſecetur in quotcunq; ſegmenta: Quadratum, quod a tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.



SIT recta AB, diuiſa in partes quotcunq; AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, deſcriptum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub ſingulis partibus AC, CD, DB, & quolibet ſegmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc eſt, rectangulis ſub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD, CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, cõprehenſis. Sũpta enim recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AB, diuiſaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propoſ. 1. huius libri demonſtrauimus, rectangulum ſub AB, EF, hoc eſt, quadratum ipſius AB, æquale rectangulis ſub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, ſint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis ſub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod eſt propoſitum.

IN numeris idem eſt manifeſtum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2.3.5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4.6.10.6.9.15.10.15.25. qui ex ſingulis partibus 2.3.5. in quamlibet partium 2.3.5. procreantur, vt perſpicuum eſt.

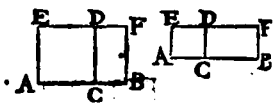
THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea ſecta ſit vtcunq;: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorũ comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectan-

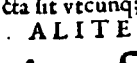
gulo, & illi, quod a prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

a + b.
b
a + bb.



LINEA recta AB, diuiſa ſit vtcunq; in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota AB, & vtrouis ſegmento, vt AC, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis AC, CB, comprehenſo, & quadrato prioris ſegmenti aſſumpti AC. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti AC, quod ſit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipſi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis eſt, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, cõprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Rurſus, quia recta CD, eadem ratione æqualis eſt rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehenſum ſub ſegmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale ſit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido conſtat, rectangulum ſub AB, tota, & ſegmento AC, comprehenſum, eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis AC, CB, & quadrato prædicti ſegmenti AC. Itaque ſi recta linea ſecta ſit vtcunq;, &c. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento AC. Qm̃ igitur recta AB, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub D, & AB, hoc eſt, ſub AB, & AC, æquale rectangulo ſub D, & CB, hoc eſt, ſub AC, CB, & rectangulo ſub D, & AC, hoc eſt, quadrato ſegmenti AC. Quod eſt propoſitum.



a 1. ſecũdi.

SCHOLIVM.

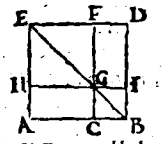
VT hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. diuiſus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem eſſe numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, una cum 49. qua-

49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. ſimul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

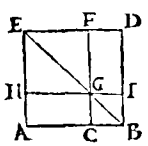
SI recta linea ſecta ſit vtcunq;: Quadratum, quod a tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ a ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.



RECTA linea AB, diuiſa ſit vtcũq; in C. Dico quadratũ totius rectę AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis AC, CB. Deſcribatur in ſuper AB, quadratũ AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, ſecans diametrum in G. puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuiſum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia ſunt; [a] erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui [b] tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis ſunt æquales, & BAE, rectus eſt. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadem ratione oſtendes angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat ex ijs, quæ ad 34. propoſ. lib 1. demonſtrauimus. Nã, vt ibi oſtenſum eſt, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, [c] æquales ſunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus eſt, [d] cum ſit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, oſtenſus ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus; ideoque æqualis angulo FEG.

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 32. primi.
[d] 29. primi.

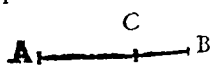
[a] 6. primi.
[b] 34. primi.



Quare[a] æqualia erunt latera E F, F G: quæ cum sint[b] æqualia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammum F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quòd existente vno angulo recto, nempe F E H, vel F, in parallelogrammo F H, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quòd latus H G, [c] æquale sit rectæ A C. Rectangula quoque A G, D G, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quòd C G, G I, æquales sunt rectę CB, ob quadratum C I; & F G, æqualis rectæ G H, ob quadratum F H, hoc est, [d] rectæ AC. Quocirca cum quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratum A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

[c] 34. primi.
[d] 34. primi.
[e] 2. secũdi.

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, [e] erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quæ sub tota



AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub A B, A C, comprehensum,

[f] 3. secũdi.

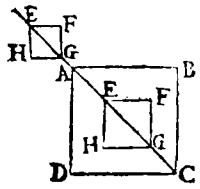
[f] æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti C B. Igitur quadratum rectę AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CON-

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, qua sunt circa diametrum BE, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, qua communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc vero angulum AED. Idem nihilominus verũ est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, cõsistat parallelogrãmum FH, sive intra quadratum, sive extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, esse quadratum. Cum enim parallela sint AB, EF, [a] erunt anguli BAC, FEG, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, semirecti erunt: [b] propterea que latera EF, FG, illis opposita, æqualia, [c] & angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera [d] æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum est, ex ijs, qua ad defin. 1. huius lib. ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.



[a] 29. primi.

[b] 6. primi.
[c] 32. primi.
[d] 34. primi.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos AEB, DEB, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1. demonstrauimus.

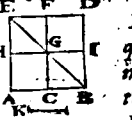
SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit

numerus 10. diuiſus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale eſſe 49. & 9. quadratis partiũ 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis ſumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PER FACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonſtrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectę, quadratum ex illa deſcriptũ, quadruplũ eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.



SIT enim primũ linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa AB, bifariã in C, ſi fiat conſtructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atq; inter ſe æqualia, cum omnia eorum latera ſint æqualia, omneſq; anguli recti, vt facile demonſtrari poteſt ex propoſ. 34. lib. 1. Quare tũ quadratũ AD, æquale ſit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratũ lineæ AB, quadruplũ quadrati lineæ AC, hoc eſt, lineæ K, quæ æqualis eſt ipſi AC. Eſt. n. vtraq; dimidiũ lineæ AB.

* 4. ſecũdi. *BREVIVS. Quadratũ rectæ AB, æquale eſt quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo ſub rectis lineis AC, CB, bis comprehenſo. Cum igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB, æqualia ſint; & rectangulum ſub æqualibus AC, CB, quadratum quoq; ſit, atq; æquale quadrato rectæ AC; Conſtat quadratũ rectæ AB, quadruplum eſſe quadrati rectæ AC; cum æquale ſit quatuor quadratis, quorum vnumquodq; quadrato rectæ AC, æquale eſt.*

SIT deinde quadratũ rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplũ eſſe lateris K. Nam diuiſa recta AB, bifariam in C, vt AB, dupla ſit ipſius AC, erit, vt iam demonſtratũ eſt, quadratũ rectæ AB, quadruplũ quadrati rectæ AC: Ponitur autem & quadruplũ quadrati rectæ K. Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum K, & AC; & ipſa propterea recta K, & AC, æquales: Eſt aũt AB, ex conſtructione, ipſius AC, dupla. Dupla igitur etiã erit ipſius K. Hac tamen

tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

CÆTERVM ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quaeritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendus numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus una unitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei haec est. Quoniam quadratum A D, recta A B, aequale est duobus quadratis F H, C I, partium A C, C B, una cum rectangulo bis comprehenso sub A C, C B; si gnomonem H B F, qui cum quadrato F H, constituit totum quadratum A D, ponamus 15. quantus nimirum est datus numerus: quadratum autem C I, statuamus 1. atque adeo latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde segmentum A C, 7. vt nimirum ex A C, in C B, quae est 1. fiant 7. Quadratum ergo F H, erit 49. Totum autem latus A B, erit 8. nempe una unitate maius, quam A C, latus quadrati F H. Hac ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone H B F, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidiū statuamus latus quadrati F H, quaesiti. 4. secūdi.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit.

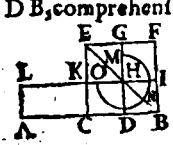
VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam si ex numero dato demptur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur 1. conficietur latus quadrati quaesiti. Vt si rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidiū 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quaesiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7. quod perpetuo est una unitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius

huius regula facilis est ex eadem figura huius propos. 4. Nam si gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, subtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus: Quadratum vero G I, latuamus 1. atque adeo & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & segmentum A G, 7. vt supra dictum est, & tota linea A B, 8. &c.

5. THEOR. 5 PROPOS. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit. Diço rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corol larium 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æquales: [a] Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehenditur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vna cum quadrato



[a] 34. primi.

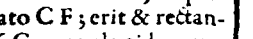
drato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo [a] complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: [b] Est autem & A K, eidem C I, æquale; quòd & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 43. primi.

[b] 36. primi.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 11. excluſi nè faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex C B, [c] æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, vna cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B, [d] æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, [e] æquale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.



[c] 4. secũdi

[d] 3. secũdi.

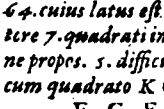
[e] 1. secũdi.

IDEM in numeris est manifestum. Dividatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij

termedij numeri 2. aqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inuenietur alio modo numerus quadratus, cum quo datus quiuis numerus quadratus quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à reliqui numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. a cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est una vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum A H, cum quadrato K G, [2] æquale sit quadrato C F; si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit reliqua A D, 15. vt nimirum ex A D, in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

[2] 5. secũdi.



HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoq; quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerũ 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoq; est ex eadẽ figura huius propos. 5. Nam si rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatum relinquit quadratum K G, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeo & D B, eius latus 1. erit tota A B, 16. & eius dimidium C B, 8. &c.

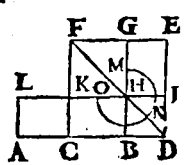
THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quę ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namque C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D: Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4 huius lib. B I, K G, quadrata, ideoque recta D I, rectæ D B, æqualis: [a] Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaque est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, [b] æquale est parallelogrammo C H, quod bases A C, C B, æquales sint: [c] Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale.



[a] 34. primi.

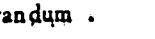
[b] 36. primi.

[c] 43. primi.

Quocir-

Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, una cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

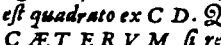


ALITER. Quia quadratum ex C D, [a] æquale est quadratis ex C B, B D, una cum rectangulo bis sub D B, C B; hoc est, quadratis ex C B, B D, una cum rectangulis sub B D, C B, & sub D B, A C: (sumpta A C, semel pro C B, quæ illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub D B, A C; D B, C B; & sub D B, D B, (quod est quadratum ex D B,) [b] æquale rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B, una cum rectangulo sub D B, A D: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

[a] 4. secũdi.

[b] 1. secũdi.

CÆTERVM si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentē 5. facillimè posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit enim recta A B, secta in C, bifariam, & ei addita recta quæcunque B D. Dico rectangulum cōprehensum sub tota A D, composita, & adiecta B D, una cū quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato rectæ C D, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque rectæ A D, ex altera parte rectæ A E, quæ adiecta B D, æqualis sit, erit tota E D, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoq; E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A, ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis. Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus E B, B D, vnà cum



[c] 5. secũdi.

quadrato

quadrato intermediæ sectionis C B, hoc est, rectangulum sub A D, B D, vnà cum quadrato dimidiæ C B, æquale erit quadrato dimidiæ C D, hoc est, quadrato rectæ ex dimidiâ C B, datæ rectæ A B, & ex adiectâ B D, compositæ. Quod est propositum.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero cõposito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadẽ magnitudine C B: habebunt tres lineæ A D, C D, B D, proportionalitatẽ Arithmeticam; quandoquidẽ prima A D, superat secundam C D, eodem excessu A C, siue C B, quo secunda C D, tertiam B D, superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniũgi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam) cui tertia, siue minor addita sit in rectum, mediaque composita sit ex dimidio excessus inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, si tres rectæ sint datæ A D, C D, B D. Si namque ex prima A D, abscindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (excessus inter primam et tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia B D. Cum enim C B, excessus sit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi A C, nempe excessui inter primam A D, & mediam C D; erit necessariò A B, secta in C, bifariam. Eademq; ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus,

bentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. una cum 9. quadrato excessus 3. aqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperietnus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariā secetur, erit quadratus huius dimidij is, qui quaritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quaesitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerū 64. cuius latus 8. vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta est ex hac 6. propos.

16. secūdi. Cum enim rectangulum A I, cum quadrato G K, aquale sit quadrato C E, si rectangulum A I, statuatur 15. at quadratū B I, 1. ideoq; & latus B D. 1. erit tota linea A B, 15. vt numerus multiplicata in B D. 1. producat rectangulum A I. 15. Ablata igitur 1. B D. remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quaesiti.

NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparē, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

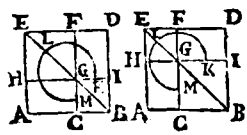
VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quaesiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quaesiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum A I, quod ex quadrato C E, subtractum relinquit quadratum K G, statuatur 15. at quadratum B I, ideoque & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. vt dictum est. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio C B, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quaeritur, &c.

THEOR

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcũque; Quod a tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehẽditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.



SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmẽti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cum quadrato reliqui segmenti CB. Describatur enim super AB, quadratum AD; & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectę AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, [2] æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, cõprehensum erit sub eisdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratum AD; si apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

[2] 34. primi.

SCHOLIVM.

[a] 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratum ex AB,* [a] *æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si*

addatur cõmune quadratũ ex AC, erũt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cũ rectãgulo bis sub AC, CB. Sed rectãgulo

[b] 3. secũdi. *sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC,* [b] *æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.*

IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

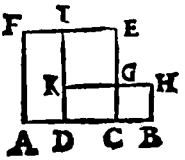
EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur. n. quadrata AE, CH, & agatur

DI,

D I, ipſi C E, *parallela, producaturque H G, ad K. Itaque quoniam A D, ipſi C B, eſt æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc eſt, C E, toti D B, æqualis: Eſt autem & C G, ipſi C B, æqualis, quòd quadratum ſit C H. Igitur & reliqua G E, reliquæ* D C, *æqualis erit: Ac proinde, cum & I E, ipſi* D C, *ſit æqualis, erunt G E, I E, æquales; ideoq; I G, quadratum erit ab exceſſu* D C, *deſcriptum. Quoniam verò rectangula A I, D H, continentur ſub partibus* A C, C B, *(Eſt enim* A C, *vtrique lineæ A F, D B, &* C B, *vtrique A D, B H, æqualis) manifeſtum eſt, quadrata A E, C H, partium* A C, C B, *æqualia eſſe rectangulis A I, D H, quæ continentur ſub partibus* A C, C B, *vna cum quadrato I G, exceſſus* D C. *Quod eſt propoſitum.*



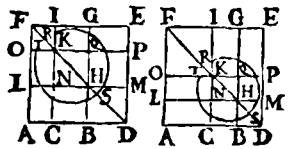
SCHOLIVM.

IN numeris. Secatur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars ſuperet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales eſſe numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis ſumpto, vna cum 4. quadrato exceſſus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea ſecetur vtcunq;: Rectãgulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum eo, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod a tota, & dicto ſegmẽto, tanquã ab vna linea deſcribitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuiſa vtcunque. Dico rectan-



gulum quater comprehenſum ſub AB, & ſegmento ſiue maiore, ſiue minore C B, vna cum quadrato reliqui ſegmẽti A C, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto ſegmento C B, componitur. Producatur enim AB, verſus dictũ ſegmentum C B, ad D, ſitque B D, recta æqualis ſegmento C B; & ſuper tota A D, quadratum deſcribatur A E. Ducta autem diametro D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipſi D E, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipſi A D, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. O I, N Q, B M, L G, C P, circa diametrum DF, quadrata. Et quia O K, æqualis eſt rectæ A C, erit O I, quadratum ſegmenti A C. Rurſus quia N H, æqualis eſt rectæ C B, erit N Q, quadratum ſegmenti C B, ideoque quadrato B M, æquale, cum rectæ C B, B D, æquales ſint. Quare rectæ B H, H Q, æquales ſunt ſegmento C B; atque adeo duo rectangula A H, L Q, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento C B, cũ L H, ſit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula N G, H E, comprehenſa ſub A B, & C B, cum N H, H M, rectæ æquales ſint rectis C B, B D; & rectæ G H, E M, rectæ F L, hoc eſt, rectæ L H, hoc eſt, rectę A B. Et quia quadrata N Q, B M, æqualia ſunt; ſi addatur commune K G, erunt B M, K G, ſimul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinque rectangula A H, L Q, H E, B M, & K G, gnomonem R S T, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta A B, & ſegmento C B. Cum igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia ſint quadrato A E; erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta A B, & ſegmento C B, vna cum quadrato reliqui ſegmenti A C, æquale quadrato lineæ A D, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento C B. Quamobrem, ſi recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 34. primi. diametrum DF, quadrata.

b 34. primi. quia N H, æqualis eſt rectæ C B, erit N Q,

c 34. primi. comprehenſa erunt ſub AB,

d 34. primi. N H, H M, rectæ æquales ſint rectis C B, B D;

SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD,, æquale est quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: [a] *At quadrata ex AB, BC,* [b] *æqualia sunt rectãgulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

[a] 4. secũdi.

[b] 7. secũdi.

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hæc 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

NAM recta AB, secta est in C, vtcunque, eique addita BD, segmento CB, æqualis, demonstratumque est, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, vnà cum quadrato alterius segmenti AC.

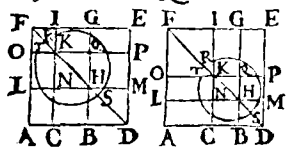
Item sic.

SI linea recta secetur bifariam, eique in re-

ctum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, *secta est bifariam in* B, *eique addita* CA, *probatumque fuit, quadratum totius* AD, *æquale esse rectangulo quater comprehenso sub* AБ, *composita ex* BC, *dimidia, & adiecta* AC, *& sub dimidia* CB, *vna cum quadrato adiectæ* AC.

*IAM vero ex hac quoque propos. 8. inueniemus alia ratione, numerũ quadratũ, cũ quo datus quilibet numerus conficiat numerũ similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati demat*ur 1. *reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit* 32. *Tollatur* 1. *ex eius quarta parte* 8. *Reliquus enim numerus* 7. *dabit quadratũ* 49. *cum quo datus numerus* 32. *efficit quadratũ* 81. *Cuius latus* 9. *est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum* AH, *quater*



2 8. *secũdi.*

sumptum, cum quadrato OI, 2 *æquale est quadrato* AE; *si rectangulum* AH, *ponatur* 8. *nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum* CH, *adeoque, &* CB, *eius latus,* 1. *erit linea* AB, 8. *vt ducta in* CB, 1. *faciat* 8. *Ablata ergo* 1. *reliquum erit* AC, *latus quadrati* OI, 7. *quod quæritur.*

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerũ diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. *numeretur.*

CONTRA, *inueniemus quoque numerũ quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerũ etiã quadratum. Si namque ad quartã partem numeri dati addatur* 1. *conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus* 32. *si ad quartã eius partem* 8. *adijciatur* 1. *fiet latus* 9. *à cuius quadrato* 81. *si detrahatur datus numerus* 32.

remanebit

remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semp est una unitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum B M, ideoque & latus eius B D, 1. erit linea A B, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi aqualis, 1. quod quidem latus A C, perpetuo una unitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

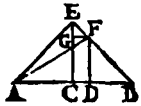
SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, ducanturque rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturque tandem A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; [a] erunt anguli C A E, C E A, æquales: Est autem angulus A C E, rectus:

[a] 5. primi.

[a] 32. primi. Reliqui igitur [a] anguli alium rectum conficient, ideoque A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semi rectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, [b] æqualis est

[b] 29. primi. [c] 32. primi.



recto E C B, externus interno; [c] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum. Igitur & E F G, semirectus erit, propterea{que} anguli E F G, F E G, æquales erunt, [d] ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, [e] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quòd & lineæ A C, C E, æquales sint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, [f] erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplũ erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ C D. Est enim C D, [g] recta rectæ FG, æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, [h] æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum AD, D F. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectę D F, æquale est quadrato rectæ D B. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidię lineę, & intermedię sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia; & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 6. primi. [e] 47. primi. [f] 47. primi. [g] 34. primi. [h] 47. primi.

SCHO-

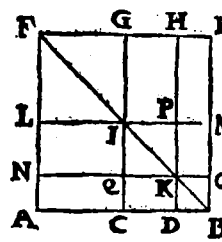
SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum, æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, una cũ parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, una cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; Atqui quadrato ex D B, una cum rectangulo bis sub B C, C D, [b] æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex AC, C D. Quod ostendendum erat. [1] 4. secũdi [b] 7. secũdi.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoque A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum AC, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, una cũ quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex AC, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo sub A C, C D, bis [c] est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D. [c] 4. secũdi.

IAM vero rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. et 9. partiũ inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt precedentes, hoc modo. Descripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductaq; diametro B F, ducantur per C, D, lateribus A F, B E, parallelæ C G, D H, secantes diametrũ B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B, F E,



[a] 34. primi.

FE, parallela agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, [a] est LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, aequalis; erunt NH, DO, quadrata partium inaequalium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatae lineae AC, & intermediae sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, aequalia quadratis LG, QP, vt mox demonstrabitur; liquidò constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum hac bis in illis contineantur. Quòd autem tria haec rectangula DO, NI, IH, aequalia sint quadratis LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, [b] aequale est rectangulo QM, quod recta NQ, QO, [c] aequales sint aequalibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP, & insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, aequalia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, aequalia duobus quadratis LG. Esse autem KM, DO, IH, aequalia quadrato LG, sic demonstrabimus. [d] Rectangula KM, DO, simul aequalia sunt ipsi PE, quod recta EM, ME, aequales sint, cum BM, aequalis sit ipsi CB, ob quadratum CM, [e] & ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est [f] ipsi AC. Addito ergo communi IH, erunt KM, DO, IH, aequalia ipsi IE, hoc est, quadrato LG; [g] quod IE, LG, aequalia sint, ob rectas LI, IM, [h] qua aequalibus AC, CB, aequales sunt. Quod est propositum.

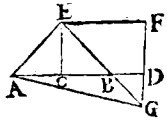
[b] 36. primi.
[c] 34. primi.
[d] 36. primi.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 36. primi.
[h] 34. primi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quępiam recta linea:

linea: Quod a tota cum adiũcta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

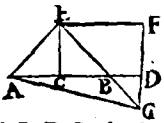
SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis A C, C D, describuntur Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in præcedenti propos. & C E B, semirectum;



[a] ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque. Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare [d] rectæ E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G, esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, [g] cum C D, recta æqualis sit rectę E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est

[a] 20. primi.
[b] 34. primi.
[c] 32. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 34. primi.

[a] 47. primi.



le est [a] quadratum rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

[b] 4. secũdi.

ALITER. Quia quadratum ex A D, [b] *æquale est quadratis ex A C, C D, una cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; si commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D.* [c] *Sed quadrato ex B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonstrandum.*

[c] 7. secũdi.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta B D, superabit quoque C D, ipsam A C, eadem recta B D. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D. Atqui quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo sub A C, C D, bis, [d] *æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

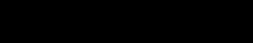
[d] 4. secũdi.

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinis 3. vt totus numerus compositus sit 13.

Quadrati

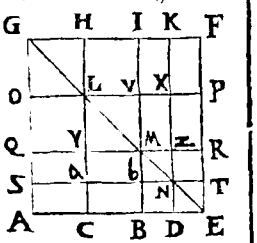
Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 12. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

SED & hæc propos. 10. facile ex præcedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, secta bifariam in C, eiq; addita recta quæcunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum A C, C D, simul.



Addita namque recta A D, ad partes A, recta A E, quæ adiecta B D, æqualis sit; erit tota E D, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoque E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A, ipsi D B, sit æqualis, & A B, utriq; communis. Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc est, rectarum A D, B D, dupla erunt quadratorum rectarum E C, C B, hoc est, rectarum C D, A C quod est propositum. [a 9. secundi.]

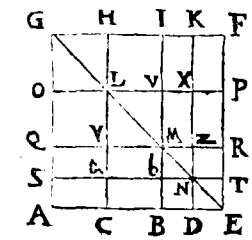
QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, sit adiecta linea B D, æqualis, describatq; quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K, secantes duplam diametrum E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agantur O P, Q R, S T, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata sunt, & est q; S N, ipsi A D, æqualis, & O L, ipsi A C, & a N, ipsi C D; erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, sive B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, simul dupla esse quadratorum O H, a X, simul. Quoniam enim quadrata S K, D T, superant quadrata O H, a X, quadratu D T, & rectangulis S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqua-



[b 34. primi.]

æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonſtrabitur; liquido conſtat, quadrata S K, D T, quadratorũ O H, a X, dupla eſſe, cum hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia ſint, ita patebit. Rectangulum Q L, [a] æquale eſt quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales ſunt; [b] propterea quod Q O, ipſi Y L, æqualis eſt, & Y L, ipſi O G, ob æqualia quadrata Y V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item [c] S Y, ipſi a M, & L I, ipſi Y V, & V K, ipſi V Z, & D T, ipſi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S Y, L I, V K, D T, hoc eſt, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia ſunt quinque rectangulis O H, a M, Y V, V Z, b Z, hoc eſt, duobus quadratis O H, a X. Quod eſt propoſitum.

[a] 36. primi.
[b] 34. primi.
[c] 34. primi.



II. PROBL. 1. PROPOS. 11.

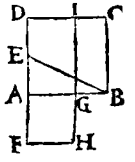
DATAM rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato.

DATA ſit recta A B, quam ſecare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota A B, & altero eius ſegmento, nempe minori, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti, nimirum maioris. Deſcribatur ex A B, quadratum A C, & diuiſo latere A D, quod cum linea data A B, angulum rectum efficit, bifariam in E, jungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis ſumatur E F, & ipſi A F, abſcindatur ex recta A B data æqualis A G. Eſt.n. A B, maior quam A F. Nã cum E B, ſit æqualis ipſi E F, ex conſtructione; ſint autem latera A E, A B, ma-

[a] 29. primi.

iora

iora latere E B; erunt quoque rectæ E A, A B, maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B, maior erit, quam reliqua A F. Dico rectam A B, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ A G; adeo vt A G, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint æqualia. quippe cum [a] F H, G H, æqualia sint oppositis A G, A F, æqualibus; omnesq; anguli eiusdem recti, ob rectum A, vt ad defin. 1. huius lib. ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub A B, & segmento B G; quòd A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F; [b] erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) vnà cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, [c] æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectę A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se equalia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



[a] 34. primi.

[b] 6. secũdi.

[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

HOC ~~theorema~~ problema *nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9.*

Vbi

Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.

PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debeat maius segmentum linea data A B, excitata perpendicularis A D, ipsi data linea A B, aquali, eaq; secta in E. bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, aqualis, vt demonstratum est.

12. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterũ A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, vna cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehẽso. Cũ enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunq;

erit

[a] erit quadratum rectę CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD: Eſt autem quadratis rectarum CD, DA, [b] æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale ſit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Quod eſt propoſitum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] *4. ſecũdi.*

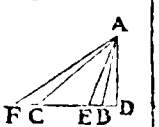
[b] *47. primi.*

[c] *47. primi.*

SCHOLIVM.

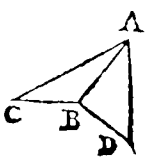
IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quanto maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis altorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM vero aſſumpſit Euclides, perpendicularẽ ductã ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractũ, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triãgulo ABC, angulus ABC, obtuſus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiuſmodi eſt recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis eſt recta AF, eſſent rurſus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum.



SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit.



IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius ſit quadratis laterum A B, B C, Dico angulum B, quem latus A C, ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, lineæ B C, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, [a] *æquale eſt quadratis ex A B, B D, hoc eſt, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C, Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & ideirco recta A D, minor quam recta A C. Itaque quia latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſunt lateribus A B, B D, trianguli A B D, vtrumque vtrique, & baſis A C, maior eſt baſe A D;* [b] *Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus eſt. Igitur A B C, recto maior, & obtuſus erit. Quod eſt propoſitum.*

QVOD IN etiam conuerſum huius propoſ. 12. demonſtrabimus: nimirum.

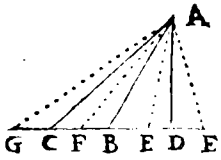
[a] 47. primi.

[b] 24. primi.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex oppoſito angulo A, recta A D, ſitque quadratum lateris

lateris AC, maius quam quadrata laterũ AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam dico cadere necessario in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [a] quadratum ex AC, aquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa, in punctum B.



[a] 47. primi.

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus BC, qualis est AF. Erit igitur [b] quadratum ex AC, aquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quòd recta AB, recto angulo AFB, oppositæ [c] maior sit quam AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

[b] 47. primi.

[c] 19. primi.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB, [d] aquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.

[d] 47. primi.

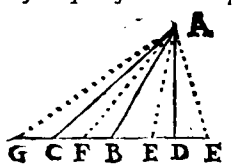
CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli, AGC, ACG, [e] minores sunt duobus rectis, estq; AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, [f] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB; ac proinde multo minus quadratis, ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neque inter C, B, neque

[e] 17. primi.

[f] 19. primi.

in C, *neque extra* C, *cadet extra B, qualis eſt A D, vt demonſtrabitur. Quare angulus* ABE, [a] *acutus erit, &* ABC, *obtuſus. quod ſecundo loco proponitur demonſtrandum.*

[a] 17. primi.



QVOD autem A D, *ſit ad* CB, *perpendicularis, ita demonſtrabimus. Si non eſt, ducatur* A E, *ad* C B, *perpendicularis cadens vltra* B, *vt oſtendimus. Quoniam igitur angulus* ABC, *oſtenſus eſt obtuſus,* [b] *erit quadratum rectæ* A C, *maius quàm quadrata rectarum* A B, B C, *rectangulo bis comprehenſo ſub* C B, B E: *ſed & quadratum eiuſdem rectæ* A C, *maius ponitur quàm quadrata earundem rectarum* A B, B C, *rectangulo bis comprehenſo ſub* C B, B D. *Igitur quadrata ex* A B, B C, *vna cum rectangulo bis ſub* CB, BD, *comprehenſo æqualia erunt quadratis ex* AB, BC, *vna cum rectangulo ſub* C B, B E, *bis comprehenſo: & ablatis quadratis communibus rectarum* A B, B C, *rectangulum bis ſub* C B, B E, *comprehenſum æquale erit rectangulo bis comprehenſo ſub* C B, B D, *ac proinde & rectangulum ſub* C B, BE, *ſemel comprehenſum æquale erit rectangulo ſemel ſub* C B, B D, *comprehenſo, & recta* B E, *rectæ* B D, *æqualis, pars toti, vel totum parti. quod eſt abſurdum. Eſt ergo* A D, *ad* C D, *perpendicularis, & nulla alia. quod eſt propoſitum.*

[b]

IAM vero, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque ſequens 13. *per numeros, quando libet, explicari poteſt, quòd poſito vno latere triãguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumque partes à perpendicularibus lineis factæ plerumque numeris exprimi nequeant, ſed ſint lineæ illi lateri incommenſurabiles: quod in præcedentibus propoſitionibus non accidebat, quippe cum, poſita diuiſa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes ſtatus poſſint pro libito ei commenſurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factũ eſt; præſcribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) conſtituantur eiuſmodi, vt omnia latera, partesque eorum à lineis perpendicularibus factæ ſint lineæ commenſurabiles: atque adeo veritas vtriuſque theorematis in numeris quoque*

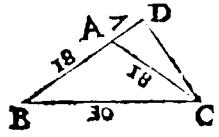
appareat

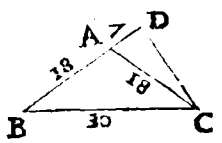
appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in ſcholio ſequentis propoſitionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum eſt vel Iſoſceles, in quo tertium latus ſemper [a] maius eſt, quòd obtuſo angulo opponatur, vel ſcalenum, (aquilaterum enim eſſe non poteſt, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in ſcaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo etiam ſegmentum vtriuslibet laterum aqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum eiſdem lateribus commenſurabile ſit. Secunda conſtituemus triangulum amblygonium ſcalenum laterum etiam commenſurabilium, & in quo ſegmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum lateribus eiſdem ſit commenſurabile. Tertia denique triangulum amblygonium ſcalenum proponemus commenſurabilium laterum, & in quo ſegmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtuſum angulum eiſdem lateribus commenſurabile exiſtat.

[a] 19. primi.

REGVLA I.

AD conſtruendum triangulum amblygonium Iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo ſegmentum exterius alterius laterum aqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtuſum, eiſdem lateribus quoque ſit commenſurabile; ſtatuatur ſegmentum exterius tot partium aqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrũis laterum aqualium ponatur dicti ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas, maximũ autem obtuſo angulo oppoſitum eiuſdem ſegmenti quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas. Vt in triangulo ABC, angulus A, ſit obtuſus, ductaque ſit CD, ad BA, latus productum perpendicularis. Si igitur AD, cõſtituatur partium 7. erit vtrumuis laterum AB, AC,



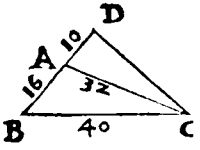


partium 18. qui numerus habetur, ſi duplicaueris 7. addideriſque $\frac{4}{7}$. ipſius. Latus vero B C, *erit partium 30. quem numerum habebis, ſi quadruplicaueris 7. adiunxerisque $\frac{2}{7}$. ipſius. In hoc triangulo quadratũ lateris* B C, *eſt 900. cui æqualia ſunt quadrata laterum* A B, A C, *nempe 324. 324. vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub* A B, A D, *hoc eſt, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque ſummam 900. Quam ob rem, vt in hoc ſcholio oſtendimus, erit ducta* C D, *ad* B D, *perpendicularis, & angulus* B A C, *obtuſus. Quòd ſi ſingulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commenſurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt ſi inuentos numeros duplices, efficies* A D, 14. *& tam* A B, *quàm* A C, 36. *at* B C, 60. *Propoſitum quoque triangulum reperies, ſtatuendo ſegmentum exterius* A D, *quotcunque partium, etiamſi à 7. non numerentur: ſed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, ſtatuendo latus quodcunque, à quo incipere uis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat ſegmenti* A D, *quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas, vtrumuis autem æqualium ſit eiuſdem ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas.*

REGVLA II.

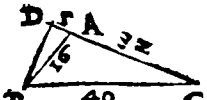
VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commenſurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat ſegmentum exterius commenſurabile etiam lateribus: ſtatuatur exterius ſegmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus ſi addas $\frac{3}{5}$. habebis minimum latus. Si vero eaſdem partes dicti ſegmenti triplices, addaſque $\frac{1}{5}$. vel ſi partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes eaſdem dicti ſegmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt ſi in appoſito triangulo ſegmentum A D, *conſtituatur 10. erit* A B. 16. A C,

AC, 32. & BC, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris BC, quod eſt 1600. æqualia eſſe quadrata laterum AB, AC, nimirum 256. 1024. vnà cum rectangulo bis ſub AB, AD, comprehenſo, id eſt, cum 160. 160. Ex quo fit, CD, eſſe ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtuſum, vt ſupra in hoc ſcholio oſtendimus. Iam ſi ſingulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præſtabunt. Vt ſi eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, ſi exterius ſegmentum AD, ſtatuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic ſi eoſdem numeros triplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96, BC, 120. & ſic deinceps.



REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commenſurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque ſegmentum lateribus trianguli commenſurabile; accipiatur rurſum exterius ſegmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in precedenti regula. Quas ſi triplices, addasque $\frac{1}{5}$. produces minimum latus: Si vero eaſdem multiplices per 6. adiungasque $\frac{2}{5}$. habebis latus medium: Si denique eaſdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt ſi in triangulo propoſito ſegmentum AD, ſiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia exiſtent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, AD, hoc eſt, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusque BAC, obtuſus, vt in hoc ſcholio ſupra demonſtrauimus.



Quòd ſi numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis propertionales, in quibus eadem hæc propoſ. 12. examinabitur. Vt ſi eos quadruplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eoſdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit ſegmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.

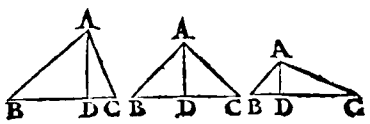
CAVE *antem, exiſtimes, poſito latere aliquo trianguli amblygonij, vel ſegmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo ſeruare neceſſario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua etiam cognoſcantur. Hoc enim falſum eſt, cum illa variari poſſint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præſcriptis regulis ſolum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones ſeruent, conſtitui poſſe triangulum amblygonium, vnà cum ſegmento exteriore, in quo veritas propoſitionis 12. poſſit examinari.*

13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triangulis, quadratum a latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duobus quadratis laterum A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarum B C, C D, [a] æqualia rectãgulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, [b] æquale est quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, [c] æquale sit quadratum rectę A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & quadrato rectæ A B. quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 7 secũdi.

[b] 47. primi.

[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius,

maius, minusue, & quanto maius sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri opposítus fuerit rectus, vel obtusus aut acutus.

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; Idē tamen verū etiá est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs vero a quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus. [a] maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

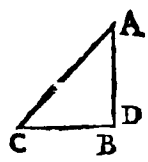
a 16. primi.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A B, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpēdicularis ducatur A D, quæ eadem erit, quæ latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendi-

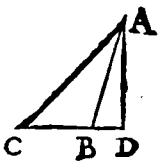
cularis

cularis cadit, & sub linea C D, qua interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex A B, C B, [a] æqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, una cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.



[a] 47. primi.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D, [b] æqualia sunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erūt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, [c] æquale est quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, una cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, [d] æqualia quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, una cum rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, una cum rectangulo sub C B, B D, [e] æquale est rectangulum sub C D, C B; Ac propterea duplo quadrati ex C B, una cum rectangulo bis sub C B, B D, æquale est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, una cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quā quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D.



[b] 47. primi.

[c] 4 secūdi.

[d] 47. primi.

[e] 3. secūdi.

C D. *Quod eſt propoſitum.*

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex AC, [a] *maius eſt, quam quadrata ex* A B, B C, *rectangulo bis ſub* C B, B D, *comprehenſo, hoc eſt, quadratum ex* A C, *æquale eſt quadratis ex* A B, B C, *vnà cum rectangulo ſub* C B, B D, *bis comprehenſo; erit quadratum ex* A B, *minus, quam quadratum ex* A C, *quadrato ex* B C, *& rectangulo ſub* C B, B D, *bis: Ac proinde ſi quadrato ex* A C, *addatur quadratum ex* B C, *erit quadratum ex* A B, *minus quam quadrata ex* A C, B C, *quadrato ex* B C, *bis ſumpto, & rectangulo bis ſub* C B, B D, *comprehenſo. Cum ergo quadrato ex* B C, *vnà cum rectangulo ſub* C B, B D, *contento,* [b] *æquale ſit rectangulum ſub* C B, C D, *contentum; erit quoque quadratum ex* A B, *minus quam quadrata ex* A C, C B, *rectangulo comprehenſo bis ſub* C B, C D. *Quod eſt propoſitum.*

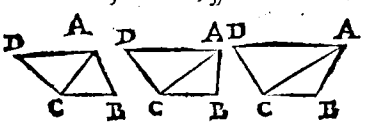
[a] 12. ſecũdi.

[b] 3. ſecũdi.

IN ſcholio quodam antiquo demonſtratur ſequens theorema, inſtar illius, quod nos in ſcholio præcedentis propoſ. ſecundo loco demonſtrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorũ: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit.

IN triangulo A B C, *quadratum lateris* A B, *minus ſit, quam quadrata laterum* A C, C B. *Dico angulum* C, *quem dictum latus ſubtendit, eſſe acutum. Ducatur enim ex* C, *ad*



A C, *perpendicularis* CD, *lineæ* CB, *æqualis, iungaturque recta* A D. [c] *Quoniã igitur quadratum ex* A D, *æquale eſt quadratis ex* A C, C D, *hoc eſt, ex* A C, C B: *Ponitur autem quadratum ex* A B, *minus quadratis ex* A C, C B; *Erit quadratum ex* A D, *maius quadrato ex* A B; *& ideo recta* A D, *maior quam recta* A B. *Itaque quia duo latera* A C, C D, *trianguli* A C D, *æqualia ſunt duobus lateribus* A C, C B, *trianguli* A C B, *vtrumque vtrique; & baſis* A D, *maior baſe* A B; [d] *Erit angulus* A C D, *maior angulo* A C B: *Sed* A C D, *rectus eſt, ex conſtructione. Ergo* A C B, *recto minor, & acutus erit.*

[c] 47. primi.

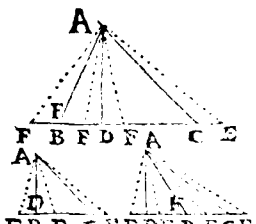
[d] 25. primi.

SED

SED & cõuersum huius propes. 13. ostendemus, nimirũ.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

IN triangulo A B C, ad latus B C, demittatur ex angulo opposito A, recta A D; sitq; quadratum lateris A B, minus quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo sub B C, C D, bis comprehenso. Dico A D, esse perpendicularem ad B C, & angulum A C B, acutum. Si namque A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad B C, perpendicularis, quam dico necessario cadere citra pũctum C, versus B, hoc est, vel in latus B C, vel in punctum B, vel in latus B C, versus B, productum. Cadat enim, si fieri potest, in C, ita vt A C, sit ad B C, perpendicularis. Erit igitur, quadratum ex A B, æquale quadratis ex A C, C B. quod est absurdum, cum minus ponatur. Nõ cadit ergo perpẽdicularis ex A, deducta ad B C, in pũctũ C.



CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa vltra C, in E, qualis est A E. Erit igitur [b] quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B. Igitur & quadrata ex A E, E B, minora erunt quadratis ex A C, C B. Cum ergo quadratum ex A C, [c] æquale sit quadratis ex A E, E C; erunt quoque quadrata ex A E, E B, minora quadratis ex A E, E C, C B: Et ablato communi quadrato rectæ A E, erit reliquum quadratum ex E B, minus quoque quadra-

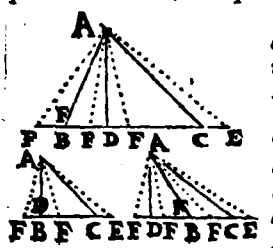
[a] 47. primi.

[b] 47. primi.

[c] 47. primi.

quadratis ex E C, C B. quod eſt abſurdum. Cum enim quadratum ex E B, [a] æquale ſit quadratis ex E C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt oſtendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis eſt A D, vt demonſtrabitur, ac propterea [b] angulus A C B, acutus erit. Quod ſecundo loco propoſitum demonſtrandum.

[a] 4. ſecũdi.



[b] 17. primi.

QVOD autem A D, ſit ad B C, perpendicularis, ita oſtendemus. Si non eſt, ſit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum eſt, vbicunque hoc contingat, ſiue intra triangulum, ſiue in punctum B, ſiue extra triangulum. (In ſecundo tantum triangulo non dicet aduerſarius, perpèdicularem cadere in B; quia eadem eſſet, quæ A D. quod ille negat) Quia ergo angulus A C B, oſtenſus fuit acutus, [c] erit quadratũ ex A B, minus, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C F, hoc eſt, quadratum ex A B, vnà cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F, æquale eſt quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum idem ex A B, vnà cum rectangulo bis contento ſub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale erit quadrato eidem ex A B, vnà cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F: Et ablato communi quadrato rectæ A B, rectangulum ſub B C, C D, bis cõprehenſum æquale erit rectangulo bis ſub B C, C F, comprehenſo: ac proinde & rectangulum ſemel comprehenſum ſub B C, C D, æquale erit rectangulo ſemel comprehenſo ſub B C, C F, ideoq; & rectæ C D, C F, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod eſt propoſitum.

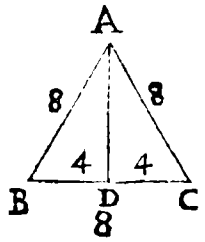
[c] 12. ſecũdi.

QVEMADMODVM autem in ſcholio ſuperioris propo-

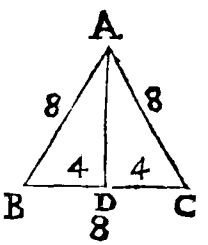
propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel aquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo aquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inaequale, siue maius illud sit, siue minus vtrouis aequalium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisque in alterutrum aequalium laterum cadit: Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum aequalium cadit: Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus: Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur: Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est. vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularium.

REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli aquilateri statuatur quotuis partium aequalium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo aquilatero A B C, *diuidet perpendicularis* A D, *oppositum latus* B C, *bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demon-*



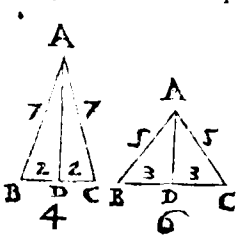
strauimus



strauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta B D, C D, *4. 4. Vbi vides quadratum lateris* A B, *angulo acuto* C, *oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64. vnà cum rectangulo bis contento sub* B C, C D, *id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum* A C, C B, *nempe 64. 64.*

REGVLA II.

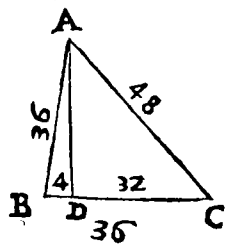
SI vtrumque laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroque simul, aut plures, quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquã latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt si in priori horum Isoscelium vtrumuis latus A B, A C, *statuatur 7. &* B C, *4. In posteriori autem vtrumlibet* A B, A C, *5. &* B C, *6. Cum ergo perpendicularis* A D, *diuidat basim* B C, *bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. erunt segmenta* B D, C D, *in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori vero 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris* A B, *angulo acuto* C, *oppositi, (vterq; enim angulus* B, C, *acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D, *æquale esse quadratis simul laterum* A C, C B. *&c.*



REGV-

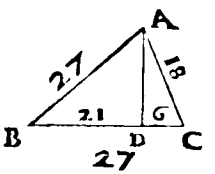
REGVLA III.

IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpend:cularis in alterum aqualinm laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, easq; per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero eadem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; segmenta simul addita constabunt vtrumq; laterũ aqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus vero AC, 48. & vtrumq; latus AB, EC, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cũ 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoq; quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in B D, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inaqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis vero aqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.



REGVLA IIII.

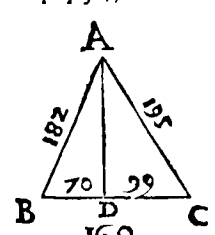
IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum aqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmẽtũ si statuas quotuis partiũ numero pariũ, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adycias, vel earũ



medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si vero easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique aequalium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9 producetur. Vt si in Isoscele ABC, minus segmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atque tam AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nimirum 729. vnà cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

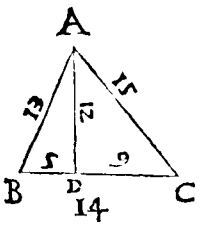
IN Scaleno triangulo, in quo perpẽdicularis in minimũ latus demittitur, erit segmentũ basis iuxta medium latus, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstratũ est. Quod segmentũ si constituatur tot partium æqualium, vt à 70 numerentur, nimirum partiũ 70. vel 140. vel 210. &c. eisq; addantur earum $\frac{29}{70}$. confectum erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimũ latus. Si vero partes minoris segmenti dupl'icentur, & producto adiiciantur $\frac{1}{70}\frac{2}{}$. hoc est, $\frac{3}{5}$. earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiusdem minoris segmenti duplicentur, producto $\frac{55}{70}$. id est, $\frac{11}{14}$. earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est, 33124. vnà cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id est, cum



cum 16731.16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus simul quadratis 38025.28561. laterum AC, CB, &c.

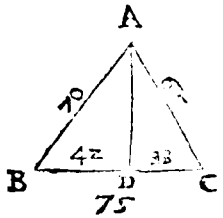
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, q̃ ad propos. 47. lib. 1. ostendimus, minus segmentũ minimo lateri adiacens. Quod segmẽtũ si statuatur tot æqualiũ partium, vt à 5. numerẽtur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eisque addantur $\frac{4}{5}$. consectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collectæ component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat 5. erit segmentum maius CD, 9. & totum latus BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.



REGVLA VII.

IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eisq; addantur $\frac{9}{33}$. hoc est, $\frac{3}{11}$. fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus efficient. Si vero numero minoris segmenti duplicato adiiciantur $\frac{4}{33}$. producetur medium latus. Si denique eidem numero lateris maximi adiiciantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur minimum

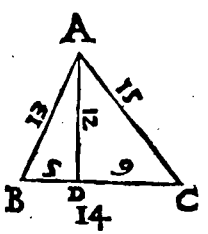


nimum latus. Vt ſi in Scaleno ABC, minus ſegmentum C D ſit 33. erit maius ſegmentum B D, 42. totumque latus maximum BC, 75. & medium A B. 70. & minimum AC, 65. &c.

QVOD ſi ſingulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is ſit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri reperientur, ſi minus ſegmentum, vel maius, vel quodcunque latus ſtatuatur quotlibet partium, ſi modo proportiones ſeruentur, quas ſupradictis regulis expreſſimus.

HIC quoque ſciendum eſt, non in omni triangulo oxygonio proportiones præſcriptas reperiri inter latera, cum mille modis poſſint variari eorum proportiones. Neque vero hoc regula illa docent, ſed vſus earum in eo ſolum conſiſtit, vt ſeruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari poſſint, in quibus propoſitio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodentur.

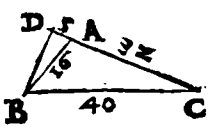
IAM vero ſi perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum eſt minus eſſe duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propoſitum ſit rectangulum, quærendi ſunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſcripſimus. Vt in figura regula 6. ſi in triangulo A B D, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acuto angulo B, oppoſiti, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex



B D, in B D, hoc eſt, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata ſimul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, ſi minimum latus B D, ſtatuatur partium 6. erit A D, 8. & A B, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris A D, acuto angulo B, ſubtenſi, nimirum 64. una cum eo, quod fit ex B D, in B D, bis, hoc eſt, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppoſiti, hoc eſt, 36. vna cum eo, quod fit ex A D, in A D, bis, id eſt,

id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum A B, A D, *nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo* A C D, *minimum latus* C D, *ponas 9. reperies ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus,* A D, *40. &* A C, *41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris* A D, *angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vnà cum numero, qui fit ex* C D, *in* C D, *bis; id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum A C,* C D, *hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quòd si minimum latus* C D, *facias 7. comperies* A D, *24. &* A C, *25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris* C D, *angulo acuto* A, *subtensi, id est, 49. vna cum numero, qui bis producitur ex* A D, *in* A D, *hoc est, cum 576. 576. facere 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum* A C, A D, *hoc est, 625. 576.*

A T si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentũ namque exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum C D, *inter angulum acutum* C, *& perpendicularem* B D, *cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est quadratum lateris* A B, *angulo* C, *acuto oppositi, hoc est, 256. vnà cum rectangulo sub* A C, C D, *comprehenso bis, id est, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum* BC, AC, *nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.*



NEQVE vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.

IN triangulo A B C, recta A D, secet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C, dupla esse quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, quæ primùm rectæ A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. [a] *Quoniam igitur tam quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A D, D B, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A D, bis sumpto, vnà cum quadratis ex D B, D C. Cum ergo quadrata ex D B, D C, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatum, erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis sumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla sunt duorum quadratorum ex A D, D B. quod est propositum. Quod clarius ita ostenderur.* [b] *Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonstrandum erat.*

[a] 47. primi.

[b] 47. primi.

CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratum ex B C, quadruplum est tam quadrati ex B D, quam quadrati ex D C, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo

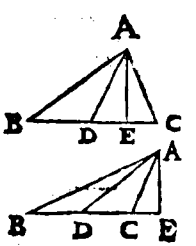
duo quadrata ex AC, CD, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex AD; quòd [a] quadrata ex AC, CD, semel sumpta æqualia sint quadrati ex AD. Igitur quadratum ex BC, vnà cum quadratis ex AC, CD, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex DB, DC, AD. Cum ergo & quadratum ex CD, bis sumptum, duplum sit quadrati ex CD; [b] erit reliquum quadratum ex BC, vnà cum quadrato ex AC, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Sunt autem [c] quadrata ex BC, AC, æqualia quadrato ex AB. Igitur quadrata ex AB, AC, (quæ æqualia sunt quadrato ex BC, vnà cum quadrato ex AC, bis sumpto) dupla quoque sunt quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

[a] 47. primi.

[b] 20. pron.

[c] 47. primi.

TERTIO cadat perpendicularis AE, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur [d] quadrata ex BE, EC, dupla sunt quadratorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quòd [e] quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, vna cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; [f] erunt reliqua quadrata ex BE, EC, vna cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, [g] æquale sit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.



[d] 9. secũdi.

[e] 47. primi.

[f] 20 pron.

[g] 47. primi.

POSTREMO cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum. Quoniam igitur [h] quadrata ex BE, CE, dupla sunt quadratorum [illegible]. Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta [illegible] quadrati ex AD; quòd [i] quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, vna

[h] 10. secundi.

[i] 47. primi.

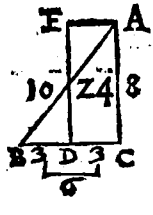
cum quadratis ex A E, DE, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. *Cum ergo & quadratum ex* D E, *bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex* D E; [a] *erunt reliqua quadrata ex* B E, C E, *vnà cum quadrato ex A E, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex* B D, A D. *Quare cum quadratis ex* B E, A E, [b] *æquale ſit quadratum ex* A B; *& quadratis ex* C E, A E, *quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex* A B, A C, *dupla quadratorum ex A D,* D B. *Quod erat oſtendendum.*

[a] 20. pron.

[b] 47. primi.

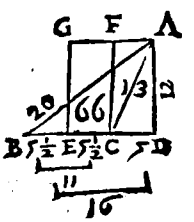
NON te moueat autem, quod ad huius theorematis demonſtrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuerſaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi poteſt ſine demonſtratione, vt in expoſitione eius principij diximus: Vel propoſitio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonſtrari poteſt: Vel certe theorema ipſum poſt librum 5. demonſtrari; ita vt circulus in demonſtrando nulla ratione committatur, etiamſi principium illud demonſtretur libro 5. quia propoſitio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonſtrat, hac ferè ratione. Sit primo triangulum rectangulum A B C, *cuius latera nota ſint, nempe* A B, 10. *palmorum;* A C, 8. B C, 6. *Diuiſo latere* B C, *bifariam in* D, *vt ſint* C D, B D, 3. *palmorum, perficiatur rectangulum* A C D E, *quod æquale eſt triangulo* A B C, *vt in ſcholio propoſ. 41. lib. 1. oſtendimus. Quia vero ex ductu* C D, [illegible] *palmorum in* C A, 8. *palmorum produc[illegible]guli* C E, 24. *palmorum quadratorum,* [illegible]*uius lib. docuimus; Totidem palmos quadrat[illegible] continebit triangulum* A B C, *rectangulo* C E, *æquale. Quod eſt propoſitum.*



SIT

SIT deinde triãgulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorũ; A C, 13. B C, 11. Primũ igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ A D, ex A, in latus B C, protractum demissæ, hoc modo. Quoniã quadratum lateris A B, [a] maius est, quã quadrata laterũ A C, B C, rectãgulo bis cõprehenso sub B C, C D; si quadrata laterũ A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis cõprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidiũ 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorũ, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratũ est in libro de mensurationibus omnium quãtitatum. Quia vero quadrata laterum A D, C D, [b] æqualia sunt quadrato lateris A C; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam vero diuiso latere B C, bifariã in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus perãctis, si E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est [c] enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis &c.) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est præpositum.



[a] 12. secũdi.

[b] 47. primi.

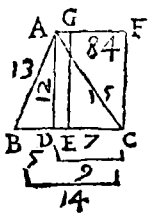
[c] 34. primi.

SIT postremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13. palmorum; A C, 15. B C, 14. Primum igitur hic quoque reperienda [illegible] pendicularis A D, ex A, ad B C, demissa, hac [illegible] iam quadratum lateris A B, [d] minus est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum

[d] 13. secũdi.

tum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, B C, hoc eſt, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum ſub B C, C D. Si igitur 126. rectangulum ſub B C, C D, diuidatur per B C, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9. vt conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17 & à nobis demonſtratum eſt in lib. de menſurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex A D, C D, [a] æqualia ſunt quadrato ex A C; ſi quadratum 81 palmorum, nempe lateris C D, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. ſit 12; erit latus A D, 12. palmorum. Iam vero diuiſo latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipſi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, ſi C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (eſt enim E G, rectæ ipſi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum triangulo A B C, ſit æquale, ex ſcholio propos. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum E F, & triangulum A B C, in eiſdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli A B C, 84. palmorum. Quod eſt propoſitum.

[a] 47. primi.



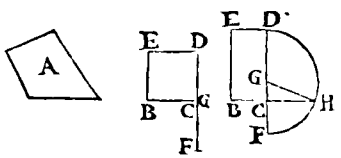
ITAQVE in vniuerſum, area cuiuſcunque trianguli producitur ex dimidio baſis in perpendicularem, quæ a vertice ad baſim demittitur, vt in exemplis datis eſt manifeſtum. Sed plura hac de re in libro de menſurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoſcantur, demonſtrauimus in noſtris triangulis rectilineis.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, sitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidat quoque D F, bifariam in punctο G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, [b] æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, [c] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, [d] æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vna cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.



[a] 45. primi.

[b] 34. primi.

[c] 5. secũdi.

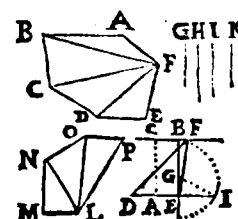
[d] 47. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

VERVM quia laborioſum eſt, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum conſtruere æquale, quod ſæpius ſuper datam rectam conſtituendum ſit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortaſſe deſcribemus quadratum dato rectilineo æquale, ſi datam figuram rectilineam in triangula reſoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc eſt, latus quadrati, quod cuiuis triangulo æquale ſit, inueſtigemus: quod factu facillimum eſt, vt mox oſtendemus. Nam ſi per ea, quæ in ſcholio propos. 47. lib. 1. ſcripſimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod ſit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT ſi datum ſit rectilineum A B C D E F, reſoluemus illud in triãgula A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata ſint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum conſtituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Ductæ autem rectæ N L, erigemus ad eam perpendicularem N O, lateri I, æqualem. Similiter ductæ rectæ O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusq; rectam P L. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri ſumpta ſit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, poſtremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonſtrauimus, atque adeo omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc eſt, datæ figuræ rectilineæ A B C D E F.



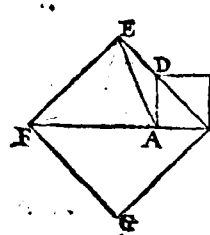
PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis eſt. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo D E F, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe D E, bifariam in A, producaturq; quãtum libet. Ducta deinde per angulum oppoſitum

situm F, lateri D E, parallelæ F B, ducatur per E, ad D E perpendicularis H E B, secans F B, in B, sitq; E H, ipsi A E, dimidio lateris D E, æqualis. Postremo, diuisa tota linea B H, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum G H, vel G B, arcus secans latus D E, productum in I. Dico quadratum lateris E I, æquale esse triangulo D E F. Si namque compleatur rectangulum A E C, & semicirculus B H, ducaturq; recta G I, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex E I, rectangulo A B, æquale esse. Cum ergo rectangulum A B, triangulo D E F, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. quod basis D E, sit dupla basis A E, constat propositum.

QVONIAM *vero secundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato non iniucundum, ad hunc modum.*

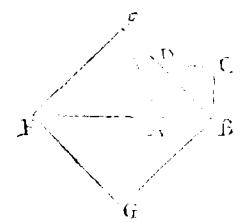
DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumq; sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum A C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt sit D E, recta rectæ A D, æqualis. Dico rectam E B, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B. Ducatur enim E F, perpendicularis ad B E, quæ rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus F E B, rectus est, & E B F, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4. huius lib. [a] *erit & B F E, semirectus.* [b] *Quare recta B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratum rectæ B E. Quod si ducatur recta*



[a] 32. primi.
[b] 6. primi.

Ergo, diameter excessu (quo ipsa diameter latus alicuius quadrati superat) minor est duplo, ipsius quadrati, cum ipso hoc excessu, dati latere quadrati quadrati.



ta AE, erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, ęquales. Quare si auferantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, æquales, ideoque rectæ EF, AF, æquales erunt. Quoniam igitur diameter DF, rectam AE, secat bifariam secta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AE, quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLI-

Quadratum enim rectæ AE, est æquale duobus quadratis rectarum DE et DA: est quadratum rectæ AE, est HK, quia DH vel DK, est AE: subtracto igitur eadem figura, rectæ DE; remanet quadratum AC, rectæ AD, quod æquale est EHIKGF, qui remanet subtracto EG ab HK.

EVCLIDIS

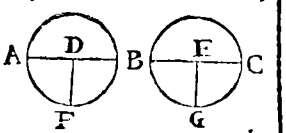
ELEMENTVM TERTIVM

DEFINITIONES.

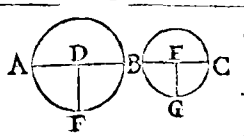
I.

AEQVALES circuli ſunt, quorũ diametri ſunt æquales; vel quorum, quę ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.

QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demõſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt vſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu rectæ ex centris ductæ, ſunt æquales; vel etiam quorũ totæ diametri æquales ſũt. Vt ſi diametri A B, B C, vel rectæ D F, E G, è centris D, & E, ductæ ſint æquales, æqua-



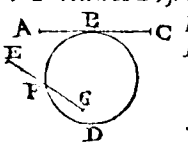
les



les erunt circuli A F B, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet circules, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris ſunt inæquales, inæquales eſſe; atque adeo illum, cuius diameter, vel ſemidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, ſemidiametrosue inæquales eſſe, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

II.

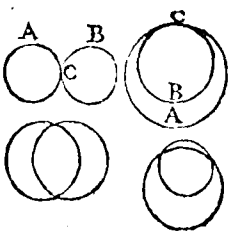
RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.



VT recta A B, ſi ita circulum B F D, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum ſecet, ſed tota iaceat extra ipſum, dicetur tangere circulum. At vero recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, ſecet circulum, cadatq; intra ipſum, non dicetur circulum tangere, ſed ſecare.

III.

CIRCVLI ſeſe mutuo tangere dicuntur, qui ſeſe mutuo tangentes, ſeſe mutuo non ſecant.



EODEM modo duo circuli A C, B C, ſe mutuo dicuntur tangere in C, ſi ita ſeſe contingant in C, vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius ſeſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus; aut interius, quando vnus intra alterum conſti-

constituitur. Quòd si duo circuli ita se mutuo tangant, ut unus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

IIII.

IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

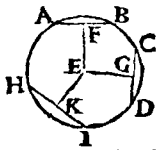
QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; alia vero infinitis modis variari possunt; recta distantia illius puncti a linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta B C, *dicitur esse perpendicularis* A D, *non autem* A E, *vel* A F, *vel alia quavis, quæ non perpendicularis est; quia* A D, *omnibus est brevior, ex coroll propos. 19. lib. 1. Immo non solum* A E, A F, *maiores sunt, quam* A D, *sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim* A F, [a] *maior, quàm* A E, *cum angulus* A E F, *sit obtusus, &* A F E, *acutus, & sic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim* A F E, *acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo* A D F, *duo anguli* A D F, A F D, [b] *minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum* A D F, *rectus sit, angulum* A F D, *recto esse minorem. Eadem ratione angulus* A E D; *ostenderetur acutus, propterea quòd in triangulo* A D E, [c] *duo anguli* A D E, A E D, *minores sunt duobus rectis, &* A D E, *rectus est,* [d] *ac proinde, cum ambo* A E D, A E F, [d] *æquales sint duobus rectis, erit* A E F, *obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per*

[a] 19 primi.

[b] 17. primi.

[c] 13. primi.

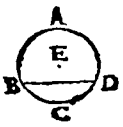
[d] 17. primi.



inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abesse dicetur a centro E, quam linea H I, si perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.

V.

SEGMENTVM circuli est figura, quę sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



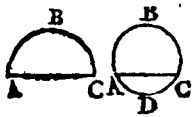
VT si dicatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta B D; quam figura B C D, comprehensa recta B D, & circumferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum B C D. Id quod ad defin. 18. lib. 1. demonstranimus. Vocatur a plerisque Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmenti, dicens,

cens, angulum mixtum BAC, vel BCA, contentum ſub rectâ lineâ AC, & circumferentiâ ABC, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentum circuli fuerit ſemicirculus,



dicetur angulus ſemicirculi: Si vero ſegmentum maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si denique ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.

VII.

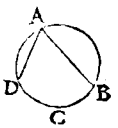
INſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

SIT ſegmentum circuli quodcunq; ABC, cuius baſis recta AC. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ BA, BC.

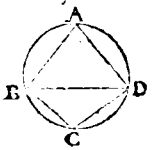
Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur exiſtere in ſegmento ABC.

VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.



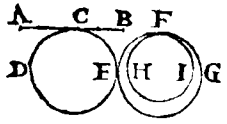
EX puncto A, quolibet ſuſcepto in circumferentia circuli A B C D, ducantur recta duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuiuſque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, aſſumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, inſiſtere dicitur circumferentiæ B C D. Perſpicuum autem eſt, hunc angulum à præcedenti non differre, niſi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur eſſe in ſegmento B A D, ſi recta B D, baſis duceretur; ex hac vero inſiſtere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus eſt angulus in ſegmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ inſiſtit, quamuis vnus & idem ſit; ad diuerſa ſiquidem referuntur. Angulus enim in ſegmento, ſegmentum, in quo exiſtit, angulus autem inſiſtens circumferentiæ, circumferentiam, quæ baſis eſt ipſius anguli, reſpicit. Vnde



ſi ſumatur ſegmentũ aliquod circuli B C D, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc ſegmento exiſtens, & eius circumferentiæ inſiſtens. Angulus enim in eo exiſtens, erit B C D; at eius circumferentiæ B C D, inſiſtens, erit angulus B A D, qui multum ab eo differt. Quæ in re mirum in modum hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem anguli in ſegmentis, & anguli circumferentiæ cuiuſcunque inſiſtentes, ad diuerſos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propoſ. lib. 3. quæ ſolum conuenire poteſt circumferentijs circulorum, quibus anguli inſiſtunt, non autem, in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoque facile conſtat ex verbo græco βεβηκέναι, quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit enim angulus D A B, ſupra circumferentiam B C D.

PRÆTER tres dictos angulos conſideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentijs ſe mutuo tangentibus, ſiue hoc exterius ſint, ſiue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C, angulus mixtus A C D, vel B C E, dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus

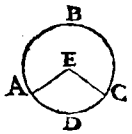
C E D,



C E D, tangat circulum E F G, exterius in E; Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F; appellabitur tã angulus curuilineus C E F, quam E F H, vel G F I, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.

IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

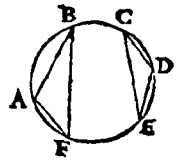


S I in circulo A B C D, cuius centrum E, rectæ A E, C E, constituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E C D, contenta rectis A E, E C, & circumferentia A D C, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicuè etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam A D C, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis A E, C E, assumptæ: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quã rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

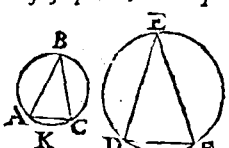
SIMILIA circuli segmenta sunt,

quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.



SEGMENTA, seu circumferentiæ ABDF, DCAE, eiusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.

EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes.



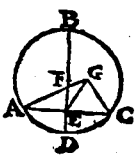
Consistit autē hæc segmentorum, circumferentiarūue similitudo in eo, quòd qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentiæ ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD; item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta; seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, uel etiam arcus, circumferentiasue, appellari similes.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes,

similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in iisdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæ AKC, DLF, GMI, quibus insistunt, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, [a] quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (a centro enim ducuntur) [b] erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.

[b] 8. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta ali-

qualinea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 4.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

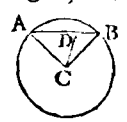
IN circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetque E D, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (e centro enim ducuntur) [b] erunt anguli E A D, E C D, æquales: Est autem angulus E D A, [c] angulo E C D, maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur & angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, opposita; hoc est, recta E B, sibi æqualis. [d] maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, oppositæ, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur,

[a] *1. tertij.*
[b] *5. primi.*
[c] *16. primi.*
[d] *19. primi.*

tur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum A B C, ita vt eadem sit, quæ circumferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectę lineæ patet, cum A B C, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli A B, cuius centrum C. Dico rectam A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, [a] *erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem angulus C D A,* [b] *angulo C B A, maior, externus interno. Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A,* [c] *latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circumferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod est propositum.*



[a] 5. primi.
[b] 16. primi.
[c] 19. primi.

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, [d] *caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.*

[d] 2. tertij.

THEOR.

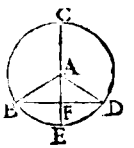
Y distantibus a se invicem: potest ergo linea recta circulum tangere in duobus punctis con[illegible]

3.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli B C D, recta C E, extensa diuidat rectam B D, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam A F, esse ad angulos rectos ipsi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & bases A B, A D, æquales. [a] Igitur anguli A F B, A F D, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.



[a] 8. primi.

SIT iam A F, ad angulos rectos ipsi B D. Dico rectam B D, bifariam secari in F, à recta C E. Ductis enim iterum rectis A B, A D; cum latera A B, A D, trianguli A B D, sint æqualia, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, æquales sunt duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F; & latera A B, A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [c] erunt latera F B, F D, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 5. primi.

[c] 26. primi.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim A F, perpendicularis est ad E D, erit tam quadratum rectæ A B, [d] æquale quadratis rectarum A F, F B, quam quadratum rectæ A D, quadratis rectarum A F, F D. Cum igitur quadratum rectæ A B, æquale sit quadrato rectæ A D, erunt & quadrata rectarum A F, F B,

[d] 47. primi.

F B, æqualia quadratis rectarum A F, F D. Quare dempto communi quadrato rectæ A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atque ideirco & rectæ F B, F D, æquales erunt.

COROLLARIVM.

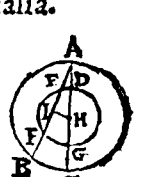
EX hac demonſtratione facile inferemus, in quo uis triangulo duorum laterum æqualium, ſiue æquilaterum illud ſit, ſiue Iſoſceles, lineam, quæ baſin bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſim: Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia ſunt, ex eo, quod recta A F, ſecat baſim B D, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim B D, à recta A F, bifariam ſecari. Sed hoc etiam demonſtrauimus ad propoſ. 26. lib. 1. & quidem vniuerſalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonſtrandum eſſe hoc loco ſequens theorema, ad ea, quæ ſequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circunferentiæ exterioris recta ducatur interioris circunferentiam ſecans: erunt eius ſegmenta inter vtramq; circunferentiam poſita, inter ſe æqualia.

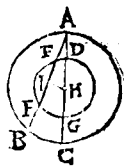
DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur prima per centrum H, recta A C, ſecans circunferentiam interiorem in D, G. Dico rectas A D, C G, æquales eſſe. Nam ſi ex H A, H C, quæ[a] æquales ſunt, demantur H D, H G, quæ eadem ratione æquales ſunt, [b] erunt



[a] 15. def.
[b] 3. pron.

recta

recta A D, C G, æquales.



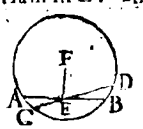
DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, non per centrum, secans interiorem circunferentiam in E, F. Dico rursus, rectas A E, B F, esse æquales. [a] Ducta enim ex centro H, ad A B, perpendicularis H I, [b] secabit hæc tam rectæ A E, in circulo A B C, quã rectã E F, in circuito D E F G, bifariam. Ablatis igitur æqualibus I E, I F, ex æqualibus I A, I B, [c] remanebunt A E, B F, æquales. quod est propositum.

[a] 12. primi.
[b] 3. tertij.
[c] 3. pron.

4. THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquã bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. [d] Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, [e] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.



[d] 1. tertij.
[e] 3. tertij.

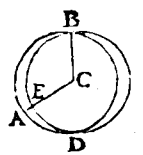
THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

5.

SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent; nõ erit illorum idem centrum.

DVO circuli A B D, E B D, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem cẽtrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad ſectionem B; C A, vero ſecans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, [a] æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.



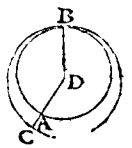
[a] 1 *prop.*

THEOR. 5. PROPOS. 6.

6.

SI duo circuli ſe ſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli A B, B C, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, a quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, ſecans vtramque circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, æqualis. Quare rectę A D, & C D, [b] inter ſe erũt æquales, pars & totũ, quod eſt abſurdũ. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo interius tangãt, &c. Quod demonſtrandũ erat.



[b] 1. *prop.*

SCHO-

SCHOLIVM.

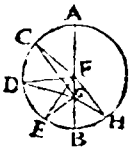
EVCLIDES propoſuit theorema hoc de circulis ſe ſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſe ſe tangentium, cum vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

7. THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam eſſe G A, in qua eſt cẽtrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam G C, quæ rectæ G A, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem recta G D, quæ ab eadem G A, plus diſtat; & eadem ratione G D, maiorem recta G E; atq; ita de alijs lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſq; partes minimæ lineę GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantũmodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur

cantur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniam igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, [a] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est, toti rectæ G A; erit & G A, maior quam G C. Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



[a] 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo E F G, latus E F, [b] minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem E F, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E. Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

[b] 20. primi.

RVRSVS, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; [c] erit basis G C, maior basi G D. Eadem ratione maior erit G C, quam G E: Item maior erit G D, quam G E. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior.

[c] 24. primi.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; [d] erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ G B, vel maximæ G A, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam G H: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem G A, per centrum ducta, minor quam G H, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ G B, vel maximæ G A, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

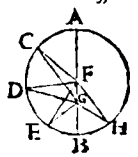
[d] 4. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVAMQVAM autem Euclides ſolum demonſtrauerit, lineam, quæ propinquior eſt rectæ per centrum ductæ, remotiore eſſe maiorem, ſi amba linea ex eadem parte diametri A B, exiſtant: idem tamen verum etiã eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Vt ſi quis dicat, rectam G D, propinquiorem eſſe rectæ G A, quam rectam G H; dico G D, maiorem eſſe, quam G H. Si namque ipſi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum eſt, nempe ſi fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, diſtent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur magis diſtare, quam G H, ac proinde magis, quam G E. Cum[a] ergo G D, maior ſit, quam G E, maior quoque erit eadem G D, quam G H.

[a] 7. tertij.



HANC porro propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna vero minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ, ~~vel minimæ~~ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter diſtabunt.

IN circulo A B C, punctum ſumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit D A, minima vero D C; ipſarum vero D E, D F, maior ſit D E; denique D E, D B, ſint æquales. Dico D A, per centrum tranſire, & D C, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt, D C, ipſi D A, eſſe in directum. Item D E, quæ maior ſumitur quam D F, propinquiorem eſſe maximæ D A, quam D F.

D F. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abesse. Primum enim si D A, non transit per centrum, ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium ex D, cadentium maxima Quod est absurdum; cum D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum.

[a] 7. tertij.

DEINDE si DC, non est in directum ipsi DA, protracta A D, in directum, [b] erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum D C, minima ponatur. Est ergo D C, reliqua pars diametri.

[b] 7. tertij.

RVRSVS si DE, non est vicinior maximæ DA, quam DF; aut æqualiter distabunt ab ea, aut D E, longius ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à D A, dicantur distare, [c] ipsæ erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim D E, maior. Si uero æqualiter ex eadem parte à DA, distare dicantur, erunt DE, DF, vna eademq; linea; atque adeo D E, maior non erit, quàm DF, quod est contra hypothesim. Quod si DF, dicatur esse propinquior maximæ D A, [d] ipsa erit maior, quam D E. Quod magis est absurdum.

[c] 7. tertij.

[d] 7. tertij.

POSTREMO si D E, D B, non æqualiter distant à D A, vel D C, [e] erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB.

[e] 7. tertij.

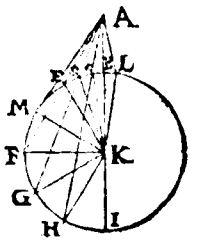
THEOR. 7. PROPOS. 8.

8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore

tiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimę, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ rectæ A I, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, minorem, quam A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ A I, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, [a] maiora ſunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc eſt, toti rectæ A I; erit & A I, maior



[a] 20. primi.

ior, quam A H. Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quam A F. Quare AI, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli AKH, æqualia ſunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus A K H, maior eſt angulo A K G; [a] erit baſis A H, baſe A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F: Item A G, maior, quam A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt linea remotiore. [a] 24. primi.

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, [b] minor eſt duabus A C, C K; ſi auferantur æquales B K, C K: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt. [b] 20. primi.

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duę rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; [c] erunt A C, C K, minores, quam A D, D K. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E: Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor eſt, quam remotior ab eadem. [c] 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia ſunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; [d] erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ A I, inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſsit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cum ſit remotior à minima, maior quam A L. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cum ſit minimæ propinquior, minor quam A L, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum. [d] 4. primi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab *A*, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ *AI*.

FIAT enim angulo *AKH*, æqualis angulus *AKM*, iungaturque recta *AM*. Quia igitur latera *AK*, *KH*, æqualia sunt lateribus *AK*, *KM*; sunt autem & anguli *AKH*, *AKM*, æquales: [a] erunt

[a] 4. primi.

bases *AH*, *AM*, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex *A*, ducatur ad partes *H*; ea vel maior erit, vel minor, quam *AH*, prout citra vel vltra rectam *AH*, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.

HÆC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex *A*, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta *AM*, in priori figura. Nam ducta recta *KM*, ex centro ad contactum, erunt duo latera *AK*, *KF*, trianguli *AKF*, æqualia duobus lateribus *AK*, *KM*, trianguli *AKM*, angulus vero

[b] 24. primi.

AKF, angulo *AKM*, maior. Igitur [b] basis *AF*, basi *AM*, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta *AM*.

PARI ratione eadem linea tangens *AM*, maior erit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cum

[c] 21. primi.

duo latera *AE*, *EK*, [c] minora sint duobus lateribus *AM*, *MK*; si auferantur æquales rectæ *KE*, *KM*, erit reliqua *AE*, minor quam reliqua *AM*. Eademque ratio est de cæteris.

QVAM QVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minima minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ducta sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

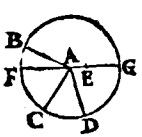
9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; [a] erũt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. primi.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, [b] sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; [c] erit recta A D, quæ propinquior est rectę A G, per centrum E, ductæ maior, quam recta A C, remotior ab A G. quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



[b] 1. tertij.

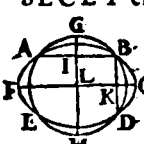
[c] 7. tertij.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; [a] erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quàm AB, & AC. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

[a] 7. tertij.

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.



SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus [b] bifariam diuisis in I, & K, [c] educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, [d] quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

[b] 10. primi.
[c] 11. primi.
[d] 5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. [e] Inuentum autem sit I, centrũ circuli AGBDHE, à quo addicta triã puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quę per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, a quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, [f] erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem

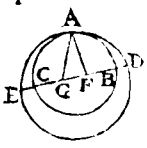
[e] 1. tertij.
[f] 9. tertij.

autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. [a] Quod est absurdum. [a] 5. tertij.

THEOR. 10. PROPOS. 11. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, [b] non possint idem centrũ habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, [c] maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quam FD, pars quàm totum, quod est absurdum.



[b] 6. tertij.

[c] 20. primi.

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, [d] maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectę FE, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponatur esse centrum circuli ABC,) erit

[d] 20. primi.

quoque G C maior, quam G E, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extenſa vtrumque circulum ſecabit, ſed in contactum A, cadet. Quare ſi duo circuli ſe ſe intus contingant, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. THEOR. 11. PROPOS. 12.

SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant ſe exterius in B, & centrum circuli A B C, ſit F, circuli vero D B E, centrum ſit G. Dico rectam extenſam per F, & G, tranſire per contactum B. Si enim non tranſit, ſecet circumferentias in C, & E, ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, [a] maiora ſunt latere F G: Eſt autem recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contjngant, &c. Quod erat demonſtrandum.

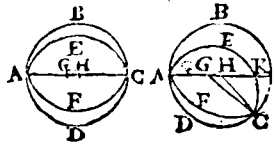
[a] 20. primi.

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſine extra tangat.

TAN-

TANGANT sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [a] quæ diuersa erunt; per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est [b] cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrũ, & recta AGHC, diameter, diuidet A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidiũ totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.

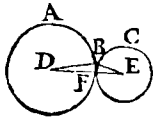


QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti proposito stensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera GH, HC, [c] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quòd HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ G I; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quam G I, pars quàm totum. quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ H G, G C, [d] maiores sunt recta HC; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A. Quare dempta communi

[a] 6. tertij.
[b] 11. tertij.
[c] 20. primi.
[d] 20. primi.

communi HG, erit GC, maior, quam G A. quod eſt abſurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus ſe tangent in pluribus punctis. quam vno.

TANGANT ſe iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, [a] quæ per contactum F, neceſſario tranſibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, ſe tangunt, tangant ſe ſe in B. Ductis igi



[a] 12. tertij.

tur rectis D B, EB, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc eſt ipſi DE: [b] Sunt autem & maiores. quod eſt abſurdum. Non ergo ſe tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.

[b] 20. primi.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius ſe tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipſa intra vnum circulorum, per 2. propoſ. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod eſt contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI recte conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum a circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potiſſimum concludere, circulum non poſſe tangi a circulo in duobus, vel pluribus punctis, qua longo interuallo a ſe diſſideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facile hoc ipſum eodem argumento fere demonſtrari poſſit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, oſtendamus breuiter, in vno eodemq; contactu non poſſe eſſe plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, [c] quæ diuerſa ſunt, recta ducatur E F, [d] qua ad contactum perueniet neceſſario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si.n. ſe tangant in alio etia puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F, [e] erunt recta

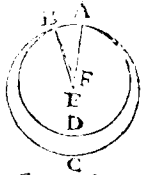
[c] 6. tertij.

[d] 11. tertij.

[e] 20. primi.

E F,

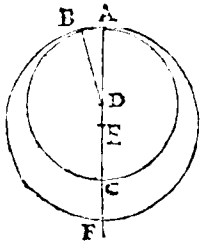
EF, FB, maiores rectâ EB. Est autem rectâ EB, æqualis rectæ EA, cum vtraque sit ex centro E. Igitur & rectæ EF, FE, maiores erunt rectâ EA. Quare dempta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA. quod est absurdum, cum FB, FA, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.

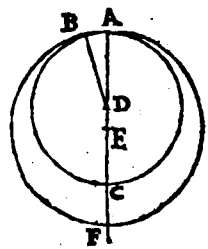


NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.

SIT circulus ABC, cuius centrum D, & in semidiametro AD, producta sumatur quodcunque punctum E, ex quo ad interuallum EA, circulus describatur AF, quem hoc circulum ABC, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior est, quàm AD, hoc est, quàm DC, hoc est, à fortiori, quàm EC, erit quoque EF, quæ ipsi AE, æqualis est, maior quàm EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, existet, circulusq; AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, existet. Multo magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, si E, extra eundem circulum ABC, existet. Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat; fiet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, si fieri potest, duca-





ducatur q; recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, sumptum est punctum D, praeter centrum E, a erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo D A, quã D B. quod est absurdum. Sunt enim aequales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circumferẽtiam eiusdem circuli A B C. Non ergo circulus A F; circulum A B C, secat aut tangit in alio puncto, quàm in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.

a 7. tertij.

QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoq; priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt si in semidiametro A E, circuli A F, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus describatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proximè sit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuò in solo puncto A, contingant.

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distant a centro, æquales sunt inter se.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D. Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D. b Secabunt rectæ

b 3. tertij.

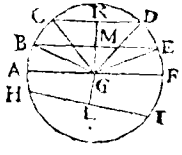
rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidiæ earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, [a] æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoq; & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter a centro E. [a] 47 primi.

RVRSVS distent rectæ AB, CD, æqualiter a centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [b] diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, [c] æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 3. tertij. [c] 47. primi.

THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF; & HI, maiorem, quam



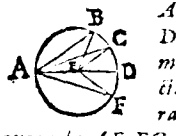
quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, a centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, a centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, [b] maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; [c] erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 14. tertij.
[b] 20. primi.
[c] 24. primi.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab vno, eodemq; circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarũ AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, [d] maiora sint latere AC; sintque rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc est, rectæ AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior erit, quam AB; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.



[d] 20. primi.

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia sunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB, & angulus AEC, totus maior est angulo AEB; erit

[a] erit basis AC, maior basi AB. Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est. [a] 24. primi.

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad vtrasque partes maximæ AD. Si namque angulo AEC, æqualis fiat angulus AEF, iungaturque recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint lateribus AE, EF, & anguli contenti quoque AEC, AEF, æquales; [b] erunt bases AC, AF, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis poterit exhiberi. Quacunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra AC, ea maior erit, vt iam demonstratum est. [b] 4. primi.

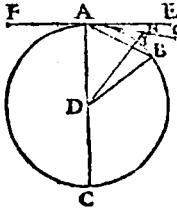
QVOD si AB, AF, ad diuersas partes diametri AD, ductæ sint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonstrabitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. AF, maiorem esse, quàm AB. Si namque, vt proximè est ensum fuit, ducatur ipsi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe si fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quòd AF, AC, [c] æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quàm AB, vt & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam AB, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quàm AB, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF, quàm AB. [c] 14. tertij.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

QVAE ab extremitate diametri cuiusq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriã comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, pũcto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B, [a] erunt duo anguli DAB, DBA, æquales; sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo [b] minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpẽdicularis intra circulum; neq; eãdem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iã ex A, inter AE, rectã, & circumferentiam A B, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circumferentiam in I. quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Qm igitur in triangulo DAH, [c] duo anguli D H A, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis D I, [d] maior erit, quam D H, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam A B: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro A C, & circumferentia A B, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circumferentia A B, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cũ AC, angulũ rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cũ AE, angulum rectilineũ acutũ maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta A B, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea A B, intra circulum cadat, vt demon-

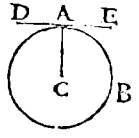


[a] 5. primi.
[b] 17. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius ſit pars: Angulus vero contingentiæ contentus ſub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quòd ille huius pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quę ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

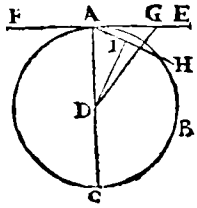
HINC manifeſtum eſt, rectam a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.



QVARE ſi iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta GD. Quoniam igitur in triangulo



ADG, duo anguli DAG, DGA, [a] *minores ſunt duobus rectis, & DAG, factus eſt rectus; erit DGA, recto minor. Quare* [b] *maior erit recta DG, quã DA; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque eſt ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico neceſſario ſecare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur cõmuni angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoque minores duobus rectis: Quare* [c] *coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, eſſe intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI,* [d] *æquales ſunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, oſtenſi ſunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA,* [e] *maior eſt, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum exiſtet; atque adeo recta AH, circulum ſecabit. Reliqua partes theorematis oſtendentur, vt prius.*

a 17. primi.
b 19. primi.
c 13 pron.
d 32. primi.
e 19. primi.

SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo, nihil eſſe, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem ſententia illius planior fiat, afferemus in medium digreſſionem illam, quam ipſe hoc loco inſtituit. Sic igitur inquit:

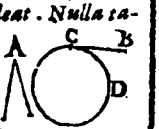
CVM huius theorematis caput poſtremum attentius conſiderarem, mihi ſane in mentem ſubijt prima ſpecie, Geometriam non ſatis ſibi conſtare; immo adeo repugnantiam in ſe admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam eſt, vt inter quantitates minima dari poſſit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, ſeu rectius, contactus, minorem omni acuto poſuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas

titas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam aquale, & inaquale dicatur. Quantitatis etiam continua in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

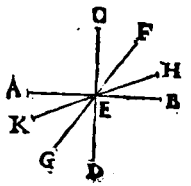
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, BCD, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus a reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuò ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, qua (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non



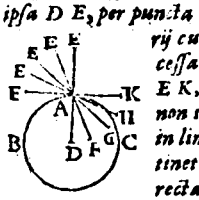
videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hac quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstrãda,

aliisque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, qua circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur.



Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidē angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tū enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, praetereas peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circunducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea E D, facta sit E K, & tangat circulum. Actum linea D E, non tam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur



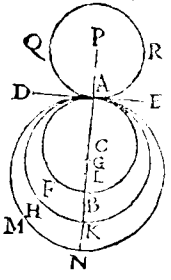
linea, faciantq; spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, qua rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, linea recta manere in suo recto, punctumque A, peripheria in suo rotundo; neque

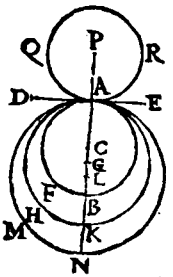
vtrumque

vtrumque esse idem punctum ; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit ; vt contraria contrapositæ fiant manifestiora ; Id vero sensus non recipit . Duo enim circuli sese extrinsecus tangentes , rectam lineam intermediam illibatam relinquerent . Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C , circulum exterius : quod non patitur linearum natura . Sed demus id fieri posse , vt nihil in cogitationem cadat , quod semel vsptam Geometria non representet . Illud tamen minime vrgebit ; Immo tanto minus contactus illorum erit angulus ; Habit enim vtrinque ipsarum concursus . Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata .

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est .

SIT enim circulus A F B A , cuius centrum C , diameter vero A B, per cuius extremitatem A ducatur linea D E, ad angulos rectos . Et constat , ex consectario huius decimæsextæ, lineam DE, cõtingere ipsum A F B A, circulum : ac propterea D A F, esse minorem omni angulo acuto , ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam parte huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, sustipiatur in diametro A B, centrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, nõ esse quantitatem . Constat quippe circulum A H K A, trãsire inter rectam D A , & curuam A F , cum sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam DE, tangere ipsum A H K A , circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ consectario : ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicq; in infinitum , erunt omnes contactus , quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A , punctum ,





quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo : ac ſic omnes æquales, ſi modo æqualitas inter non quanta dici poſſit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietque vt MAF, contactus interior circulorum neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non eſt. Quod erat demonſtrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non eſſe, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli ſint ſimiles, erunt & ſemicirculi ſimiles. Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis ſunt æquales, per conuerſam definitionis ſimilium ſectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non eſt. Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non eſt.

MANENTE enim eadem conſtructione, ſi DAF, ſit quantitas; ipſa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæſexta: neque per obliquam, vt per lineam AM. Eſſet enim FAM, pars ipſius DAF: Atqui FAM, quantitas non eſt, vt modo probauimus. Non eſt igitur FAM, pars ipſius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi poteſt. Quare DAF, quantitas non eſt: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium,

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non eſt.

IN eadem conſtructione, protrahatur BA, diameter ad punctum

punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, externus in puncto A. Dico contactum FAQ, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; DAF, sit quantitas, per secundam earundē; neq; DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

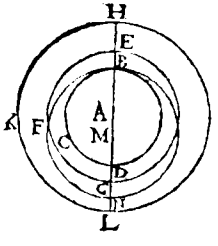
ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

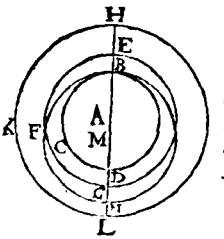
VT in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus est, & æqualis ipsi DAP, cum DAQ, nihil addat: quod erat probandum.

HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

SINT enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG, & secet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neq; enim cōtra, CBD, maior ullo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento,





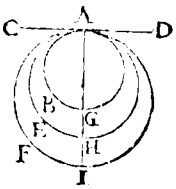
angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

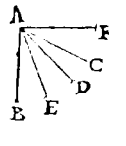
HÆC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto

recto rectilineo minorem. Vnde dissoluendæ sunt à nobis omnia Pelectarii sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus sit omni acuto rectilineo, deinde posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, super A, describatur circulus AEH, minor circulo ABG, tangens rectam CD, in A; sit angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos cõtactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque.



Quemadmodum quivis angulus acutus minor est recto, & tamen quilibet acuto dato, minor diuiri poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, sit acutus minor BAD. Quod si aliæ rectæ AE, inter AB, AD, ducantur, erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.



PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinitis vt quiuis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus CAE maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG, describantur, tangentes rectã CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quiuis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est

acutus

acutus D A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si circumferentia intercipiatur inter perpendicularem A F, & rectam A G, erit adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento semper in peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit maior angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtũ, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior quolibet acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. In eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est omnibus angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniat omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur,

Ea

Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (uno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiusmodi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. colligimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherys æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripheryis minoribus, maiores erunt; Et qui a peripheryis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto recti-

rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent, esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei, quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito, quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Cambanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedimus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis se secãtibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ità tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiuscunque sint peripheriæ, & lineæ rectæ illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarii, qua conatur ostendere, contactum interiorem nõ esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exem-

plum

plum aſſeramus,) minores ſint homine, vel monte, cum tamen ipſi inter ſe valde ſint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eſſe.

NEGAMVS deinde, angulos ſegmentorum ſimilium æquales eſſe, ſicut ipſe aſſumit in ſequenti demonſtratione: Neque enim hoc Euclides ſignificauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea ſegmenta eſſe ſimilia, in quibus anguli rectilinei ſint æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales exiſtunt. Immo magnum diſcrimen eſt inter angulos in ſegmentis, & angulos ſegmentorum, vt aperte conſtabit ex propoſitione 31 huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonſtrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior ſit veri pars eius, cum contrarium nullo modo oſtenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem conſtituunt duo circuli ſe externus tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrumque tangit. Parti ratione theorema illud refellitur, quo aſſeruit, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Poſtremo hallucinatus eſt quoq; Peletarius in illa demonſtratione, quam ad Candanum miſit. Etſi enim angulus ſemicirculi in maiori circulo maior eſt angulo ſemicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus ſemicirculi maior ſit angulo recto. Semper enim rectus angulus ſuperabit quemuis angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente, Quemadmodum etiam quiuis angulo acuto propoſito, dari poſſunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Conſtat igitur ex his, angulum contactus verè eſſe angulum, demonſtrationes autem Peletarij ſophiſticas eſſe, ac nullius momenti, hominemq; Geometra prorſus indignas.

HÆC porro mea de angulo contactus diſputatio adeo Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læſum eſſe omnino, atque offenſam exiſtimationem putauerit ſuam. Quare annis fere quinque poſt mei in Euclidem commentarij

editionem

editionem, hoc est, anno 1579. pro sui defensione Apologiam in me conscripsit: in qua tamen nego, aut ullas eius solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, novam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs sed fendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam refellendo omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias, atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum non sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de ipsa, cuius Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interseram, vt benignus lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quam aperte præ se fert, contra me exarsisse, falsèque mihi imposuisse multa me autem è contrario nullam verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abstinere, aperte testatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quàm quod vir Peiorarius non scripsisse, sed animose, atque adeo truculentè fecisse insimulat, vt eum in meis commentarijs velut reprehenderem, vel laudarem: quis sine vitia fuisse fatetur animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeq; educato alienissima. Verum ea quàm longè absint tum à nostra Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra nouit, ignorat. Hi vero, qui nostra minime norunt, hæc ut sibi liber fidè faciet, ipsimet omnia diligenter, nihil inuidiosè, nihil animosè planè, vt veritatem quæsitam, non cuiusquam auctoritatem sectemur esse appareat. Neque enim mihi tantum arrogo, vt si nihil arrogo, vt mihi vni interdictum quicquam, quod à cæteris scriptis falsum videatur, &c. sicne obluta, aut à mihi minus probetur, ofiendam;

dam ; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nã in scholio hoc de angulo contactus iurare ligniũ possem, nihil me minus cogitasse, quàm vt Peletarium obiectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quòd Peletario ipso non modo inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atque Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quàm in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, ne ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferre non potest: quæ tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellat sophismata. Nunc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nã alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebã: neque vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quòd cum à Peletario, homine in loquendo considerantissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum.

vsurum. Quod si frobeniana contumelioſus verbum eſt, quam paralogiſmos, in Gallia, ignoſcat conſuetudinis eius ignaro, neque exiſtimet, me paralogiſmos dicere voluiſſe. Atque vt hanc inde lugeat Peletarius, ne non contradicendi ſtudio illa ferè ſuſpicamur omnia confidere, quantam mihi materiam inuehendi in ſe dederit, ſi Euclidem vellicare tentaſſem, quam rem, quia longè aliter euenturam nouerat, ſedulo cauiſſe, quanquam occaſionem ſane arreptam non ſtrenuè admodum ſectatus emiſi, ne illam mihi obieciſſe crederer, quem petitionum incurrerem. Quam tres ea nam occaſio fuit in propoſ. 4. & 8. lib. 1. atque in propoſ. 24. lib. 3. quam ipſe ſuſtulit? In his enim omnibus reiecit demonſtrationes antiquiſſimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figurarum vnam alteri ſuperponi conceſſo animo oporteat: quod ipſe a Geometra deprecatur, petat eſſe alienum, hac ſolum vſus ratione, quod ſuperpoſitionem illam mechanicam quid eſſe arbitretur, & quæ animis fere petitiones hoc modo, vt ait, poſſint demonſtrari, etiam problemata, in quibus aliquid propoſitum conſtituendum: atque in huius rei exemplum adducit propoſ. 2. & ſchol. 1. quæ problemata ſunt. Hic certe Peletarium ſure carpere potuiſſem, ſi id mihi fuiſſet propoſitum, vt falſò crimin aretur, maxime in ea, quæ eadem ratione vſus fore exiſtimant ſuperpoſitionem in demonſtrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non ſatis intellexiſſe videtur, quo pacto Geometræ ſuperpoſitionem illam vſurpent. Neque enim volunt, re ipſa fieri aliam eſſe figurarum ſuperpoſitionem, hoc enim mechanicum quid eſſet, ſola cogitatione tantum, ac mente, quod opus eſt rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero non. Namque in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatemve, quæ, vt nota, tantum facile intellectus cuiuſuis ſine vlla hypotheſeos confractione vel non excedere alteram, vel excedere, ſi animo conſtituat vna alteri eſſe ſuperpoſita, quamuis re ipſa non poſſit illa ſuperponi, vt in propoſ. 4. lib. 1. factum eſt: At in problematibus quidvis magnitudinem quis alteri æqualem conſtituere valeat, licet modo æquet magnitudinem propoſitam, tranſeundo vel ad illam ducendo, non tamen propterea quicquam efficet, cum re ipſa nulla facta ſit: Vt mirum ſit,

ſit Peletarium ſibi perſuadere potuiſſe, propoſ. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per ſuperpoſitionem, ſiue translationem linearum, figurarumue poſſe demonſtrari, ſi hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certe hac in re non ſolum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonſtrando, & ſubtilior fuit nemo, eiuſque commentatorem grauiſſimum, eumque doctiſſimum Eutocium Aſcalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in aquepondrantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat neceſſe eſt, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noſter Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, ſit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuerſam ſe Geometriam funditus euertere, cum plurima, eaque præcipua propoſitiones in Geometria demonſtrentur ex propoſ. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonſtrari nequeunt, quam per illam figurarum ſuperpoſitionem, non quidem re ipſa exiſtentem, ſed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehenſam. Quò igitur ſe verteret? quid ageret? Excogitauit ſane rem magis à Geometria alienã, quam eſt ſuperpoſitio illa figurarum. Coactus enim eſt aſſerere, propoſitionem 4. lib. 1. eſſe definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeo concedendam eam eſſe ſine demonſtratione: propoſitionem vero 8. eiuſdem lib. principium eſſe per ſe quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita ſcribit in propoſitionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori ſpecie æqualitas figurarum dignoſcitur, quam ex laterum æqualitate.) Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſitionem 8. eiuſdem lib. dum ita loquitur. (Quis enim negauerit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate, & numero ſunt æqualia? Hæc Peletarius, vt dicta propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittantur, commentatus eſt, ſed quæ omnino falſa ſunt: vt magnopere mirandum ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria prorſus alienas tam inconſiderate proferre. Scilicet verum eſt, quod philoſophi aſſerunt; Dato vno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ. 4. & 8. lib. 1. pro principijs:

quod quidem falsum est, atque absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris plurium laterum æqualium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nitũtur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstrario enim noua propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipsum quidem ineptissime, cum ad id præstandum circules describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod a posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quòd plerunq; secundam propos. lib. 1. inscite pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solum calumnias, quas frequen-

tes

tes in sua Apologia adhibuit, a me depellere. Quæ cũ ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, vt eius verbis vtar, Euclidi interpretem contigisse, qui non tam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) a calumnijs ipsius defendam, omnesque insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius a me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisque percipere. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter expenam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi a me moderatio adhibebitur, vt modestiæ, quæ hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMVM itaque mihi obiecit Peletarius, quòd in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cum vbique eum honorifice appellem, eiq; plurimas demonstrationes asscribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quam ipse, & multo breuius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id a me parum sincere, atq; adeo studiosè factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiosè factum quispiam iudicaret. Quòd vero propos. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obiecit, animose, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam ante dixi, non cuiusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco

odijs potius, quam ingenijs inter ſe certare videantur. Qui ſit aliorum ſenſus ignoro, equidem, vt ſupra dixi, ita ſum animo, vt ſi quis me alicuius erroris in demonſtrando commiſſi admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque vt liberius id facerent, enixe rogaui non paucos, & nunc iterum eoſdem, atque etiam alios amicè orates volo. Scio enim, quam facile poſſit in ſuis quiſque inuentis hallucinari; video (quod ipſe quoque Peletarius in Apologia ſapienter aſſeruit) omnibus hominibus commune eſſe, vt peccent. Deinde quòd in additionibus ad propoſ. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non eſt, quod ægre ferat, cum illa propoſitiones non ſint ab ipſo inuentæ. Quædam enim multo tempore ante ipſum demonſtrata ſunt vel a Campano, vel a Proclo, aut Theone, quaſdã vero demonſtraui egomet, antequam ipſius demonſtrationes vidiſſem; quòd adeo manifeſta ſint, & faciles, vt nulla probatione egeant, ſed ſint inſtar corollariorum propoſ. 47. Vt nulla prorſus laus, aut gloria illi acceſſura videretur, ſi maxime eas ab ipſo inuentas eſſe (quod tamen verum non eſt) prædicaſſem; cum eas quilibet, modo primoribus labris ſtudia Mathematica deguſtarit, nullo negotio ex illa propoſ. 47. colligere poſſit: Vt non videam, cur tandem eas propoſitiones tanti ponderis eſſe dicat, eum ſint omnium iudicio leuiſſimæ; adeo vt in pleriſque earum nec ipſe Peletarius demonſtrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, ſed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non eſt, quod tantopere mihi ſuccenſeat idcirco, quod conſtructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea conſtructione nihil prorſus ab eo ſum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius conſtructione contulerint. Nam & mea omnino diuerſa eſt, & ille in ſua mirifice (vt alia peccata taceam) abutitur propoſitione 9. lib 3. cum ex ea probet, punctum quoddam eſſe centrum circuli, qui nondum eſt deſcriptus. Geometra ſanè dixiſſet, punctum illud eſſe eiuſmodi, vt circulus ex eo deſcriptus ad internullum cuiuslibet linea rectæ ex illis tribus, quæ ibi oſtenſa ſunt æquales, tranſeat per extremitates reliquarũ duarum linearum æqualium. Nam propoſitio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propoſitum ex ipſa conſtructione poſſit concludi, & ex demonſtratis, vt proxime dixi, etiamſi propoſitio

ſitio illa vera non eſſet, aut nuſquam demonſtrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propoſitionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus deſcribendus eſt. Quòd ſi ideo ſum reprehendendus, quòd propoſitionem vnam, multo aliter a me, & breuius demonſtratam, ei non aſcripſerim, non video, quo pacto in idem ipſe vitium non incurrat, cum problema hoc (Propoſitis duabus lineis inequalibus, potentiam maioris ſupra minorem cognoſcere.) *multis ſeculis ante ipſum a Theone demonſtratum ſibi arroget, hac ſolum de cauſa, vt arbitror, quòd illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema,* (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum conſtituere.) *quod in Apologia ſuâ proprium appellat, idemq; hactenus deſideratum eſſe gloriatur; cum tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eum ſeculis ſtomit, in defin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi recta linea datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdem partes deſcribantur, illico conſtitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neque opus eſt tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idem ſit, quod mea. Et quod magis mirandum eſt, fatetur Peletarius, ſe meâ demonſtrationem vidiſſe, & eam nihilominus ſibi audet, tanquam propriam, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonſtrationes parum honeſte, vt mihi vendicem, ſibi ſubducere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaque multo verius, ac iuſtius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare poſſum; cum nuſquam propoſitionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolum eius nomen, ob rationes a me expoſitas, reticuerim.*

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineũ eiuſdem generis eſſe, contra me pluribus verbis conatur oſtendere. Sed neſcio quo modo aberrat, quod dicitur, a ſcopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc eſt, vtrumque angulum planum eſſe; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus conſtare poſſit ex

angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neque ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negaui hac solum de causa, quod angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 16. euidenter ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodammodo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis, nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, vt collimasse videatur: quamquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, qua magnitudines sint eiusdem generis, qua non sint. Nusquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, qua sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alterum superet: In quo, ne mimo reluctante, frustra sese fatigat, vt docear, id fieri non posse; sed de illis diuersaxat magnitudinibus sum locutus, qua cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemque linea recta, & curua. Ha etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquido affirmarit, vnam alteri aequalem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictũ sit) verũ vsquequaq; non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quanam linea recta aqualis possit esse circũferẽtia cuiusuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostẽderimus. Non igiũ negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quãtitates a proportionis

portionis definitione excludi, diuersiq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodē magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilinea; necnon linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem quintæ defin. lib. 5. recipere, immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, siue secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certè ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim verò, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Eucl. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tū in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt a me est exposita: quinetiam ibidem asserit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quē testem produxerat pro se

Peletarius, iam pro me teſtimonium dicat. Atque ex hiſce duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam ſinerítione, quanto contradicendi ſtudio mihi inſultet Peletarius cum ſemel atque iterum odioſe percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (crimen eſt, lineam infinitam exempli cauſa nominare) vocat etiam Petrum Nonium teſtem ſuum, atque adeo omnes philoſophos, quorum eſt illa vox nemini inaudita, praterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem. Deſinat igitur a me ſciſcitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim reſpondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philoſophi omnes deportarunt. Quid? nonne ſophiſma illud Peletarij, ſemper in hoc erro, demonſtratio illa, velut dicere, & quidem palmaris, qua conatur oſtendere, propoſitionem 1. lib. 10. cum propoſ. 16. lib 3. ſtare non poſſe, ſi angulus contactus concedatur eſſe quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorſus ratione, qua a me ipſo, confutatur? Quæ ſi germana demonſtratio eſt, miror quid ſit, cur eam Nonius Geometriæ ſcientiſſimus, idemque Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonſtrationes eaſdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non eſſe, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (niſi fallor) illa Nonij verba (Si quis ſententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam ſi demonſtrationes exiſtimaſſet, profecto Peletarij doctrinam in co retinendam eſſe dixiſſet, Geometricæ enim demonſtrationes eiuſmodi ſunt, vt aſſenſum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nullaque modo quemquam ſinant ancipiti opinione deſtrahi ſic, vt tum aſſentiatur, ſi velit, tum, ſi velit, diſſentiat. En cur Peletarius Nonij teſtimonio aliorum iudicia contemnat, en præclarum teſtimonium, quod ſcirent Nonius eius demonſtrationibus leduique æquiore animo ferat, eas a me nihilo magis, quam ab illo ſuo approbatore, demonſtrationes ſtetari.

TERTIO, quod ego quando dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil eſſe, ſuſpicor eſſe, clamat: Nuſquam enim dixiſſe ſe, nihil eſſe, quod quantitatem non ſit. Ita ne vero? at in prædicamento Quantitatis, quæ hæc eſt fundam, (quis enim inclinationem illam quantum eſſe dixerit?) nego quantitas

ritas, quo alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Præterea, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditũ apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantum haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletary. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res nõ potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille nescio quibus præstigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlciscereturr, aliud mihi Nihil affinxit, quo cũ impune pugnaret: At quam palæstrice pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud abse efficium iugulasset, exclamat.* (En Clauij argumenta, quę vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potius figmenta, cum

ipse

ipſe ſuum angulum contactus nihil eſſe dicat, non ego?) *Verum vt hominem ſæneum, atque adumbratum nequicquam petere deſinat, virum oſtendam, qui cum, ſi velit, certare cum laude poſſit. Ego vt oſtenderem, angulum contactus, ex Euclidis ſententia, verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi angulo recto rectilineo minorem, ita ſum argumentatus. Si Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, (hoc eſt, vt Peletarius intelligit, non eſſe angulum, vel non eſſe quantitatem) & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, hoc eſt, quàm id, quod quantitas non eſt, minus eſſe quocunque angulo? Quid rurſus magis perſpicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Agnoſcat itaque Peletarius, Nihil illud ſuum male à nobis acceptum, idque ita vlciſcatur, vt meum hoc argumentum reſellat: in quo ego ſi angulum contactus dixi eſſe nihil, & non potius eum nihil eſſe aſſerui ex ſententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexiſſe meum argumentum, aut intelligere noluiſſe: niſi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluiſſe cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem eſſe, aut maiorem nihilo: Solùm affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem eſſe, aut maiorem aliquo alio angulo contactus, quem non ego dixi nihil eſſe, ſed Peletarius, eundemque Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonſtrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipſe negat, didiciſſe Dialecticam, illum ipſum tam lepidum, atq; acutum ſyllogiſmum, quo Nihil illud ab ſe confictum mira venuſtate confixit, pauliſper conſideremus; vt quàm ſuo iure Dialectica ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipſe ſyllogiſmus videtur, incudique reddendus. Etenim cũ verſetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) qua eſt, Nihil, de minori extremitate, qua eſt, angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus*

ctus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidem conclusio recte sequitur ex præmissis, quarũ prior Peletarij est, nõ mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Cõclusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraque præmissa subijcitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neq; contendat Peletarius, mentionẽ factã esse anguli in minore extremitate, vbi dictũ est, angulũ cõtactus angulo cõtactus maiorẽ esse. Nã angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod vt planum fiat, vtemur ea palestra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum præmissa vera sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ recte ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialectica, si ab Aristotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitque scire, quid aliud sit, angulum cõtactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Quæ in re morem geram homini non grauate, etsi è scholio huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere.

Nempe

Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, *qua dicimus, angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus, sicut nec angulus contactus rectilineus est, aut acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quàm ad Geometras.* Quòd etiã, ne librum meum parum spissum viderer fecisse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo a me consilio factum est, vt omnes plane viderent, syncere me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod vinam in meis verbis recitandis ipse facere in animum induxisset. Multo enim minus spissam Apologiam suam facere voluisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarii verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec varias, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed eo sum æquior Peletario, quòd ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil penitus ad eam pertinentes inserit: quarum priorem immeritò suam propriam facit, vt supra dixi: posteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longè breuius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallit) iam pridem demonstraui, vt mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimensionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario suæ Apologiæ, vt lubet, prodire, nouo more comites ac pedissequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque in primis Petrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quòd si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius crimi-

criminatur, me eius ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis eius opinionem in medium adduxiſſem? Equidem facile ſibi perſuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

*QVARTO vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare oſtendit, vt probem, angulos contactus alios alijs eſſe inæquales: propterea quòd ſcripſi, æqualitatem angulorum eiuſdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, iuxta octauum pronunciatũ. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiuſdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cum tamen angulus rectilineus oſtenſus ſit a me æqualis curuilineo, atque adeo eiuſdem generis cum illo, licet non ſit in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde quod putem angulos contactus ideo inter ſe inæquales eſſe, quòd ſibi mutuo non congruant. Equidem ſi quid in eo a me peccatum eſſe intelligerem, & peccatum (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoſcerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cum, tota re etiam atq; etiam conſiderata, nihil omnino vitij ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui occaſionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiuſdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales ſunt anguli contactus, & ſemicirculorum, de quibus tunc agebamus. Qua re cum linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis vero circulari non item, niſi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos eſſe inæquales inter ſe, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, ſi dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, neceſſe eſt, lineas vnius lineis alterius congruere, ſi alter alteri ſuperponatur. Quòd ſi Peletarius hanc doctrinam oppugnat, ſciat, ſe iam bellum mouere non mihi, ſed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propoſ. 4. idem prorſus docet, quod ego. Ait enim (*Angulorum autem æqualitatem ſumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisque omnibus, qui eiuſdem ſunt ſpecici, vt in Lunaribus, in Syſtroidibus, atque

in

in vtrinque conuexis,&c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data ſunt ; ſibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum eſt, ſed in ijs, quæ ſpecie ſimilia ſunt. Specie autem ſimilia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiuſdem, & angu li, qui à ſimilibus ſimiliter iacentibus lineis comprehenſi ſunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, ſibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos ſolum angulos contactus concedere æquales, quorũ recta linea, & curua ſibi mutuò congruunt? Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiuſmodi, de quibus eo loco ſermo non erat ; quippe qua non ſint eiuſdem ſpeciei, atque adeo æqualitatem tueantur, etiamſi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noſter contentionis ſit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometria ignarum vocat, ſed etiam Logices : propterea quòd lib 5. dixi, non recte à quibuſdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis ; quòd multæ proportiones inæqualitatis ſint etiam irrationales. Ego vero (etſi non is ſum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hiſce ſtudijs, in quibus mediocriter verſatus ſum, planè rudem non eſſe, pro me ſemper tuli. Quantulum autem ſit id, quod in vtroque poſſim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt ; Peletario quidẽ ipſi ita me adhuc reſpondiſſe arbitror, vt iam minus fortaſſe ignarus Geometriæ, ac Dialectica videar, quàm putarat. Nunc, vt perſpiciat, neq; me pertinacem eſſe, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuiſionem illam, quam à me reprehenſam criminatur, probam eſſe, ita tamen, ſi in quolibet diuiſionis membro Diuiſum intelligatur : neque vero hoc vnquam negaui, cum alibi ſimiles diuiſiones vſurpem. Solum id eo loci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuerſum duplici diuiſione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem ; poſteriori vero in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod veriſſimum eſſe, neminem negaturum cenſeo, qui rem diligentius expenderit) cum tam priora duo membra

membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cum hæc membra diuidentia latius pateant, quam Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eò magis duplex illa diuisio mihi probatur, quòd non desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quarum vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quòd si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, ne scriptorum nullius aliquo vitio carebit, neque ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia nõ deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquàm ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquido constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemq; hanc; Anguli semicirculorum, quò a maioribus circulis

f. ac,

fiunt, eò sunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanum scribit, nullum esse paralogismum. Ego sane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superq; in scholio huius propos. 16. a me sunt confutatæ, adductis contra ipsas euidentissimis instantijs. Deinde quòd me perstringit, quasi parum intellexerim, qua sit proportio rationalis, & qua irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse; cum has proportiones vbiq; ex sententia grauissimorum scriptorum definierim: neq; vero ipse, vllum peccatum a me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denq; quòd criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defi. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero, Proportionem. Neq; enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

EX his, qua diximus, satis (vt opinior) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarij inanem, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amice putaui. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certe contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces sunt, nihilque continent in se probabilitatis, vt in scholio huius propos. 16. ostendi, vbi omnes dissolui: neque meis ipse solutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, qua supra ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Vt non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse,

ſcripſiſſe, ſed ne veritati ceſſiſſe videretur. Nec vero quiſquam putet, me vnum exiſtimare, angulum contactus vere eſſe angulum, & angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eoſque grauiſſimos laudare poſſum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atque Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipſum, eiuſque commentatorum celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præſtantiſſimos, atque eruditiſſimos viros non paucos, è quorum numero in primis eſt Franciſcus Candalla ex illuſtriſſima Fluſſatum familia oriundus, qui inſigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propoſ. hanc 16. apertiſſime docet, angulos contingentia verè eſſe angulos, ex definitione anguli plani, alios q̃ alijs eſſe maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter ſentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Praeter eum enim ad hunc diem nemo hac de re ſcripſit) abſurde multa ex falſis ſuppoſitis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium profeſſor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conſcriptam vidiſſet, opuſculum eruditum aduerſus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem ſtudioſus lector videat, quid in hoc negotio ſentiat Proclus, afferam in medium pauca quadam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido conſtabit, eius ſententiam eſſe Peletarij cõmento prorſus contrariam. Primum itaque ita ſcribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ ſe inuicem ſecando, vel ſeſe contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem eſſe omni rectilineo minorem: quod ſolius anguli contactus proprium eſt. Deinde in eodem lib. ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namq; angulus omni recto eſt minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus eſt: Semicircularis itidem quocunque recto eſt minor, acutus tamen non eſt.) *Quid clarius, quam Proclum hic aſſerere, angulum ſemicirculi minorem eſſe recto? Rurſus lib. 3. ad propoſ. 4. lib. 1. Euclidis ita*

ſcribit. (Addiſcemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto ſemper inæqualis eſt, & nunquàm æqualis; Et ſemicircularis ſimiliter, tranſitusq; à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulum ſemicirculi æqualem eſſe non poſſe angulo rectilineo, tranſitumq; propterea fieri a maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque poſtertius appellare paralogiſmum. Denique eodem lib. 3. ad propoſ. 23. hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis eſſe poſsit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum ſemicirculi, qui mixtus eſt, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli ſententiam. Ex his lequere arbitror, vt de cæteris taceam, idem ſentire Proclum de angulo contactus, & ſemicirculi, quod ego contra Peletarium ſcripſi; quis autem neget, maiorem eſſe auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

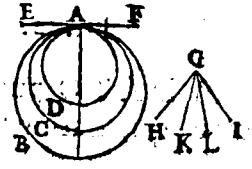
OBITER *quoque hoc loco monendum lectorem cenſeo, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex ſententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam eſſe de angulo contactus, qui in conicis ſectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipſi. Vt enim Apollonius Pergæus demonſtrat lib. 1. propoſ. 32. in locum, qui inter coni ſectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit; atque adeo angulus ille contactus minor etiam eſt omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (ſi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non eſt, (eadem enim hic eſt ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter ſe æquales, hoc eſt, vt ipſe vult, non inæquales, & reliquorum angulorum ſinguli recto rectilineo æquales. Vbi ſanè maior abſurditas apparet, quo ad ſenſũ, in ea Ellipſi, quæ perexiguam habeat latitudinem, et in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta eſſe videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad vertice illius Ellipſis, & Hyperbolæ cõſtituti; vt incredibile omnino ſit, niſi firma ratione demonſtretur, angulos illos contactus ad vertices ſectionum conſtitutos inter ſe, & reliquos ex rectis inter ſe quoque eſſe æquales; propterea quod in ea Ellipſi linea tangens magis recedere perſpiciatur a circumferentia*

Ellipſis,

Ellipſis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hac alio tempore examinanda relinquamus; nunc ad interruptam expoſitionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas poteſt continue, & infinite augeri, altera verò infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius.



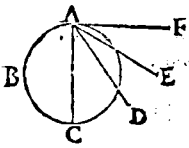
PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur deſcribantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continuo angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propoſitione 16. perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet,

TRANSITVR a minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

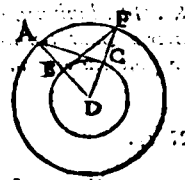
DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in



A. Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quamdiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum vero ſecare ceſſat, eſſe angulum rectum maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi. (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor;) conſtat quoque vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.

16. PROBL. 2. PROPOS. 17.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda ſit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circulũ A E, in E. Ducta denique recta E D, ſecante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli B D E, æqualia ſint duobus lateribus DA, DC, trianguli C D A, vtrinque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis la-
1. primi. teribus, ſit communis: Erunt & baſes BE, CA, & anguli DBE, DCA, ſuperipſas, æquales. Eſt autem DBE, rectus ex conſtructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaq; CA, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri C D, tanget circulum, per corollarium prætedétis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangens circulum B C, in C, quod faciendum erat.

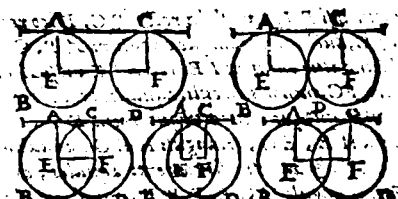
SCHO-

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Facilior tamen praxis, ad propos. 31. huius lib. innotescit.

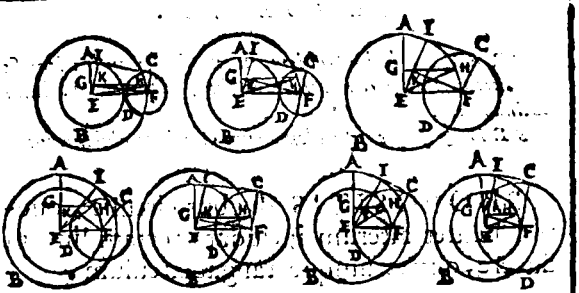
SED & sequens problema cum Cardano absolvemus.

PROPOSITIO duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.



SINT primum duo propositi circuli æquales AB, CD, quorum centra E, & F, recta iungantur EF, ad quam ducantur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Deo ducatur per A, & C, educantur vtrumque circulum tangere. Cum vero EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, quòd anguli E, & F, recti sint: Erunt quoque EF, AC, æquales & parallelæ, ideoque & anguli A, & C, recti. Quare, per corroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum. a 28. primi. b 33. primi. c 29. primi.

SINT deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum versus exteriora E, & F, iungantur recta EF, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad EF, perpendicularis EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proximè descripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulum FEI, æqualis, atque per F,



agatur ipſi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abſtindatur enim ex I E, recta I K, ipſi A G, vel ſemidiametro F C, minoris circuli, aqualis, vt ſint reliqua E G, F K, aquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, aqualia ſunt lateribus F E, E K, & anguli ipſis contenti aquales; ex conſtructione: [a] 4. primi. Erunt anguli H G E, F K E, aquales. Ac proinde, cum H G E, rectus ſit, ex conſtructione, erit & F K E, rectus. Rurſus quia C F, I K, aquales ſunt, & parallelæ, ex conſtructione, [b] 33. primi. erunt quoque I C, K F, aquales & parallelæ; Atque propterea angulus E I C, cum aqualis ſit externo F K E, rectus erit; [c] 29. primi. Ideoque & I C F, rectus exiſtet: Quotiens, per coroll. propoſ. 16. huius libri recta I C, vtrumque circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus ſemidiametrorum. Quod erat propoſitum.

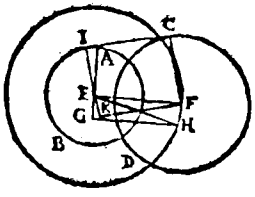
[d] 19. primi. [e] 29. primi.

SATIS autem conſtat, ſi circuli propoſiti aquales fuerint, id quinq; modis poſſe fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut ſe nuſquam contingunt, aut ſe inuicem per centra ſecant, aut nonnihil tamen, vt vel centra conſiſtant in communi eorum ſegmento, vel certe extra illud.

ITEM ſi circuli propoſiti fuerint inaquales, id contingere poſſe ſeptem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipſum tangit, aut ipſum ſecat, ita vt vel centrum eius ſit in circumferentia maioris, vel intra ipſum circulum; hoc tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris tranſeat, vel centrum minoris ſit extra circulum maio-

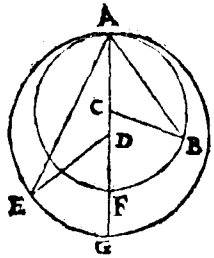
maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.

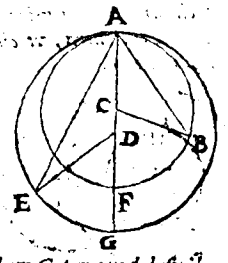
QVONIAM vero, circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumptissimus semper a maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstrationeq́, nisi quod rectæ AE, IE, producendæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Additio insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales esse, quod HEA, FEI, reliqui duorũ rectorum, æquales sint ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.



QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex ijs, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum vero extra circulum, ex hac propos 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit.

SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum





AB, in A, tanget. Et si quidem punctum D, fuerit ultra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum AB; intra vero si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tangetq; circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; efficiatq; angulus EAG, acutus cum sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAG, in E, æqualis constituatur AED, coibitque recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, [1] æquales sunt, [2] erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetq; circulum AB, in A, ex ijs, quæ in supraducto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

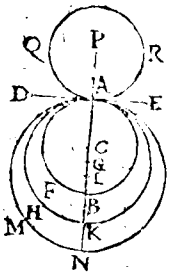
[1] 6. primi.

TERTIO datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA, eaq; secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, transibit, tangetque ex dicto scholio circulum AE, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, quæ recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibitq; recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis minores.

minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo centro C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetq; circulum AE in A, per 6. quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt. 2 6. primi.

PROD si iter punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, externus, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangetq; circulum QAR, in A, propterea quod per L, circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendiculares, tangit in A, ex coroll. propos. 16. huius lib.



EODEM modo, si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum QAR, externus tanget in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum AMN, ex centro L, tanget hic circulum QAR, vt dictum est, in A.

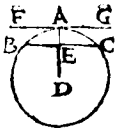
EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi, alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circules secantes; ac tandem in recta AG, eiusdem figuræ, vel in PAC, posterioris figuræ, quam lo punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, I, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circules tangens describendus sit, ad finem huius lib. trademus.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, li-

nea m

neam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim A B C, cuius centrũ D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturque ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. [a] *Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetque circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.*

[a] 28. primi.

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur E C. Dico E C, perpendiculárem esse ad A B. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad A B, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo C E F, [b] duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare [c] maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quã totum, quod est absurdum. Est igitur E C, perpendicularis ad A B. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 17. primi.

[c] 19. primi.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad A B, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD.

ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [a] maior est omni acuto. [a] 16. tertij.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.

SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariam q; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, [b] quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. recta AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABGD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur [c] rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur [d] autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est. [b] 18. tertij. [c] 14. tertij. [d] 3. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex

ex C. ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti, quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

18. tertij

19.

THEOREMA PROPOSITIO XX.

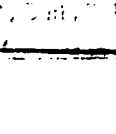
IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur recto DA, DB, æquales sunt, [b] erunt anguli DAB, DBA, æquales. Est autem externus angulus BDE, æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus est angulus EDC, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando. n. duæ magnitudines duarum sunt duplæ singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

b 5. primi.

c 32. primi

d 1



DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobus internis DAC, DCA. Hi autem duo inter se

32 primi. 5. primi.

sunt

ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

TERTIO recta AB, ſecet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC ad peripheriam, habent eandem baſin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. [a] Quæ enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 20. pron.

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propoſ. demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia vero partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt.* (Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuerſaliter demonſtratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propoſ. 1. & 5. Non tamen propterea demonſtratio huius propoſ. cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſint demonſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis ſine vlla demonſtratione concedantur, & vtrumque illa propoſitio lib. 5. demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi poſſint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neque vero hac in re cuiquam ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propoſ. 20. huius lib. demonſtratur, hac eadem propoſitione non nitantur, aut alijs propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM,

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione.

[a] 5. primi. Repetatur prima figura. Et quoniam [a] tam anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æqualis est ijsdem tribus angulis BAC, B, & C; (Nam [b] cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis.) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.

[b] 32. primi.

[c] 32. primi. ALITER. Quoniam [c] sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illi sex æquales: ablatisq; communibus ADB, ADC, [d] reliquus BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus.

[d] 3. pron.

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC. rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, [e] duo anguli DAC, DCA, æquales sunt, estq; angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F, [f] angulusque EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero [g] anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum [h] ergo DAB, ipsi DBA, æqualis sit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem, [i] & anguli DEB, FEC, ad verticē E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erūt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cū ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoq; angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositū.

[e] 5. primi

[f] 32. primi.

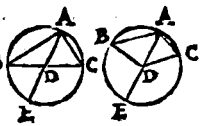
[g] 5. primi.

[h] 5. primi.

[i] 15. primi.

QVOD

QVOD si recta BD, CD, in centro angulum non constituat ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens BEC, constansque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.



THEOR. 19. PROPOS. 21.

20.

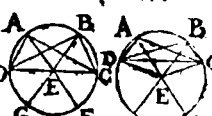
IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. [b] Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.

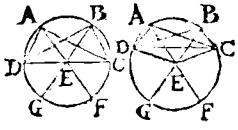
[a] 20. tertij.

[b] 7. pron.

SIT deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus est anguli DAF,



[c] 20. tertij.



DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, IEC simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC, * Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

*5. prox.

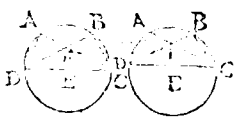
ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

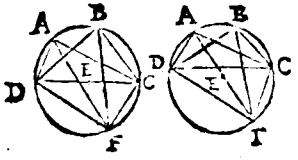
*7. prox.

ALITER. Secent se rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi æquales sunt duobus rectis; Si auferantur anguli AFD, BFC, qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiore ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

*32. primi

*32. primi





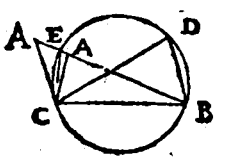
ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quodvis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum maius; jungantur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento eidem maiori FDABC, existentes: si his illis addantur, erit totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Eadque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.



EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra secans rectam A B, in E. Ducta ergo recta C E, [a] *erit anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum,* [b] *Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A. quod est propositum.*

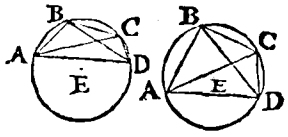
[a] *21. tertij.*

[b] *16. primi.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. 21.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, C D A: Item B C D, D A B, æquales esse duobus rectis.



[a] 21. tertij.

Ductis. n. diametris duab quadrilateri AC, BD, [a] erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem ſegmẽto ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodẽ ſegmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus A B C, æqualis eſt duobus angulis A C D, C A D. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. [b] Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Nam rurſus [c] duo anguli ABD, ACD, ſunt æquales: Item duo BCD, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. [d] Sed hi tres ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 32. primi.

[c] 21. tertij.

[d] 32. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circulus, qui per tres quoſcunque eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur;

scribatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostendetur.) quem dico transire etiamper D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo recta CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non secent rectas CD, AD. Quo facto, [a] erũt anguli B, & E, aequales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis aequales. Igitur duo anguli B, E, aequales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, aequales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, [b] erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.

[a] 22. tertij.

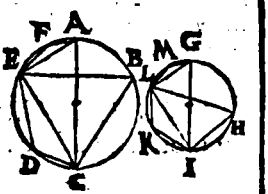
[b] 21. primi.

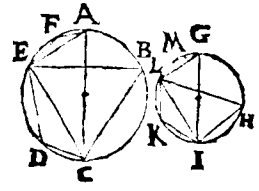
SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos aequales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt aequales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis aequales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis aequales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.

SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunque D, B, K, H, iungantur rectae DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex defin. segmentorum similium, anguli CDE, IKL, aequales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus





[a] 22.tertij. [b] 3.pron.

angulis IKL, IHL, ſint æquales; quod tam illi, quàm hi ſint æquales duobus rectis: [b] *erũt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, ſimiles erunt.*

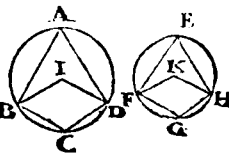
DEINDE in ſemicirculis AEC, GLI, ſimiles ſint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, eſſe ſimiles. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE. EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, ſimiles ſunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales ſint; [c] *quòd tam illi, quam hi ſint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in ſemic. reculis, hoc eſt, in ſegmentis ſimilibus AEC, GLI, æquales, ex definitione ſegmẽtorum ſimilium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales ſint;* [d] *quòd tam illi, quàm hi duobus ſint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. ſimilium ſegmentorum, arcus AE, GL, reliqui in ſemicirculis, ſimiles erunt. Quod erat oſtendendum.*

[c] 22.tertij. [d] 22.tertij.

QVANDO autem de ſegmentis ſimilibus ſermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præſertim Aſtronomicis perneceſſaria, quorum primum ſit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonſtrandam recepimus: videlicet.

ANGVLI inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias, ſunt inter ſe æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum



primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituãtur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. [a] Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum [b] cum dupli sint anguli I, K, [c] erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.

[a] 22. tertij.
[b] 20. tertij.
[c] 6. pron.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint [d] autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, [e] erunt quoque eorum dimidia æqualia hoc est, anguli A, E. Quare vt prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.

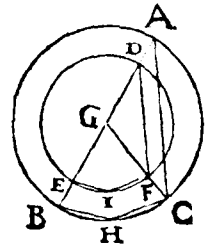
[d] 22. tertij.
[e] 7. pron.

SEGVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens [f] duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC; [g] erunt anguli EDF, BAC, æquales: Sunt autem duo anguli EDF,

[f] 20. tertij.
[g] 7. pron.



[a] 22. tert.

[b] 3. pron.

EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quòd [a] *tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC,* [b] *reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.*

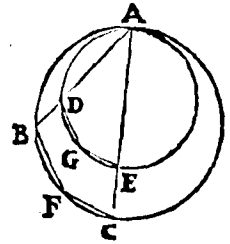
[c] 7. pron.

[d] 20. tertij.

BREVIVS sic. Quoniam [c] *anguli A, D, æquales sunt, quòd vtriusque* [d] *duplus sit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.*

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



TANGANT se mutuò interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tã arcus DE, BC, quàm AD, AB, & AED, ACB, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt; quòd [e] *tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC,* [f] *erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde*

[e] 22. tertij.

[f] 3. pron.

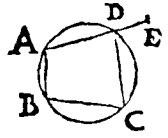
proinde arcus DE, BC, similes erunt, ex defin. segmentorum similium.

BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtriuis arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proximè antecedens theorema, arcus DE, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC, [a] hæc in contactum A, cadit, suntq; eodem pacto arcus DE, BC, similes, fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq; sint: atque his ablatis ex totis circumferentijs similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum. [a] 11. tertij.

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

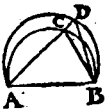


IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulũ EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, [b] æquales sint duobus rectis: Item [c] duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illis his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC; reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum. [b] 13. primi. [c] 22. tertij.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur

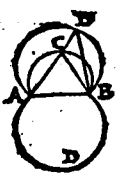


ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia ACB, ADB. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolum interſecent in punctis A, & B; Circulus enim circulum non ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B. Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo ADB, externus interno: [b] quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia: Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] *10. tertij.*

[b] *16. primi.*

SCHOLIVM.

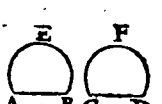


EADEM ratione, neque ad diuerſas partes ſuper eadem recta linea duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia conſtituentur. Nam ſi alterum eorum intelligatur moueri circa lineam A B, vt iam ambo ſint ad eaſdem partes, in idem abſurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, conſtituta ſint ſegmenta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineæ enim A B, C D, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmẽtũ AEB, ſegmento

segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quòd si extra cadat, aut intra, cõstituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia; quod est absurdum. [a] Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabũt sese in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [b] Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quàm duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. tertij.

[b] 10 tertij.

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam illas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quòd si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secentque se mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quam duobus. quod est absurdum. [c] *Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quàm duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.*

[c] 10. tertij.

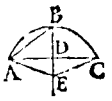
PROBL.

24.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

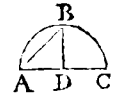
CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

SIT ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connecteaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primùm maior, (quod quidem continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia BD, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum, cum ponatur eſſe minus; erit



DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum, ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, [b] maior erit angulo DAB. [a] fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli cõtenti, recti. [c] Quare baſes EA, EC, æquales erunt; [d] Eſt autem & EA, æqualis ipſi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales ſint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erũt; [e] ac propterea E, centrum erit circuli ABC. quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

[a] 7. tertij.
[b] 18. primi.
[c] 4. primi.
[d] 6. primi.
[e] 9. tertij.



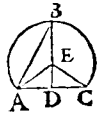
SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis; (Quod demum continget, quando ſegmentum ABC, ſemicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare [f] & anguli DAB, DBA, æquales erunt. [g] Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipſi DA, quòd recta AC, ſecta ſit bifariam. Quapropter cum

[f] 5. primi
[g] 6. primi.

tres

tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circumferentiam [a], erit D, centrum. [a] 9. tertij.

SIT tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, quod quidem eueniet, si segmentum A B C, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; [b] erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadũt, maxima; maior igitur erit quam D A, [c] ideoq; angulus DAB, maior angulo DBA.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam B D, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo DAB, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.



[b] 7. tertij.

[c] 18. primi.

SCHOLIVM.

SED fortassis hac demonstratio Euclidis, qua per omnia tria circuli segmenta progreditur, sic facilius instituetur. Diuisa re-[c]a AC, bifariam in D, erectaq; perpendiculari D B, & ducta AB; aut DB, minor est, quàm DA, aut æqualis, aut maior. Si minor, [d] erit angulus DBA, maior angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi A B D; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.

[d] 18. primi.

SI vero DB, æqualis est ipsi D A; erunt omnes tres. DA, D B, D C, æquales; [e] ac proinde D, centrum. Qua ratio locum habet in semicirculo.

[e] 9. tertij.

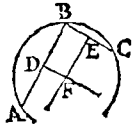
SI denique D B, maior est, quàm D A; [f] erit angulus D B A, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.

[f] 18. primi.

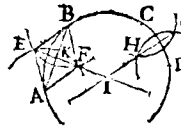
ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis ijsdem, quæ prius, fiat angulo DBA, æqualis angulus E A B. Et si quidem recta AE, cadit infra A C, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero A E, cadit supra

supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cũ AB, in A, angulũ æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunq; A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quã EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.



ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ EF, GH, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo cocunt, erit centrum. Quod autem lineæ EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF,



[a] 8. primi. *BF, æquales: [a] Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK; & anguli AEK, BEK, ostensi quoque æquales; [b] erunt & bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, æquales, ideoq; recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit*

[b] 4. primi.

per

per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. Eadem ratione oſtendetur G H, tranſire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in talis ſitu accipi, vt rectæ E F, G H, non in directum ſibi occurrant, ſed vt ſe mutuo ſecent. Quòd ſi quando contingat, rectas E F, G H, in directum eſſe conſtitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehenſa, bifariam. Punctum enim diuiſionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa eſt diameter circuli, quandoquidem per centrum tranſit, ex coroll. propoſ. 1. huius lib.

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN *circulis* æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, conſtituti ſint primum ad centra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, quibus inſiſtunt, ſiue ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur A B, C B, D E, F E, connectanturque rectæ A C, D F. Quoniam igitur [a] anguli B, & E, dimidij ſunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ea definitione, ſegmenta A B C, D E F, ſimilia erunt. Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia ſunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent G, H, æquales, ex hypotheſi; [b] erunt baſes A C, D F, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia A B C, D E F, ſint ſuper lineas æquales A C, D F, [c] erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi a circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, inter

[a] *20. tertij.*

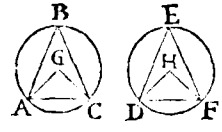
[b] *4. primi.*

[c] *24. tertij.*

inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, [a] quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erũt, vt prius, rectæ AC, DF, æquales) [b] erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

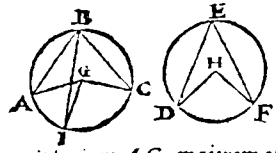
[a] 20. tertij.
[b] 24. tertij.



SCHOLIVM.

HÆC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, [c] dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrum maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheriæ CI, DF, æquales; Ac propterea AC, maior, quam DF.



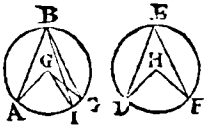
PORRO propositio hæc cum tribus proximè sequentibus intelligenda etiam sunt in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquido constat. Eadem. n. semper demonstratio, quæ duobus, pluribusue circulis accommodatur, locum habet in vno eodemq; circulo.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, inſiſtant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. [a] Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter ſe æquales pars, & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

[a] 26. tertij.

INSISTANT deinde eiſdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, vt ABC, maior eſt; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, [b] eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 26. tertij.

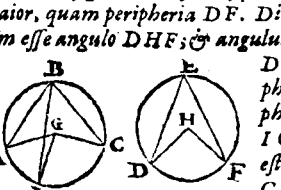
SCHOLIVM.

HÆC ſecunda pars ita quoque demonſtrabitur. Quoniam [c] *anguli ABC, & E, dimidij ſunt angulorum AGC, & H, quos iam oſtendimus eſſe æquales; erunt & ipſi inter ſe æquales.*

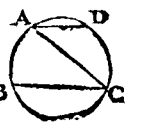
[c] 20. tertij.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, inſiſtet maiori maior-

ior angulus, siue ad centrum, siue ad circumferentiam, quã minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem esse angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheripheria D F, ducanturq; rectæ I G, I B, erunt, vt ostensum est, tam anguli ad centrum C G I, D H F, quam anguli ad circumferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ducta namq; recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, [a] erunt anguli A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, [b] erunt A D, B C, parallelæ.



[a] 27. tertij.
[b] 27. primi.

SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, esse æquales. Cum enim sint parallelæ A D, B C, ducta recta A C; [c] erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales; Ac proinde [d] arcus A B, D C, quibus insistunt, æquales erunt.

[c] 29. primi.
[d] 26. tertij.

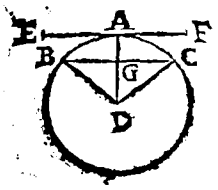
VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo A B C, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam esse rectæ B C, arcum B A C, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, secante rectam B C, in G, connexisq; rectis D B, D C, [e] erunt anguli A D B, A D C, circumferentijs æqualibus

[e] 27. tertij.

libus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, vtrumque vtrique. [a] Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, [b] quòd DA, perpendicularis sit ad EF. Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.



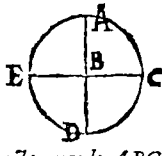
[a] 4. primi.

[b] 28. primi.

EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.

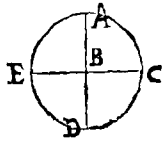
ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.

RECTVS angulus ABC, insistat centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus DBE, rectus, [c] cui æqualis sit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, vtpote recti: ac propterea [d] arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquidò constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.



[c] 15. primi.

[d] 26. tertij.

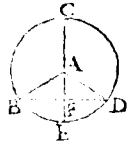


SED insistat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis AB, CB, ad D, E; quoniam ta CAE, quàm ACD, & AED, semicirculus est, estq; AC, quadrans; erit tam AE, quàm CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit. Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem: peripheriæ est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum.

[a] 27. tertij.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansq; aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtẽsam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumq; vtrique, basisq; BF, basi DF, æqualis ponitur; [b] erit angulus BAF, angulo DAF, æqualis. Igitur [c] arcus BE, arcui DE, æqualis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.

[b] 8. primi, [c] 26. tertij.

SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoq; BD, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum

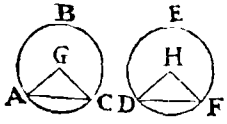
rursum rectis AB, AD; quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; [a] *erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, utrumque utrique, angulosq; continent æquales, ut ostendimus;* [b] *erunt quoque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.*

[a] 27. tertij.

[b] 4. primi.

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



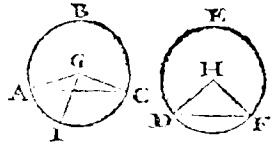
IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, DF, æquales. Igitur [c] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus insistunt, [d] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 8. primi.

[d] 26. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis



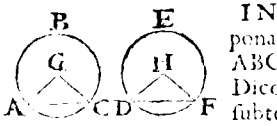
enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit rectæ AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Ponitur autem basis AC, maior basi DF. Igitur a *angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHF, æqualis; eritque propterea* b *peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, maior, quam peripheria DF: Ideoq; reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.*

a 25. primi.

b 26. tertij.

28. ## THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

c 27. tertij.

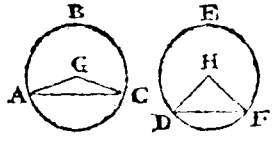
d 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maior &

maior

maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo maiores AC, DF, sitq; AC, maior, quam DF; AC proinde ABC, minor quã



DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [2] erit basis AC, maior basi DF, &c. [2] 4. primi.

SVNT autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eædem enim locum habent in vno eodemque circulo.

ITAQVE eadem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

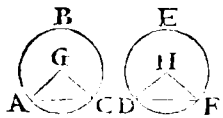
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SED & sequentes propositiones demonstrare, nõ fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Na si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, [a] *ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Totus ergo circulus æqualis erit. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia.* [b] *Iam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum.*

[a] 24. tertij.

[b] 24. tertij.

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proxime demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cũ hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IIII.

RECTAE lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DF, dicantur æquales, [a] erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sunt deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ AC, DF, ponantur similes, & inæquales.

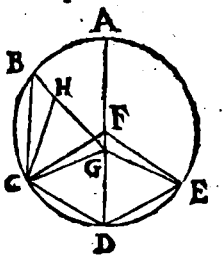
[a] 28. tertij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ in eas dē partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad diametrū angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, ſumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, conſtituanturque primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales eſſe. Quoniam enim

[a] *13. primi.*



[a] *tã duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales ſunt; ſi demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad cẽtrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulúſq; FGC, FGE, æqualibus lateribus oppoſiti æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque ſit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Iſoſcele FCD, acutus; ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonſtrauimus, baſis GC, baſi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG;* [b] *ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Conſtat ergo propoſitum.*

[b] *26. tertij.*

DEINDE ſint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales eſſe, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, ſunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia [c] *Eſt autem & baſis FC, baſi FE, æqualis.*

[4. 1. Lator. 3. GE, GF.]

[c] *8. primi.*

[c] *Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rurſus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia ſunt, baſeſq; æquales ponuntur GC, GE;* [d] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales,* [e] *atque idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

[d] *8. primi.*

[e] *26. tertij.*

TERTIO ſint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, eſſe æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales ſunt, [f] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, ſint æqualia, angulúſq; æquales contineant;* [g] *erunt & baſes GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE,*

[f] *27. tertij.*

[g] *4. primi.*

FGC, FGE; *ac proinde ex duobus rectis reliqui* CGD, EGD. *Quæ omnia demonstranda erant.*

VI.

SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

IN eadem figura proxima sint duo anguli æquales CGD, CGB. *Dico arcum* BC, *arcu* CD, *maiorem esse. Ductis enim rectis* BC, CD, [a] *quoniam recta* GB, *maior est, quam recta* GD, *abscindatur* GH, *ipsi* GD, *æqualis, iungaturq; recta* CH. *Quia igitur duo latera* GH, GC, *duobus lateribus* GD, GC, *æqualia sunt, angulosq; continent æquales,* [b] *erunt & basis* CH, CD, *æquales, & angulus* GHC, *angulo* GDC, *æqualis. Est autem* GDC, *in Isoscele* FCD, *acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus* CHB, *obtusus erit. Cum ergo,* [c] *duo anguli* CHB, CBH, *sint duobus rectis minores, erit* CBH, *acutus. Quare* [d] *latus* BC, *latere* CH, *maius erit. Est autem* CH, *recta ostensa ipsi* CD, *æqualis. Igitur recta* BC, *maior quoque erit, quàm* CD; *ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus* BC, *arcu* CD, *maior erit. Quod erat ostendendum.*

[a] 7. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur per-

perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erũt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus C D, D B, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur a & baſes AB, CB, æquales erunt; Ac-pro pterea b peripheriæ A B, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendũ.

a 4. primi.
b 28. tertij.

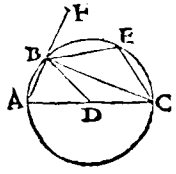
PRAXIS.

NON differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propoſ. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt A B C, intelligenda ſemper eſt recta linea eum ſubtendens A C, etiamſi ducta non ſit; atque ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem interuallo ſe mutuò interſecantes ſupra & infra puncta A, & C, &c. non ſecus, ac ſi dicta recta A C, ſecanda eſſet bifariam. Recta enim diuidens rectam A C, bifariam, ſecabit quoque arcum datum bifariam.

30. THEOR. 27. PROPOS. 31.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui vero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter ſit AC, conſtituaturq; in ſemicirculo angulus ABC, exiſtetque angulus B A C, in maiori ſegmento C A B. Conſtituatur quoque in CEB, minori ſegmento angulus B E C.



BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur recte DA, DB, æquales sunt, [a] erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadē ratione erit angul⁹ DBC, angulo DCB, æqualis, ideoq; tot⁹ angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. [b] Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC: ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

[a] 5. primi.

[b] 32. primi.

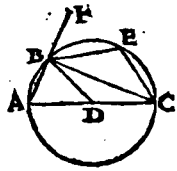
QVONIAM vero in triangulo ABC, [c] duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

[c] 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, [d] duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

[d] 22. tertij.

SATIS autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAG, recto minorem: ac denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique, in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcunq; angulum in segmento maiore



[a] 21. tertij. *maiore B A C, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunq; alius ostendetur esse etiã recto minor, quia æqualis est angulo B A C, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.*

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta B C, & peripheria B E C, pars sit quoque anguli recti F B C; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

A L I A demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit angulus A B C, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D,

[b] 5. primi. [b] erunt anguli D B A, D A B, æquales, quod rectæ D A, D B, æquales sint. Cum igitur angulus B D C, externus [c] æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cum igitur [d] anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorũ dimidiũ, rectus; quod est primũ.

[c] 32. primi.

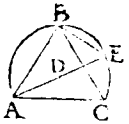
[d] 13. primi.

[e] 5. primi. VEL sic. Quoniam [e] angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimidium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiusdem trianguli. Quocirca [f] cum tres anguli in triangulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.

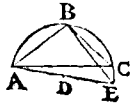
[f] 32. primi.

SIT

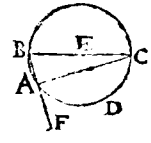
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum. Atque hęc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.



IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritque angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoq;. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC, constat vtrumque.



[a] 2. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus triangu-

guli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eò quod dimidium sit trium angulorum trianguli, [a] qui duobus rectis æquivalent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

[a] 32. primi.

EX CAMPANO.

EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum una est.

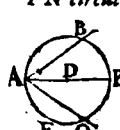
TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur recta AB. [b] Erit angulus ABE, segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur uersus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE, peruenerit, [c] vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si vlterius moueatur ad AC, [d] faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem, Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse prædictas consequentias.

[b] 31. tertij.



[c] 16. tertij.
[d] 13. tertij.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis; hoc est.

SEG-

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

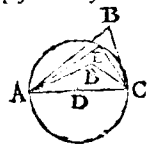
NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atque ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Praterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoque maior erit. quod hypothesi aduersatur.

QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositum

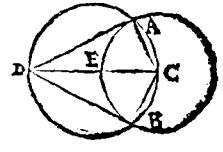
positum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum DA, vel DC, circulus describatur AEC, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit a angulus AEC, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, b vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.



a 31. tertij.

b 21 primi.

EX iis, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.



SIT enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ductæ rectæ DC, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, iungaturq; rectæ DA, DB. Dico vtramque circulum tangere in A & B. Ductis enim rectis AC, BC, c erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A; & recta DB, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quàm hæc ad extremitatem semidiametri CB.

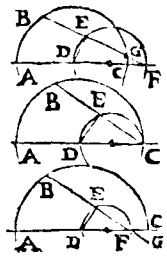
c 31. tertij.

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco; nimirum.

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto vero, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

SIT

SIT circulus A B C, per cuius centrũ D, describatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta A F; ac denique ex puncto F, vbi circulus DEF, rectam AF, intersecat, ducatur recta F B, secans circumferentias in B E G. Dico BE, GE, esse æquales. Ducta enim recta D E, [a] erit angulus DEF, in semicirculo D E F, rectus. Igitur [b] recta DE, rectam BG, secat bifariam.



[a] 31. tertij.

[b] 3. tertij.

QVOD si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit [c] rursum angulus D E C, in semicirculo DEC, rectus; ac [d] propterea BC, in E, secabitur bifariã.

[c] 31. tertij.

[d] 3. tertij.

SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum [e] angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Quare [f] recta D E, rectam B G, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

[e] 31. tertij.

[f] 3. tertij.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.

IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum ABCD, cuius duo opposita latera AD, BC, parallela sint, & æqualia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectæ AD, BC, parallelæ sint, & æquales, [g] erunt quoque AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est A B C D. Quia vero [h] & arcus A D, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis est; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC,

[g] 33. primi.

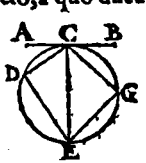
[h] 28. tertij.

[a] 31. tertij. *semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare [a] anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.*

31. **THEOR. 28. PROPOS. 32.**

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, a quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoq; segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta CE, per centrum. [b] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: [c] Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.



[b] 18. tertij. [c] 31. tertij.

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: [d] eritque CF, perpendicularis ad AB, [e] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: [f] Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis

[d] 18. tertij. [e] 31. tertij. [f] 21. tertij.

æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero C D E G, [a] duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: [b] Sunt autem & duo anguli A C E, B C T, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 22. tertij.
[b] 13. primi.

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primum recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum. Quoniam [c] *angulus C G E, rectus est, erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam vero C E, non transeat per centrum, construaturq; figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E, in alterno segmento maiore,* [d] *& hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo E C F, erit angulus A C F, æqualis duobus angulis E F C, E C F: Atqui anguli E F C, E C F, æquales sunt vni recto; quod* [e] *angulus C E F, rectus sit in semicirculo, &* [f] *tres anguli in triangulo C E F, æquales sint duobus rectis. Angulus igitur A C F, rectus quoque erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget.*

[c] 31. tertij.
[d] 21 tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 32. primi.

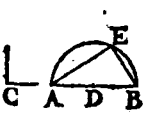
EODEM modo, si angulus B C E, æqualis fuerit angulo C D E, in alterno segmento minori, ostendetur recta A B, tangere circulum. Cum enim [g] *anguli B C E, A C E, duobus sint rectis æquales:* [h] *Item duo anguli C D E, C G E, duobus rectis æquales; si demantur æquales B C E, C D E, remanebunt*

[g] 13. primi.
[h] 22. tertij.

bunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonſtratum iam eſt, recta A B, circulum tanget.

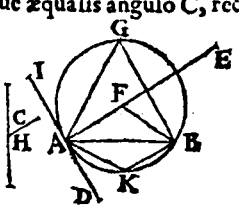
32. PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



RECTA data ſit A B, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur ſuper A B, ſegmentum deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo recto dato C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, ſemicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nã [a] angulus AEB, in deſcripto ſemicirculo rectus eſt, ideoque æqualis angulo C, recto.

[a] 31. tertij.



SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet ſupra AB. Fiat deinde angulo E A B, æqualis angulus FBA, ſecetque B F, rectam A E, in F. [b] Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare ſi centro F, & interuallo F A, circulus deſcribatur AGB, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento AGB, quod deſcriptum eſt ſuper A B, eſſe æqualẽ angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento AGB. Quia igitur A E, per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propoſ. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus D A B, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno A G B.

[b] 6. primi.

[c] 32. tertij.

SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rurſus angulo

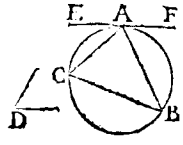
angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, deſcriptumque erit ſuper A B, ſegmentum A K B, in quo angulus K, æqualis eſt angulo dato obtuſo H. Nam angulus I A B, hoc eſt, angulus datus H, [a] æqualis eſt angulo K, in alterno ſegmento A K B. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

[a] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. 33.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus ſit A B C, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo D. [b] Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D.



[b] 17. tertij.

Dico igitur angulum A C B, in ſegmento ablato A C B, æqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim [c] angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno ſegmento A C B. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus F A B; erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum A C B, &c. Quod erat faciendũ.

[c] 32. tertij.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

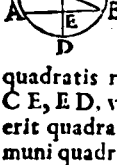
IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ A B, C D, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis A E, E B, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED.

Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Transeat primum vtraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

TRANSEAT deinde C D sola per centrum F, diuidatque primum rectam A B, bifariam, [a] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniã igitur C D, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; [b] erit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ F D, ideoque quadrato rectæ F B, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem quadratum rectæ F B, [c] æquale quadratis rectarum F E, E B. Igitur rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quoque erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ E B, hoc est, rectangulo sub A E, E B; cum A E, E B, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex ijs, quæ ad defin 1. lib 2. scripsimus.

[a] 3. tertij.

[b] 5. secũdi.



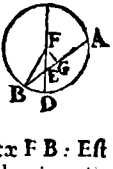
[c] 47. primi.

DIVIDAT iam C D, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ F G, F B; [d] eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam vero rectangulum sub C E, E D, vna cum quadrato rectæ F E, [e] æquale est quadrato rectę FD, hoc est, quadrato rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, [f] æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ

[d] 3. tertij.

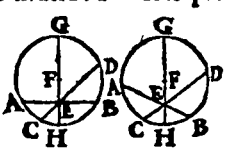
[e] 5. secũdi.

[f] 47. primi.



rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub C E, E D, vna cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ G E, [a] æquale est eidem quadrato rectæ GB. Igitur rectangulum sub C E, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnà cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale rectangulo sub A E, E B. quod est propositum. [a] 5. secundi.

TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta G H. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue A B, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub C E, E D, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue C D, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ seseè mutuò secent, &c. Quod demonstrandum erat.



SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, cir-

culus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.

SECENT se mutuo rectæ A B, C D, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per eu circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiã C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub F E, E D, [a] *æquale est rectangulo sub A E, E B; & rectangulum sub C E, E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B; Erunt rectangula sub C E, E D, & sub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.*

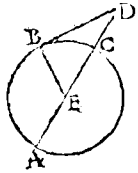
[a] 35. tertij.

35. THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo

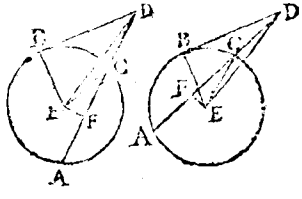
quo linea ducatur D A, secans circulum in C, [a] & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B.



Transeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, [b] quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, [c] erit rectangulum sub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectę D E, [d] æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod est propositum.

[a] 17. tertij.
[b] 18. tertij.
[c] 6. secũdi.
[d] 47. primi.

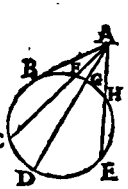
NON transeat iam D A, secans per centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; [e] eritque E B, ad B D, perpendicularis; [f] & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, [g] erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, [h] æquale quadratum rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et [i] quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadratum rectæ DE, [k] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum DB, B E. Ablato ergo communi



[e] 18. tertij.
[f] 3. tertij.
[g] 6. secũdi.
[h] 47. primi.
[i] 47. primi.
[k] 47. primi.

muni quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

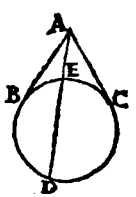
COROLLARIVM. I.



HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, a *erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.*

a 36. tertij.

COROLLARIVM. II.

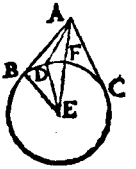


CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, b *æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.*

b 36. tertij.

COROL-

COROLLARIVM. III.



PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, [a] erunt anguli ABE, ADE, recti, [b] ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, [b] erit angulus ADE, maior angulo ABE. [a] 18. tertij. [b] 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F, [c] erit AD, cum sit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ a minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD, sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales. quod est absurdum. [d] Sunt enim maiores AB, BE, quàm AD, DE. Solum igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangãt: Quod est propositum. [c] 8. tertij. [d] 21. primi.

COROLLARIVM. IIII.

ILLVD deniq; constat etiam si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt,

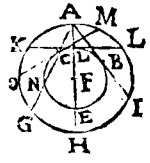
possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) erunt q; ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum.

[a] *8. tertij.* [a] *Duæ enim tantum duci possunt.*

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. [b] *Igitur anguli* [b] *8. primi.* *B, F, æquales erunt:* [c] *Sed B, rectus est. Igitur &* [c] *18. tertij.* *F, rectus erit: atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.*

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & secans



AE, quæ primum per centrum F, transeat, secetque circumferentiam in D. Dico rectangulum sub AE, AD, æquale esse quadrato ex AB. Descripto namque ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vsque ad H, I; & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Erunt q; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, æquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, KL, æquales erunt, secabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub KD, DL, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI, KD, DL. Itaque quoniam rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub [d] *35. tertij.* *AE, (quæ ipsi HD, ostensa est æqualis) AD,* [d] *æquale est rectangulo sub KD, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sive quadrato ex AB; constat propositum.*

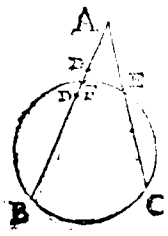
SED

SED iam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetq; circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, æquale esse. Describto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsque ad G, I; & per C, ducatur OM, circulum BCD, tanget. Eruntque ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, æquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, æquales erunt, secabunturq; in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Itaq; quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, cui æqualis GC, ostensa est æqualis AC, æquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sive quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur.

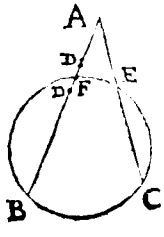
PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo fermè conuertemus.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.

EX puncto enim A, egrediatur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta



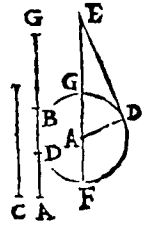
B, C, E



B, C, E, (vt ad propoſ. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui ſi dicatur non tranſire per quartũ punctũ D, tranſibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub A B, A F, æquale eſt, ex coroll. 1. huius propoſ. rectangulo comprehenſo ſub A C, A E; & rectangulum ſub A B, A D, eidem rectangulo ſub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula ſub A B, A F, & ſub A B, A D, inter ſe æqualia, pars & totum: quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonſtrandum.

LICEBIT quoque ex demonſtratis hac propoſ. colligere huiuſmodi problema.

DATIS duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehẽſum, quadrato alterius ſit æquale.



SINT data duæ rectæ A B, & C, ſitq; ipſi A B, maiori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita, & adiuncta, æquale ſit quadrato rectæ C, minoris. Diuiſa recta A B, bifariam in D, deſcribatur ex quouis centro A, ad internallũ A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipſi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur E F, ſecans circumferentiam in G. Dico ſi recta A B, adijciatur B G, ipſi E G, æqualis, rectangulum ſub tota A G, & G B, æquale eſſe quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum ſub F E, E G, æquale eſt quadrato rectæ E D; (quod E D, circulum tangat in D, ex coroll. propoſ. 16. huius lib.) Eſt autem rectangulum ſub F E, E G, æquale rectangulo ſub A G, G B, (quod rectæ F E, E G, rectis A G, G B, æquales ſint. Sumpta enim

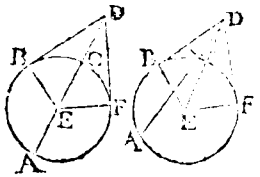
*3 Ex 3. tertij.

enim est GB, ipsi EG, æqualis, & AB, ipsi FG, æqualis posita est,) & quadratum ex ED, quadrato ex EC, (ob æqualitatem rectarum ED, & EC, ex constructione.) æquale. Igitur & rectangulum sub AG, GB, quadrato ex EC, æquale erit. Quod est propositum.

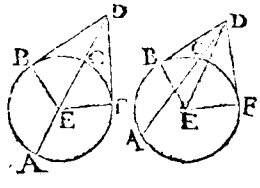
NON secus propositum demonstrabitur, si recta C, minori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum quadrato rectæ AB, maioris æquale sit.

THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.



EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB: Dico DB, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, [a] 17. tert.



si D A, secans non transeat per cẽtrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, DC, [a] æquale est quadratũ rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, DC, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E; & basis D E, communis: [b] erunt anguli D F E, D B E, æquales: [c] Atqui angulus D F E, rectus est, quod D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 36. tertij.
[b] 8. primi.
[c] 18. tertij.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ducta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.

IN priori figura huius propos. duæ rectæ DB, DF, circulum ABCF,

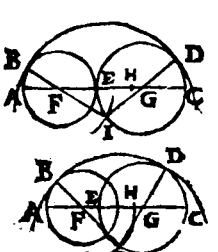
A B C F, tangant in B, F, punctis, qua ex 2. coroll. præcedentis propoſ. æquales erunt: Vel ducantur quacunque duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, ſectum eſſe bifariam à recta D A. Cum enim iunctis rectis E B, E F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia ſint, baſisq; E B, baſi E F, æqualis; [a] erunt duo anguli ad D, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum. [a] 8. primi.

D I V I D A T iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum tranſire. Si enim in D A, non eſt centrum, ſit extra ipſam centrum E, iungaturq; recta E D, vt in poſteriori figura huius propoſ. Ergo, vt demonſtratum eſt, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cum ſint dimidia partes anguli B D F, æquales inter ſe erunt, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta D A, per centrum. Quod demonſtrandum erat.

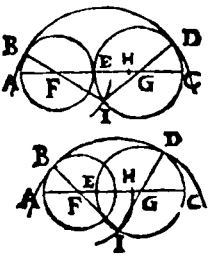
S E D & ſequens problema cum Ioan. Bapt. Benedicto abſoluemus, quod ad propoſ. 17. huius lib. promiſimus, debueramuſque ibidem demonſtrare, niſi memoria excidiſſet. Eſt autem eiuſmodi.

DATIS duobus circulis, quorum vnus non ſit totus intra alium, circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere.

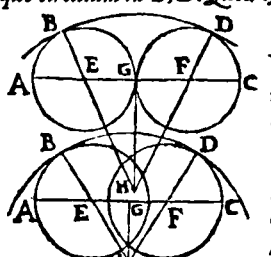
S I N T primum duo circuli ſe mutuò tangentes, aut ſecãtes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentijs in A, C, quæ, ſi circuli ſe tangant in E, [b] *per contactum E, tranſibit. Abſciſſa recta E H, ex ſemidiametro maioris circuli, qua ſemidiametro minoris ſit æqualis, deſcribatur ex F, cẽtro minoris ad internallũ rectæ*



[b] 12. tertij.



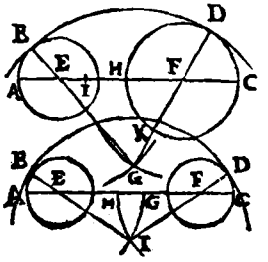
HC, *qua maior est, q̃ semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, recta ducantur I F, I G, occurrentes circumferentijs in B, D. Et quia C H, ipsi I F, & H E, ipsi F B, aqualis est, per constructionem; erunt tota C E, I B, aquales. Cũ ergo & diameter I D, diametro C E, aqualis sit, erit quoque I B, ipsi I D, aqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.*



SINT deinde duo circuli se mutuò tangentes, vel secantes aquales, A B, C D, per quorum centra E, F, recta educatur A C. Diuisa deinde recta E F, inter duo centra bifariã in G, (Quãdo circuli se mutuò tangunt, diuiditur recta E F, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros aquales aqualium circulorum) excitetur in G, ad E F, perpendicularis G H: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, recta occurrentes circumferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera G E, G H, duobus lateribus G F, G H, aqualia sunt, angulosque [a] *comprehendunt aquales, nimirum rectos; erunt & bases H E, H F, aquales: Et additis semidiametris aqualibus E B, F D, tota linea H B, H D, aquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum; ex coroll. propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.*

[a] *4. primi.*

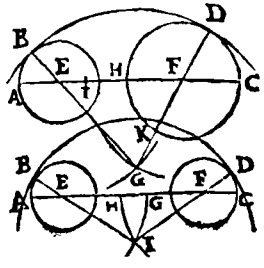
TERTIO sint duo circuli siue aquales, siue inaquales, A B, C D, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta A C. Et si circuli sunt inaquales, descri-



describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris CH, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum recta FI, composita ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro minoris aquali. Ponamus enim nunc hos arcus se interſecare; quando autem se non ſecant, dicemus mox, quid agendum ſit. Ex G, autem per centra E, F, recta ducantur ſecantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipſi FI, aqualis eſt: ablatis aqualibus FK, FH; reliqua aquales erunt KG, HI. Eſt autem HI, ſumpta aqualis ſemidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipſi EB, aqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, ſit aqualis; erunt tota recta GB, GD, aquales. Quare circulus ex G per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetq; extra vtrumq; circulum, ex coroll. propoſ. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

VERVM quia non ſemper duo illi arcus ex E, & F, deſcripti ſe interſecant, quod accidit propter nimiam circulorũ diſtantiam vnius ab altero, abſoluemus problema hoc alio modo, qui generalis eſt, ſiue circuli ſe tangant, ſiue non, etiamſi non ſe ſecent, & ſiue aquales ſint, ſiue inaquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, ſumãtur recta aquales AG, CH, ita vt qualibet ſemiſſem ipſius AC, ſuperet: & ex cẽtro E, per G, arcus GI, deſcribatur, quem ſecet in I, alius arcus HI, ex cẽtro F, per H, deſcriptus: ac demiq; ex I: per centra E, F, recta emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, aquales ſunt; ſi addantur aquales AE, BE, fient tota AG, BI, aquales. Eadem ratione erunt CH, DI, aquales. Cum ergo AG, CH, poſita ſint aquales, erunt quoque BI, DI, aquales. Circulus igitur ex I, per B, deſcriptus tranſibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex coroll. propoſ. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

IAM vero eadem arte deſcribemus circulum data ma-



gnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindam⁹ AG, CH, reliqua perficiemus, vt proximè dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex coroll. propos. 13. huius lib.

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS

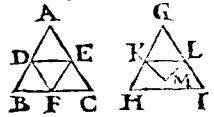
ELEMENTVM QVARTVM

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides quarto hoc libro de variis inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non



tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inſcribi in triangulo G H I; quamuis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.

II.

SIMILITER & figura circum figurã deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quę circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E contrario dicetur triangulum A B C, deſcribi circa triangulum D E F; quoniam ſingula latera illius ſingulos huius angulos tangunt; At triangulum G H I, non dicetur deſcriptum eſſe circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

C Æ T E R V M proprie figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis deſcribi, & circa eaſdem deſcribi, quando inſcripta, & circumſcripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, cum & quadratum intra triangulum deſcribi poſſit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

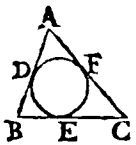
VT

VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulū in circulo esse inscriptū. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero, si latera trianguli ABC, singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

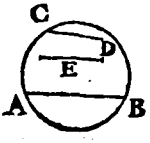
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura descriptionis

tionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At vero circulus A B C, in figura definitionis 3. descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, qua in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

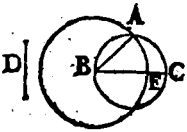


VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse. dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.



IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter [a] sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit

[a] 15. tertij.

cũt B C, illi æqualis : Si vero D, minor fuerit diametro, [a] abscindatur B E, æqualis ipsi D; & centro B, interuallo autem B E, circulus describatur E A, secans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta E A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [b] Est enim B A, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidem B E, per constructionem. Quare A B, & D, inter se æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectã lineã accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

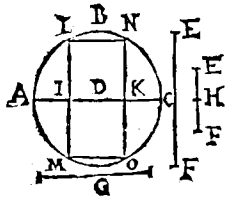
[a] 3. primi.

[b] 15. defin. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. [c] Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod si recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero E F, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur D I, ipsi H E, & D K, ipsi H F, æqualis, ut tota I K, toti E F, sit æqualis. [d] Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O; iungaturq; L N. Dico L N, accommodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, N O, æqualiter a centro distent, [e] ipsæ æquales inter se erunt: [f] quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta A C, per centrum D, transeunte, erit & earum semisses L I, N K, æquales. [g] Quia vero L I, N K, parallelæ etiam sunt; [h] erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, [i] & ipsi G, parallela.



[c] 31. primi.

[d] 11. primi.

[e] 14. tertij.

[f] 3. tertij.

[g] 28. primi.

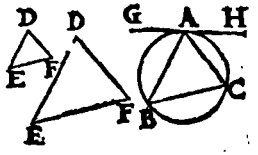
[h] 33. primi.

[i] 30. primi.

lela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



SIT in circulo ABC, dato describendum triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C, angulo E, atq; extendantur rectæ A B, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta A C, in rectam AB, vel inter rectas A B, A G: propterea quòd anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, [a] minores sunt duobus rectis. [b] Essent autem duobus rectis æquales, si A C, in A B, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, [c] æqualis angulo GAB; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, [e] erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

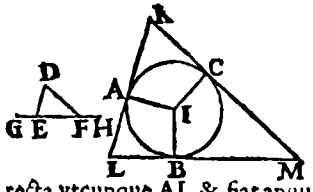
[a] *17. primi.*
[b] *13. primi.*
[c] *32. tertij.*
[d] *32. tertij.*
[e] *32. primi.*

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

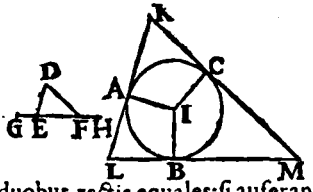
3.

CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.



CIRCA circulum datum A B C, deſcribendum ſit triangulũ æquiangulũ dato triãgulo D E F. Producto latere E F, vtrinq; ad G, & H, ſumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo DEG; & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores; ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet ſupra rectas AI, CI, quòd hę angulũ conſtituant in I. Cum enim ſpatium circa I, æquale ſit quatuor rectis, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. hoc eſt, quatuor angulis ad E, & F; ſintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum ſpatium AIC, reliquis duobus anguli s DEF, DFE, æquale: Sed hi minores ſunt duobus rectis. Igitur & ſpatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs ſpatium illud eſſet vel æquale duobus rectis, ſi nimirum AI, CI, vnam rectâ lineam conſtituerent; vel maius duobus rectis, ſi recta A I, producta caderet ſupra IC. Cadit igitur neceſſario A I, producta infra C I; atque ideirco angulus fiet A I C, ad partes K. Deſcriptum eſt igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico eſſe æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales ſunt quatuor rectis, vt ad

32. primi.



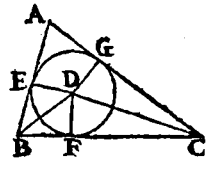
ad 32. propoſ. lib. 1. oſtenſum fuit; & anguli IAL, IBL, ſunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur [a] & anguli DEG, DEF, ſint duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo DFE. [b] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum. &c. Quod efficiendum erat.

[a] 13. primi.

[b] 32. primi.

4. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere.



SIT deſcribendus circulus in dato triangulo ABC. Diuiſis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales ſunt duobus anguli DBF, DFB, trianguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; [c] erunt quoq; latera DE, DF, æqualia. Eademq; ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

[c] 26. primi.

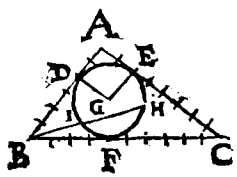
SCHO-

SCHOLIVM.

VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; a in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora, non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate.

a 20 p. 1.

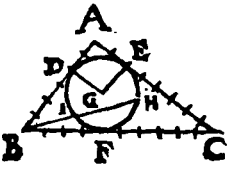
IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



SIT triangulum ABC, b cui circulus inscribatur DEF, tãgens latera triãguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadem latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla est segmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmẽti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et c quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, recta, cuius qua-

b 4. quarti.

c 36. tertij.



quadratum quadruplum eſt re ct anguli ſub BH, BI. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi angulus A, rectus ſit, dico non ſolum duo latera AB, AC, ſuperare latus BC, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius ſegmento exteriore, vt oſtenſum eſt: verum etiam exceſſum illum eſſe diametro circuli DEF, aqualem. Ductis enim ex

[a] *18. tertij.* *centro G, ad puncta cõtactuum D, E, rectis GD, GE;* [a] *erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur*

[b] *28. primi.* *rectus,* [b] *erunt tam recta AE, DG, quàm AD, EG, parallelæ inter ſe: atque idcirco AG, parallelogrammum erit.*

[c] *34. primi.* [c] *Quare tam recta AD, ſemidiametro EG, quàm recta AE, ſemidiametro DG, aqualis erit: hoc eſt, duæ rectæ AD, AE, ſimul totí diametro circuli erunt aquales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt oſtenſum eſt. Nam EC, ipſi FC, & DB, ipſi FB, aqualis eſt, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, ſuperant latus BC, diametro circuli inſcripti. Quod eſt propoſitum.*

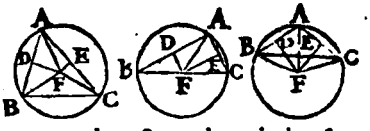
ITA QVE quouis duo latera ſuperant reliquum duabus rectis circulum triangulo inſcriptum tangentibus, qua inter angulum duobus illis lateribus comprehenſum, & circulũ interijciuntur. Oſtenſum enim eſt, latera AB, AC, ſuperare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

IAM vero his ita demonſtratis, ſi tria latera trianguli cognita ſint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inſcribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, AB, AC, ſuperare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem aquales ſunt: ſi dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes AD, AE, notæ. Semiſſis ergo huius exceſſus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde ſegmentum EC, dabit ſegmentum CF, vſque ad punctum tertiũ F: Vel reliquũ ſegmentũ DB, dabit ſegmentum BF, ad idem punctũ F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur

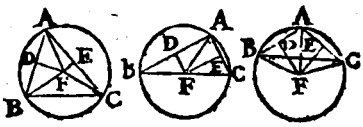
erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt ha in G, centro circuli inſcribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorũ. Dempta latere BC, 10. palmorũ ex duobus lateribus AB, AC, hoc eſt, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD, quàm AE, duos palmos continebit. Segmentum ergo DB, continebit 4. palmos, totidemque ſegmentum BF, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere AB, 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id eſt, ex 18. palmis, reliqui ſiunt 12. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE, AD, 2. palmorum, & vtrumque BD, BF, 4. palmorum. Poſtremo dempto latere AC, 8. palmorum ex lateribus AB, CB, hoc eſt, ex palmis 16, remanent 8. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque AD, AE, 2. palmos.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.



SIT circulus deſcribendus circa datum triãgulum ABC. Diuidantur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtuſum angulum, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quæuis latera bifariam poſsint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, cocuntes in F. (Quod enim cocant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia ſunt lateribus BD,



[a] 4. primi.

BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti: [a] erũt baſes FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum FA, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, [b] *omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi vero ſit in latere BC,* [c] *angulum BAC, eſſe rectum, quòd ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum,* [d] *angulum BAC, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.*

[b] 31. tertij.

[c] 31. tertij.

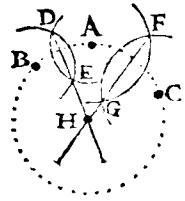
[d] 31. tertij.

CONTRA vero perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi vero extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti: ſi verò extra, eſſet angulus oppoſitus, obtuſus. Denique ſi in triangulo obtuſangulo caderet in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus: ſi vero intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.

SCHO-

SCHOLIVM.

COLLIGITVR *etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, vt hac propos. traditum est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur secãtes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H, esse centrum circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.*



PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

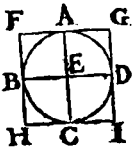
SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum

omnia ſint ex centro; & anguli contenti ſunt recti; [a] erunt baſes AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD; Item rectæ CD, DA; Et rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter ſe ſunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales ſunt, nimirum recti; [b] erunt quatuor arcus, quibus inſiſtunt, æquales; [c] ac proinde & rectæ quatuor ſubtenſæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter ſe æqualia ſunt. Sunt autem, [d] & anguli recti, cum omnes in ſemicirculis exiſtant. Quare quadratum erit ABCD; proptereaque in dato circulo quadratum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 26. tertij.
[c] 29. tertij.
[d] 31. tertij.

7. PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.



SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, deſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpẽdiculares FG, FH, HI, IG, cocuntes in punctis F, H, I, G. Dico FHIG, eſſe quadratum circa circulum datum deſcriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, ſint recti, [e] erunt FH, AC, parallelæ; ſimiliterque erunt GI, AC, parallelæ. [f] Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum eſt ACHF, [g] erunt latera oppoſita AC, FH, æqualia, & anguli oppoſiti ACH, AFH, æquales: Sed ACH, eſt rectus. Igitur & AFH, rectus erit. Eadem ratione oſtendemus angulos H, I, G, rectos eſſe, & latera HI, IG, GF, æqualia eſſe diametris BD, AC. Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera

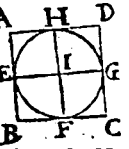
[e] 28. primi.
[f] 30. primi.
[g] 34. primi.

latera FG,FH,HI,IG,æqualia, ideoque FGIH,quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propoſ. 16.lib. 3.Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 8.

IN dato quadrato circulum deſcribere.

SIT in dato quadrato ABCD, inſcribendus circulus. Diuiſis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, ſecantes ſe in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. [a] Quare & A B, parallela eſt, & æqualis ipſi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipſi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID; ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hę inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſes æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad interuallum IE, tranſibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propoſ. 16, lib. 3. [b] quòd anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.



[a] 33. primi.

[b] 29. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.

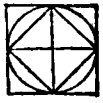
SIT deſcribendus circulus circa quadratum ABCD.

Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia sunt; [a] erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus B A D, rectus. [b] Quare A B D, A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, sint æquales; [c] erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 6. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit



quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

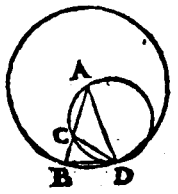
10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quæ [d] diuidatur in C, ita vt rectangulum sub A B, B C, æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo vero A B, circulus

[d] 11. secundi.

circulus describatur, in quo [a] accómodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, [b] describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD; & recta AB, secat circulum DCA: [c] tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, [d] æqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem [e] æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, [f] cum ABD, ADB, æquales sint: ac propterea [g] rectę CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; [h] ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.



[a] 1. quarti.
[b] 5. quarti.
[c] 37. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 32. primi.
[f] 5. primi.
[g] 6. primi.
[h] 5. primi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli ABD, [i] æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres [k] æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

[i] 32. primi.
[k] 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quòd se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam, BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquũ habeat quãcunque proportionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Quæ res hactenus desiderata est.

11. PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [a] Constituatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F: & in circulo [b] inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, [c] bifariam diuidatur rectis CE, DB; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA.

[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. primi.

Dico

Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inſcriptũ, eſſe equilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum A C D, A D C, duplus ſit anguli C A D, & diuiſus bifariam; erunt quinque anguli A D B, B D C, C A D, D C E, E C A, æquales. [a] Quare arcus A B, B C, C D, D E, E A, ſuper quos aſcenderunt, atque idcirco, [b] & rectæ A B, B C, C D, D E, E A, æquales erunt. Aequilaterum eſt igitur pentagonum A B C D E. Rurſus quia arcus A B, E D, æquales ſunt; addito communi B C D, fient æquales A B C D, E D C B. [c] Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus inſiſtentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulum eſt ergo pentagonum A B C D E. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.

[a] 26. tertij.
[b] 29. tertij.
[c] 27. tertij.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas vnius recti. [d] *Cum enim tres anguli B A C, C A D, D A E, æquales ſint, vtpote qui æqualibus arcubus B C, C D, D E, inſiſtant; ſit autem C A D, per coroll. precedentis propoſ. quinta pars duorum rectorum, vel dua quinta vnius recti; erit totus B A E, tres quinta duorum rectorum: vel ſex quinta vnius recti.*

[d] 27. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD ſi detur recta linea terminata C D, ſuper ea conſtituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. [e] *Fiat triangulum Iſoſceles F G H, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde*

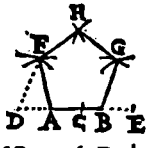
[e] 10. quarti.

[a] 32. primi.

constituantur anguli ACD, ADC, aquales angulis G, H, coeantq; recta CA, DA, in A, [a] quæ efficient angulum CAD, aqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triangulũ ACD, circulus [b] describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulũ ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum aquilaterum, & aquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.

[b] 5. quarti.

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta



proposita AB, supra quam pentagonum aquilaterum, & aquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramq; partem, sintq; AD, BE, maiori segmento AC, aquales. Interuallo deinde data recta AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur q; recta AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse aquilaterum, atque aquiangulum. Quòd enim sit aquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint aquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quòd autem sit & aquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quòd basis AD, aqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis vero laterum aqualium ipsi AB, aquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorũ rectorũ, nimirum, BAF, reliquas tres quintas duorum rectorũ continebit. Cũ ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli complectatur tres quintas duorũ rectorum; erit BAF, angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli. Eadem q; ratione erit ABG, angulus pen-ta-

pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descriptæ duo alia latera, cadent ea necessariò in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non forent. quod est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.

[a] 21. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

12.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [b] Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; [c] coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL; erunt quadrato rectæ FH, [d] æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quàm rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarũ FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam

[b] 11. quarti.

[c] 13. prim.

[d] 47. primi.

constat

constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt ostensum est; [a] erunt anguli A F H, B F H, æquales. Igitur [b] & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC, anguli B I F. Cum igitur [c] anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentijs AB, BC, [d] quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur AB, BC, erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis B F I, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune B F; [e] erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ H I, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus rectas I K, K L, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Aequilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

[a] 8. primi.
[b] 4. primi.
[c] 27. tertij.
[d] 28. tertij.
[e] 26. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunq; figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum

metrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosq; conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribendus circulus in dato pentagono A BCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ cocant in F. Cum enim anguli B A F, A B F, sint minores duobus rectis; (Nam quia angulus BAE, duobus rectis minor est, erit eius semissis, nimirum angulus BAF, recto minor. Eodemque modo ABF, minor erit recto,) [b] coibũt necessario rectæ AF, BF: atque adeo intra pentagonum. Nam si ducerentur rectæ AC, AD, (quas tamen ducendas non censuimus, ne multitudo linearum confusionem pareret. Quilibet si vult, poterit eas ducere, vel saltem punctis notare.) [c] essent ipsæ inter se æquales, angulique BAC, E A D, æquales etiam, propterea quòd latera BA, BC, lateribus EA, ED, æqualia sunt, æqualesque continent angulos B, E. Hisce ergo angulis ablatis ex angulis æqualibus BAF, EAF, reliqui essent æquales anguli CAF, DAF. Quare recta AF, diuidens in Isoscele ACD, angulum CAD, bifariam, secabit productã basin CD, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. Non aliter demonstrabitur, rectam BF, productam secare

[a] *9. primi.*

[b] *13. pron.*

[c] *4. primi.*

secare bifariam rectam D E. Quocirca necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli C B F: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; [a] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli F A L; estque latus A F, subtensum vni æqualium angulorum, commune; [b] erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per corroll. propos. 16. lib. 3 eo quòd angulos rectos faciant cũ semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi.

[b] 26. primi.

SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos dimidientium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi.

PROBL.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIT circa pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ cocant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT

SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrũ G, inscribendum hexagonũ equilaterũ, & æquiangulũ. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo vero D G, qui secet circulũ datum in pũctis C, & E, e quibus per centrum G, rectæ extendantur C F, E B. Si igitur connectantur rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, inscriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F, quod dico esse & equilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta G C, æqualis sit rectæ G D & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, D C, æquales inter se: Ideoque triangulum C D G, erit æquilaterum. Quare tres anguli C G D, G D C, D C G, aquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe C G D, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus D G E, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli C G D, D G E, E G F, æquales duobus rectis. Reliqui igitur angulus E G F, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli C G D, D G E, E G F, inter se æquales; quibus cum etiam æquales sint ad verticẽ anguli F G A, A G B, B G C; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. Quare circumferentiæ, quibus insistunt, ac propterea rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum A B C D E F. Rursus quia circumferentia B C, æqualis est circumferentiæ A F; si addatur communis C D E F, erunt circumferentiæ B C D E F, A F E D C, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes B A F, A B C, æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos B C D, C D E, D E F, E F A, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui compositio ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

5. prim.
5. def. 1.
13. prim.
15. prim.
26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.

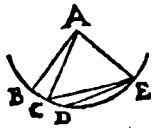
CO-

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus aequale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, aequale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariã. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. traditur.



PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli BCDE, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. [a] Erit ergo subtensa DE, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hæc maior quàm DE, ex scholio propos. 29. lib. 3. hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris AC, AE, erit triangulum ACE, Isosceles, cuius tertium latus CE, vtrouis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim [b] anguli ACE, AEC, æquales sunt, [c] & simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta AB, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro insistens rectus, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.

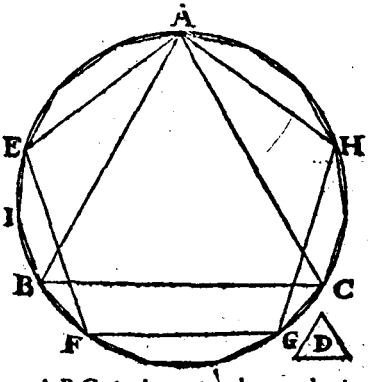
[a] 15. quarti.
[b] 5. primi.
[c] 17. primi.

PROBL.

16.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.



SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 6. lib. 1. erit etiam æquiangulũ; [a] inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propos. 6. lib. 1, [b] eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, qui tertia pars est totius circumferentiæ. [c] Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A; [d] eruntque quinque arcus A E, E F, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia A B C, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. [e] Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus

[a] 3. quarti.
[b] 26. vel 28. tertij.
[c] 11. quarti.
[d] 28. tertij.
[e] 30. tertij.

arcus B I, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, [a] æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod [b] & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

[a] 1. quarti.
[b] 27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

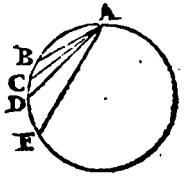
SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figura in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quòd ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quòd ea sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; diuiso arcu BE, bifariam in I, erit subtensa recta BI, latus figuræ 15. laterum, angulorumq; æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscri-

bendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique aquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circumferentia, talium 5. eſt arcus AB, ſexta pars circumferentia; & talium 6. eſt arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.



PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. ſuperat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

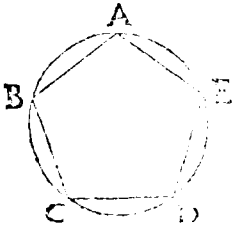
ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inueſtigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

NON

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessario æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

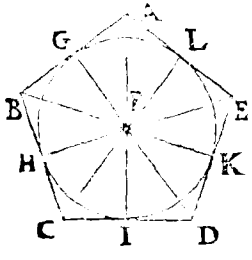


SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum A B C D E, circulo circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, a erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Relegui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca b anguli ABC, BCD illis insistentes æquales erunt: Eodem modo ostendemus & omnes alios singulos æquales esse. Quotcunque ergo illi sint, ac proinde figura A B C D E, æquiangula est, sint autem anguli numero impares, sive bini sive bini deficiant a numero omnes.

a 28. tertij.

b 27. eiusdem.

SI vero sit figura æquilatera A B C D E, quæ sit



angulorum numero impariorum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, [a] *erunt ea ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo &* [b] *bases FG, FL, ex centro sint æquales,* [b] *erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus EAE, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus, reliques omnes angulos figura sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia sunt, angulique illis contenti, ostensi* [c] *æquales; erunt quoque bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoq; æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqualis: hoc est, primus, constituti autem potest primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt, cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab vltimo, vno relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium & cum eorum similibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, & ijs, qui vsque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ*

[a] *18. tertij.*

[b] *8. primi.*

[c] *4. primi.*

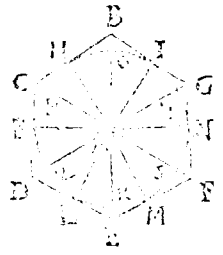
figuræ propositæ inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.

HÆC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solum concludetur, primum angulũ æqualem esse tertio, quarto, septimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquàm autem probabitur, primum vltimo esse æqualem, eo quod vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquàm autem ostendetur, secundum angulum esse primo æqualem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper concinentur æquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demum per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorũ dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupãtibus, secundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est.) cum primus ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & secundo angulo; erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonstrauimus, omnes anguli inter se erũt æquales.

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorũ numerus sit par, circulo circumscriptam, esse

quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac revera eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quamdam aliam; adeo vt nulla detur possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, refellemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum prop. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus HP. Arcui quoque OH, æquales sumantur OI, QK, QI, SM, SN, ita vt sex arcus æquales ad easque partes trium semidiametrorum non se tangentium, sed inter binas singulis relictis in medio, flectantur. Itaque ad easdem partes semidiametrorum reliquarum sex reliqui arcus PH, PK; RL, RM; TN, TI æquales. Ducantur item ex centro A, ad puncta H, K, I, L, M, N, recta lineæ, ducatur per H, ad HA, perpendicularis IC, secans tres diametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. prop. 16. lib. 3. Coibunt autem hæ figuræ rectæ HB, AB, præterea quod duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, [illegible] arcus OH, qui minor est quadrante, numerato, ex [illegible] prop. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Erunt igitur duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia, [illegible] æquales continent æquales æqualibus arcibus CH, CI, [illegible]; erunt quoque bases BH, BI, æquales, [illegible]. Cum ergo BHA, rectus sit ex centro ductus, [illegible] BI, vtrumque [illegible] recta BI, circulum tanget [illegible] cum sola diametro AT, [illegible] AI, duobus rectis minores [illegible] rectus, [illegible] minor est, ex



a 27. 1. elem.
b 4 primi.

schol 2

scholio propoſ. 27. lib. 3. ab arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales ſunt; (Nam I, H, recti ſunt, [a] & GAI, CAH, æquales ſunt inſiſtentes æqualibus arcubus TI, PH.) lateraq; AI, AH, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, CA, æqualia. Cum ergo & BI, ipſi BH, oſtenſa ſit æqualis; erit tota BG, toti BC, æqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq; cum ſemidiametro AF, producta in L, eritq; ipſi GB, æqualis. Item iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum ſemidiametro AR, producta conuenient in E, ipſiq; FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & ſemidiametro AQ, protracta occurret in D, ipſiq; EF, fiet æqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum ſemidiametro AP, producta concurret in C, fietq; ipſi DE, æqualis. Quod autem DK, in eodem puncto C, occurrat ſemidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifeſtum eſt. Si enim in alio puncto eam ſecaret, cum ducta recta CK, circulum tangeret in K, vt demonſtratũ eſt, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentẽ interciperet erad; punctum contactus vna linea recta: quod fieri non poſſe, [c] Euclides demonſtrauit. Eſt ergo hexagonum BCDEFG, circulo circumſcriptum, æquilaterum. At idem eſſe non æquiangulum, ita demonſtrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera eſt, erunt quidem per ea, quæ paulò ante monſtrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter ſe, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter ſe æquales; omnesq; ſecti erunt biſariam à ſemidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH, [d] tribus angulis trianguli ACH, æquales ſunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Eſt autem BAH, maior quàm CAH, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior ſit arcu PH. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit: quæ cum ſemiſſes ſint totorum angulorum B, C, vt oſtenſum eſt; erit totus quoque CBG, toto BCD, minor. Eodemq; modo totus anguli D, F, totis angulis E, G, minores oſtendentur. Non eſt ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat oſtendendum.

[a] 27. tertij.

[b] 26. primi.

[c] 16. tertij.

[d] 32. primi.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & aliis figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

QVOD si figura aquilatera quotcunque angulorum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inscripta angulis, &c. vt factum est in pentagono propos. 12. tum necessario figura illa erit simul aquiangula, vt ex demonstratione eiusdem propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunq;, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.

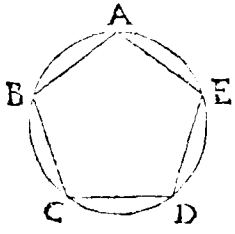
SIT enim figura aquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessario aquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FH, FI, FK, FL, [a] *quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos 36. lib. 3. æquales sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro æquales.* [b] *Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus com-*

[a] 18. tertij.

[b] 8. primi.

comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse: ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Est autem latus FG, vni æqualium angulorum oppositum, commune. [a] Igitur latera quoque AG, LG, æqualia erunt; atque ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidiæ æquales sunt, erunt quoque totæ lineæ AB, AE, æquales. Eademq; ratione AB, BC; & BC, CD; & CD, DE; & DE, EA, æquales erunt. Quam ob rem figura ABCDE, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum. [a] 26. primi.

SIT rursus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterũ numero imparium circulo inscripta. Dico eã necessario esse quoq; æquilaterã. Quoniã enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; [b] erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex toto circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dempto ergo communi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, æqualis erit; ac proinde [c] & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quodq; latus ei, à quo tertiũ est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constituit autẽ quodlibet latus pro primo) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atq; in hunc modũ omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt. Eademq; ratione omnia latera parium locorum, ut secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum



[b] 26. tertij.

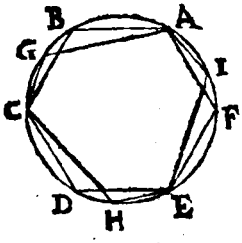
[c] 29. tertij.

primum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab eodem tertium est; primo in medio relicto; & omnibus aliis à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad vltimum. Quocirca omnia latera figuræ proximè inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

HINC etiam demonstratio in figuras æquiangulas pariu laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & aliis locum primo occupantibus, nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quòd alterum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio omnino tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & aliis locum pari possidentibus, at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eo quòd primum in locum impar cadat. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se continuò esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dumodo occupent eorum in loco impari, alterum vero in loco pari posito sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio extendi poterit ad omnium laterum æqualitatem. Sit igitur primum latus secundo æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, alter poterit semper primum, & alter secundum esse) demonstratum sit, primum æquale esse quotcunque aliis, hoc est alius locorum imparium, secundum vero alijs parium locorum; perficietur est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui loco pari occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, hoc ita semper eorum appellare solemus) & alterum vel quarto, vel sexto, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est. Non poterunt ob eam rem omnia alia inter se in locis imparibus, alterum vero omnibus locis paribus existentibus, æqualia esse; quia secundo latere; erit quemadmodum supra, æqualia ea proxima duo proxima inter se existentia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram aequiangulam parium laterum circulo inscriptam, quae non sit aequilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse aequalia, si omnes anguli aequales sint: contrarium tamen ex ea inferri non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior aequiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non aequilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero sit hexagonum aequilaterum & aequiangulum ABCDEF, in circulo descriptũ; sumaturque in arcu BC, quoduis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus aqualis DH; Itẽ in quinto ab eo arcus aqualis FI; iunganturq; rectae AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, aequiangulum esse, at non aequilaterum. Quòd enim sit aequiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] aequales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione aequales sunt anguli D, H, & F, I. Praterea quia arcus BG, DH, aequales sunt, per constructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, aequales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, aequales erunt; [b] ac proinde anguli BCD, GCH, illis insistentes aequales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos DEF, HEI, & FAB, IAG, aequales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sex angulis hexagoni ABCDEF, aequales sunt, singuls singulis: ideoq; cum hoc ponatur aequiangulum, erit quoque illud aequiangulum. Quòd autem non sit aequilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, aequalia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inaequalia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper uno in medio, aequalia



[a] 21. tertij.

[b] 27. tertij.

aqualia ſint, vt ſupra oſtendimus.

IDEM prorſus eodem modo demonſtrabitur fieri poſſe in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, ſi in circulo inſcribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura aquilatera, atque aquiangula.

QVOD ſi figura inſcribatur circulo per doctrinam propoſ. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & aquiangula, & aquilatera, vt ex earum propoſitionum demonſtrationibus perſpicuum eſt.

PORRO qualemcunque figuram aquilateram & aquiangulam in circulo nouerimus inſcribere, talem etiam ſcimus deſcribere circa circulum, & in ea circulum quoque inſcribere, & circa eandem deſcribere circulum, ſi artem imitemur, qua tradita fuit de pentagono, propoſ. 12. 13. & 14.

RVRSVS inſcripta figura quacunque aquilatera, & aquiangula in circulo, inſcribetur in eodem figura, qua habeat latera duplo plura. Diuiſis etenim arcubus, quos latera ſubtendunt, bifariam, & ſubtenſis rectis lineis, conſtat propoſitum. Vt per triangulum æquilaterum inſcriptum inſcribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figura aquilatera & aquiangula in circulo inſcribi poſſunt beneficio Iſoſcelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figura inſcribentur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad verticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulũ aquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulum aquilaterum erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſit eius, qui ad verticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, veluti propoſ. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triangulum Iſoſceles habens

habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hac angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accommodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

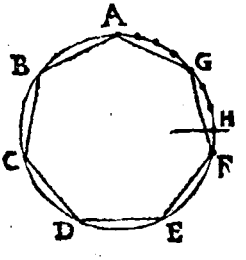
PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis cum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis vtrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad verticem, &c.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula constituantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui

ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribētur quoque omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato; de absoluta figurarū rectilinearum omnium descriptione intra circulū, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, constituantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangula in circulo describantur: verū etiam arcus quinis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

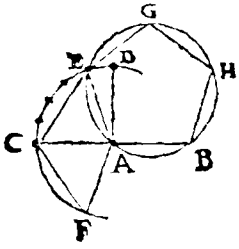
SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quauis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans AH, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosue figura inscribenda continet. Secabis autem quadrantē AH, in propositas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demon-



demonſtraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum diſtantiam partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quòd ſæpius attentando, & quaſi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, ſi ea partem deſideratam non offerat. Sectò quadrante in ſeptem partes æquales, vel in plures, ſi figura plurium laterum deſideretur, erit recta linea AG, quæ quatuor eiuſmodi partes ſubtendit, latus figuræ inſcribendæ. Quoniã enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuiſus eſt, continebitur aggregatum ex quatuor partibus totics in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia qualibet pars cum alijs tribus, quarum ſingulæ in ſingulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perſpicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propoſ. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita ſe habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc eſt, arcus AG, ad quadruplum quadrantis, id eſt, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis eſt vna illarum, in quas quadrans diuiſus eſt, talis erit arcus AG, totius circumferentiæ. Atque ita ſi quadrans diuiſus ſit in 7. partes, continebuntur eiuſmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque ſi quadrans ſectus ſit in 11. partes, continebuntur eiuſmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc eſt, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ: ſic de cæteris. Itaque ſi arcui AG, quatuor partium abſcindantur arcus continuè æquales, eiſdemque arcubus rectæ ſubtendantur, inſcripta erit circulo figura propoſita, vt ex demonſtratis liquet.

IAM vero ſi ſupra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula deſcribenda ſit, efficiemus id hoc modo. Sit ſupra datam rectam AB, conſtituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta BA, ad

C, ac



C, vt AC, ipſi AB, æqualis ſit, deſcribatur ex A, per C, arcus circuli; ducta[q] AD, perpendiculari ad AC, vt quadrans ſit CD, ex ſcholio propoſ. 27. lib 3. diuidatur quadrãs CD, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura conſtruenda ſit; quarum 4. ſint CE, iungaturque recta AE, quæ ipſi AB, æqualis erit.

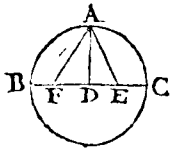
Dico angulum BAE, æqualem eſſe angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta ſubtendens 4. partes quadrantis, latus eſt pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proximè demonſtrauimus, in circulo ECF, deſcribendi, erit CE, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, æqualia ſunt, & baſes item æquales AE, AF; [a] erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, [b] & anguli ACE, AEC, ſint æquales; erit & ACF, ipſi AEC, æqualis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Eſt autem [c] externus BAE, eiſdem internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter ſe æquales erunt. Cum ergo ECF, ſit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca ſi circa tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, & rectis AB, AE, [d] rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, deſcriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcriptum in circulo ABHGE, ac proinde ſupra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non eſt autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ poſſint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam abſoluant. Nam angulus pentagoni BAE, inſiſtit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, ſingula autem latera AB, AE, ſingulas quintas partes ſubtendunt. Si enim alia rectæ maiores quàm AB, AE, vel minores ſubtenderent quintas partes, continerent & angulum quoque pentagoni, quod eſt ab ſur-

[a] 8. primi.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 1. quarti.

absurdum: cum minor foret, vel maior angulo pentagoni B A E. Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere B A E, in extremo datæ lineæ A B. Si namque, posita recta A E, æquali ipsi A B, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt antè diximus.

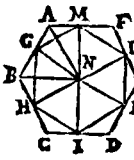
QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F. Itaque si ducatur recta A F, erit A F, latus Pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Caterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.



NON erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiãgula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figura æquilatera, & æquiangula appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inſcribitur, aut circumſcribitur: ita vt idem ſit centrum circuli, & figuræ.



SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam ſecentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inſcriptam figuræ A B C D E F, æquilateram eſſe quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum ſubtendant angulos æquales comprehenſos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium, [a] æqualia ſunt. Quoniam vero tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quam tres F L M, M L K, K L E, [b] duobus ſunt rectis æquales: Sunt autem A M G, L M F; F L M, K L E, [c] inter ſe æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, ſubtendanturque à baſibus æqualibus; Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hiſce, & inter ſe æquales eſſe. Æquiangula igitur quoque eſt figura G H I K L M.

[a] 4. primi.
[b] 13. primi.
[c] 8. primi.

QVOD autem idem habeat centrum, ita oſtendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inſcriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunganturque rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia ſunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; ſuntq; baſes A N, B N, cum ſint ſemidiametri circuli circa figuram deſcripti, æquales: [d] Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis eſt ad latus A B; Eodemque modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ex defin. 4. lib. 3. oſtendant diſtantias rectarum A B, B C, &c. æqualium à centro N; [e] æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, deſcriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc eſt, circuli circa eam figuram deſcripti. Quod eſt propoſitum.

[d] 8. primi.
[e] 14. tertij.

NEQVE vero & hoc omittendum eſt, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum,

dratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse interse aptari, vt inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales sunt quatuor rectis, quantum numerum est spatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quod omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{4}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in aliis figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales sunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. dimtaxat, at quatuor æquales sunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinq; æquiualent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcirco vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti. &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quod quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum æquales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales sunt [illegible]. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt æquales, hoc est, complentur $\frac{70}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac inde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ex tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori

neque quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquianguli, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

CAETERVM, benigne Lector, ad finem lib. 6. reperies propositionem ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectantem, quæ omnino necessaria est, vt intra quamlibet figuram, & circa circulus describatur ex doctrina propos. 13. & 14. huius libri. Reiecta autem est ea propos. in lib. 6. quia per incuriam ante propos. 13. huius libri non apposita fuit.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVINTVM

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Vt igitur instituto suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ

neque quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquianguli, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

CAETERVM, benigne Lector, ad finem lib. 6. reperies propositionem ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectantem, quæ omnino necessaria est, vt intra quamlibet figuram, & circa circulus describatur ex doctrina propos. 13. & 14. huius libri. Reiecta autem est ea propos. in lib. 6. quia per incuriam ante propos. 13. huius libri non apposita fuit.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVINTVM

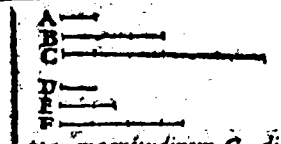
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Vt igitur instituto suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ



maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F; sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quadam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8.12.16.20. &c. collatus; Quadam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cũ 6.7.9.10.18.38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hac solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duae partes tertia, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Pelletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

Pars aliquota et aliquanta

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo

tudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc vtramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CÆTERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ linea, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod vna maior est, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu vt aliis placet) Proportio. Itaque si comparetur linea alicui cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quòd neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c.

quamuis amba sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non sit secundum quantitatem.

QVANQVAM autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, qua aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse aqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quadam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, qua ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio linea 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appella-

appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipuè vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi.

intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi possit, instituemus paulò vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quàm in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequemur.

1. diuisio

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quãtitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur,

centur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus recte à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen

tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non ſatis recte diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationaliſve, non tamen omnis huiuſmodi proportio e contrario eſt proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Poſteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt a nobis factum eſt. Ita enim membra diuidentia cum Diuiſo (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuiſione reciprocantur. Scio rectè poſſe ſubdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; ſi in vtraque diuiſione ſubintelligatur Diuiſum. Sed cur duplicem noſtram diuiſionem, qua proportio in tota ſua latitudine diuiditur, vtrique harum ſubdiuiſionum prætulerim, ſupra expoſui in reſponſione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius ſubdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeant proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio eſt, quando

maior

maior quãtitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item linea 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item linea 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis & ſupernacanea, vt multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. ſed multum inter ſe differunt, cum valde diuerſus ſit vſus vtriuſque, vt perſpicuum eſt ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ ſunt verſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartiẽtem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, (modo ſingulis vocabulis præponatur præpoſitio ſub) vt in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularẽ, & ſubmultiplicem ſuperpartiẽtem. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora vero duo ex illis tribus compoſita, vt manifeſtum eſt. Cur vero tantum ſint quinque hæc

genera

genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. Qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CAETE-

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc eſt, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inueſtigatur: hoc eſt, numerus ille, & vnitas ſunt primi ac minimi numeri, inter quos propoſita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hiſce terminis, inter quos prima proportio multiplex propoſita reperitur, ſi vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes ſecundam proportionem multiplicem propoſitam: ſi vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propoſitæ: ſi vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæſitę. Atque ita ſi iidem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propoſitæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius ſpeciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, ſi multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centeſimum locum inter omnes numeros propoſitam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini ſi ducantur in 2. reperietur ſecunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si iidem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertia proportionis quintuplæ: Et ſic deinceps. Itaque ſi decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10 ſi vero milleſima reperienda ſit, multiplicandi erunt iidem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiuſque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Conſtituantur duæ ſeries numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per ſeriem naturalem numerorum progrediatur; ſuperior autem ab eo numero, qui ſignificat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturq; per continuam additionem eiuſdem numeri, primum

mum ad ſeipſum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam ſuperioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, ſecundus ad ſecundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices ſpeciei propoſitæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, ſeptuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.	

Proportiones ſeptuplæ.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decuplæ.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE Superparticulari.

PROPORTIO ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & inſuper vnitatem, quæ dimidiata pars eſt numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & inſuper lineam 3. pedũ, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedũ, &c.

HAEC

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; Si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quacunque reperitur hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionem superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini data proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI causa. Si quarantur omnes proportiones sesquiseptimae; quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadem quaratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq; oēs cuiusq; proportionis superparticularis

cõperientur, si constituantur duo ordines numerorũ, ferior à numero partem aliquotam denominante, in perior verò à numero proximè maiore: vterque v rinam additionem numeri, à quo initium sumit, sc, deinde ad conflatum numerum, &c. progredi pla hic ponimus in proportionibus, sesquialteris, se mis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialtera.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45 &c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30 &c.

Proportiones sesquiseptima.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104 &c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91 &c.

Proportiones sesquidecima.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	&c.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quælibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, nõ est pars vna aliquota numeri

numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quamquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quòd si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus

ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur ſuperdecupartiens vndecimas. Quòd ſi decem illæ partes ſint decimætertiæ, vocabitur proportio ſuperdecupartiens decimastertias; & ſic de reliquis omnibus ſuperdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones ſuperpartientes vel inter ſe confundantur, vel cum proportionibus ſuperparticularibus, quod à pleriſque factum eſſe deprehendimus, diligenter conſideranda ſunt ea, quæ ſequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuſcunque proportionis ſuperpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monſtrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore ſuperſint; alter vero, quotæ partes eæ ſint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione ſupertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior ſignificat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere ſemel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque ſyllaba illa [tri] quando dicitur, ſupertripartiens: poſterior autem per vocem [octauas] expreſſus oſtendit, illas tres partes aliquotas, eſſe partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiuſmodi eſſe debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem eſt omnium numerorum pars aliquota: hoc eſt, vt ſint inter ſe primi.

primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione supertripartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio posterior inter 22 & 16. superſextupartiens ſextasdecimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarum quælibet decimaſexta pars est minoris: Non, inquam, recte sic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6 habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias,

cum maior quantitas contineat minorem ſemel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones ſuperpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem ſuperbipartientem diuiſerimus paulo ante, in proportionem ſuperbipartientem tertias, quintas, ſeptimas, nonas, &c. prætereuntes ſuperbipartientem quartas, ſextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ poſteriores omiſſæ, ſint ſuperparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. conſtituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones ſuperpartientes cum proportionibus ſuperparticularibus, ſi & ipſæ in numerum proportionum ſuperbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoſcendum ſit, an duo quilibet numeri propoſiti habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonſtrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum ſuperpartientium cuiuſque ſpeciei ſic ſe habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, qua in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem ſpeciei propoſitæ ad numerum eaſdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent ſecundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt ſupra dictum eſt. VERBI gratia, ſi inquirenda ſint omnes numeri proportionis ſupertripartientis decimas, erunt primi huiuſmodi numeri, 13. & 10. quia maior ſuperat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in

propor-

proportione ſupertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum ſecundam proportionem conſtituunt, ſunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centeſima autem eiuſmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli ſint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti ſunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum ſuperpartientium reperies, ſi ſtatuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, ſuperior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum ſuperat: vterque denique ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad numeros conflatos, vt ſupra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum ſuperbipartientium quintas, ſuperoctupartientium nonas, & ſuperſeptupartientium decimas.

Proportiones ſuperbipartientes quintas.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.

Proportiones ſuperoctupartientes nonas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	&c.

Proportiones ſuperſeptupartientes decimas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	&c.

DE PROPORTIONE multiplici ſuperparticulari.

PROPORTIO multiplex ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando

maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla.) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatã eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adiiciamus vnitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem

partis

partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hoc numero dati duplicati, triplicati, vel per quemvis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, numerum secundos, tertios; vel alterius ordinis, pro numeratione, quæ in numero multiplicante continentur, vt dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ; ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis sextuplæ, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus igitur numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ exactè habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, quæ in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli autem numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione: Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum superior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, inferior autem à numero conflato ex unitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatore proportionis multiplicis expressæ: terq; ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad sextum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Proportiones duplæ sesquialteræ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70 &c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28 &c.

Proportiones triplæ sesquiseptimæ.

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	&c.

Proportiones decuplæ sesquitertiæ.

31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	&c.

DE

DE PROPORTIONE multiplici superpartiente.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

DISTRIBVITVR autem hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c.

DEINDE quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c.

POSTREMO quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OM-

OMNES proportiones multiplices ſuperpartientes poſtremæ diuiſionis ita inuenientur. Denominator partium aliquotarum propoſitarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propoſitæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expreſſus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inueſtigantur. Atque hi duo numeri, ſi duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcumque numerum multiplicentur, dabunt ſecundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI ſi quærantur omnes proportiones quadruplæ ſuperoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numerumq; procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæſitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij, 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centeſimam proportionem inter omnes quadruplas ſuperoctupartientes vndecimas.

QVOD ſi duo numerorum ordines conſtituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propoſitarum, & per continuam eiuſdem additionem, primum ad ſe, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; ſuperior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expreſſo, ac per eiuſdem continuam additionem primum ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in ſuperioribus quoque diximus. Exempla hic vides in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, dupla ſuperquintupartiente ſextas, & quintupla ſupertripartiente quintas.

Proportiones duplæ ſuperbipartientes tertias.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	&c.

Pro-

Proportiones duplæ superquintupartientes sextas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187 &c.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66 &c.

Proportiones quintuplæ supertripartientes quintas.

28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308 &c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55 &c.

DE PROPORTIONIBVS rationalibus minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus sunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoque de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub.) vt dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100. est subcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda insignis quibusdam tabula Pythagoræ, quam ego ex nostro Arithmetico construxi, ex qua lectores plurimas rationalium inæqualitatum species facile intuebuntur. Constructa tabula Pythagorica,

(Et

(Est autem constructio facillima, cum numeri in sinistro latere constituant seriem numerorum naturalem, in infinitumque progredi possit, quælibet autem linea in transversum procurretur ex continua additione numeri in sinistro latere, a quo incipit, ad seipsum, & ad numerum conflatum, & sic in infinitum: ita vt hæ lineæ in transversum nil aliud sint, quam progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum.) primum omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad vnitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub vnitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncuplæ it inter 9. supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere, secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1; tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9. descendentis; & 3. in sinistro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum est.

DEINDE omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimatur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, primæ proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. alia vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Posti denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in suprema latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secundæ autem, tertiæ, quartæ, & aliæ ordine lineæ, reperientur inter numeros sub illis ductibus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis sesquioctu-

[illegible]

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322

partientis vndecimas deſideret, ſumat in latere ſupremo denominatorem partium, id eſt, 11. poſt quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem ſuperoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam, 57. ad 33. & alias alij numeri ſub 19. & 11. per rectam lineam deſcripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis inuenies hac ratione. In ſupremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expreſſæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proximè inſequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propoſitam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri ſub illis duobus poſiti. Vt autem ſcias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propoſitam, ſumendus eſt denominator partis in ſupremo latere, & in ſiniſtro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in ſiniſtro latere, & poſterior in ſupremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem deſideras. Exempli gratia. Inuenienda ſint omnes numeri proportionis triplæ ſeſquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc eſt, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui eſt 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui eſt 5. quorum alteruter in ſupremo latere, & alter in ſiniſtro ſumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere ſupremo. Numerus enim 16 proximè inſequens ad denominatorem partis aliquotæ, id eſt, ad 5. habet primam propertionem triplam ſeſquiquintam. Aliæ proportiones eiuſdem ſpeciei reperies in numeris, qui ſuò illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum eſt.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperpartientis hoc modo. In latere ſupremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propoſitam: qui quidem inueniatur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde poſt acceptum numerum multipli-

cem

cem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum ſit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies ſub illa prima, vt de alijs diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partiũ quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20, inuentum numeret in ſupremo latere tres hos numeros, 21. 22. 23. quòd tres partes quinta nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in alijs traditum eſt.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inaqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE vero ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; qua ſic ſe habet. Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensq; per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius proportionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtituta tuæ proportionalitatis Arithmetica; Inter ſecundos vero, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſint 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0, (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensq; per cõtinuam additionem vnitatis,

vnitatis, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros dupla proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus; Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet vnus medius nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt, 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula appareret, vbi numeri extremi cuiuslibet linea habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmetica.

					2.	1.		
				4.	3.	2.		
			6.	5.	4.	3.		
		8.	7.	6.	5.	4.		
	10.	9.	8.	7.	6.	5.		
12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.		
14.	13.	12.	11.	10	9.	8.	7.	
16.	15.	14	13.	12.	11.	10.	9.	8.
18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.
20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.

QVOD si superiori proportionalitati Arithmetica superponas seriem naturalem numerorum, qua ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constituta tua Arithmetica proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos nsemeros proportionis dupla. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quē locū duo numeri dupla propertionis obtinent, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportionũ duplarũ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis dupla, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus vna vnitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

							10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

RVRSVS detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis dupla, inser-

tionis

uient hic eadem progreſſiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus ſit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perſpicuum eſt in proportione ſeſquioctaua.

Ordo propor. ſequioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

						9.	8.		
					18.	17.	16.		
				27.	26.	25.	24.		
			36.	35.	34.	33.	32.		
		45.	44.	43.	42.	41.	40.		
	54.	53.	52.	51.	50.	49.	48.		
63.	62.	61.	60.	59.	58.	57.	56.		

OFFERATVR quoque proportio ſuperquadrupartiens ſeptimas, cuius minimi termini ſunt 11. & 7. Differentia eorum eſt 4. Progreſſio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq́ per 4. vt hic patet, vna cum ſerie naturali ei ſuperimpoſita.

Ordo propor. ſuperquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

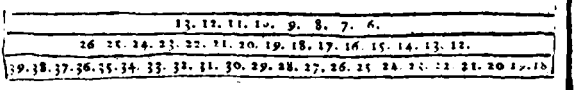
Igitur inter primos numeros proportionis ſuperquadrupartientis ſeptimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter ſecundos: Et 23. inter ſextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.

11.	10.	9.	8.	7.																					
22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.																	
33.	32.	31.	30.	29.	28.	27.	26.	25.	24.	23.	22.	21.													
44.	43.	42.	41.	40.	39.	38.	37.	36.	35.	34.	33.	32.	31.	30	29.	28.									

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiat ergo progressio à 6. habebitq; differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vnà cum serie naturali numerorum.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

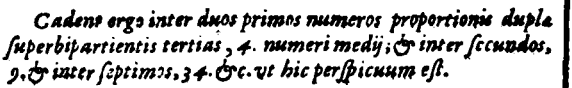
Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. medij numeri; inter secundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.



POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, vna cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarũ super bip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.



MANI-

MANIFESTVM autem eſt, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque eſſe de minoris inæqualitatis proportionibus, cum idem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque ſpeciebus proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diximus, perſpicuè colligitur, non poſſe plura eſſe genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam expoſita. Cum enim, vt Euclides demonſtrat propoſ. 5. lib. 10. commenſurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, eſt proportio rationalis, inter ſe proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum aſſignari, ſeu exhiberi poſſit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; quæ ratione conſtituitur proportio multiplex: Aut ſemel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & ſic habetur proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas a maiore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Recte ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM rationalium Denominatoribus

QVONIAM vero non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionũ rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibus nam numeris ſingulæ proportiones denominẽtur. Denominator ergo cuiuſlibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt $1\frac{1}{5}$; quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiuſuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, oſtendit, quanta ſit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propoſitis exemplis conſtat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi poteſt denominator cuiuſque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quacunque ea ſit, eſt numerus integer tot cõtinens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator eſt 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium multiplicibus correſpondentium, ſunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus reſpondent, denomina

nominata. Vt denominator proportionis ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$; *ſubquintuplæ,* $\frac{1}{5}$. *ſubnoncuplæ,* $\frac{1}{9}$: *ſubcentuplæ,* $\frac{1}{100}$: *ſubmillecuplæ,* $\frac{1}{1000}$. *Eodem modo denominatores aliarum proportionum ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuſcunque proportionis ſubmultiplicis eſt numerus fractus, cuius numerator perpetuò eſt vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas eſt in cuiuſque proportionis multiplicis, vel ſubmultiplicis denominatore reperiendo, ſi ea quæ dicta ſunt, rectè intelligantur: quippe cum ipſa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifeſtum eſt.*

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis ſuperparticularis eſt vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator eſt $1\frac{1}{2}$; *ſeſquioctauæ,* $1\frac{1}{8}$; *ſeſquimilleſimæ,* $1\frac{1}{1000}$, *&c. Neque difficile erit denominatorem cuiuſque proportionis ſuperparticularis inuenire; cum ipſa proportionis prolatio denominatorem exprimat per ſuam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perſpicuum eſt. Denominatores autem proportionum ſubſuperparticularium correſpondentiũ, ſunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt* $\frac{2}{3}$; *ſubſeſquioctauæ,* $\frac{8}{9}$; *ſubſeſquimilleſimæ,* $\frac{1000}{1001}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ in proportione expreſſæ, & pro eiuſdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator pro-*

portionis subsesquidecimæ, est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorẽ correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, qua illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quàm denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis subsesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt supra docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator vero, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habentes proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7. si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis subsesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis

nis superpartientis est unitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus unam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis supertriparticntis septimas, est $1\frac{3}{7}$; supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inuemendis: propterea quòd prolatio ipsa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex superioribus exemplis liquido constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{2}{15}$; subsupertripartientis vigesimas, $\frac{2}{25}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partiũ aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis

ad

ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{10}{13}$. qui ad hanc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur fortassis, si reperiatur primi vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem; vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquiquintæ, $5\frac{1}{5}$. &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distincte exprimat & denominatorem

minatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{22}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{8}{40}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturque vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdē fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq; ductus sit in 4. denominatorem proportionis quaaruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuocetur ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadruplæ sesquisextæ est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adhærentis; numeroq; producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis,

nis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini si inter se ordinem permutent, fiet hac fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimosue numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, vt supra traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi siue minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, atque ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionẽ multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est 3; $\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quòd apertè, & distinctè in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contenta, quàm partes aliquotæ, vt perspicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ super-

ſuperquincupartientis octauas, eſt $\frac{8}{29}$ *; ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $\frac{5}{22}$ *, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimastertias, eſt* $\frac{13}{34}$ *; quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui ſi ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, productoque numero 26. adiiciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiuſdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſitæ reſpondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiuſdem fractionis. Nam huius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinem, dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartientis decimas, hoc eſt,* $5\frac{3}{10}$ *. ad hanc fractionem* $\frac{53}{10}$ *. quod fit ducendo 5. in 10. productoque numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas,* $\frac{10}{53}$ *. &c. Sed forſitan facilius de-*

nomina-

nominatorem cuiuuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentes reperias, ex eisq; fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiēs decimas: quoniā minimi numeri in proportione quintupla supertripartiente decimas sunt 53. & 10. constituetur ex eis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & sic de cæteris.

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuò est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea. quod quidem vnitas significat.

EX his quæ de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, siue nomine denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis lucidè constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadripartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distinctè, aperteque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At verò denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadripartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id est, nouem trigesimas primas partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadripartientem nonas denominat, cum verò significet, minorem quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessarium est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplam superquadripartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequa-

nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$. hoc est, nouem partes trigesimæprimæ cum nomine proportionis subtriplæ superquadruparticntis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionem, vt dictum est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominater fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præposita tantum syllaba, sub, quo illa denominatorus fractionis ad numeratorem appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{20}{327}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem 20. fit Quotiens 16 $\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{20}{327}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones proprijs nominibus appellari possunt, (quis enim proportionē, verbi gratia, 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometræ plerunque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. qua aliàs diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, qua est 10. ad 13. quæ pro-

prio

prio nomine dicere: subsupertripartiens decimas, & sic de alijs.

QVANQVAM autem proportio quælibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: perneccessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi alicuius proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quenam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerũ continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quando minimi numeri alicuius proportionis sint tam magni, vt denominator ex illis non facilè possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoslibet duos numeros, siue minimos ij sint, siue non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferant Mathematici, licebit nobis multò commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimasnonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{19}{24}$. atq; ita de reliquis: qũ videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinẽ vnius numeri ad aliũ, vt dictũ est.

DENOMINATOR porrò proportionis inter duos quoslibet numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui minimum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica traditimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390 ad 30. dicemus denominatorem eius esse 3. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quòd si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{3}{10}$. vel $\frac{30}{100}$. Nam quoties minor numerus per maiorẽ diuiditur, Quotiès semper

est

est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator siue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{10}{13}$. Praterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis vero 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{20}{100}$. id est, in minimis numeris, $\frac{1}{5}$. Denique deneminator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{4}{5}$. quòd diuisis 48. per 10 Quotiens sit $4\frac{8}{10}$. hoc est, in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominater proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est, in minimis numeris, $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas (quòd diuisis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$. appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim rite efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoq; reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter eos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{9}{10}$. si reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoq; numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Item, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est erũt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133.

Item quia denominator proportionis 84 ad 12. eſt 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7, & 1. Viciſſim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator eſt $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propoſitis duobus numeris quibuſcunque, ſi quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inuenientius erit denominator proportionis eorum, vt dictum eſt, ieque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri qui eſſet. Vt ſi quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400 ad 90. Diuiſo antecedente per conſequentem terminum, hi Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Qui reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. eſſe 40. & 9. Eademque ratio eſt de cæteris.

IAM vero ſi, propoſitis duabus proportionibus, cognoſcere velis, vtra earum maior ſit, vel minor, dices eam maiorem eſſe, cuius denominator maior eſt, minorem vero eam, cuius denominator eſt minor. Quod ſi denominatores ſint æquales, proportiones quoque æquales eſſe pronunciabis. Vt ſi proponantur duæ hæ proportiones, ſuperbipartiens decimasquintas, & ſuperbipartiens decimas ſeptimas, quarum denominatores ſunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem poſteriore eſſe minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor eſt denominatore $1\frac{10}{17}$. Quæ vero arte cognoſcas, vtra duarum fractionum maior ſit, vel minor, an vero æquales ſint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, ſi offerantur duæ proportiones, quarum denominatores ſint $10\frac{1}{100}$. $9\frac{120}{121}$. dicemus priorem eſſe maiorem. Quamquam enim fractio $\frac{1}{100}$. minor ſit fractione $\frac{120}{121}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior eſt. Sic ſi dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac eſſe maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior eſt huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoſcemus facile, vtra earum ſit maior, etiamſi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum conſequentem poſterioris, & termino antecedente poſterioris in conſequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior eſt:

est: Et si duo equales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. competentes priorem maiorem esse, quia illius antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quàm duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. prop. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quam secundus in tertium, maiorem esse primum, quàm vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, vt eundem numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, sive ij primi sint, sive non; hos ergo, vt inuenianus, multiplicabimus quemcunque numerum assumptum, vel dividemus per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui divisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inuenienda duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. dividemus per denominatorem 5. Nam divisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoq; datam proportionem quintuplam. Ita eoque si inuenienda sint duo numeri in proportione tripla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemcunque numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatã à $2\frac{1}{3}$. item si numerũ 24. dividamus per $2\frac{1}{4}$.

habebit diuiſus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam ſeſquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, ſi quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in propprtione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis triplæ ſuperbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis eſt 18, vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad aſſumptũ numerũ 45. proportionem habet datam. Sic etiam ſi cupiat quis proportionem ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$. ſumendus erit numerus à 4, numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3, numerum integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionem ſubquadruplam. Si vero per diuiſionem agendum ſit, & fractiones vitandæ, ſumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportiõnis numeratus. In alijs autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusque ſumendus à numeratore numeratus. Vt ſi quæratur proportio quintupla, ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuiſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cuius denominator ſit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. ſumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quẽ acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam ſupertripartientem ſeptimas. Cæterum ſi duo numeri proponantur, cupiatq; quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero, inueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datã, vel ad quem is datam habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem

minatorem proportionis diuidas. Quòd si proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quicquam numerus; si quidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam proximus datus ad secundũ: si quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem: Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certe, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum, hoc est per consequentem terminum datæ proportionis, productusque numerus per primum, siue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator est $\frac{7}{4}$ detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{7}{4}$. producetúrque quartus numerus quæsitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{7}{4}$. denominatorem, gigneturque quæsitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20 habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVI A vero diximus, eam proportionem esse maiorem, cuius denominator maior est, sit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium est minimus, maximus autem dari non potest, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominatam à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum

natorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt, minimus autem dari non poteſt, cum denominatores fractionum progredi poſſint in infinitum. Conſtat autem ex ijs, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior eſt, minorem eſſe, ſi idem ſit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor eſt, ſi idem ſit numerator, maiorem eſſe. Cum ergo denominator 2. ſit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales ſunt fractiones denominatorum proportionum ſuperparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam poſſe dari, neque maximam. Quod intelligendum eſt de vltimis ſpeciebus. Nam ſi de vltimis ſpeciebus non ſit ſermo, erit ſuperbipartiens inter ſuperpartientes, minima; ſuperpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem ſuperparticulares maxima erit multiplex ſeſquialtera; minima vero, dupla ſuperparticularis. Inter multiplices denique ſuperpartientes maxima erit multiplex ſuperpartiens tertias; minima vero, dupla ſuperbipartiens. E contrario in proportionibus ſubmultiplicibus datur maxima, nimirum ſubdupla, non autem minima: In ſubſuperparticularibus autem reperitur minima, vt ſubſeſquialtera, non autem maxima: In alijs denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari poteſt. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi denominatores proportionum inter ſe conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc eſſe connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt qualibet proportio maioris inæqualitatis maior ſit proportione æqualitatis, qualibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior eſt vnitate, qua denominator eſt proportionis æqualitatis, cum ille minor eſſe nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis ſemper minor eſt, quàm vnitas, cum ſit fractio, cuius numerator à denominatore ſuperatur, vt ex ijs, quæ ſupra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media eſt inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduerſione dignum eſt. Proportionem maioris

maioris inæqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsque ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque, in qua cum minima non possit dari, omnisq; proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor sit proportione æqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem æqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt utrumq; exemplo etiam discatur, scicndum est, si inter duos numeros quoslibet non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorum, & altero minor, proportionem maioris numeri ad minorem diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositũ, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorẽ diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarum vtraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ subdupla est, diuisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quàm proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tam proportio subsuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus pro-

bari possunt. Verum vtrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum maiorem proportionem, quàm idem maior ad medium, & quàm medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quàm idem minor ad medium, & quàm medius ad maiorem, vt manifestum est vel ex defin. 10. lib. 7. vt ibidem explicabimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inæqualibus, maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionẽ, quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quàm ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse propertionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. maiorem: Itẽ maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorem esse proportionẽ eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad maiorem 6. Itẽ maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3. ad eundem 6. Eademque in ceteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4 ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quàm proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic, 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. quæ eadem est, quæ 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nullam erit finis.

Idemq;

Idemq; experiri licebit in quibuſuis alijs proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio ſubſuperſeptupartiens undecimas 11. ad 18. diuiſa hic 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica ſiue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri per eandē differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreſſione numerorum nulla fit interruptio, ſed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreſſione interuptio fit, ita vt bini tantum inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, ſiue Analogia:

gia: alię verò impropriè, cum non sit eadem semper inter eadem terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2 6.18.54 quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex autem quæ est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantum 2.3. & 12.18. & 20.30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimũ, quæ differentia inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3.4.6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ea 1. (cum vtrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam, siue Harmonicam: ipsi verò neque eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri, 42.12.7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad

30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4 & 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quę Diapason consonantiam, siuè Octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque alijs idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT trium proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera, & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3.4.6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera, & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetq; in hisce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quam inter minores; Contra vero in Harmonica

Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

I I.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones vero eorundem æquales.

HARMONICA denique neq; differentias, neq; proportiones terminorum æquales habet. Patet hoc ex superioribus exemplis.

I I I.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorē 15. quinq; vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoq; vnitatibus, quæ cōstituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{2}$. medij, superaturque à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{2}$. maioris. Sic etiam hic. 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat,

superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 2.4.6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturque à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Eidem medius 12. superatur a maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3.7.11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4.6.9. & 3.4.6. tam summa 13. extremorum 4.9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorũ, quàm summa 9. extremorum 3.6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9.25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eadem differentia maiorum, 10. differẽtiam minorum, 6. superat. Itẽ in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3.7.11. numeros 33. Cuius ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4.6.9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam, quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica verò plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32 qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

QVA-

VII.

QUATVOR numeris in proportionalitate Geometricè non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem in extremos medius in Harmonica, proportionalitate: & si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quantum ista 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmeticè, cum eundem habeant excessum 3. videlicet 3. 8. 12. Harmonicè proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4 ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonicè, vt diximus, videlicet 6. 9. 12. Arithmeticè esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonicè; videsis ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continuè proportionalibus siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & sic deinceps) tot alij numeri tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps, ejusdem proportionalitatis constituti numeri, qui in locis tam impariis, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dumodo æqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interiectos inueniatur.

cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Praterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59			
3		11		19		27		35		43		51		59			
	7		15		23		31		39		47		55				
3			15			27			39			51					
	7			19			31			43			55				
3				19				35				51					

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920			
5		20		80		320		1280		5120		20480		81920			
	10		40		160		640		2560		10240		40960				
5			40			320			2560			20480					
	10			80			640			5120			40960				
5				80			1280				20480						

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520	
252		315		420		630		1260		
	280		360		504		840		2520	
252			360			630			2520	
	280			420			840			
252				420				1260		

QVOT-

IX.

QVOT QVOT *numeris proportionalibus datis ſiue in Arithmetica proportionalitate, ſiue Geometrica, aut Harmonica, ſi ſinguli per aliquem numerum eundem multiplicentur aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides ſingulos multiplicatos per 4. Item diuiſos per 4.*

Arithmetica prop.			*Geometrica prop.*			*Harmonica prop.*		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti			*Producti*			*Producti*		
80	112	144	80	160	220	240	336	560
Quotientes			*Quotientes*			*Quotientes*		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem ſpecie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuiſi habent: At in Arithmetica non ſeruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentia multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differẽtia.n. inter 20, & 28. eſt 8. at inter 80. & 112. eſt 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorum diuiſorum habet proportionem ſubmultiplicem à diuiſore denominatam, prapoſita particula, ſub. Vt in dato exemplo ſubquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. eſt 8. at inter 5. & 7. eſt 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numeroſque diuiſos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas eſſe differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. eſſe earundem differentiarum ſubquadruplas.

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuſcunque, ſi eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroque dato maiorem. Et ſi eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios ſemper maiores, ſi differentiam vltimo inuento ſemper adycias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia eſt 7. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi poteſt in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quòd ſi eandem differentiam à minori ſubtrahas, quando ſubtrahi poteſt, habebis rurſus tertium terminum in eadem proportionalitate vtroque minorem. Et ſi differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps inuenies alios minores, ſi differentiam ab vltimo inuento ſemper demas, donec ſubtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30. 34. quorum differentia eſt 4. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica vſque ad 2. quæ vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius ſubtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamſi differentia non aſſumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato ſi proximè præcedentem ſubtrahas, habebis quartum; & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. ſi à 15. duplicato, hoc eſt, à 30. ſubtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52 ſi quoq; demas 15. habebis quartum terminum 37. & ſic deinceps, vt hic apparet. 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus vtroque minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides.

27. 20. 13. 6.

II.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10 & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus,

ſiue ſemiſſis ſumma extremorum, in ſumma omnium terminorum toties, quot ſunt termini; ſemel quidem in ipſo medio termino, & bis in qualibet ſumma duorum à medio termino æqualiter diſtantium: ac proinde omnium terminorum ſumma ad ſemiſſem aggregati extremorum, hoc eſt, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator eſt numerus terminorum. Vt in hac ſerie nouem numerorum ⌣.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc eſt, ſemiſſem ſummæ extremorum 6. & 30. toties, quot unitates ſunt in 9. numero terminorum, id eſt, ſumma omnium terminorum ad 18. ſemiſſem ſummæ extremorum, ſiue ad medium terminum, proportionem habebit noncuplam. Eademque in cæteris eſt ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar eſt, facile inueniemus, ſi ſemiſſem aggregati extremorum, (quod ſemper par eſt, quando terminorum numerus eſt impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac ſerie 11. terminorum ⌣.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum eſt 134. Cuius ſemiſſis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. ſummam omnium terminorum. Atque hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt par: ſed quando extremorum ſumma impar eſt (quando enim terminorum numerus eſt par, poteſt eſſe ſumma extremorum impar, non autem ſemper par) erit eius ſemiſſis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus eſt par, habebit ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, proportionem multiplicem à ſemiſſe numeri terminorum denominatam. Cum enim ſumma quorumlibet duorum ab extremis

tremis æqualiter distantium æqualis sit summa extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, scilicet nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 39. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMA ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summã omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cũ $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atque differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo.

Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijcemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, minorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponitur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quòd si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica. *0. 5. 10. 15. 20. 25.*

IIII.

SI duo extremi termini noti sint, vnà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressio, & proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, elicietur numerus terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adiiciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè

in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

V I.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summã 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extre-

extremorũ ſummam, Quotiens ſit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. *vt nimirum duplicatus efficere poſſit numerum terminorum integrum* ⌣.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: Si vero extremorum proportio maior ſit quàm dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla: Si deniq; minor ſit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. eſt dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. eſt dupla ſeſquialtera, nimirũ maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla ſeſquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14 & 8. proportionẽ habent ſupertripartientem quartas, quæ minor eſt quam dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam ſuperbipartientem tertias, hoc eſt, maiorem quàm triplam ⌣.

VIII.

INTER quoſuis duos numeros conſtitues medium proportionalem Arithmeticè, ſi eorum ſummæ accipias ſemiſſem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. ſumma eorum eſt 36. Huius ergo ſemiſſis 18. medio loco proportionalis eſt Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifeſtum eſt, 6. 18. 30. Itaque ſi medius terminus conſtituendus ſit numerus integer, neceſſe eſt, vtrumque numerorum datorum eſſe vel parem, vel imparem, vt videlicet ſumma extremorum ſemper ſit par, hoc eſt, vt poſſit habere dimidium ſine fractione vnitatis. Nam quando ſumma extremorum impar eſt: quod accidit cum alter extremorum par eſt, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum ſemiſſe vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. ſumma eorũ eſt 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. *medius terminus erit hoc modo, 8.* $16\frac{1}{2}$. *25.*

INTER

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam si minori numero proposito adijcias, constabit primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eã differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimꝰ, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proxime maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8 numeri proportionales Arithmeticè, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nonenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituẽdorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis collocabis, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascendendo per continuum eorum additionem, addendo primo quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides

EX

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsque, in secundo vero ab infimo ad supremum vsque ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendã. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor à maiori subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitanda sint: Vel certè inueniendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoq; vitantur, etiãsi eos numerus numero mediorũ proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius cõtinua additione ad minus extremum datum medij termini obtati conficiuntur: qui ijdem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines insti-

inſtituantur aſcendentes, vt dictum eſt, per ipſorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propoſitum diſtribuemus in partes, quotquot quis iuſſerit, proportionalitatem Arithmeticam ſeruantes, hac ratione. Diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, ſecabimus Quotientem in duas partes inequales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati ſunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremũ ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo aſſumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, conſtituetur numerus terminorum datus, quorum ſumma propoſito numero æqualis eſt: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium ſectus erit. Exempli cauſa, ſi numerus 830. diſtribuẽdus ſit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. ſemiſſem terminorum, Quotientemq; 166. ſecabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis conſtituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum eſt) differentia erit proportionalitatis. Vt hæc vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rurſus ſi numerus 10. diuidendus ſit in 10. partes proportionales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. ſemiſſem terminorum: Quotientem vero 2. in duas partes inæquales ſecabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerum proximè minorem numero partium conſtituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conſta-

te, &c.

10, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationē, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. vltima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem est, hac ratione variis modis datum numerū diuidi posse in propositum numerum partium proportionaliū, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas æquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inuentus dictus in numerum terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summa omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros æquales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, si numerus 198. secundus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituo igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic

Hic etiam manifestum est, variis modis datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atque alias partes binas sectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED longè facilius quamquã operatio aliquanto longior sit, hoc absolues hac ratione. Cape tot numeros Arithmeticè quomodocumque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit dividendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis divisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. dividatur per 175. summam assumptorum numerorum, sit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eædem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac brevior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productosq; numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diviso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Inquid)

quidò autem hic quoque conſtare puto, datum numerum variis modis diſtribui poſſe in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout ſcilicet alij atque alij numeri eiuſdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint aſſumpti, vel quorum alia atque alia ſit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim eaſdem proportiones inter ſe, quas inter terminos proportionalitatis aſſumpta eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem ſinguli numeri accepta proportionalitatis ad ſingulas partes inuentas, primus ad primam, ſecundus ad ſecundam, &c. eandem omnino habent pro portionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. eſſe proportionem ſupertripartientem quartas, qualis eſt inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorſus proportionem, nimirum ſubtriplam.

ITA QVE, ſi accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus ſit differentia omnium terminorum, habebunt prima partes duplam quoque proportionem, atque ideò prima erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes coacerſuentur. Vt ſi in ſuperiore exemplo accepiſſes hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum ſumma eſt 55. Vel hos 10. numeros, 3, 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum ſumma eſt 165. multiplicaſſes q̃, primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per ſummam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & poſteriorem per 165. diuiſiſſes, inueniſſes primam partem 9 $\frac{6}{11}$. quæ eadem eſſet differentia. Quare partes omnes 10. conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam fuiſſent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuſuis duobus numeris, ſi denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc

hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quòd diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quòd si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quòd diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quòd diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuidas 8. per 2. Idemque cum producto numero facias, constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoque eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, &

productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productum per proximè præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus: atque ita in infinitum, vt hic vides. 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productũq; per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertiũ terminum vtroque minorem. Quem si rursum in se duxeris, productumque per proximè præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$. siue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM vero si quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partẽ, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatẽ extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias,

incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialterę, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partiũ quintarũ, qui est 5. videlicet. 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione duplæ superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, fit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadruplæ sunt hi, 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialterę.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus eſt par, etiamſi non continuè ſint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant vnam eandemq; inter ſe proportionem, hoc eſt, dummodo ſecundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon ſextus & ſeptimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) ſint quoque non continuè proportionales, in diuerſa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad ſecundum, & tertius ad quartum, & quintus ad ſextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus eſt par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus ſemper æqualis eſt numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium inter ſe gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem ſemper numerus 288.

Item in hac ſeſquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à ſeſquitertia diuerſa eſt.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC ſequitur, quando terminorum numerus impar eſt, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio diſtantium multiplicatione inter ſe procreatum, eſſe quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in ſeipſum producitur; numerusque ipſum producens latus eius, ſiue radix appellatur.) cuius radix, ſiue latus eſt medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in ſeipſum; ac proinde medius eius radix quadrata eſt. Numerum verò ex tribus inter ſe multiplicatis

tiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, sive radix cubica appellatur.) cuius latus, sive radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando sunt 4. numeri sive continuè, sive non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuò multiplicare continuè, quando unus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratum, cuius latus, sive radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri sive continuè, sive non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusve est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se æquales.

III.

SI, propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adyciatur, conflabitur summa omnium terminorum. Vt hic in propertione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vnà cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestiganaus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt supernacaneum sit, ea hoc loco repetere.

IIII.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuò aqualiter

liter superantibus, id est, Arithmeticè proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi, eodem ordine sumpti, superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4.7.10.13.16.19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturque alij sex cum iisdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20.35.50. 65.80.95. comperies ipsos quoque Arithmeticè esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidē alij Arithmeticè quoque proportionales sumantur, etiamsi vtrobique eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2.4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3.5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam. &c.

V.

DVOBVS quibuslibet numeris datis, si eorum alterutro in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine easdem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, vt prima ad primam, secunda ad secundam, &c. vnam eandemque prorsus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57.285. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiant,

2. 5. 10. 40. & earum qualibet in posteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentque easdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemque factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotus partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illes, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmetice quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

V I.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem propor-

proportione proportionales. Vt in appoſito exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentiæ.	32.	48.	72.	108.	162.	243.	
	64.	96.	144.	216.	324.	486.	729.

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum ſunt differentiæ. Id quod ſoli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedentem minorem ſuperat ipſomet numero proximè antecedente, cuius duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differẽtiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et ſi Quotientium ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorſus Quotientes ordine conuerſo: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientium æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſeipſum ducto. Quod ſanè incredibile videri poſſit. Exempli cauſa.

Si

Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla. 3. 6. 12. 24. ſi eorum ſumma 45. per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes 15. 7 1/2. 3 3/4. 1 7/8. conuerſo ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et ſi per hoſce Quotientes diuidatur eorum ſumma 28 1/8. prodibunt ordine conuerſo ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipſa verò ſumma 28 1/8. æqualis eſt numero, qui fit ex 15. in 1 7/8. vel ex 7 1/2. in 3 3/4. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 1. 6. 18. 54. 162. ſi eorum ſummam partiemur per eos ſigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes. 121. 40 1/3. 13 4/9. 4 13/27. 1 40/81. in eadem continua proportione tripla. Quorum ſumma 180 61/81. producitur vel ex 121. in 1 40/81. vel ex 40 1/3. in 4 13/27. vel denique ex 13 4/9. in ſeipſum. Vbi duo conſideratione ſunt digna. Primum, quando terminorum numerus eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius radix eſt medius terminus: quippe qui ex medio termino in ſeipſum ducto procreatur, vt dictum eſt. Deinde, eoſdem ſemper Quotientes gigni ex diuiſione ſummæ quotcumq; terminorum proportionis eiuſdem continuæ, quantumuis termini illi ſint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem ſemper ſit. Veluti, ſi ſint tres termini continuè dupli, ſiue magni, ſiue parui, erunt perpetuò hi Quotientes, 7. 3 1/2. 1 3/4. Si ſint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. 7 1/2. 3 3/4. 1 7/8. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi ſemper Quotientes, 121. 40 1/3. 13 4/9. 4 13/27. 1 40/81. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem ſeſquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. 13 3/10. 8 19/24. 5 11/16. 3 40/144. 2 40/81.

EX hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui fit ab extremis inter ſe multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter diſtantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in ſeipſum ducto, ſi numerus terminorum fuerit impar. Nam ſi ſumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi ſunt, ſiue magni, ſiue parui, eorumque ſumma per eoſdem ſecorſum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui deſiderantur. Quòd ſi ſumma debeat eſſe numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar ſit, & dato numero

ter-

terminorũ impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimũ gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summæ alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa, æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterũ procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114 per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{20}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{119}{201}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{20}$. in $4\frac{2}{9}$. gignatur.

VIII.

INTER duos quoscunq; numeros constituemus mediũ Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterũ productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix

erit

erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, extrahique hoc modo, radix quadrata talis numeri. Velut, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9, hoc modo, quæ quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quàm 8. cum huius quadratum sit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

7.	R. 9. 63.	9.

I X.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum: secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet mediam proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus, ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres nu assump	Primus. 8.	quintup. pri. 40.	Sextup. pri. 56.
Quadr. Arit. p.	64	1600	3136.
Medy Geomet.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se aqualibus differentijs mutuò superent, si pro radicibus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato; reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; secundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuenti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt si superiores quadrati, una cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272
Medij Geometr.		640		4480	

Si vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem qualibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	8		200		392
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdem semper proportiones, quas quadrati, eorumque medij inter se habent.

Quòd

Quòd si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmetice proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundũ ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum triũ numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & sic de cæteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros repericmus quotcunq; medios continuè proportionales, iucunda sanè, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atque ita in seipsam ducta producit tertium terminũ, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq; quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de quæ agimus,

agimus, notandæ ſunt tres infraſcriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ ſunt Arithmeticæ, nimirum duæ ſeries naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perſpicuè apparebit, quàm egregium uſum habeat ſeries numerorum naturalis in re propoſita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri ſignificantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. proport.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum conſtituendorum, ſecunda numeros, qui ſignificant genera radicum, hoc eſt, quoties terminus ſecundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium inſequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis reſpondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis ſignificat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix eſt omnium aliorũ, ſemel poſitum non eſſe multiplicandum, ſed ipſummet eſſe radicem omnium ex nulla ſui multiplicatione productum. At numerus 2. eiuſdem ſecundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis poſitam bis hoc modo, 2. 2. & ita in ſe multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiuſdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis poſitam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco poſita in eandem 2. poſitam ſecundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio poſitam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ ſub numero 3. ordinis ſecundi. Idem dices de aliis. Vt verbi gratia numerus 7. ſecundæ proportionalitatis monſtrat, radicem eandem 2. tertij ordinis poſitam ſepties, hoc pacto, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in ſe continuè ſexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. ſuppoſitum. Nam ex 2. primi loci in 2. ſecundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex

ex 32 in 2. ſexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. ſeptimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non ſolum verum eſt in propoſita proportione continua dupla, ſed in omnibus alijs, quicunque numerus ſecundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE ſi conſtituere vis quotlibet medios inter duos propoſitos numeros, cape numerum mediorum conſtituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda eſt radix, quæ toties ordine poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero ſecundi ordinis, qui infra numerum mediorum conſtituendorum in ſupremo ordine acceptum ſcriptus eſt. Radices inuentas ſub datis numeris colloca, quamque ſub ſuo, & ab eiſdem aſcende per continuam vtriuſque multiplicationē, (ducendo primum quamque radicem inuentam in ſe, deinde in numerum productum, & ſic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices inſtituas à radicibus incipientes, & ab eiſdem denominatas, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Poſt hæc ſingulos terminos vnius ordinis duc in ſingulos terminos alterius ordinis aduerſos, & oppoſitos, hoc eſt, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde ſub illo in proximum ſupra hunc, &c. Ita vt in vno ordine ſemper deſcendas à ſupremo ad infimum vſque, in altero vero ab infimo vſque ad ſupremum aſcendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli cauſa, ſi inter 9. & 144. inueniendus ſit vnus terminus medio loco proportionalis, ſumemus in primo ordine 1. & ſub hoc termino in ſecundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam eſſe radicem quadratam, quæ videlicet bis poſita, per eius multiplicationē vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ ſunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus deſideratur, non ſunt inſtituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, ſed ipſæ radices inter ſe multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hoc vides. 9. 36. 144. Sic etiam ſi inter 18. & 288. conſtituendus ſit vnus terminus medius: quoniã hi numeri radices

quadratas

quadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R.q.18. posteriorem autem sic. R.q. 288. Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R.q.18. & R.q. 288. docebimus in Algebra.

RVRSVS si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda est radix, quæ quater posita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines triũ terminorum sub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2 & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarũ,

multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medij termini ijdem, etiamsi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorē numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertiū mediū.

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales, sed plerunque inuentos terminos esse irrationales: propterea quòd dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahenda sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus ea radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratiquadratas, hoc est, quæ quater posita eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. qui illu 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet.

48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunq; datum habentes proportionem. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quærentur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbi-

partientem

partientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296		NB.			10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{5}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

NVMERVM quemcunque datum distribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione sine minimos, sine non minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partito. Quotiens namque per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri seruantes datam proportionem inter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla; si sumantur 6. termini continuè dupli, 3.6.12.24.48.96. quorum summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur. Quotiens autem 4. per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continuè dupli, conficientesque simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij 6. numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}\cdot\frac{2}{100}\cdot\frac{4}{100}\cdot\frac{8}{100}\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$ qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cateris.

QVOD si cupias numerum, qui secari possit in quotuis partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunque, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessario sit numerus integer.

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua inquiritur in data proportione continua reperire quotuis numeros, qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcunque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, vt in $2\frac{1}{2}\cdot 7\frac{1}{2}\cdot 22\frac{1}{2}\cdot 67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quod si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantem 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}\cdot\frac{3}{40}\cdot\frac{9}{40}\cdot\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.

DE

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inueniuntur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
IIar.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32. 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in ijsdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeo & differentia, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac denique ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumemus 3 & 4. inter quos ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè

proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42.48.56. quorum extremi, atque adeo & differentiæ, proportionem sesquitertiam datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti in sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonicæ procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo vero extremi Harmonicæ inter se multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2.3.6. gigni hanc Arithmeticam, 6.12.18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 2. & tertiũ 6. Item secundũ 3. in tertiũ 6. produces 6. 12. 18. siue ducas medium 3. in extremos 2.6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo constituentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadẽ omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, siue septimo, alij duo; & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2.3.6. Harmonicè proportionalibus, si posteriores duo, 3.6. ducantur in 3. denominatorem propor-

proportionis 6. ad 2. sient 9.18. atq; ita erunt iam quinq; termini, 2.3.6.9.18. Harmonicè proportionales: Et si posteriores duo 9.18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt septem hi termini, 2.3.6.9.18.27.54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18.9.6. si minores duo, 9.6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18.6. sient 3.2. atque ita erunt iam quinque termini, 18.9.6.3.2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3.2. diuidãtur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18.9.6.3.2.1.$\frac{2}{3}$. atq; ita deinceps progredi licebit in infinitũ.

ALIO modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, siue ad maiores numeros progrediendo, siuè ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales; Item, relicto primo, alij sequentes tres; & relictis duobus, sequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, qua inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3.4.6.12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3.4.6. quàm tres 4.6.12. Harmonicè proportionales sunt: sed priorum extremi 3.6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorũ 4.12. triplam. Item continua esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinq; terminis. 10.12.15.20.30. quia & in tribus, 10.12.15. & in tribus, 12.15.20. & in tribus, 15.20.30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramq; partem hoc modo continuanda sit, quãdo continuari potest, (neq; enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex ijs, qua sequuntur, constabit.

II.

INTER quosuis datos duos numeros constitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui sit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam. Quotientemque minori adde. Constatus enim numerus erit medius, quem quaris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quaesitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9. minori 15. adijcias, constabit medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, si eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando summa datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum esse necessario integrum cum fractione. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem summam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habens proportionem supertripartientem septimas, quàm differentia maiorum $1\frac{13}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. subtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorũ datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuisione differentiae datorum duorum numerorum per summam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum

numerum

numerum minori dato adjici: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quaritur. Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo. 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortaſſe commodius, (licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non ſunt impares, vel pares, ſed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos conſtitue medium Arithmeticè proportionalem, qui ſemper erit ſemiſſis ſumma eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quare ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter ſe proportionem habent, quam dati duo extremi. Quòd ſi fiat, vt primus inuentus ad ſecundum, ita primus datus ad aliud; hoc eſt, ſi per primum inuentum diuidatur numerus ex ſecundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius; duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par eſt, cuius ſemiſſis 17. eſt medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus

inuentus 238. ad secundum 280. ita primus datus 7. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium utroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest. Pulchrè autem operatio decebit, quando id fieri nequeat, hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus utroque dato maior, quem quærimus. Quòd si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12.16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12.16.24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16.24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384 numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12.16.24.48. Quòd si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24.48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24 subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod si quis proponat hos duos numeros, 10.12. adiungetur illis tertius utroque maior, 15. Ad hos vero duos, 10.11. apponitur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90.99. tertius 110. At vero ad 3.6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta ex minore 3. relinquit 0. Atque eadem modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino æqualis. Multo magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis

propor-

proportionalis Harmonicè, quia differentia amborũ tunc semper maior est minore termino, atque id circo subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumque productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem denique maiori adjiciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertiũ procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertiũ numerũ, vt diximus. Constat autè numero per unitatẽ diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri. 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris. 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorũ duorũ sola vnitate.

EX posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adjiciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c.

Vt

Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inuenienti sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denique duplum denominatoris, numerum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inuenienti sint, sine illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla sesquitripartiente septimas; erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$, collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum

mirum semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84.119.204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritque extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, quæ videlicet data est.

IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum producium partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur. Vt si dentur duo numeri 6. 12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertiũ 4. minorem vtroq; illis proportionalem, vt hic cernis, 4.6.12. Hanc extẽdemus regrediendo versus minores numeros, si ductibus 4.6. minorẽ tertium adiungamus 3. hoc modo. 3.4.6.12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo ductibus minoribus 3.4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{5}$. Atque in hunc modum decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam. Hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alioquin

vltimus, aut

vtramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter se comparati præcipuas perfectasq; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, qua consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vero 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deindè 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos dividatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos dividatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmeticè proportionales, 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quē metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per 12. qua in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diviso, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diviso, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque

Atque hi numeri inuenti eaſdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerſo tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad ſecundum, ita in Arithmetica ſecundus ad primum: Et vt in Harmonica ſecundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad ſecundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, ſunt minimi in ſuis proportionibus. Quòd ſi vicißim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per ſingulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: Et ſi quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt iidem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti ſunt, & eodem quidem ordine, quo dati ſunt, ſed ordine conuerſo, ſi cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim ſi in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progreſſus fit, & contra.

IGITVR ſi quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, ſumendi ſunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, ſi minimi deſiderentur) per ſingulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia poſteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiuſce rei eſt: quia cum ſit, vt 12. primus ad 6. ſecundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex ſecundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifeſtum eſt. Idem conſtat in pluribus terminis, ſi terni ac terni ſumantur, cum ſuis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentia	2	4	
Propor Har.	6	8	12

Differentia.

Differentia.	30	10	5	3	2
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20 fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac terms, cum suis differentijs, si differentia commutato ordine ducantur in primum terminum ac secũdum, producantque vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac denique primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6	3.	1 $\frac{1}{2}$	1.
9	6	3.	$\frac{3}{2}$	1.
18.	12	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens 1 $\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia

quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possint quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

1.	2.	3.	4 $\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	6.
2.	4.	6.	9.	18.

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inuenietur eodem artificio ex his tribus minimis. 1. 3. 9. subtriplis hos quoq; 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicã; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè, 7 $\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducatur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine facta sit: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144 diuidatur per 15. ac Quotiens 9 $\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum 9 $\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuenientque erunt quinque minimi numeri

9.	7 $\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	9 $\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
80.	75.	60	48.	40

quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

SI minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data subsesquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25	30	36.	45.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem. Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si subquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Dua autem fractiones reducètur ad minimam denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinq; minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permistæ sunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	26.	40.	64.	160.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, vnus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter uero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris omnes

tres

tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in iis reperiantur duæ dantaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Na extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres propor-	84.	49.	24.	14		*tionalitates sic a*				
Geometricè pp.	84.	49.	24.	14	*Vel*	84.	24	49	14.	
Arithmet. pp.	84.		49.		14.					
Harmonicè p.	84.		24.		14.					

Rursus sit data proportio, quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorū dupli 6. 4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6. 5. 4.

Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30. 24. 20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30. 25. 24. 20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometricè proport.	30	25	24	20	*Vel*	30	24	25	20
Arithmet. proport.		30.		25.			20.		
Harmon. proport.		30.		24.			20.		

EOSDEM 4. numeros maximæ harmoniæ reperiemus, si pro extremis sumamus quoslibet duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt supra diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admissæ sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius, Quare sic stabunt 4. numeri maximæ Harmoniæ, 12. 9. 8. 6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis. 20. & 10. inuenietur medium Arithmeticè, 15. & Harmonicè $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides.

60. 45. 40. 30.

MINO-

MINOREM autem Harmoniam ſic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri ſola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo ſint, vel impares. Si enim inter extremos ſtatua medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæſitos. Vt ſi ſumantur hi tres numeri ſeſquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæſiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales ſunt, ex conſtructione.

SI vero ſola Geometrica cum Harmonica deſideretur, cape quæcunque tres numeros quoſcunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quærumtur. Vt ſi ſumantur iidem tres ſeſquialteri, 16. 24. 36. inueniatur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$. Sic ergo ſtabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducantur ad hos integros. 208. 286. 312. 468. Si accepiſſes hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inueniſſes inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes ſolam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate ex ipſo tres quoslibet Harmonicè proportionales. Sumamque inter medium, & alterutrum extremorum ſtatuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt ſi ſumãtur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter poſteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo ſtabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod caſu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) ſunt Arithmeticè proportionales, & non ſolum tres 8. 10. 12. ex conſtructione: at ſoli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi ſint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant ſinguli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmetice proportionales,

quæ quæruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quæsitum; numeros Arithmeticè proportionales, 3.6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3.4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntque tres summæ binorum minimorũ 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3.6.9.12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315.630.945.1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arith. proport.	315	630	945	1260
Med. Harm.	420	756	1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos datæ proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1.3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Mediũ Harmonicũ inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si datæ proportionis numeri fuissent minimi 1.3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. fuissentque essent hi duo numeri 4.12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, vnus medius integri cadant, vnus in proportione datæ Arithmeticæ, & alter in Harmonica, assequeris id hoc modo. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricos, quos desidе-

desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inuenienti verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione. 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40			60			90	
Medij Harmo.		48			72			
Medij Arithm.			50			75		

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercidantur duo medij, alter secundum proportionalitatem Arithmeticam, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterque non est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorumq; summa, 7. Si ergo dices 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti	42		56		84		112	
Medij Harmo.		48		*Vel*		96		
Medij Arithm.			49				98	

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos sit medius Geometricè, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturque ordine sic. 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares; vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quærimur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt constat ex 5. regula, cum sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quàm hi, sint Quotientes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmeticè proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quod si non omnes sint pares, duplicandi erant omnes 3. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum sesquialteri habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quàm inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè, constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic positum esse vides.

Tres

Tres Har. pp. inuẽti.	1225			49			25
Medij Arithm.		637			37		
Medij Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS si quarantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturq; duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summa. 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri, 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices, 2. 50. 98. fit, vt quemadmodum inter binos horum singuli cadant medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè sunt proportionales) numerant minimũ numerũ 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arit. pp. inu.	1924			48100			94276
Medij Har.		3700			63700		
Medij Geo.			9620			67340	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros propor-

proportionales sive Arithmeticè, sive Geometricè, sive Harmonicè, inter quorum binos cadant terni medij, unus Arithmetici, alter Geometricè, & reliquus Harmonicè. Sint enim primum inuenienda tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, unus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arithm. proport.	1924				43100				42276		
Medij Harmon.		37720				63700					
Medij Geometr.			56620				52340				
Medij Arithmet.				50012				51188			

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, qua medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Capiantur quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicandi, si quorum isti non omnes pares sint, aut impares, aliàs non essent duplicandi minimum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicè, & Arithmeticè alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricè, minimum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. ductorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab inuicem acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geome-

Geo.prop.	416			936				210
Med.Ha.		576			1296			
Med.Geo.			624			1404		
Med.Ar.				676			1521	

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuẽtis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorũ minimi duo numeri 49. 25. quorum summa 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quaesitos 1178450. 47138. 24050. Nã inter binos cadẽt bini medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, quemadmodũ inter eorum submultiplices 1225. 49. 25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicè, vt ex 12. regula constat, cum producti fiant ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Geo.prop.	1178450			47138				24050
Med. Arit		471380			235504			
Med. Geo.			235690			117852		
Med. Har.				96650			49298	

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medy, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1 erit que ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel

vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam data proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuẽti.	120				30
Medius Arithmet.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunq; propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erũt Quotientes partes, quas quæris, erunteque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonicè proportionales; si sumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. sintque Harmonicè proportionales, sicuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{11}$. $3\frac{1}{11}$. $4\frac{8}{11}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio est de pluribus partibus.

QVO

QVO PACTO EX PROPORTIONE aqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, siue unitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quàm facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruato ordine. DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie. SESQVIALTERI inuersi exhibent superbipartientes: Sesquitertij inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijsdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: Tripli sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes: DVPLI superbipartientes triplos superbipartientes: TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoq;

partientes

pariunt duplos ſupertripartientes ; DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes : TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplos ſuperquadrupartientes : DVPLI ſuperquadrupartientes, triplos ſuperquadrupartientes: TRIPLI ſuperquadrupartientes, quadruplos ſuperquadrupartientes : atque ſic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt unicus, iſque facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia crui debet, ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex ſub oculos ponitur hoc appoſito typo, ubi liquido conſtat, qui termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis conſtruantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus ex datis tribus terminis ita ſumitur	Semel	Bis.	Semel
Secundus ex datis tribus terminis ita ſumitur		Semel	Semel
Tertius ex datis tribus terminis ita ſumitur			Semel

SEQVN-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari ſemper minimos terminos cuiuſque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICularium.

Dupli inuerſo ordine.	1	2	4	2	4	8
Seſquialt. ex duplis inuerſis.	9	6	4	18	12	8
Tripli ordine conuerſo.	1	3	9	2	6	18
Seſqter. ex triplis inuerſis.	16	12	9	32	24	18
Quadrupli ordine cõuerſo.	1	4	16	2	8	32
Seſſquar. ex quad. cõuerſis.	25	20	16	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTientium.

Seſquialteri inuerſi.	4	6	9	8	12	18
Supb. ex ſeſquial. inuerſis.	25	15	9	50	30	18
Seſquiter. ordine inuerſo.	9	12	16	18	24	32
Supter. ex ſeſquit. inuerſis.	49	28	16	98	56	32
Seſſquar. cõuerſo ordine.	16	20	25	32	40	50
Superquadrupart. ex reliquiquart. cõuerſis.	81	45	25	162	90	50

GENE-

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	9	6	4	18	12	8
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	25	10	4	50	20	8
Tripli sesqual. ex dupl. sesqual.	49	14	4	98	28	8
Quadrupl. sesqal ex tripl. sesqal	81	18	4	162	36	8

Sesquitertij ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli sesquiter. ex sesquit.	49	21	9	98	42	18
Tripli sesqt ex dup. sesqt	100	30	9	200	60	18
Quadr. sesqt. ex trip. sesqt.	169	39	9	338	78	18

Sesquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli sesqqua ex sesqqua.	81	36	16	162	72	32
Trip. sesqq. ex dup sesqq	169	52	16	338	104	32
Quad. sesqq. ex trip. sesqq.	289	68	16	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superb. part. ordine recto	25	15	9	50	30	18
Dupli superbip. ex supbip.	64	24	9	128	48	18
Tripli supbi ex dup supbi	121	33	9	242	66	18
Quadr supb ex trip supb.	196	42	9	392	84	18

Supertripart directo ordine	49	28	16	98	56	32
Dupli suptrip. ex suptrip.	121	44	16	242	88	32
Trip suptrip. ex dup. suptr.	225	60	16	450	120	32
Quad suptr. ex trip suptr	361	76	16	722	152	32

Superquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupli supquad ex supqua	196	70	25	392	140	50
Trip supqua ex dup supq.	361	95	25	722	190	50
Quad supqua. ex trip. supq	576	120	25	1152	240	50

HIC

HIC enim perſpicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto triplicis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti ſunt ex tribus antecedentibus. 361. 95. 25. Primus 576. coaceruatus eſt ex primo 361. ſemel, & ex ſecundo 95. bis, & ex 25. ſemel. Secundus autem 120. conſtatus eſt ex ſecundo 95. ſemel, & ex tertio 25. ſemel. Tertius denique 25. eſt tertius 25. ſemel ſumptus, vt hæc appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis æqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO PACTO VICISSIM

Omnis proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIS rurſus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, reſtituetur viciſſim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quàm facili ratione, per variam ſubtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum ſtatuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem ſubtracto ex medio, reliquus numerus cõſtituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex conſtituto iam extremo ſemel, & medio termino bis ſumpto, ſubtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione qualis proportio trium terminorum inæqualiũ reuocabitur ad aliam proportionem, conferendo ſemper

maiores numeros cum minoribus ; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quòd si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio supertripartiens quartas.	49	28	16
Sesquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus : Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet

continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem, 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150.30.6. sextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, propterea quæ æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6.6.6. Minimi enim siue primi numeri quintuplæ proportionis sunt, 25.5.1. Secundi, 50.10.2. Tertij, 75.15.3. Quarti, 100.20.4. Quinti 125.25.5. Sexti autem, 150.30.6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris vsque ad æqualitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt supra diximus. Item sesquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta est ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE vero silentio prætereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometricæ, siue ea æqualitatis sit, siue inæqualitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatum, quas supra explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim triũ terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur; pro secundo autem secundus, & tertius semel; pro tertio denique ipse tertius semel, perspicuè constat ex ijs, quæ paulò ante scripsimus de ortu omniũ proportionũ inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex,

SVMMAM ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Proportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus hic ex datis terminis ita coacervatis.	Bis.	Bis.	Semel
Secundus vero hic.	Semel	Semel	Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ
Proportionalitatis ex Geometrica.

Geometr. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arithm. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. in secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita alys.

ITAQVE

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuũ est in prioribus duobus exẽplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectã ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Harmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus hic ex terminis datæ sic vt in collectis	Bis	Ter	Semel
Secundus vero sic.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quocunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, qua ad æqualitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas proposita oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata est. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA

Harmon. proport.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Aequalitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quàm alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas

litas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

VT si detur Arithmetica proportionalitas, 3.9.15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. supererũt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hã c. 3.3.3. ex qua oritur secundum superius præceptum.

?|9|15
?|3| 3

SI vero reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34.19.4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo data Arithmetica proportionalitatis, eoq; subducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rursus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.

34	19	4
.9| 6|4

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, qua cum minimo constituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propos. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalesue adsciscantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad æqualitatem, ex qua ortum duxit, si termini æquales cum differentia proposita coaceruentur; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20	27	34
20	20	20

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia eſt 7. ſi 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erũt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. cõſtabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quòd ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus. 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

AT QVE pauca hac pralibaſſe hoc loco ſufficiat ex infinitis, quæ de immenſa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici poſſent. Plura enim & quidem ſcitu periucunda in plenioro noſtra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

RATIO-

V.

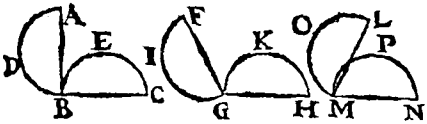
RATIONEM habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuo ſuperare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiuſdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnã requirant duæ quantitates eiuſdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis ſint eiuſdem generis quantitatis, proportionem habent inter ſe, vt mox dicemus. Aſt igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter ſe, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem ſuperet; adeo vt ſi alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiuſdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, qua nullo poſſit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc eſt, bis ſumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter conſtituant triangulum Iſoſceles, [a] erunt duo latera quadrati diametro eiuſdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiuſdem, proportionem habent, (quamuis nondum ſit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc eſt, ſumpta quater, circumferentiam ſuperat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonſtratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiuſdem, & particulam adhuc paulo minorem ſeptima parte diametri. Eodẽ modo multa curuilinea cũ rectilineis proportionẽ habebãt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cũ & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura eſt contenta duobus arcubus circulorum inſiar Lunæ nouæ, quando falcata eſſe cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc eſt, ille cuidam lunulæ, hic vero paraboles quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratrix detur

[a] 20. primi.

maius

maius ea lunula, ac parabola; *Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectã esse circumferentia circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò linea recta, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualẽ. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus*



A B, B C, circa quas semicirculi describãtur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorũ A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; necnon curuilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis semicirculorũ L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionẽ angulus cõtactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelli-

intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodē quantitatis genere videātur cōprehendi, quales sunt linea finita, & infinita; angulus rectilineus, & angulus cōtactus, &c. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionū, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alterā excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque aliis propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineasq;, cum non sub eodē contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Silent quoq;, qui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulū rectilineū, & angulū contactus, cū in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ existant: querū vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam ineptè, & quàm falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionē duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarū sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quā multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magni-

tudines

tudines eandem habere proportionem, quàm earũ aque multiplicia C, & D. Non ergo ita eſt intelligenda hac definitio, præſertim cum tam ignota ſit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem ſemper eadem eſt. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Eſt ergo ſenſus huius definitionis ille, quem expoſuimus, vt liquido conſtat ex verbis Euclidis.

VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.

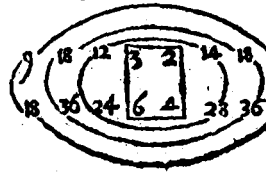
EXPLICAT hoc loco Euclides, quaſnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta, ſumanturque prima, & tertia æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C: Item ſumantur ſecunda, & quarta alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſiue hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecunda, & quarta, ſicut priora duo multiplicia ſunt prima, & tertia, ſiue non. Quòd ſi iam inter ſe conferantur ſumpta æqua multiplicia ea, quæ inter ſe reſpondent, v multi-

multiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertia, & multiplex quarta inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuò, ea ita inter se se habere, vt si E, multiplex prima magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secunda magnitudinis B; etiã F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H: (quod est vtrumque ab vtroq; vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique vt nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quauis accepta, perpetuo se se ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G, non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITA QVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6 definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem perdiligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quæcunque æque multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque æque multiplicibus secunda, & quarta, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Simili er si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut

excessus

excaſſus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonã pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandem proportionẽ habentibus: quædã æque multiplicia prima, & tertiæ magnitudinis, a quibuſdam aquæ multiplicibus ſecundæ & quartæ magnitudinis, vtrumque ab vtroq; vna deficiant; alia vero vna aqualia ſint; alia denique vna excedant, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondẽt; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. ſumanturq; primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item ſecundi & quarti ſumantur alij æque multiplices, vt ſeptupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice ſecundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti. Rurſus primi, & tertij ſumãtur alij æque multiplices, nimirum ſextupli, 18. & 36. Item ſecundi, & quarti ſumantur alij æque multiplices, vt nonupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem eſſe 18. multipliti ſecundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Poſtremo primi, & tertij ſumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item ſecundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem ſecundi, quam 18. multiplicem tertij; ſuperare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunque ſumantur multiplicatione, ſemper deprehendatur, vnum trium horum verum eſſe, dicetur eadem eſſe proportio 3. ad 2. quæ eſt 6. ad 4. alias non.



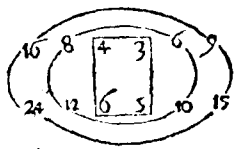
CAMPANVS vero atq; Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt, Dicunt enim Euclidẽ velle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cũ primæ, & tertiæ æque multiplicia, a ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, vtrumque ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc eſt, in eadem proportione, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedũt proportionaliter, ſi ea ſumãtur, quæ inter ſe reſpondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum

æque

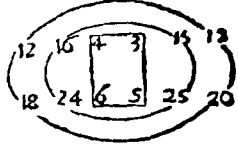
aque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex prima ad multiplex secũda, quam multiplex tertia ad multiplex quarta. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Praterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum aque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum aque multiplica eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, vt proprijs locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex prima deficit a multiplici secunda, vel aquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertia tunc deficiat à multiplici quarta, vel aquale sit, vel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem prima à multiplici secunda deficere, multiplicem vero tertia nõ deficere à multiplici quarta: aut multiplicem prima æqualem esse multiplici secunda, multiplicem vero tertia multiplici quarta non æqualem: aut deniq; multiplicem prima maiorem esse multiplice secunda, at multiplicem tertia multice quarta non maiorem. Propositis inquam, quatuor magnitudinibus, quarum aque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, aqualitate, & excessu seruant; dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum aque multiplicium proportione, qua nunc non consideratur: sed quarto posteà Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nã si de quocunque intelligeretur, essent ait, quatuor hi numeri

4. 3. 6.



4 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. sumantur aque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. aque multiplices, vt dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, at quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt aque multiplicia accepta vna excedant se se quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. qua est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus aque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. que est 6. ad 5. quod eorum aque multiplices non se se excedant proportionaliter, vt constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri aque multiplices ab eo prolati se se vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel aqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quincuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex terty non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & terty sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi aqualis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, aqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur quelibet aque multiplices datorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi; multiplex terty excedat quoque necessario multiplex quarti; quamuis id in nonnullis aque multiplicibus



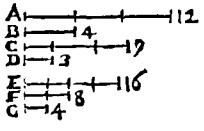
tiplicibus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius constabit ex 8. definitione.

CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, si modo secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque sumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel æqualia sunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales sunt non continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio sit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum est in 4. definitione.



VIII.

CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicē secundæ; At multiplex tertiæ

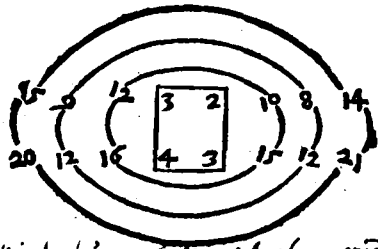
non exceſſerit multiplicem qnartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dicens: Si ſumpta ſint æque multiplicia prima & tertia; Item alia æque multiplicia ſecunda & quarta; deprehenſumque fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex prima maius eſſe multiplice ſecunda, multiplex autem tertia non eſſe maius multiplice quarta, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio prima magnitudinis ad ſecundam, quam tertia ad quartam: vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo prima magnitudinis A, & tertia C, ſumpta ſunt triplicia E, & F; ſecunda vero B, & quarta D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem eſt quam G, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ maius non eſt quam H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quam C, tertia, ad D. quartam.

NON eſt autem neceſſe, vt quatuor magnitudinum, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quã tertia ad quartam, æque multiplicia ſecundum quamuis multiplicationem ſic ſe habere, vt multiplex quidem prima excedat multiplex ſecunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; ſed ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri, vt tam multiplex prima maius ſit multiplice ſecunda, quam multiplex tertia multiplice quarta: Item vt & multiplex prima minus ſit multiplice ſecunda, & multiplex tertia multiplice quarta: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex prima ſuperat quidem multiplex ſecunda, at multiplex tertia vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quam tertia ad quartam

quartam, non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.

ITAQVE vt quatuor magnitudines dicãtur ꝓportionales, neceſſe eſt, vt aquemultiplicium earũ, iuxta quaſuis multiplicationes ſumptæ, vel ſimul excedant, deficiant, vel ſimul æquales ſint: vel (vna æquales ſint vel vna excedant) vt in 6. defin. fuit expoſitum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex ſecunda, multiplex vero tertiæ non ſuperet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, aque multiplicia prima, ac tertia vnà excedant aque multiplicia ſecunda, & quarta.



QVOD ſi quando è contrario multiplex prima deficiat a multiplici ſecunda, non autem multiplex tertia a multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis ſecundum plurimas alias multiplicationes, aque multiplicia prima & tertia vnà deficiant ab aque multiplicibus ſeciũda, & quarta. Vt in eiſdem numeris propoſiti exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum aque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri poſſit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc eſt, ita eſſe primam ad ſecundam, vt eſt tertia ad quartam, cum aquemultiplicia prima ac tertia iuxta quamcunq; multiplicationem, & aquemultiplicia ſecunda

ac quarta iuxta quamcunq; etiam multiplicationem accepta ita ſe habent, vt quotieſcunque multiplex prima maius eſt quàm multiplex ſecunda, multiplex quoque tertia maius ſit quàm multiplex quarta; quotieſcunque vero multiplex prima æquale eſt multiplici ſecundæ, multiplex etiam tertia æquale ſit multiplici quartæ; quotieſcunque denique multiplex primæ minus eſt quàm multiplex ſecundæ, multiplex etiã tertiæ minus ſit quàm multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad ſecundam maiorem eſſe proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia ſecundæ ac quartæ accepta ita ſe habent, vt multiplex primæ ſit minus quàm multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ minus non ſit, quàm multiplex quartæ, ſed vel æquale, vel minus. Quoniã, inquàm, miriũ alicui videri hoc poſſit, quòd ex illo exceſſu, æqualitate, & defectu æque multipliciũ eo ordine ſumptorũ nõ ſtatim appareat ſimilitudo proportionũ, diſſimilitudove: aperiendũ videtur hoc loco, quare ita magnitudines tũ proportionales, tũ nõ proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem reſpondetur, Euclidem eas magnitudines voluiſſe appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita ſe habent, vt dictum eſt; quia non habuit quid notius, per quod explicare potuiſſet magnitudines tam incommenſurabiles, quàm commenſurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus eſſe, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur; ſed ſatis eſſe, vt nunquam res definita afferatur alicui conuenire, niſi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonſtretur. Id quod in aliis etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea ſuper aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum ſit, angulũ quempiam eſſe rectum, niſi prius oſtenderit, eum ab eiuſmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit ſimilia circulorum ſegmenta eſſe, in quibus anguli exiſtentes ſint æquales, ita vt tunc ſolum ei concedendum ſit, ſegmenta eſſe ſimilia, cum probauerit angulos in eis exiſtentes eſſe æquales: ſic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarũ æquemultiplicia

multiplicia

tiplicia eam conditionẽ habent. quam explicauit, ita vt nunquàm ei credẽdum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionẽ, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus cõuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione nõ videtur colligi posse, verè magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò acuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales, & non proportionales, atq; adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, verè eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio. 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandũ ad memoriã est, duplicem esse proportionẽ; Rationalẽ, qua inter quantitates cõmensurabiles existit, atq; adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalẽ, qua inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus dũtaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defi. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum. Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, æquemultiplex est, vel eadẽ pars, vel eadem partes; Vel certè (vt vos ad eam defi. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partẽ, vel easdẽ partes. Nõ proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines non proportionales sunt, hoc est, prima ad secundã habet maiorem proportionẽ, quàm tertia ad quartã, cũ prima secunda magis multiplex est, vel maior pars, maioresue partes, quàm tertia quarta: Vel certè cũ prima secundam sæpius cõtinet, q̃ tertia quartã, siue eadẽ pars, aut partes vtrobiq; superfint, siue non: Vel cũ prima secũdã toties continet, quoties tertia quartã, sed prima maiorẽ insuper partẽ, maioresve partes secunda includit, quã tertia quarta. Potuisset, inquã, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac nõ proportionales, si de solis rationalibus ꝓportionibus ageret: quia omnes ꝓportiones magnitudinũ exhiberi possent in numeris, ac pinde definiri, vt numerorum

rorum proportiones eadem, vel diuerſæ, vt diximus. Nam
proportio numerorum (vt ex Campano, aliſque ſcriptori
bus, defin. 24. lib. 7. adnotauimus) eſt habitudo quædam vniu
numeri ad alterum, ſecundum quòd illius eſt multiplex, v
pars, partesve: Vel certè ſecundum quod illum continet ſe
mel, aut aliquoties, & aliquam inſuper illius partem, vel par
tes. Quæ omnia perſpicua ſunt tum ex definitionibus quinq
ſpecierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis
quàm minoris inæqualitatis, de quibus ſupra egimus; tum
ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. ſcripſimus.

QVONIAM verò Euclides non ſolum proportio
Rationales, ſed Irrationales etiam complecti voluit, non
tuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non p
portionales definire: propterea quòd in proportione irration
maior magnitudo neque multiplex eſſe poteſt minoris, nec
eam ſemel aut aliquoties, & inſuper aliquam eius partem
partes continere: Minor item maioris neque pars eſſe pote
neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem hab
tes proportionem incommenſurabiles ſint, ita vt nullam p
tem aliquotam communem, quamuis minimam, poſſint h
bere. Quocirca coactus eſt ſeſe conuertere ad proportiones m
gnitudinum rationales, hoc eſt, ad proportiones numerorum
cum omnis proportio rationalis, ſiue magnitudinum commen
ſurabilium, ſit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 1
propoſ. 5. demonſtratur: Coactus, inquam, eſt inueſtigare a
quid, quod certum ſit conuenire quibuslibet quatuor numer
ſiue magnitudinibus commenſurabilibus, eandem habentib
proportionem, vel non eandem: adeo vt, ſi idem illud cons
nire demonſtretur quatuor magnitudinibus, etiam incomm
ſurabilibus, iure optimo magnitudines illa quatuor propo
tionales etiam dici poſſint, vel non proportionales: quand
quidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatu
numeri proportionales, vel non proportionales, immo qua
qualibet quatuor magnitudines commenſurabiles eãdem h
bentes proportionem, vel non eandem, neceſſario habere a
monſtratur. Neque enim aliunde cognoſcere, vel explica
aliter poſſumus magnitudines incommenſurabiles proporti
nales eſſe, aut non proportionales, niſi per aliquid, quod cert
ſit conuenire, vt diximus, numeris quibuſcunque, vel ma
gnitudi

gnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodũ quia quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem pars, vel eadem partes circulorũ, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quod tunc segmenta neque eadem pars, neque eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existãt. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentiũ æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabiliũ colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, quæ circulis sunt commensurabilia; ita non rectè fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubiam reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hæc proportionum similitudo nõ tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplex tertij maiorem quoq; esse necessario multiplice quarti; & si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem:

Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumpti
multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multipl
item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta
etiam multiplicationem, si multiplex primi existen
re, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior q
quàm multiplex quarti; Et si illo existente æquali,
æqualis sit, & si illo existente minore, hic similiter m
stat, perpetuò verum est, quatuor illos numeros esse
nales: Rursus quia, propositis quatuor numeris, quorum
ad secundum maiorem proportionem habeat, quàm t
quartum, sumptisque æquemultiplicibus primi ac te
æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario inter
cidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secun
tiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: E
quia, quatuor propositis numeris, sumptisque æquem
bus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi a
si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem
tiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem m
quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse
tionem primi ad secundum, quàm tertij ad quartum
tiam, inquam, ita se res semper habet in numeris,
& in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt con
nunquàm inueniatur, non immeritò dicentur qu
quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eam
bere proportionem, cum sumptis æquemultiplicibus pr
tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquem
bus secundæ ac quartæ secundum quamuis etiam mu
tionem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ
esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex prim
est multiplicis secundæ; multiplicem vero tertiæ æqu
multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis
tiplici secundæ; multiplicem denique tertiæ minorem e
tiplice quartæ, hoc ipso, quòd multiplex primæ minor
tiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur
quæcunque magnitudines tam commensurabiles, qu
commensurabiles, non habere eandem proportionem,
iorem esse proportionem primæ ad secundam, quàm t
quartam, cum, sumptis æquemultiplicibus, vt dictum
terdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem m

s

secundæ, multiplicem verò tertiæ non maiorem multiplicem quartæ: quãdoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumq; aliud iudicium habere possumus, quo magnitudines incommensurabiles cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales: præsertim cum magnitudines incommensurabiles, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numeros ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices ita se habent, vt in 6. defi. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquãdo absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur, veritissima esse plerunque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt posthac etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquido constare existimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometricè demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissimè ante lib. 5. possint demonstrari; atque adeo hic assumi, vt iam demonstratæ. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationẽ, item secũdi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secũdi, erit quoq; multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi,

erit

erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti: si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturq; primi A, & tertij C, aquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, aquemultiplices G, H, qualiscunque hat multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quàm G, multiplex secundi B, maiorem quoq; esse F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, aqualis sit ipsi G, aqualē quoq; esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoq; esse F, quā H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D;

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

[a] *erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D:* [b] *Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint aquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H: Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quā G, erit quoque F, maior quàm H, vt in primo exemplo: Si vero F, aqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, aqualis, vt in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoque F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.*

[a] 13. septimi.
[b] 17. septimi.
[c] 13. septimi.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad

mi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, ſi ſumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit quàm multiplex ſecundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad ſecundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri poſſe, vt ſumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus ſecundi B, & quarti D, multiplex ipſius A, primi ſit maior quàm multiplex ipſius B, ſecundi, at multiplex ipſius C, tertij maior non ſit, quam multiplex ipſius D, quarti. Multiplicantes enim ſe mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato, metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronun. 9. lib. 7. hoc eſt, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, ſecundo fit in E, tertium; [2] *erit vt D, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.*

K, 56.	H 7.		O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.		O, 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80.		B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.		P, 24.	L, 30.

[2] 19. ſeptimi.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G; fietq; idcirco

idcirco ex B, in FG, numerus, quem B, metitur per FG, ex
a 19. septi- mi. prouenit. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in FG, quartium, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad FG, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita FG, ad E. Quoniam ergo est, vt FG, ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicuè consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D. Eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æque multiplices L, MN, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proximè maior quàm I; hoc est, tales æquè multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel æqualis, vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex constructione, quod I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; b erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

K, 56.	H 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.	O, 60.	I, 220.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 30.

b 14. septimi.

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad MN; quòd idem numerus ipsos

ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M, N, quippe cum L, MN, sumpti sint ipsorum D, E, aquemultiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad MN, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita MN, ad K.

QVIA ergo est, vt totus L, ad I, ita totus MN, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundē I, ita E, ex MN, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij propos. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, vt reliquus ex MN, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quàm I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel aqualis, vt in posteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proximè maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex MN, maior non erit quàm K; atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, aqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, ut in priori exemplo, vel aqualis, vt in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt KH, multiplex est ipsius FG, vel I, ipsius C; Item P, ita multiplex ipsius B, ut MN, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniā ostensum est, ita esse FG, ad E, vt A, ad B, sumptiq; sunt ipsorum FG, & A, primi ac tertij, aquemultiplices KH, & O, itē ipsorum E, & B, secundi ac quarti, aquemultiplices MN, & P, sequitur ex antecedente propos. si KH, maior est quā MN, ipsum quoque O, maiorem esse quàm P. Cum ergo KH, ostensus sit maior quàm MN, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cū O, I, sint aquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, aquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumq; sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisq; aquemultiplicibus, vt dictum est, multiplex primi nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturq; aquemultiplices primi ac tertij, item aquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoq; potest, vt

vt numerus primi multiplex primi ſit minor multiplice ſe
multiplex vero primi non ſit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor eſt proportio C, ſr
D, ſecundum, quàm A ad B, quo enim, demonſtr
eſt, I, multiplicem primi A, minorem eſſe, quàm L, m
cem ſecundi D, at O, multiplicem tertij A, maiore
quàm P, multiplicem quarti B.

I I I.

PROPOSITIS quatuor numeris, t
ptiſque æquemultiplicibus primi ac tertij
ta quamuis multiplicationem, item æquem
tiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis
multiplicationem, ſi multiplice primi exiſ
te maiore, quàm multiplex ſecundi, multip
tertij maior quoque ſit neceſſario, quàm mu
plex quarti: & ſi illo exiſtente æquali, hic q
que ſemper ſit æqualis; illo denique exiſte
minore, hic quoque perpetuo minor ſit: Erit
dem proportio primi ad ſecundum, quæ te
ad quartum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

SINT quatuor
meri A, B, C, D, ſun
turque primi A, &
tij C, æquemultip
qualescunq; E, F;
ſecundi B, & quarti
æquemultiplices G,
qualiſcunque etiam
ſit multiplicatio. Di
E, F, multiplices p
ac tertij ſemper ſint
maiores, quàm G,
multiplices ſecundi & quarti, vel æquales, vel minores;
eſſe A, primum ad B, ſecundum, vt C, tertium ad D, quartu
Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, qu
C,

C, ad D; fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesim. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando cõtingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex secũdi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cum illa sit proportio maioris inaqualitatis, hac vero vel æqualitatis, vel minoris inaqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoq; permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H. [a] Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauerit E, & F, quippe cum E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C; Ea demque de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat.

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

[a] 17. septimi.

QVOD

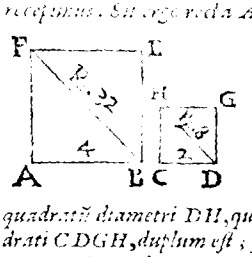
QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; non proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum

EADEM enim demonstratione maiore proportione ubique minor proportione in alia re mutata

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 5.	D, 4.	H, 20.

hoc exemplo apparet, ubi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus incommensurabilibus, quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerumque proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: at verò proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. competit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus eo sensu sumptis eorum consequitur, & nihil absurdi inde ferri possit. Hoc enim paulò ante demonstraturos nos recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, rectæ CD



plus, & super ipsas rectas describantur quadrata AB, CE, CDGH; cum diametris DF, DH. Et quia ex scholio propositionis 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quàm quadrati diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. qui numeris exprimi nequit, cum sit maior quàm 5. minor autem quàm 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5 & fractione quapiam unitatis, in se duobus possit numerum integrum 32. efficere, vt ex Luminare sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri, qui numeris etiam exprimi nequit, cum ea

sit quàm 2. minor autem, quàm 3. &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quam CD, ad DH, sit irrationalis, diameterq; propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 2. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos alia via siue proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoq; inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint æquales, & triangula erunt triangula ABF, CDH. Quare [a] *erit, vt AB, ad BF, ita CD, ad DH; Et permutando, vt AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, rectæ CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eò deducti simus, vt credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt CD, ad DH, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autem propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, verè duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quòd latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tam lateris AB, ad diametrum BF, quàm lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF, quadrati AE, quam quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est, erit quadratum diametri LF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atq; idcirco illud huius quadruplum*

[a] 4 sexti.

Tt erit.

erit. Quocirca ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta BF, re
dupla erit. Vides ergo rurſus, ſi procedamus per ea, qi
fin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus
ſtrata ſunt, nos peruenisſe ad concluſionem veram, r
diametros duorum quadratorum habere proportionem
duplam, ſi latus vnius ſit lateris alterius duplum: vi
non ſit, quin magnitudines verè proportionales ſint,
aquemultiplicia eam conditionem habent, quam deſi
præſcribit. Porrò ex regulis quoq; numerorum irration
quæ in Algebra traduntur, conſtat diametrum BF,
R. 32. habere duplam proportionẽ ad diametrum DH,
ad R. 8. Nam ſiue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens fi
hoc eſt, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad a
trum DH, denominat; ſiue R. 8. multiplicetur per 2. pr
tur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudin
commenſurabilium proportionibus demonſtrantur ex de
huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irr
lium. Quæ res argumento rurſum eſt, magnitudines,
definitio 6. huius lib. conuenit, verè eſſe proportionales;
doquidem calculus numerorum irrationalium cum a
ſtrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuò conſenti
peritur, vt ijs, qui in Algebra præceptis verſati ſunt,
mum eſt.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compoſit
5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnit
infinitum ſecetur, gignere poſſit integrum num
32. hoc modo facile demonſtrabimus. Sit eni
merus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc
$5\frac{3}{7}$. reuocetur{que}, vt in Arithmetica tradidi
ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum auter
denominatorem 7 nõ metiri numeratorem 38.
quin diuiſis 38. per 7. fieret Quotiens numerus
ger ſine fractione, quod eſt contra hypotheſin. A
pl

plicetur iam fractio $\frac{18}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusque ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quàm denominator 7. in se ducatur.) gignaturque fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt ostendimus,[a] non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonstrauimus. Atque eadem ratione demonstrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiam minor est denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem datæ fractionis numerator minor denominatore; erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaque quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{109}{21}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

[a] 16. octaui.

IX.

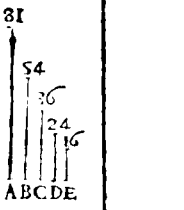
PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

QVONIAM omnis Analogia, ſeu proportionalitas, quam interpres, vt dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel pluriũm proportionum, omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſiue magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunque ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationẽ habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELUTI si sint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita ut ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiæ, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reperiuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, nimirũ proportio A, ad B, & B, ad C, ut propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionẽ A, ad B, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, nimirum proportio A, ad B, B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad E: propterea quod quatuor proportiones intercipiuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad E, &c.



QUOD si è contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D: sic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

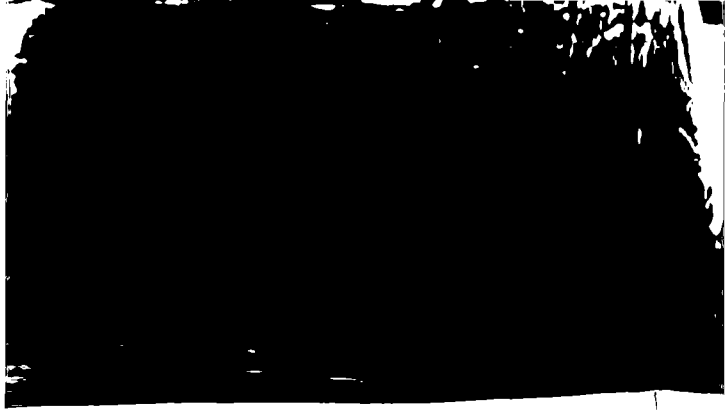
INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, id quod Euclides etiam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplã proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur

quodammodo proportio prima quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cũ inter primã quantitatẽ, ac tertiã interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autem intellexit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod meritò quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur; eò quod bis ſit poſita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cũ illa minor ſit, hæc autem maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatẽ 25. propterea quòd 25. maior eſt, quàm 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decuplæ proportio eſt eiuſdem duplæ. Quemadmodum etiam proportio octuplæ dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecuplæ, vt hic patet 16. 4. 1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, qui fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium duplæ ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? Duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quòd hæc ordine bis poſita eſt continuè inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt eſſe duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad ſecundam, (inter quos auctores eſt etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus ſit præſtantiſſimus) dicunt in hac defi. requiri terminos inæquales, primamq; debere eſſe maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda ſit neceſſario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non eſt, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam eſſe. Verum hæc expoſitio non ſolum vera non eſt, ſed Euclidi prorſus eſt contraria: quippe qui aſſumat pleriſque in locis, triplicatam proportionem

portionē reperiri in proportione minoris inaqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si conferatur maior conus, vel cylindrus ad minorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdē lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonstrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inaqualitatis essent intelligendæ. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendū sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentiū librorū percipiātur, vel usq; possint materialibus accommodari. Nō autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. cōstat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorū, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorū triplicatam,



...am, colligendum erit, ſpharam illam, cuius diameter conti-
...et tres palmos, ad ſpharam, cuius diameter eſt unius palmi
...antum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim tripli-
...ata dicitur tripla proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c.
...ic etiam propoſitis duabus ſpharis, quarum diametri propor-
...ionem habent decuplam, habebunt ſpharæ ipſæ proportionem
...millecuplam, cum hæc ſit decupla triplicata, vt hic patet.
...000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam
...roportionem eſſe duplo tantummodo maiorem proportione de-
...upla, & non potius vigecuplam decuplæ eſſe duplam?

CÆTERVM propoſita quacunque proportione ratio-
...alis, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget
...denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſita pro-
...portionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatoris ſcilicet
...roportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſe-
...decuplæ, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cer-
...nitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multi-
...plicatione $\frac{1}{4}$. denominatoris videlicet proportionis ſubquadru-
...plæ, in ſe, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio ſubſedecuplæ, du-
...plicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rur-
ſus in illud productum multiplicetur, procreabitur denomina-
tor proportionis triplicatæ; vt in primi exemplo, ex multipli-
catione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis,
quæ quadruplæ dicitur triplicatæ, vt hic vides, 64. 16. 4. 1.
Item hic 192. 48. 12. 3. Rurſus ſi in poſterius hoc productum
multiplicetur idem denominator, mouebitur denominator pro-
portionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaque proportio-
nis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propo-
ſitæ proportionis bis poſito, atque ita multiplicato. Vt numerus
denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, pro-
ducitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis poſito, in
hunc modum 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt
9. denominatorem nonuplæ proportionis, quæ duplicata dici-
tur triplæ, vt hic cerni poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero
denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ pro-
portionis denominatore ter poſito & ſic multiplicato. Vt in
dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27.
procreatur ex 3. ter poſito ſic. 3. 3. 3. atque ita multiplicato, di-
cendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicatæ oritur

ex

ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac de fin. agitur, nihil aliud est, quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, proponantur hisce quatuor numeris continuè proportionalibus 1. proportionis quadruplæ, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interuallatas, atque ita multiplicato, scilicet 4. quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam versis eisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$.

Denominatores.	4	16	64
Sesqui propor.	192	48	12

quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & 64. multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quamquam illa minor sit, quàm hæc; quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione

Denominatores.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
Sesqui tertiæ.	3	12	48

ne ſubquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorum $\frac{1}{64}$. ſed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio ſubſeſquitertia dicetur tripla proportionis ſubquadruplæ: ſicut etiam non proportio ad 64. denominata, ſed proportio duodecuplæ, eſt proportionis quadruplæ triplæ; propterea quòd denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. ſed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, ſiue maiores cum minoribus, ſiue minores cum maioribus conferãtur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter ſe multiplicatis, demonſtrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum eſſe alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus eſt, vel triplus, &c, ita vt proportio decupla ſit dupla quintuplæ, & ſextupla ſit triplæ duplæ, &c. oſtendemus ad propoſ. 5. lib. 8. tractatumq; eſt hoc argumẽtum copioſe à Rodolpho Volumnio in Diſputatione de Proportione proportionum. Nunc ſatis ſit, hoc ipſum communi hominum iudicio ex ſenſibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens ſit 10. & Patiens 1. quis tam mẽte captus erit, qui nõ ſtatim intelligat, ſi idem Agens augeatur, vt ſiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorẽ habere potentiam reſpectu eiuſdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus eſt denominatoris 10. dupla eſt proportionis decuplæ, non autem proportio centuplæ, vt auctores contraria ſententia volunt: ſed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in ſe, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplã proportionẽ habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiã ſi è contrario, Agẽs aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia ſubdecuplam, ita vt Agens ſit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod ſit 2. duplo eſſe potentius reſpectu eiuſdẽ Patientis 10. quàm Agens 1.? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem ſubquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. cõſtatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis ſumpto, erit profecto proportio ſubquintupla proportionis ſubdecuplæ dupla, non autẽ illa, quæ ſubcentupla eſt, vt prædicti auctores volunt.

volunt, cum hæc longè minor sit, quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionẽ duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt vnicũ medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniã gignitur ex duabus proportionibus æqualibus, quemadmodũ & quadratũ ex duabus lineis æqualibus cõficitur. Deniq; proportionẽ, cuius quatuor quantitatibus duo media in continua proportionalitate interyciuntur, obtinere naturã solidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionũ esse similitudinem. Docet iam, nõ solum in proportionalitate quaeis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quænam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quænam consequẽtia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtriq; cõsequenti, vel eodẽ modo maiorẽ, aut minorẽ:

Alias

Alias non haberet vtrag; antecedẽs ad vtramq; conſequentẽ proportionem eãdem. Exemplũ habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes maiores ſunt eodem modo conſequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tã E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, vt conſtat. Atq; hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. iuſſit accipi aque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia aque multiplicia ſecunda, & quarta magnitudinum, nimirum conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione conſtat; in magnitudinibus vero non proportionalibus diſſimiles.

ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter ſe conferri poſſe & antecedentes magnitudines, & conſequentes; veluti in ſequentibus definitionibus patebit. Verum ſi verba definitionis diligentius ponderentur, & vſus eiuſdem in 6. lib. conſideretur, noſtram expoſitionem huic anteferendam eſſe, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

EXPLICAT hic quoſdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentiſſimus eſt vſus apud Geometras. Hi autem ſunt numero ſex. Primus dicitur proportio alterna ſiue permutata: Secundus, inuerſa, ſeu proportio e contrario: Tertius, compoſitio rationis, ſeu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuiſio rationis, vel diſiuncta proportionalitas; Quintus, conuerſio rationis, ſiue euerſa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex aqualitate, ſeu aqua proportio. Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit, eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem huius. Vt ſi ponamus proportionem A,

ad

ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Caterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.

XIII.

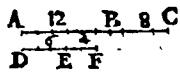
INVERSA ratio, est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D, igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius, Recte namque licebit inferre, vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad

D, ad triangulum, ſeu numerum C, vt ex coroll. propoſ. 4. conſtabit.

XIIII.

COMPOSITIO rationis, eſt ſumptio antecedentis cum cõſequente, ceu vnius, ad ipſam conſequentem.



SIT proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius AC, nempe antecedentis cum conſequente, ad BC, conſequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum conſequente, ad EF, conſequentem; dicetur huiuſcemodi argumentatio compoſitiõ rationis, eo quod ex antecedente, & conſequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos ſcriptores reperies in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonſtrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propoſ. 18.

HVIC modo argumentandi per compoſitionem rationis addi poſſunt alij duo. Primus dici poteſt, Compoſitio rationis conuerſa; quando nimirum ſumitur antecedens, & conſequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt ſi eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq; ; Ergõ vt AC, ex antecedente & conſequente conſtata, ad antecedentem AB, ita eſt DF, ex antecedente & conſequente compoſita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem eſſe validam, demonſtrabimus ad propoſ. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compoſitionẽ rationis cõuerſam.

ALTER modus dici poteſt, Compoſitio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & conſequentem, ceu ad vnam. Vt ſi eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq; per compoſitionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totã AC, ex antecedente, & conſequente compoſitam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & conſequente compoſitam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propoſ. 18. huius lib. oſtendemus.

DIVI-

XV.

DIVISIO rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.

VT ſi dicatur, qua proportio eſt totius AB, ad CB, ea eſt totius DE, ad FE; Igitur erit & AC, exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ad CB, conſequentem, vt DF, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad FE, conſequentem. In diuiſione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio oſtendetur propoſ. 17. huius lib.

POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuiſionem rationis conuerſam dicere poſſumus; quando nimirum conſequens ad exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, refertur. Vt ſi eſt, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, concludimuſq; per diuiſionem rationis conuerſam; Ergo erit, vt CB, conſequens ad AC, exceſſum, quo antecedens conſequentem ſuperat, ita FE, conſequens ad DF, exceſſum, quo antecedens ſuperat conſequentem. Valere autẽ hanc argumentationem, oſtendemus ad 17. propoſ. huius lib.

PERSPICVVM autem eſt, vt vtraque harum argumentationum per Diuiſionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & noſtra, antecedentem debere eſſe maiorem conſequente. Aliàs Diuiſio fieri non poſſet.

ALTER modus appellari poteſt Diuiſio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum exceſſu, quo conſequens antecedentem ſuperat. Vt cum dicimus. Ita ſe habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoque per diuiſionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, exceſſum, quo conſequens antecedentem ſuperat, ita DF, antecedens ad FE, exceſſum, quo antecedentem ſuperat conſequens. Qui modus argumentandi demonſtrabitur etiam à nobis ad propoſ. 17. huius lib.

PORRO manifeſtum eſt, in hac Diuiſione rationis contraria conſequentem debere eſſe maiorem antecedente, vt ſitmi poſſit exceſſus, quo conſequens antecedentem ſuperat.

CON-

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemus per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

A 6 C4B
D 12 F 8 E

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

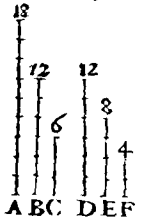
XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est, A, ad

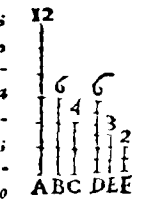
A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in secũdis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere vnam, eandemque inter se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatè procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia eadem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobiq; conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in'modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eã argumentat. onẽ esse onã.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

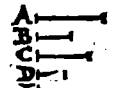
SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; nancupabitur huiusmodi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.

VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam,

quodam, quod vt hic subijcere mus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiã alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

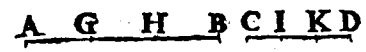
VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quapiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quanam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictione non implicet, vt Philosophi, loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.



THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinũ E, F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinũ E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi



E, æquales, & CD, quoq; in magnitudines CI, IK, KD, ipſi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus, conſtat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales
[1] 2. pron. CI, & F, [1] erunt AI G, CI, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul; Necnon HB, & KD, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, ſimul, in AB, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

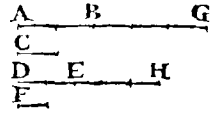
2 *HOC idem demonſtrabitur vniuerſe propoſ. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare; quia ex eo alia proportiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SIT

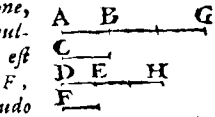
SIT magnitudo prima A B, tam multiplex ſecundæ C, quam tertia multiplex DE, tertia, quartæ F; Rurſus tam ſit multiplex BG, quinta ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt E H, ſexta ipſius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta compoſitam, tam multiplicem eſſe ſecũdæ C, quam multiplex eſt D E, tertia compoſita cum ſexta E H, ipſius F, quartæ. Cum enim A B, D E, ſint æque multiplices ipſarum C, F; erunt in A B, tot magnitudines ipſi C, æquales, quot ſunt in DE, æquales ipſi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipſi C, quot ſunt in EH, æquales ipſi F Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines BG, EH; [a] erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex eſt A B, (prima compoſita cum quinta) ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt D H, (tertia compoſita cum ſexta) ipſius F, quartæ. Si prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

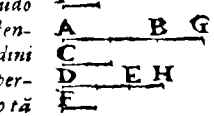


[a] 2. pron.

SCHOLIVM.

QVOD ſi prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint ſecundæ, & quartæ; Quinta vero & ſexta, æquemultiplices ſecundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint ſecundæ, & quartæ; At quinta & ſexta, æquales ſecundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima & quinta) tam multiplex ſecundæ C, quam multiplex eſt tota D H, (tertiæ ac ſextæ) ipſius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipſi C, oſtendetur æqualis eſſe ipſi D H, multitudini magnitudinum ipſi F, æqualium, vt perſpicuum eſt in appoſitis figuris. Si vero tã prima & tertia, quam quinta, & ſexta æquales ponantur ſecundæ, & quartæ, luce clarius eſt, primam





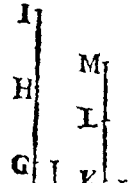
& quintam ſimul, atque tertiam & ſextam ſi multiplices eſſe, nimirum duplices, ſecundæ & q gnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur in omni portionis vniuerſe propoſ. 24. ſed operæ pretium fuit prius in proportione multiplici demonſtrare, vt ea, q tur, demonſtrari poſſint.

3. THEOR. 3. PROPOS.

SI ſit prima ſecundę æquemult atq; tertia quartę; ſumantur autem multiplices primæ, & tertiæ: Erit æquo, ſumptarum vtraque vtri æque multiplex, altera quidem ſ dæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex ſec quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumantu



F, æque multiplices primæ & te & C. Dico ex æquo tam multipl ſe E, ipſius B, ſecundæ, quam eſt D, quartæ. Nam cum E, & F, ſi multiplices ipſarum A, & C; ſ buantur E, & F, in magnitudines & C, æquales, vt in EG, GH, H KL, LM; erunt tot partes in E, ipſi A, quot ſunt in F, æquales Quoniam vero EG, FK, æquales ſis A, & C; ſunt autem A, & C, æ tiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E earundem B, & D, æque multiplices. Pari ration GH, KL; Item HI, LM, æque multiplices ea B, & D. Quoniam igitur EG, prima magnitudo, multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FK

quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt KL, ſexta eiuſdem quartæ D, [a] Erit & EH, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FL, compoſita ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cum ſit EH, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt FL, tertia quartæ D, vt proximè demonſtratum eſt; ſit autem & HI, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt LM, ſexta multiplex quartæ D; [b] Erit & EI, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt FM, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 2. quinti.

[b] 2. quinti.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propoſ. 22. non ſolum in magnitudinibus æque multiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ binæ ſumptæ eandem habent proportionem, ſiue rationalem, ſiue irrationalem, ſed neceſſarium fuit, ipſum prius hic in proportione multiplici demonſtrare, vt inſequens propoſ. 4. demonſtrari poſſit.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æquè multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æquè multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: siue E, F, ita multiplices sint ipsarũ A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vnà deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicẽ primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia; & H, quarta: sumanturq; ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, á multiplicibus ipsarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt vult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta, vt diximus, vel vnà deficere, vel vna æqualia esse, vel vnà excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æquè multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; ostensæque sunt I, K, æque multi-

I E A B G L
K F C D H M

[a] 3. quinti.

multiplices primæ & tertiæ, A, C; Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ, B, D; [a] ita vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat necessario ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [b] æquemultiplicia quoq; erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaq; cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoq; esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [c] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

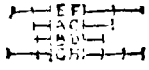
[a] 6. *definit. quinti.*

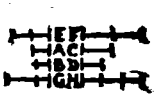
[b] 3. *quinti.*

[c] 6. *definit. quinti.*

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides desi. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & conuersa, seu inuersa ratione, proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse cõuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarũ A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quòd A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [c] *necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem*





minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationẽ sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior, quam vtraque E, F: & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quàm vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaque quoniam prima B, & tertia D, sumpta sunt æquemultiplicia G, H; Item secunda A, & quarta C, æquemultiplicia E, F, ostensumq; est, G, H, vel vna excedere E, F, vel vna æqualia esse, vel vna deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur; [2] erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.

[2] 6 definit. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportio-

portionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim a principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarũ magnitudinũ æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo huiusce modi demonstratio, vna cum expositione 6. definitionis, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur, pro vt inter se respondent. Vnde ex 6. d. fin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatæ CF, siue AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, vt in prima figura, siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Item siue AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figuræ, siue non ex eisdem, vt in posteriori figura.

Dico

Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reli
vt est tota A B, totius C D. Ponatur enim E B,
plex cuiusplam magnitudinis, videlicet ipsi
est A E, multiplex ipsius C F, vel tota A B, t
Quoniam igitur A E, E B, æque sunt multiplic

[a] 1. quinti.

CF, GC; [a] erit tota
GF, ita multiplex, vt
CF, hoc est, omnes o
vna vnius: Sed tam
etiam ponitur A B, i
quam est multiplex
CF. igitur AB, tam est multiplex ipsius GF,

[b] 6. pron.

tiplex est ipsius CD; [b] atque idcirco æqual es
C D. Ablata igitur communi C F, æquales
FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD
tiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita
sius GC, vt A E, ipsius CF, hoc est, vt tota A
CD. Quare tam multiplex est reliqua E B, re
quam est tota AB, totius CD: quod est prope

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, t
vt ablata AE, ablatæ C F. Dico reliquam E

FD, esse sic mult
est tota totius. I
GA, ita multi
FD, vt est A E,
vel vt tota AB, t
quoniam A E,

[c] 1. quinti.

multiplices sunt ipsarum C F, F D; [c] erit to
multiplex totius CD, vt AE, ipsius C F: Sed
multiplex est AB, eiusdem CD, vt A E, ipsius
potheſi Æque multiplices sunt igitur G E,

[d] 6. pron.

C D; [d] atque adeo inter se æquales. Quare, de
muni A E, æquales erunt GA, EB: Ideoque a
plices ipsius FD; cum GA, sit multiplex posit
Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius FD
sius C D. Igitur & E B, reliqua sic erit mult
FD, reliquæ, vt AB, tota totius C D; quod
tum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque
tiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

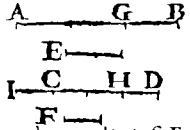
SCHOLIVM.

VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic eſt factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

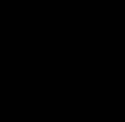
SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cũ enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoq; AG, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; aliàs inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quam CH, tertia multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecũdæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartæ F; erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, vt HI, tertia cum ſexta, multiplex eſt quartæ F. Atqui CD, ipſius F, erat quoq; tam multiplex, quam AB, multiplex eſt ipſius E. Aeque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F. Ideoq; æquales inter ſe. Quare, dempta CH, communi, remanebũt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoq; HD, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitum.



a 2. quinti.

b 6. pron.

SIT



SIT deinde GB, mu
sius E. Dico ita quoque
tiplicē H D, ipsius F. P
que C I, ita multiplici
est multiplex GB, ipsiu
vt prius, A B, ita multiplex ipsius E, vt H I,
est ipsius I. [b] Quare iterum æquales erunt HI
adeo dempta communi CH, & reliquæ CI,
les erunt: Sed C I, est ita multiplex ipsius F,
sius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur &
multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, mu
quod est propositum. Si duæ itaque magnitu
rum magnitudinum sint æque multiplices,
ostendendum erat.

[a] 2. quinti.

[b] 1. 5 com.

SCHOLIVM.

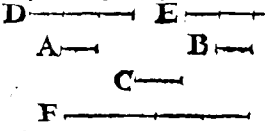
HOC quoque ostendemus vniuerse propos 24.
nere proportionis.

BREVIVS totum propos. ita demonstrabi
niam AE, CD, sunt ipsarum E, F, æquemultiplic
AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt
nes in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH
E, F, æquemultiplices sunt; erunt quoque in AG,
tudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in
æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus
demantur multitudines æquales AG, CH; remar
titudines GB, HD, æquales. Quare toties contine
GB, quoties F, continetur in H D: ac proinde si C
sit ipsi E, erit quoque H D, ipsi F, æqualis: Si auter
tiplex sit ipsius E, erit ita multiplex H D, ipsius F,
tiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB
quoties F, in H D, existit, vt ostensum est.

7. THEOR. 7. PROPOS

AEQVALES ad eandem,
habent rationem: Et eadem ad æ

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; [a] eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunq; multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, fit vt vtraq; vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; [b] erit ~~in~~ proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



[a] 6 pron.

[b] 6. definit. quinti.

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vna æqualis sit, vel maior; [c] Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

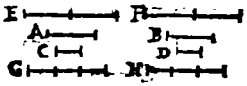
[c] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neque enim per demonstrationem constat, vtramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cum illæ sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM

EODEM fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi eo multiplicis F, ſumantur dua æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam



C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum A, & B, prima, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ, & quartæ; [a] erunt tam E, & F, inter ſe æquales, quam G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex primæ deficit à G, multiplice ſecundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit. [b] Eadem ergo eſt proportio A, primæ ad C, ſecundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod eſt propoſitum.

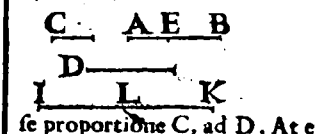
[a] 6. pron.

[b] 6. defin. quinti.

8

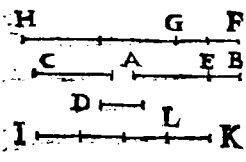
THEOR. 8. PROPOS. 8.

INAEQVALIVM magnitudinũ maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, AB, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionẽ AB, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. Atc conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quã D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori

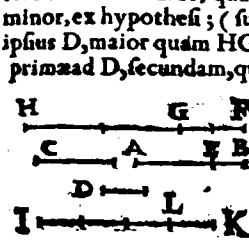
minori C, vt sit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE; quia dupla ipsius AE, esset minor, quàm D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunq; aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est, quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunq; aliæ maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarum BE, EA; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E. Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quam H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est I K, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm HG, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, nõ erit I L, maior, quam H G, (aliàs I K, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quam H G; sed & I L, maior quoque esset quam H G. Quòd si I K, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cum HG, posita sit non minor quàm D, hoc est, quàm I L,) & id circo H G, erit vel æqualis ipsi I L, vel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K. Cum ergo H G, non minor sit quam I L, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota F H, maior quam I K. Itaque cum F H, HG, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; atque I K, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem F H, multiplex primæ, maior quam I K, multiplex secundæ; At I G, multiplex



a 1. quinti.

tertiæ non ſit maior, quam I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt I K, multiplex ipſius D, maior quam H G,) [a] erit maior proportio A B, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

[a] 8. definit. quinti.



QVONIAM vero è cõtrario I K, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda, & A B, quarta) maior eſt quã H G, multiplex ſecundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quã F H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior ſit, quam I K, vt oſtenſum eſt; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de Proportione agens, per hanc propoſ. 8. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionẽ ad quemuis alium angulum, quam angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam F G, multiplex exceſſus E B, ſuperare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuiquam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui non eiuſdem naturæ eſt cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet vnum punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa compoſita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ;

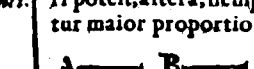
Item

Item quemadmodum si ad figuram planam quamcunq; apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura. Ita quoq; non habet angulus rectus propriè ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersæ naturæ, vt dictum est. Itaque non solum eæ magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque eæ proprie dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix rectè intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsq; diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor. [a] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; [b] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 8. quinti.

[b] 8. quinti.

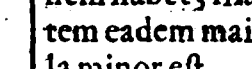
SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propositio 9. utramque partem theorematis 7. vt manifestum est.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [c] haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, [d] haberet B, maior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqua-



[c] 7. quinti.

[d] 8. quinti.

A, æqualis vel minor quam B, ſed maior. Habeat ſecundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem eſſe, quam A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; [a] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hypotheſin. Neque vero B, maior erit quam A; [b] alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quã A; quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. quinti.

[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

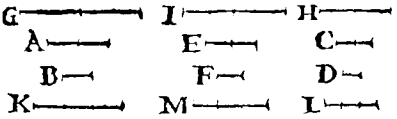
HÆC quoque propoſitio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perſpicuum eſt.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

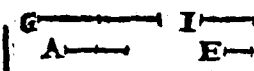
11.

QVAE eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

SINT proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe ſecundum definitionem 6. hoc eſt, ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, C; Item æquemultiplicibus ipſarum B, D; fieri poſſe, vt multiplices ipſarum A, C, à multiplicibus ipſarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; [c] fit, vt ſi G, multiplex primæ deficit a K, multiplice



[c] 6. definit. quinti.



secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartę; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: [a] Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quam L, vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundá, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primę A, deficit a K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque multiplicibus. [a] Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

[a] *6. definit. quinti.*

[b] *6. definit. quinti.*

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D; sit autem E, ad F, vt A, ad B. & A, 3. B, 2: C, 6. D, 4. E, 9. F, 6: G, 12. H, 8. G, ad H, vt C, ad D: erit quoq; E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B; [c] erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D. [d] erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

[c] *11. quinti.*

[d] *11. quinti.*

RVRSVS, si sint proportionas A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se; sit autem A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6. G, 12. H, 8: I, 18. K, 12: L, 30. M, 20. vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam vt proximè in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad

L, ad K, ita L, ad M. Quare cum proportiones G, ad H, & L, ad M, eadem sint proportioni I, ad K, [a] *erunt & ipsæ eadem inter se; ac proinde omnes inter se eadem erunt. Eadem ratio est de pluribus proportionibus.*

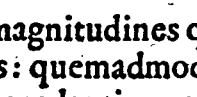
[a] *11. quinti.*

THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

SI sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, G, H, I, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F.



Dico vt est vna antecedentium ad vnam cõsequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, [b] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirũ vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [c] fit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoq; sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Quare si G, minor est, vel æqualis, vel maior quã K, erũt & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores, vel æquales, vel maiores. [d] Quocirca vt est

[b] *1. quinti.*

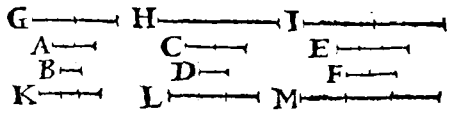
[c] *6. definit. quinti.*

[d] *6. definit. quinti.*

A, prima ad B, ſecundã ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si ſint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.



SIT prima A, ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem quam E, quintæ ad F, ſextam, ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, E: Item æquemultiplicibus ipſarum B, F, cõtingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; [a] fit vt ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, [b] non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor, quod maior ponatur proportio C, primæ ad D,

[a] 6. definit. quinti.

[b] 8. definit. quinti.

ad D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartem. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. [a] Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, primæ ad F, ſecundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [b] fit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqualis ſit. [c] Sed ſi H, deficit ab L, vel ei æqualis eſt, etiam G, deficiet a K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K; [d] atque ideirco maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc eſt proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F; Quod eſt propoſitum.

[b] 8. definit. quinti.

[c] 6. definit. quinti.

[d] 8. definit. quinti.

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

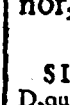
THEOR. 14. PROPOS. 14.

14.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam;

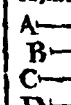
tam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quam C, fore quoq; B, maiorem quam D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque eſſe B, ipſi D. Sit primum A, maior quam C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniâ igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior eſt, vt oſtendimus, quam C, quintæ ad B, ſextam: [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam. [c] Minor eſt ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod eſt propoſitum.



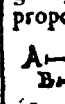
[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipſi C; [d] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitum.



[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti. 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam; [i] Ideoque B, minor erit, quam D. quod eſt propoſitum. Si prima igitur



[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

tur ad ſecundam eandem habuerit rationem; &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cum enim B, maior ſit quàm D, [a] *erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Qui igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam,* [b] *erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam:* [c] *ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum.*

DEINDE ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi C, eſſe æqualem. Cum enim B, ipſi D, ſit æqualis; [d] *erit C, ad B, vt C, ad D: Eſt autem quoque A, ad B, vt C, ad D.* [e] *Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B; proptereaq; A, ipſi C, æqualis erit. quod eſt propoſitum.*

TERTIO ſit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem eſſe, quàm C. Cum enim B, minor ſit quàm D, [g] *erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam,* [h] *erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam.* [i] *Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod eſt propoſitum.*

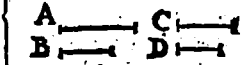
NON demonſtrauit autem Euclides, ſi prima maior eſt, vel æqualis vel minor, quam ſecunda, tertiæ quoq; maiorē eſſe, vel æqualē, vel minorē, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarū tū veterum, tum recentiorū vtuntur) quia id perſpicuū eſt ob ſimilitudinē proportionum. Hinc enim fit, ſi vtraq; eſt proportio maioris inæqualitatis, vtramq; antecedentē magnitudinem, id eſt, prima ac tertiā, maiorē eſſe vtraq; magnitudine conſequente, hoc eſt, ſecūda ac quarta: Si vero vtraq; proportio eſt æqualitatis, vtrāq; magnitudinē antecedentem vtriq; conſequenti æqualem eſſe.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.
[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti. [f] 9. quinti.
[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

Si

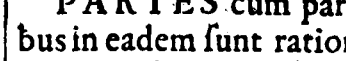
Si denique vtraq; proportio eſt minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque conſequente eſſe minorem.

VERBI gratia, ſi eſt vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quo circa ſi A, prima maior eſt quã B, ſecunda: erit & C, tertia maior quã D, quarta: Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum. Quod tamen Geometricè oſtendemus cum Federito Commandino, licet id non ſit neceſſarium, ad propoſ. 16. huius lib.



15. THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.



SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita eſſe C D, ad E F, vt A, ad B. Cum enim C D, & E F, ſint æque multiplices ipſarum A, & B; continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo C D, in partes CG, GH, HD, æquales ipſi A; & E F, in partes EI, IK, KF, æquales ipſi B; [a] eritque CG, ad E I, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter ſe ſint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK; & H D, ad K F, vt A, ad B; [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quo circa vt CG, ad EI, hoc eſt, vt A, ad B, [c] ita erit C D, ad E F, nempe omnes C G, GH, HD, ſimul, ad omnes E I, I K, K F, ſimul. quod eſt propoſitum. Partes itaq; cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 12. quinti.

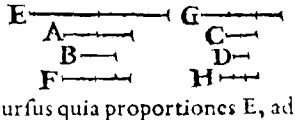
THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur Alterna, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E, F; Item ipſarum C, D, tertiæ & quartæ, æque multiplices G, H; [a] eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; [b] erũt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; [c] erunt & ipſæ eædem inter ſe: hoc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [d] Quare ſi E, prima maior eſt quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunq; multiplicatione acceptæ ſint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [e] Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.



[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 14. quinti.
[e] 6. defin. quinti.

SCHOLIVM.

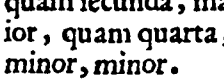
PORRO demonſtratio huius propoſ. locũ ſolũ habet, quando quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Nam ſi linea

A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recepimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cũ Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quarta. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. [a] *Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* [b] *Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*



[a] 16. quinti.
[b] 14. quinti.

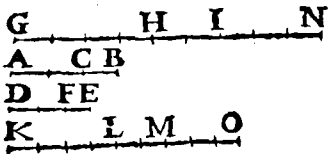
SED & hac demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sint eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verũ erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



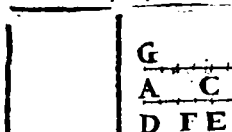
HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quã defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, *in eo sensu, quem definitione 6.* exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; [a] eritque GI, ita multiplex ipsius AB, vt est GH, ipsius AC, hoc est, vt KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, [b] ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æque multiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; erit & HN, sic multiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ, AB, DE; Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, [d] fit, vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit,

[a] *1. quint.*

[b] *1. quint.*

[c] *2. quinti.*

[d] *6. definit. quinti.*

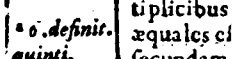


excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quàm KM, ab LO; ablatis cómunibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO; ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN; & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO; ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices, primæ AC, & tertiæ DF; Item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE; ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illę æquemultiplices fuerint acceptę) æque multiplices primæ & tertiæ ab æquè multiplicibus secundæ & quartæ, vel vna deficere, vel vna æquales esse, vel vna excedere; [a] Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 6. *definit. quinti.*

SCHOLIVM.

EX his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, esse



quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [b] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*

[b] 17. *quint.*

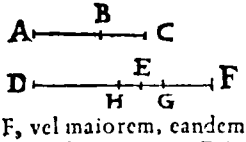
NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quã ad eandẽ defi. 15. Diuisionẽ rationis cõtrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus.

ſtrauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico eſſe quoque per Diuiſionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F, [a] *Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rurſus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.* [a] *17. quinti.*

THEOR. 18. PROPOS. 18. 18.

SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint enim diuiſæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales hoc eſt, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compoſitas proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt A C, ad B C, ita eſſe D F, ad E F. Si enim non eſt, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit D F, ad aliquã magnitudinem minorem ipſa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipſa E F, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; [b] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt A B, ad BC, ita poſita quoque eſt D E, ad EF. [c] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad GF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo D G, prima maior ſit, quàm DE, tertia, [d] erit quoque GF, ſecunda maior quàm EF, quarta, pars quàm totum. Quod eſt abſurdum.



[b] *17. quinti.*
[c] *11. quinti.*
[d] *14. quinti.*

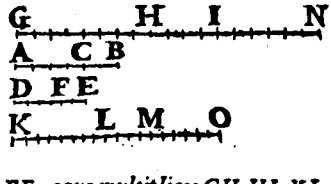
HABEAT deinde, ſi fieri poteſt, D F, ad H F, maiorem ipſa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt AC, ad BC, ita D F, ad

HF; [a] erit diuidendo quoq; vt AB, ad BC, ita DH, ad HF. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiã est DE, ad EF. [b] Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartã. Cum ergo DH, prima minor sit quàm DE, tertia, [c] erit quoque HF, secunda minor quàm EF, quarta, totum quàm pars. quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC. quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 17. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 14. quinti.

SCHOLIVM.

HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisa magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE.



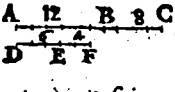
Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidẽ ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, aque multiplices GH, HI, KL, LM; Item ipsarum CB, FE, alię aque multiplices IN, MO; [d] *eruntque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, aque multiplices,* [e] *Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in præcedenti Theoremate ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam; sumptaque sunt GH, KL, aque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF; Item secundæ & quartæ CB, FE, aquemultiplices IN, MO,* [f] *sit vt si GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quàm KL, ab MO; additis cõmunibus HI, LM, deficiet quoq; GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL,*

[d] 1. quinti.
[e] 2. quinti.
[f] 6. definit. quinti.

& KL, ipſi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipſi HN, equalis, & KM, ipſi LO. Et denique ſi GH, exceſſerit ipſam IN, & KL, ipſam MO; additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipſam HN, & KM, ipſam LO. Quoniam ergo ſi GI, multiplex prima AB, deficit ab HN, multiplicis ſecundæ CB; etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficit ab LO, multiplice quartæ FE; & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit; [a] erit AB, prima ad CB, ſecundam, vt DE, tertia ad FE, quartam. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 6. definit. quinti.

VERVM hac demonſtratio non recte colligit propoſitum ex defin. 6. propterea quòd HN, LO, non ſunt ita multiplices ipſarum CB, FE, vt multiplices acceptæ ſunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis poſſet, an ſecundum quamcunque multiplicationem æque multiplices ſeruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque exceſſus, quam Euclides in 6. defin. poſtulauit; quandoquidem in hac demonſtratione liberum non eſt aſſumere ipſarum CB, FE, quaſcunq; æquemultiplices, ſed tales duntaxat, quales conſurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propoſitionis demonſtratione obiici non poteſt: quippe cum IN, MO, ſumpta ſint ipſarum CB, FE, æquemultiplices qualeſcunq;, ipſæq; eadem remanent æquemultiplices earundem CB, FE, in diuiſa proportionalitate. Quam ob rem præferenda eſt Euclidis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. deſcripſimus. Priorem diximus compoſitionem rationis conuerſam. Sit enim vt AB, ad BC, ita DE, ad FE. Dico per compoſitionem rationis cõuerſam, eſſe quoq; vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. [b] Igitur & componẽdo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE, quod eſt propoſitũ. [b] 18. quinti.

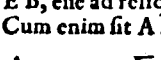


POSTERIOREM modum vocauimus compoſitionem rationis contrariam. Sit ergo rurſus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis contrariam, eſſe quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: erit conuertendo, vt BC, ad
a 18. quinti. *AB, ita EF, ad DE. a Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rurſus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

QVOD in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, eſſe ad reliquam FD, vt eſt tota AB, ad totam CD. Cum enim ſit AB, ad CD, vt AE, ad CF.
b 16. quinti. b erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF.
c 17. quinti. c Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF.
d 16. quinti. d Quare permutando rurſus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc eſt, vt tota AB, ad totam CD; cum poſita ſit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonſtrandum erat.



COROLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur à conuerſione rationis, iuxta 16. defin.

SIT

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [a] erit quoque dividendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: [b] ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

A 6 C 4 B
D 12 F 8 E

[a] 17. quinti.
[b] 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. [d] Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF: Et proinde permutando rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

[c] 16. quinti.
[d] 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quòd in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim [a] A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt [b] A, ad B, ita D, ad E. [b] Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. [c] Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, [d] erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [e] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E. [f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

d 7. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

SIT

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [a] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. [b] Minor ergo quoq; proportio est D, ad E, quã C, ad B. Est autẽ conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E; [c] propterea quæ D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fuerit que perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A prima maior quam C, tertia. Dico & D, quar tam esse maiorem sexta F. Cum enim A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. [b] Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D: [c] Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, [d] erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. [e] Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem, ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; [f] atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cũ enim A, sit minor quam C, [g] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. [h] Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; [i] ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

SCHOLIVM.

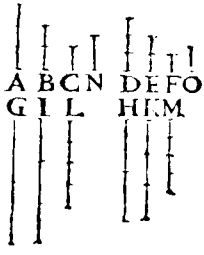
CÆTERVM propos. 23. ostendet Euclides dari magnitudines A, & D. non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has

has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem ſine auxilio huius theorematis demonſtrare non poterat, vt ex propoſ. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio eſt ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipſarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipſarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicẽ quartæ E. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecũdam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur; [c] ſit vt ſi G, prima ſuperat tertiam L, ſuperet neceſſario quoque H, quarta ſextam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vnà ab L, M, æquemultiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vnà



[a] 4. quinti.

[b] 4. quinti.

[c] 20. quinti.

vnà æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [a] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

[a] 6. definit. quinti.

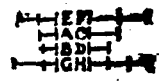
DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiá C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur autem C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eándem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem: Item æque multiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ

tertiæ: Item prima ac tertia ad æque multiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq; E, F, ipsarum A, C, aquemultiplices: Item G H, aquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum vtrobique sit eadem proportio multiplex; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit ex aquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quòd vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.) [b] erit ex aquo, vt G, ad A, ita H, ad C.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt, A ad E, ita C, ad F, quòd ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [c] erit ex aquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quòd ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex; [d] erit ex aquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissimè vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoque erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

[a] 22. quinti.

[b] 22. quinti.

[c] 22. quinti.

[d] 22. quinti.

THEOR.

23.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A,B,C,& aliæ tres D,E,F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M; [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F. [b] Igitur vt G, ad H, ita quoque est E, ad F; [c] Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binę in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata; cū ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; [f] fit vt si G, prima superat tertiā K, superet quoq; quarta I, sextā M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cū G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel

5. quinti.
11. quinti.
15. quinti.
11. quinti.
vltim.
21. quinti.

vtra

vna æquales sint, vel vna excedant; [a] erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex aequalitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. qua causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur, Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O; Penatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex aqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Quod est propositum.

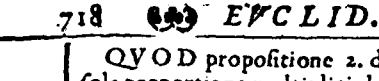
THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; a erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. b Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH; & BG, ad C, vt EH, ad F; c erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



a 22. quinti.
b 18. quinti.
c 22 quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detracta AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionē, ita

ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F; erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F; & C, ad AB, vt F, ad DE; [a] erit ex aequalitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. [b] Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaque cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE; & AB, ad C, vt DE, ad F; [c] erit ex aequali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.

[a] 22. quinti.
[b] 17. quinti.
[c] 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitq; AB, omniū maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH; [d] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quā E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 19. quinti.

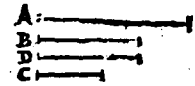
SCHO-

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, prima maior quam tertia E; [a] *erit quoque C D, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est A B, quam C D, erit quoque E, maior quam F, ob eandem proportionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si e contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.*

a. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, [b] *vt proxime demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum.*

b. quinti.

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre,

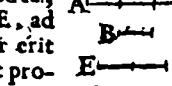
referre. Omnes autem traduemur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hac est.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

26.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

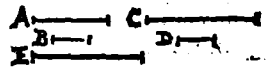
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; [a] ac propterea A, maior erit quam E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.



[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem secunda ad primam, quam quarta ad tertiam; dummodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.



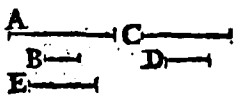
SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] ac propterea [c] 10. quinti.

[a] 8. quinti. *A, minor erit, quã E. Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm [b] 26. quinti. *C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B.* [b] *Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quàm B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

27. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem eſſe quoque proportionẽ A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam quã E, ad B: [c] Ideoque A, maior erit quam E. [d] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [e] Quoniam vero permutando eſt, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.

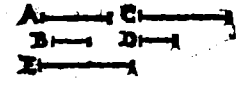
[c] 10. quinti. [d] 8. quinti. [e] 16. quinti.

SCHOLIVM.

SIMILITER oſtendemus, ſi prima ad ſecundam minorẽ habuerit proportionẽ, quam tertia ad quartã, viciſſim prima ad tertiam minorẽ eſſe proportionẽ, quam ſecunda ad quartã.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque eſſe proportionem A, ad C, quam

C, quam B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, minor quoq; quam E, ad B; [a] Ac propterea A, minor erit, quam E. [b] Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. [c] Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositũ.



[a] 10. quint
[b] 8. quint
[c] 16. quint

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quã C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] Ergo componendo, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B: [e] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod est propositum.

[d] 27. quint
[e] 26. quint

THEOR. 28. PROPOS. 28.

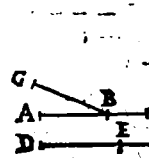
28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quã tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secũdam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; [f] Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; [g] maiorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [h] vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

[f] 9. quint
[g] 8. quint
[h] 18. quint

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem prima & secunda simul, ad secundam, quam tertia & quarta simul, ad quartam.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC; [a] ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC; [b] minorque proptereà erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Quod est propositum.

[a] 10. quinti.

[b] 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. [c] Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac proptereà, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod est propositum.

[c] 28. quinti.

29. THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam

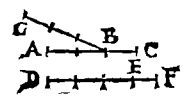
BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF; eritque proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: [a] ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC; maior erit AB, quam GB: [b] Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.
[c] 17. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartã; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF; eritque proportio AC, ad BC, minor quoque, quam GC, ad BC: [d] ideoque minor erit AC, quàm GC. Ablata ergo communi BC; minor erit AB, quàm GB: [e] Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quàm GB, ad BC: [f] Sed diuidendo est, vt GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur minor quoque proportio erit AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quod est propositum.



[d] 10. quinti.
[e] 8. quinti.
[f] 17. quinti.

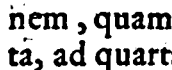
ALITER. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. [g] Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC: atque idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

[g] 29. quinti.

30.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

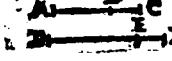


SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quã DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF; [a] erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

[a] 29. quinti.
[b] 26. quinti.
[c] 28. quinti.

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secunda ad primam, quam tertia & quarta ad tertiam.



SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor sit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [d] erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare con-

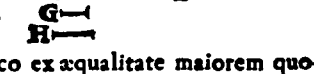
[d] 29. quinti.

a convertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE: b Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum. a 26. quinti. b 28. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. c Ergo dividendo quoque, maior erit proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. d Igitur convertendo, minor erit proportio EF, ad DE, quàm BC, ad AB. e Componendo ergo minor quoque erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum. c 29. quinti. d 26. quinti. e 28. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quã secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

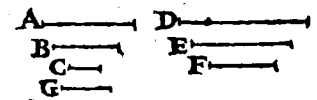


SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quã D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior quã G, ad C; f Ideoq; B, maior erit quã G. Quare g maior erit proportio A, ad G, minoré, quã A, ad B, maiorẽ: Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quã D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quã D, ad E. f 10. quinti. g 8. quinti.

Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [a] Ideoque A, maior erit, quam H. [b] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: [c] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 22. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C: [d] *Ideoque B, maior erit, quàm G.* [e] *Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G:* [f] *Ideoque A, maior erit, quàm H.* [g] *Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C.* [h] *Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.*

[d] 10. quinti. [e] 8. quinti. [f] 10. quinti. [g] 8. quinti. [h] 22. quinti.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: [i] *ideoque B, ipsi*

[i] 9. quinti.

ipſi G, æqualis erit. [a] Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [b] Ideoque A, maior erit, quàm H. [c] Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C: [d] Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita eſt H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod eſt propoſitum.

[a] 7. quinti.
[b] 10. quinti.
[c] 8. quinti.
[d] 22. quinti.

NON diſſimiliter demonſtrabimus, ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum eſſe minorem. Idemque eueniet, ſi fuerit A, ad B, vt D, ad E; ſed minor ſit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contra, ſi proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C, ſit, vt E, ad F. Eadem namque ſemper erit demonſtratio, ſi modo vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD ſi plures fuerint magnitudines tribus, ſiue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, uel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinū; ſiue vna tantum maior, quàm vna, vel dua, &c. oſtendemus maiorem vel minorem quoque eſſe proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ poſteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propoſ. 22. tradidimus: adhibendo propoſ. 22. loco huius propoſ. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales ſunt tribus magnitudinibus alterius ordinis: Item vſurpando hoc ſcholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis eſt vni tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM ſi maior eſt proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H: [e] erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rurſus maior proportio eſt A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; [f] erit quoque ex æquo, maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

[e] 31. quinti.
[f] 31. quinti.

QVOD ſi tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, propor-

22. quinti. proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quàm G, ad H; erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.

SI vero maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H; erit ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: Et rursus maior A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

SI autẽ maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F; sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac pro inde rursus maior A, ad D, quã E, ad H. &c.

IDEM concludes, si omnes proportiones vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna, vel dua. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.

32. ## THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secũdæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

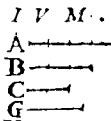
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoq; maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio

portio B, ad C, maior, quam G, ad C: [a] Ideoq; maior erit B, quã G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, minorẽ, quam eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] ideoq; maior erit A, quam H. [d] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: [e] At vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. [f] Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & vt E, ad F, ita est H, ad G.] Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.
[c] 10. quinti.
[d] 8. quinti.
[e] 23. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, qua E, ad F; At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F; At B, ad C, eadem, qua D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.



HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremarum proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoq; vel minorem esse proportionem prima priorũ ad vltimã, quam prima posteriorũ ad vltimã, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligẽter demonstrationes scholij præcedentis propos. considerentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT

SIT maior proportio totius A B, ad totam CD, quæ ablatæ A E, ad ablatam C

Dico & proportionem reli quæ E B, ad reliquam F D maiorem esse, quam totius A B, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B ad CD, quam A E, ad C F; a erit quoque permutando maior proportio AB, ad AE, quam C D, ad CF; b ac proptereà, per conuersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quam C D, ad F D. c Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. Quod est propositum.

a 25. quinti.
b 30. quinti.
c 27. quinti.

SCHOLIVM.

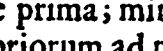
QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, vt modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris pro voce, maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

34. THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunque magnitudines, aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores

steriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres, D, E, F; Sit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E; Itē maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionē ipsarum A, B, C, simul, ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quam B, ad E; [a] erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E. [b] Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E. [c] Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; [d] habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F. Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. [e] Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; [f] & componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. [g] Et rursus permutando, maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul, quam B, C, ad E, F. quod est primum.



ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quā ablatæ B, C, ad ablatam E, F; [h] erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F. quod est secundum.

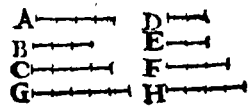
[a] 27. quinti.
[b] 28. quinti.
[c] 27. quinti.
[d] 33. quinti.
[e] 27. quinti.
[f] 28. quinti.
[g] 27. quinti.
[h] 33. quinti.

QVO-

QVONIAM vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; [a] erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; [b] & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F; [c] & rursus permutando, maior B C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F; quod est tertium.

[a] 27. quinti.
[b] 28. quinti.
[c] 27. quinti.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Diço eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. [d] Permutando ergo, maior erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H; [e] & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H; [f] & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.



[d] 27. quinti.
[e] 28. quinti.
[f] 27. quinti.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H; [g] erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H; quod est secundum.

[g] 33. quinti.

QVONIAM vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quã B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinq; magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinq;, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEXTVM.

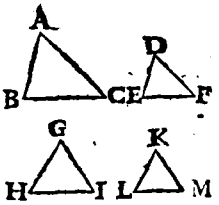
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

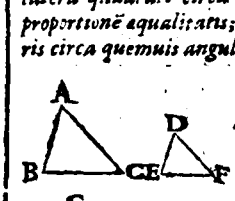
VT triangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint aquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

QVOD si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figura similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Habent enim figura habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera



vnius

vnius lateribus alterius proportionalia non ſunt; quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionẽ aqualitatis; latera uero figuræ altera parte longioris circa quemuis angulũ rectũ, proportionem inaqualitatis.

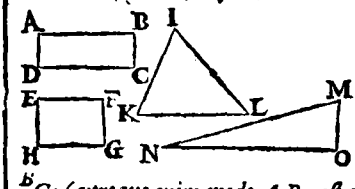


Ex quibus conſtat, omnes figuras rectilineas aquiangulas, & aquilateras, qua & angulos & latera habent numero aqualia, eſſe ſimiles, quanquam inter ſe maxime ſint inaquales. Cuiuſmodi ſunt triangula aquilatera GHI, KLM; Propter lateram enim ęqualitatem, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM; Item GH, ad HI, vt KL, ad LM; & GI, ad IH, vt KM, ad ML, cum ſemper ſit proportio aqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis aquilateris & aquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis aquiangulis, atque aquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ ſunt, cum in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

VT ſi in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vtrobique ſit & antecedens, & conſequens diuerſarum proportionum, hoc eſt, vt ſit ea proportio AB, ad EF, qua FG, ad BC; ſeu eadẽ AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroque enim modo AB, eſt antecedens vnius proportionis & BC, conſequens alterius, in figura ABCD; quemadmodum & primo modo EF, eſt conſequens vnius, & FG, ante-

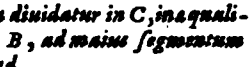


antecedans alterius; vel secundo modo F G, consequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula I K L, M N O; reciproca, si fuerit vt I K, ad M N, ita M O, ad I L; vel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L. Neque memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI linea recta quauis A B, ita diuidatur in C, inaqualiter, vt sit, quemadmodum tota A B, ad maius segmentum A C, ita A C, maius segmentum ad C B, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamque sub alijs verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius lib. Sunt autem pene innumerae dignitates, atq; vtilitates linea hoc modo diuisa, vt ex libris Stereometria constabit, praesertim lib. 13. vt non immerito à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.



IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a vertice ad basin deducta.

SI a vertice A, trianguli A B C, ad basin B C, perpendi-

 cularis

cularis ducatur A G; dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli A B C; ita vt tantam dicatur habere altitudinem

triangulum, quanta est perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis D H, ducta à D, vertice trianguli D E F, ad basin E F, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaque si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares A G, D H, triangulorum A B C, D E F, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli A G H, D H G, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; [a] *erunt recta A G, D H, parallela; Sunt autem & A D, G H, parallela, eò quòd ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G;* [b] *ac propterea latera opposita A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quòd si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero A B, & D E; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin D E, protractam æqualis nō est perpendiculari ex C, ad basin A B, deducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.*

[a] 28. primi.

[b] 34. primi.

RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometra, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinata & longitudinis, alia autem omnes incertæ indeterminataque. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

RATIO

V.

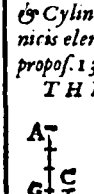
RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadruplæ antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hac definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionē, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ, gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componetur ex sesquiseptimæ, & supertripartientis quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ

proportio componi dicetur ex ſubſeſquiquarta, & dupla ſeſquialtera; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. *inter ſe multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis dupla. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici poteſt, vt paulò poſt patebit.*

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio prima ad vltimam componi dicitur ex proportione prima ad ſecũdam, & ſecunda ad tertiam, tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, vt quinto libro defi. 10. expoſuimus: ita vt ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur cõponi, dicatur proportio prima magnitudinis ad vltimã duplicata proportionis primæ ad ſecũdã; ſi tres, triplicata, etc. Sic etiam in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis, Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonſtrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Aſcalonita lib. 2. Archimedis de ſphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propoſ. 11. Altera autem a Vitellione lib. 1. propoſ. 13. ſuæ perſpectiuæ, comprobabimus.

THEON igitur rem propoſitam ita conatur abſoluere.

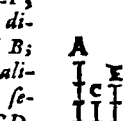


Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipſius AB, ad EF, ratio conſtat ex AB, ad CD; & ex CD, ad EF; vel quod ipſius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipſius CD, ad EF, rationis quantitatem, efficit ipſius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quam CD, maior; & CD, quam EF: & ſit quidem AB, ipſius CD, dupla, & CD, ipſius EF, tripla. Quoniam igitur

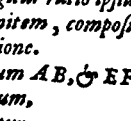
CD,

CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB; erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, dimidiatur AB, in ipsis CD, aqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; aqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitē, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla; At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est; Ipsius autem CD, tripla est AB; erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est; & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, aqualium ipsi CD, trium, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.



SED iam rursus sit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, maior; & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor; qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium limitem, qua duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quauis vna compositarum auferatur, vno simplicium electo, reliqua compositarum assumetur.

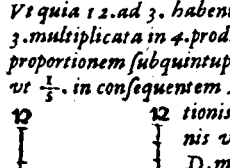


Hac ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem

A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. sit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, aequalem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B; si multiplicetur D, in E, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] *erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A;* [b] *erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoque aequales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.*



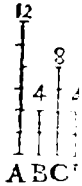
SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componetur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad

[a] *18. septimi.*

A, 100. B, 20. C, 5. D, 5. E, 4. G, 100. F, 20.

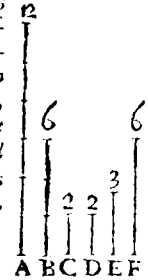
[b] *17. septimi.*

ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B, B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusce modi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, aquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hac Vitellio.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
E, 20.

a 19. septimi.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F,

componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nã A. B. C. D. E. F. vt ostensum est, proportio A, ad F, compo-
12. 6. 3. 2. 1. 4. nitur ex proportione A, ad B; & B, ad F: Hæc autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hæc tãdem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

EX his liquido constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primã quantitatem, & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur; triplicata vero, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E, & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt

quoque

quoque magnitudinibus incommenſurabilibus, hoc eſt, proportionibus irrationalibus, dici poteſt vtraque demonſtratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamſi non conſtaret, propoſitis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter ſe, vt demonſtrauimus, non tamen propterea demonſtrationes, in quibus compoſitio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorum multiplicatio nõ vſurpetur. Nam quemadmodum, propoſitis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quàm prima habet ad ſecundam; nimirum compoſitam ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primam vero ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad ſecundã habet, hoc eſt, compoſitam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & ſic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, ſi ponantur ordine plures magnitudines eiuſdem generis non continuè proportionalibus, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compoſitam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter ſe non ſint omnes æquales, ſiue aliquæ ſint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, ſiue omnes eiuſdem generis ſint, ſolum eam ob cauſam, quòd illæ proportiones intermediæ ſint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc ſolo nomine, quia duæ proportiones æquales interpoſitæ ſunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionem proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. quæ lib. 5. explicata eſt, quàm quòd in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales, in compoſitione vero proportionum non neceſſe eſt, interpoſitas proportiones æquales eſſe. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis eſt, vt ſciamus, quænam ſit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propoſitis proportionibus compoſita eſſe dicitur.

VERBI gratia. Vt ſciamus, quæ proportio ſit illa, quæ dicitur

dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorẽ decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator eſt proportionis, quæ decuplæ eſt duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiuſdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10. 10. 10. & primum in ſecũdum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum eſt. Sed hoc etiam diſcemus abſque denominatorum multiplicatione. Nam ſi continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: ſi vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem eſt maior cum minore, quando data proportio eſt maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minoris inæqualitatis eſt. Veluti ſi deſideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla eſt, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ ſubcentupla eſt, dicitur duplicata proportionis ſubdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoſcamus, quanam ſit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, ſtatuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eoſque inter ſe multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rurſus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & ſic deinceps, ſi plures eſſent denominatores. Vltimus enim productus 12. eſt denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecuplæ componi dicatur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia. Hoc autem intelligemus etiam ſine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad ſecundum habeat primam proportionem componentem, ſecundus ad tertium ſecundæ, tertius

ad

ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, compoſita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1-½. 1. Vbique enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartum ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla eſt, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ ſint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propoſ. 4.

ITAQVE cum Euclides demonſtrat hoc lib. propoſ. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm ſi dua illa proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt ſi proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus ſecundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud eſt intelligendum, quàm ſi ſumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad ſecundum eſt, vt 8. ad 3. & ſecũdus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad ſecundum eſſe eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ eſt ſeſquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum eſt, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc eſt, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera eſſe diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè eſſe maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem eſſe intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falſum eſſe ibi indicauimus: ita idem volunt etiam in hac compoſitione proportionum

tionum, extremorum proportionẽ, quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarum proportionũ inter se, ac proindè omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex prop. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammũ eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multò minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad propos. 5. lib. 8.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, statuẽdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centuplæ proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem cõpositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quòd si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hæ enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem

portionem ſeſquialteram inter 9. & 6. ſtatuemus hos quatuor numeros medios, 9. 4 1/2. 3 1/2. 1. 9/10. 6. ita vt 9. ad 4 1/2. habeant proportionem duplam, & 4 1/2. ad 1 1/2. triplã; & 1 1/2. ad 1. ſeſquialteram: & 1. ad 3/10. quintuplam ſeſquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione 3/10. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 1. ad 32. componitur proportio ſeſquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, ſi datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplã; & 54. ad 36. ſeſquialteram; & 288. ad 54. quintuplam ſeſqui tertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem eſt, quæ prius 3/16. ad 6. qualis eſt 1. ad 32.

EX his nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua quiſpiã poſtulat ſibi dari quotuis numeros, qui inter ſe multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namque ſumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunq;, minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Veluti ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignãtur 100. ſtatuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoſcunque, hoc modo, 500. 250. 50. 5. eruntque tres quæſiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quòd ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vnà cũ quotlibet alijs datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datũ quemcunque numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri, 2, 3. 1 1/2. 5 1/3. quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum 1 1/2. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero 1 1/2. denomi-

nominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportionis à 2.3. 1 1/2. 5 1/3. denominatas, hoc modo, 9. 4 1/2. 1. 2/3. 1. 2/10. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis 2/16. ad 6. nimirum 1/32. Nam quinque hi numeri, 2.3. 1 1/2. 5 1/3. 1/32. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum 1 1/2. Idem quintus numerus 1/32. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. Denominatus enim proportionis 9. ad 288. est 1/32. vt prius. Sic etiam si quærendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2/1. 1/4. sunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quoticies enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri verbi gratia. 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. quo produci debet, fiet Quotiens 1/120. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. 1/120. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in 1/120. fit 1.

POSTREMO neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentijs inter mediorum numerorum. Vt hic. 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ, 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt

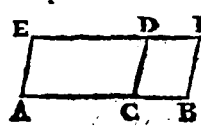
conficient 710. differentiam extremorum.

ATQVE hac dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam qua multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

VI.

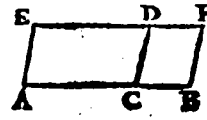
PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quã applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB, & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totũ parallelogrammũ ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB.

mitte:



mains recta data A C; & ducatur C D, ipſi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum ſecundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, vocetur exceſſus.

H I C autem defectus D B, vel exceſſus, in rectangulis quidem eſſe poteſt vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perſpicuum eſt.

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

SINT duo triangula A B C, D E F, eandem habentia altitudinem, quorum baſes B C, E F. Item duo parallelogramma C G, E H, eiuſdem altitudinis, quorum eædem baſes B C, E F. Dico ita eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammũ C G, ad parallelogrammũ E H, vt eſt baſis B C, ad baſin E F. Hoc eſt; ſi baſis B C, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis E F, ſecunda: At triangulum A B C, vel parallelogrammum C G, tertia, & triangulum D E F, vel parallelogrammum E H, quarta; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ & quartę vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quã parallelogrãma inter eaſdem parallelas G H, L N. (Nã vt in defin. 4. dictum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares

diculares a verticibus ad baſes demiſſæ æquales erũt, & ex BL, ſumantur quotcunq; rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindãtur quotcunq; rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducãtur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. [a] Erũt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas cõſtituta, inter ſe æqualia. Eadẽ ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoq; multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, [b] neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, maior fuerit quã EN, neceſſario ACL, maius eſt quã DEN, & ſi minor, minus; deficient propterea vnã CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta, & triangulo DEN, æquemultiplicibus ſecundæ EF, & quartæ DEF, vel vnã æqualia erunt, vel vnã excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. [c] Quare quæ proportio eſt primæ BC, ad ſecundã EF, baſis ab baſin, ea eſt tertiæ ABC, ad quartã DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita eſt triangulum ad triangulum, quod eſt propoſitum.

[a] 38. primi.

[b] 38. primi.

[c] 6. defint. quinti.

QVONIAM autem [d] vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt parallelogrammũ CG ([e] quod duplum eſt trianguli ABC.) ad parallelogrammũ EH; ([e] quod eſt duplum trianguli DEF) perſpicuum eſt, [f] ita quoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, vt eſt baſis ad baſin. Quod tamen eodem argumento cõfirmari poteſt, quo vſi ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipſi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita ſe habent inter ſe, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

[d] 15. quinti.

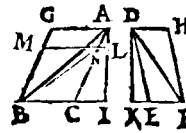
[e] 34. primi.

[f] 34. primi. [g] 11. quinti.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammũ AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaq; LM, ipsi BC, parallela, qua latus AC, secet in N, coniunctaq; recta BN; [a] *erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF.* [b] *Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem;* [c] *Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.*

[a] *1. sexti.*

[b] *11. quinti.*

[c] *9. quinti.*

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF. Dico

Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; [a] *erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF.* [b] *Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM:* [c] *Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.*

[a] 38. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. sexti.

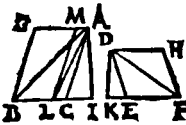
QVONIAM vero est, [d] *vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC,* [e] *quod trianguli ABC, duplum est, ad parallelogrammum DEFH,* [f] *quod trianguli DEF, est duplum:* [g] *Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.*

[d] 15. quinti.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 11. quinti.

HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum bases BC, EF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit BC, si fieri potest, maior, quam EF. Abscissa igitur EL, ipsi EF, æquali, ductaq; recta LA; erit, vt proxime demonstrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed



[a] 11. quinti. [b] 9. quinti.

vt A I, ad D K, ita ponitur esse A B C, ad D E F. [a] *Igitur A B L, A B C, ad D E F, eandem habent proportionem;* [b] *Ae proinde inter se aqualia sunt, pars & totum. Quod* [c] *est absurdum. Non ergo inaquales sunt bases B C, E F, sed aquales. Eademq; est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta L M, ipsi G B, parallela, ostendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, aqualia esse, si bases B C, E F, dicantur inaquales, & B L, E F, aquales.*

I N omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

2. ## THEOR. 2. PROPOS. 2.

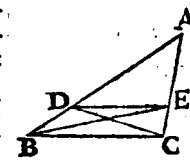
S I ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

I N triangulo A B C, ducatur primùm recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E [c] erũt triangula D E B, D E C, super eandẽ basin D E, & inter easdem parallelas D E, B C, constituta, inter se æqualia. [d] Quare vt triãgulum A D E, ad triangulum D E B, ita est

[c] 37. primi. [d] 7. quinti.

trian-

triangulum idem A D E, ad triangulum D E C: [a] Atqui vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita est basis A D, ad basin D B; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi A B.) & eadem ratione, vt triangulum A D E, ad triangulũ D E C, ita est basis A E, ad basin E C. [b] Vt igitur A D, ad D B, ita est A E, ad E C (cum hæ duæ proportiones cædem sint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, & eiusdem trianguli A D E, ad triangulum D E C.) quod est propositum.



SECET deinde recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursum rectis C D, B E, [c] erit vt basis A D, ad basin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autẽ vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. [d] Igitur erit vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E, ad E C: Sed rursus [e] vt basis A E, ad basin E C, ita est triangulum A D E, ad triangulum D E C, cum sint altitudinis eiusdem. [f] Igitur vt triangulnm A D E, ad triangulum D E B, ita est triangulum idem A D E, ad triangulum D E C. [g] Aequalia ergo sunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea, cum eandem habeant basin D E, [h] inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E, ipsi B C. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

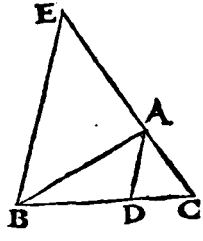
[a] *1. sex. i.*
[b] *11. quinti.*
[c] *1. sexti.*
[d] *11. quinti.*
[e] *1. sexti.*
[f] *11. quinti.*
[g] *9. quinti.*
[h] *39. primi.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem

habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



IN triâgulo A B C, recta A D, secet primò angulum B A C, bifariam. Dico esse vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; (coibunt autem omninò B E, C A, propterea quod anguli C, & C B E, *minores* sũt duobus rectis. Cum enim C, & C D A, [a] minores duobus rectis sint; [b] sit autem angulus C D A', angulo C B E, externus interno, æquales erunt quoq; C, & C B E, duobus rectis minores.) [c] eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales; [d] Ideoque & rectæ B A, E A, inter se æquales. [e] Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C: [f] Atqui vt E A, ad A C, ita est B D, ad D C; cũ in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E. [g] Igitur vt B A ad A C, ita est B D, ad D C. quod est propositum.

a 17. primi.
b 29. primi.
c 29. primi.
d 6. primi.
e 7. quinti.
f 2. sexti.
g 11. quinti.

SIT deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad C D. Dico rectam A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C. [h] Vt autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela.) [i] Erit vt B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. [k] Aequales igitur sunt B A, & E A,

h 2. sexti.
i 11. quinti.
k 9. quinti.

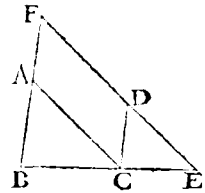
E A, inter se,[a] ac propterea anguli A B E, & E, æquales quoque erunt.[b] Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. primi.
[b] 29 primi.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

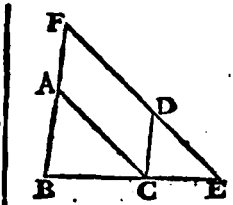
AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quę circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SINT æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico esse A B, ad B C, vt D C, ad C E; & B C, ad C A, vt C E, ad E D; & A B, denique ad A C, vt D C, ad D E: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita vt angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, [c] minores sunt duobus rectis: est autem angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores.[d] Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C;



[c] 17 primi.
[d] 13. prop.

[a] 28. primi.



[a] parallelæ erunt CD, & B F. Eadem ratione, parallelæ erũt C A, & E F; quòd angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur A C D F; [b] propterea quæ recta A F, æqualis rectæ C D; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F, [c] erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) vt BC, ad CE. Permutando [d] igitur erit A B, ad B C, vt D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri BF, [e] erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt C A, (quæ æqualis est ipsi F D,) ad E D. Permutando [f] igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE; & BC, ad CA, vt C E, ad E D: [g] erit & ex æquali AB, ad C A, vt D C, ad E D. Quod est propositum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 34. primi.

[c] 2. sexti.

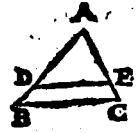
[d] 16. quinti.

[e] 2. sexti.

[f] 16. quinti.

[g] 22. quinti.

COROLLARIVM.



HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Aequiangula namque sunt, [h] *cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est,* [i] *habẽt latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.*

[h] 29. primi.

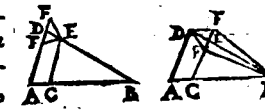
[i] 4. sexti.

SCHOLIVM.

NON alienum a nostro instituto esse puto, si hic demonstremus

ſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de ijs, qua vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum eſt.

SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum includſæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, tranſibit per extremum alterius lineæ.



SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt ſit AD, ad CE, ſicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, tranſire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, tranſire per punctum E. Si enim recta BE, non tranſit per D, coeat cum AD, in F, puncto, quod ſit vel ſupra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propoſ. triangula BAF, BCE, ſimilia ſunt; [a] erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, [b] vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE. [c] Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: [d] Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta BE, per punctum D. Quod eſt primum.

[a] 4. ſexti.
[b] 16. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

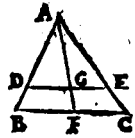
RVRSVS ſi recta BD, non tranſit per E, tranſeat per F, punctum, quod ſit vel ſupra E, vel infra, vt in ſecunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propoſ. triangula BAD, BCF, ſimilia ſunt; [e] erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; [f] & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad

[e] 4. ſexti.
[f] 16. quinti.

a 1. huius. b 9. 5. uti. ad BC, ita quoque erat A D, ad C E. a Igitur erit, vt A D, ad CF, ita A D, ad C E: b Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.



IN triangulo A B C, duĉta sit D E, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur F A, secans D E, in G. Dico esse, vt BF, ad F C, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; c erit vt A F, ad B F, ita AG, ad DG; d & permutando, vt AF, ad AG, ita B F, ad D G. Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad A G, ita FC, ad GE. e Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.

c 4. sexti. d 16. quinti. e 11. quinti.

ALITER. Quoniam triangula A BF, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per coroll. huius propos. f erit, vt B F, ad F A, ita DG, ad G A: Item vt F A, ad FC, ita G A, ad GE. g Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.

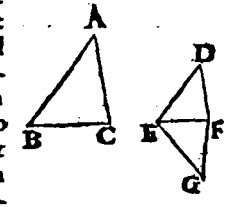
f 4. sexti. g 22. quinti.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, ſitque AB, ad BC, vt DE, ad EF; & BC, ad CA, vt EF, ad FD; & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula eſſe æquiangula, angulum ſci licet A, æqualem eſſe angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales reſpiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C; conueniantque rectæ EG, FG, in G: [a] eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur ſunt triangula ABC, GEF. Quare [b] vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [c] Igitur vt GE, ad EF, ita eſt DE, ad EF, eandem: [d] propterea quæ æquales erunt GE, DE. Rurſus, [e] quoniam vt BC, ad CA, ita eſt EF, ad FG; Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; [f] erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; [g] ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia ſint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & baſis communis EF; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis anguli DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis ſit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod eſt propoſitum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod oſtendendũ erat.



a 32. prim
b 4. ſext
c 11. quin
d 9. quin
e 4. ſext
f 11. quin
g 9. quin
h 8. prim
i 4. prim

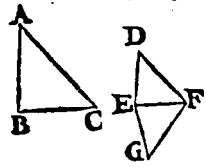
THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habe-

habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli DEF, ſintque latera A B, B C, proportionalia lateribus DE, EF, hoc eſt, ſit AB, ad BC, vt DE, ad EF.



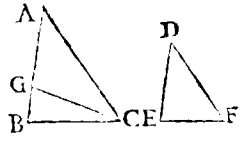
Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulum ſcilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera reſpiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [a] vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [b] Igitur vt DE, ad E F, ita eſt G E, ad eandem E F; [c] atque idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, E F, æqualia ſint lateribus G E, E F, & anguli ipſis contenti æquales quoque; (Nam angulo B, cui factus eſt æqualis angulus FEG, æqualis eſt poſitus angulus D E F, propterea æquales ad inuicem erunt anguli DEF, G E F,) [d] erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, EFD; & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF. quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demouſtrandum.

[a] 4. ſexti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.
[d] 4. primi.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquo-

liquorum vero ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.



SIT angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF; & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc eſt, ſit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, ſit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet ACB, & F, circa quos ſunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales eſſe. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo poſito, ſi anguli ACB, & F, non ſunt æquales, ſit ACB, maior, quam F; fiatque ipſi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [a] erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare [b] vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. [c] Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB; [d] ac propterea æquales erunt CG, CB; [e] & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; [f] cum AGC, CGB, ſint duobus rectis æquales: Eſt autem oſtenſus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto eſt quoque angulus E: Sed poſitus eſt etiam recto minor. Quod eſt abſurdum.

[a] 32. primi.
[b] 4. ſexti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.
[e] 5. primi.
[f] 13. primi.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis; ideoque & CGB, recto non minor erit; ac proptereà anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, ſed vel maiores, vel æquales duobus rectis.

quod

quod est absurdum. [a] Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, [b] atque idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 17. primi.
[b] 32. primi.

SCHOLIVM.

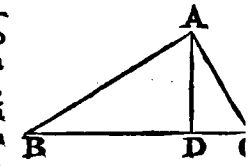
ADDIDIT Euclides, vtrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim [c] erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus describatur, secabit is rectam A B, priusquam rectam A C, quæ longior est, quàm C B, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam A B, propterea quòd ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum C B, vt patet ex propos. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, [d] vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG: & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula ABC, AGC, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum ABC, AGC, minor est recto, vel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor; A G C, vero recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint, [e] & ideo anguli C B G, C G B, æquales; [f] erit vterque eorum recto minor, [g] ac propterea A G C, recto maior.

[c] 19. primi.
[d] 7. quinti.
[e] 5. primi
[f] 17. vel 32. primi.
[g] 13. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit:

ſit: quæ ad perpendicularem triangula
tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſ
milia ſunt.



IN triangulo A B C, angulus BAC, ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis aga tur AD. Dico triãgula ADB, ADC, ſimilia eſſe & toti triã gulo ABC, & inter ſe. Cum enim in triangulis A B C, DBA, anguli B A C, & ADB, ſint recti, & angulus I communis; [a] erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, equ les. Aequiangulum eſt igitur triangulum D B A, tria gulo ABC; [b] ac propterea habebunt latera circa æqu les angulos proportionalia, &c. hoc eſt, erit vt C B, BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita B D, ad D & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera hom loga æqualibus angulis opponuntur, vt vult propoſ. huius lib. Quare ſimile eſt triangulum A D B, toti tria gulo ABC. Eodem modo oſtendetur triangulum AD(ſimile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, A D C, ſunt recti, & angulus C, communis; ac propt rea reliqui anguli A B C, & CAD, æquales. Quare l BC, ad CA, ita eſt C A, ad C D; & vt C A, ad A B, C D, ad D A, & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. S enim opponuntur quoq; homologa latera angulis æqu libus, ex præſcripto propoſ. 4. huius lib. Non ſecus d monſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula A D B, A D C, cum anguli A D B, A D C, ſint recti, & an li A B D, C A D, oſtenſi æquales, nec non anguli B A ACD; Atque ideirco ſit vt B D, ad D A, ita D A, D C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt A B, B D, ita CA, ad A D. Si igitur in triangulo rectangul a b angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, & Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

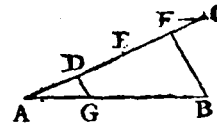
EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

XV

OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcirco BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

9. PROBL. 1. PROPOS. 9.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.



IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunq; faciens angulũ CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione.

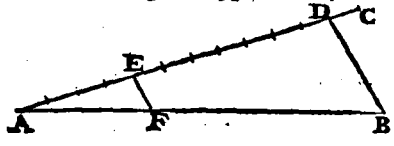
[a] 2. sexti.
[b] 18. quinti.

Igitur

Igitur & B A, ipſis A G, erit tripla, ideoque A G, tertia pars erit ipſius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

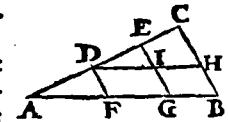
QVOD ſi ex A B, auferenda ſit pars non aliquota, ſed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum qua contineat quatuor vndecimas ipſius A B, ſumenda erunt ex A C, vndecim partes æquales vſque ad D, punctũ, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partium. Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rurſus vt D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & conuertendo vt A E, ad A D, ita A F, ad A B: Eſt autem A E, pars continens quatuor vndecimas ipſius A D, ex conſtructione. Igitur & A F, eadem pars erit rectæ A B. Quod eſt propoſitum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipſius aliquotas non facientes vnam.

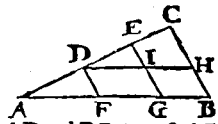


PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

SIT recta AB, ſecanda ſimiliter, vt ſecta eſt recta AC, in D, & E, hoc eſt, in partes, quæ ſint partibus AD, DE, E C, proportionales. Coniungãtur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunq; BAC, & con-



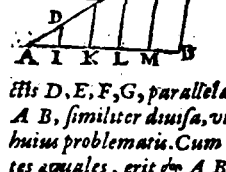


nectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelę ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta A C, in D, & E. Nam [a] vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; [b] erit rursus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quòd FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

[a] 2. sexti.
[b] 2. sexti.
[c] 34. primi.

SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 14. lib. 1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propos. 40. lib. 11. demonstrauimus. Sit enim data recta A B, diuidenda in quinque partes æquales.

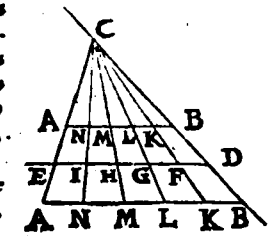


Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunq; angulum C A B, sumantur ex ea quinque partes æquales A D, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta A H, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit A B, similiter diuisa, vt A H, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur A H, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.

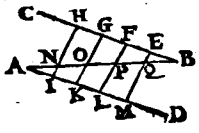
HVIC rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt alia non iniucunda. vt propos. 10. lib. 1 sumus pollicitus, atq; ad propos. 40. lib. 1. demõstrauimus.

Sit

Sit enim rursus data linea recta AB, diuidenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta BC, vtcunque faciens angulum cum AB; Deinde ex assumpto pũcto D, siue supra B, siue infra, agatur DE, parallela ipsi AB, ex qua abscindantur quinque æquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt, si D, est supra B, recta DE, ex quinque partibus æqualibus constans, minor sit, quàm AB, maior verò, si D, existit infra B. Postremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipsi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK, CL, CM, CN, quæ dico diuidere rectam AB, in quinque partes æquales. Cum enim DE, sit parallela ipsi AB, diuidentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex scholio propos. 4. huius lib. Cum ergo EH, secta sit bifariam in I, secta quoque erit AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi ML; & ML, ipsi LK; & LK, ipsi KB, æqualis; ac proinde AB, secta erit in quinque partes æquales. Quod est propositum.

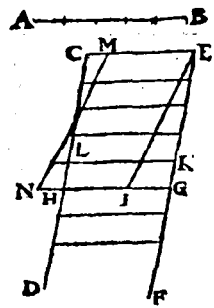


ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter se parallelæ; hoc est, constituentes angulos A, B, æquales: Et ex BC, abscindantur quatuor partes æquales BE, EF, FG, GH, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex AD, totidem æquales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI, secantibus rectã AB, in N, O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes æquales. Cum enim æquales sint, & parallelæ GH, IK, erunt & HI, GK parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt GK, FL, EM Quare cum AM, secta sit in quatuor æquales partes, erit & AQ, similiter in quatuor partes æquales diuisa, vt constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa eri



& BN, *in quatuor partes aquales, eò quòd* BH, *in totidem eſt partes aquales diuiſa. Quare cum tam* AN, *quam* EQ, *aqualis ſit ſingulis partibus* NO, OP, PQ; *erunt omnes quinque partes* AN, NO, OP, PQ, QB, *inter ſe aquales. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Praparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter ſe



parallelis vtcunque CD, EF; *ex vtraque abſcindantur partes inter ſe aquales quotcunque, ſaltem tot in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta reſpondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ* AB, *diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ* CE, *vt ex* E, *transferatur in inſtrumentum ad punctum* I, *illius lineæ tranſuerſæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta* GH; *ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremo ex* E, *ad* I, *recta ducatur* EI, *quam dico diuiſam eſſe in quinque aquales partes. Cum enim* GK, HL, *aquales ſint, &*

[a] 33. primi. *parallelæ; [a] erunt quoque* GH, KL, *parallelæ. Eodemq; modo omnes lineæ inter rectas* CD, EF, *inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius* 10. *propoſ. liquet, quemadmodum* EG, *diuiſa eſt in quinq; partes aquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit* EI. *Nam ſi punctum* E, *ſumptum non fuerit idem quod* E, *vel* C, *producenda eſt* IE, *donec cum* FE, *vel* DC, *coeat. Tunc enim vt in hac* 10. *propoſ. probatum eſt, erunt rectæ* EI, EG, *ſimiliter diuiſæ. Quòd ſi forte* IE, *nec cum* FE, *nec cum* DC, *concurrat,*

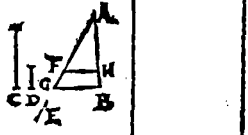
[b] 34. primi. *ſed vtrique ſit parallela, [b] erunt ſingulæ partes rectæ* EI, *ſingulis partibus rectæ* EG, *aquales, ob parallelogramma inter parallelas incluſa. Cum ergo omnes partes rectæ* EG, *ſint aquales; erunt quoque omnes partes rectæ* EI, *aquales. Si igitur beneficio circini ſingulæ partes lineæ* EI, *tranſferantur in rectam propoſitam* AB, *ipſi* EI, *aqualem diuiſa erit & AB. in quinque partes aquales. Quod eſt propoſitum.*

EST

EST autem nonnunquam neceſſe lineas parallelas extra inſtrumentum produtere. Vt ſi eadem linea transferatur ab M, uſque ad N, punctum linea GH, protracta, erit quoque MN, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat, ſi ducatur ex M, ipſi EG, parallela, uſque ad rectam GH: Vel ſi NM, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum CD, EF, minores, &c. Si vero linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in dupto plura ſpatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partem. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, transferaturque in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinque ſpatia vnam partem, propterea quòd quinque ſpatia conficiunt tertiam partem quindecim ſpatiorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouē ſpatia vnam partem; quippe cum nouem ſpatia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de cæteris.

EODEM modo, ad ſimilitudinem huius propoſitionis, licebit nobis facili negotio ſequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi.

DATAM rectam ſecare in duas partes, quę habeant proportionem quamcunq; datam.



SIT ſecanda recta AB, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea AE, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta AF, ipſi C, & FG, ipſi D, æqualis: Ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB, ſectam eſſe in H, ſecundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, [2] cum ſit, vt AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB. [2] 2. ſexti.

POSTREMO inſeremus huic loco theorema quoddã ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR recta *AB, CD*, proportionaliter in binis punctis *E, F, & G, H*, ita vt sit *A E*, ad *E B*, sicut *CG*, ad *GD*; Item *AF*, ad *FB*, vt *C H*, ad *H D*. Dico sectiones inter medias *EF, GH*, proportionales quoque esse cum duobus segmentis *FB, HD*; vel cum duobus *AE, CG*, hoc est, esse *FB*, ad *EF*, vt *HD*, ad *GH*. Item *AE*, ad *E F*, vt *C G*, ad *G H*. Cum enim sit, vt *AE*, ad *EB*, ita *CG*, ad *GD*; erit componendo, vt *AB*, ad *EB*, ita *CD*, ad *GD*. Item cum sit, vt *AF*, ad *FB*, ita *CH*, ad *HD*; erit componendo, vt *AB*, ad *FB*, ita *CD*, ad *HD*; & conuertendo, vt *FB*, ad *AB*, ita *HD*, ad *CD*. Itaq; cum sit, vt *FB*, ad *AB*, ita *HD*, ad *CD*; Et vt *AB*, ad *EB*, ita *CD*, ad *GD*; [a] Erit ex æquo, vt *FB*, ad *EB*, ita *HD*, ad *GD*; Et conuertendo, vt *EB*, ad *FB*, ita *GD*, ad *HD*; Et per conuersionem rationis, vt *EB*, ad *EF*, ita *GD*, ad *GH*; Et diuidendo, vt *FB*, ad *EF*, ita *HD*, ad *GH*. Quod est primum.

[a] 22. quinti.

RVRSVS, quia est, vt *AE*, ad *EB*, ita *CG*, ad *GD*; Et vt *EB*, ad *EF*, ita *GD*, ad *GH*, vt ostensum est; Erit ex æquo, vt *AE*, ad *EF*, ita *CG*, ad *GH*. Quod est secundum.

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniãt duo puncta *A*, & *C*, in vnum, vt fiat angulus *BCD*, vel *BAD*; iungantur q; recta *DB, HF, GE*. Quia igitur ponitur, vt *AE*, ad *EB*, ita *CG*, ad *GD*; [b] Parallela erit *GE*, ipsi *DB*. Rursus, cum ponatur, vt *AF*, ad *FB*, ita *CH*, ad *HD*; [c] Parallela erit quoque *HF*, ipsi *DB*. [d] Quare & *GE, HF*, inter se parallelæ erunt: Ac propterea [e] erit, vt *AE*, ad *EF*, ita *CG*, ad *GH*. Quod est secundum.

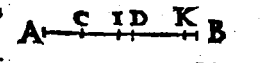
[b] 2. sexti.
[c] 2. sexti.
[d] 30. primi.
[e] 2. sexti.

EODEM modo, si puncta extrema *B, D*, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt *BF*, ad *EF*, ita *HD*, ad *GH*; & conuertendo, vt *EF*, ad *FB*, ita *GH*, ad *HD*. Quod est primum.

SED

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illæ, proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineę Arithmeticè proportionales.



RECTA linea AB, secta sit in partes AC, CD, DB, Arithmeticè proportionales, hoc est, habentes eundem excessum. [a] *Secetur autem recta EF, in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq: habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales. Sit enim CI, ipsi AC; & DK, ipsi GD, aequalis: vt ID, sit excessus inter CD, AC; & KB, excessus inter DB, CD, atque adeo ipsi ID, aequalis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, aequalis: vt LH, excessus sit inter GH, EG; & MF, excessus inter HF, & GH. Probandum est, excessus LH, MF, aequales esse. Quoniã igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH; erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF; erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cum sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL;* [b] *erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM;* [c] *erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH.* [d] *Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, aequalis.* [e] *Igitur & LH, ipsi MF, aequalis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè*

[a] 10. sexti.

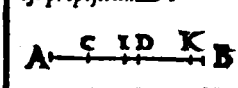
[b] 19. sexti.

[c] 19. sexti.

[d] 11. quinti.

[e] 14. quinti.

proportionales erunt, cum exceſſus habeant æquales. Quod eſt propoſitum.



HOC theorema nullo modo converti poteſt. Non enim ſequitur, ſi duæ lineæ ſecta ſint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere eaſdẽ proportiones, quas partes alterius habent. Nam ſi lineæ EF, ſecunda pars ſtatuatur GM, ita vt exceſſus inter EG, GM, ſit LM: Deinde ipſi GM, poſt M, ſumatur portio ipſi GM, æqualis, eique adijciatur idem exceſſus LM; fient tres partes Arithmeticè proportionales in lineæ EF, & tamen non habent eaſdem proportiones inter ſe, quas habent partes lineæ AB: [a] *quippe cum minor ſit proportio EG, ad GM, quàm EG, ad GH; hoc eſt, quàm AC, ad CD.*

[a] 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum.

VT in ſuperiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc eſt, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; oſtenſum eſt ita quoque eſſe exceſſum ID, ad exceſſum LH, vt CD, ad GH. Itaque ſi AC, CD, ſint dupla, aut dimidiatæ partes ipſarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, vel pars dimidiata ipſius LH, &c.

EX his quoque hoc problema abſoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales ſecare.

SIT enim recta EF, ſecanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmeticè proportionales componantes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, [b] *ſecetur ſimiliter in G, H,*

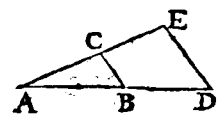
[b] 10. ſexti.

G, H, vt AB, in C, D, secta est; erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.

HÆC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibusuis alijs magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ posteremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ: cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum ad datũ numerũ, ita singuli numeri assumpti ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.



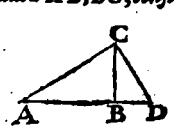
SINT duę rectæ AB, AC, ita disposităe, vt efficiant angulum A, quemcumque, sitque inuienienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequẽs esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cũ enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

[a] *4. sexti.*
[b] *7. Quinti.*

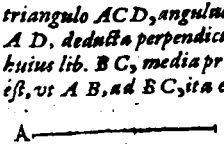
SCHO-

SCHOLIVM.

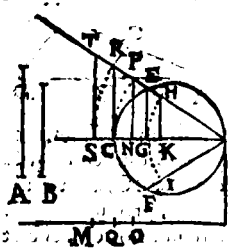
ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Dua recta data AB, BC, constituantur ad angulum rectum ABC; & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, perpẽdicularis CD, occurrens ipsi AB, producta in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositũ.



INVENTA autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor linea A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octaua, & sic in infinitũ.



EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio linea A, maioris ad minorem B. Circa rectam CD, ipsi A, equalem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, equales. Applicata autem regula punctis E, F, ducatur recta EG, qua ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim equalibus arcubus DE, DF, ex semicirculis equalibus DEC, DFC, reliqui arcus CE, CF, equales erunt.) secabit eadem & rectam ductam EF, bifariam, per ea, qua in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus.[a] Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si ducetur recta EC,[b] angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit



[a] 3. tertij.
[b] 31. tertij.

ex

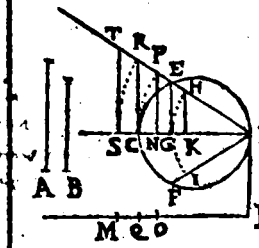
ex coroll. propoſ. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter C D, D G: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipſis C D, D E, hoc eſt, datis duabus A, & B. Quòd ſi ex D, per G, arcus deſcribatur ſecans rectas D E, D F, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, ducatur recta H K; erit D K, quarta proportionalis. Nam propter angulos H D G, I D G, (qui [a] ob aquales arcus E C, F C, aquales ſunt) [b] arcus H G, I G, aquales erunt; ac propterea, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. recta ducta H I, bifariam ſecabitur in K; [c] ideoq; & ad angulos rectos. [d] Parallela ergo ſunt E G, H K. [e] Vt igitur recta E D, ad D G, ita erit D H, hoc eſt, D G, ad D K. Sunt ergo quatuor linea C D, D E, D G, D K, continuè proportionales. Quòd ſi ex D, per K, alius arcus deſcribatur ſecans rectas D E, D F, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

[a] 27. tert
[b] 26. tert.
[c] 3. tert
[d] 28. prim.
[e] 2. vel ſexti.

D E I N D E ſit data proportio linea B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis D C, L M, ad D L, perpendicularibus, abſcindantur rectæ D N, L O, minori B, aquales; applicataq; regula ad puncta O, N, ducatur recta N P. [f] quæ ad D C, perpendicularis erit, [g] cum ſit parallela ipſi D L. Sumpta deinde recta D C, aquali ipſi A, maiori, deſcribatur ex D, per C, arcus ſecans rectam N P, in P, extendaturq; ex D, per P, recta D P T, eritq; D P, ipſi D C, hoc eſt, ipſi A, aqualis. Abſciſſa quoque L Q, ipſi D C, aquali, applicataque ad puncta Q, C, regula, ducatur recta C R, qua eadem ratione ad D C, perpendicularis erit, & ipſi N P, parallela. [h] Et quoniam eſt, vt N D, ad D P, hoc eſt, vt B, ad A, (quod N D, D P, ipſi B, A, accepta ſint aquales) ita C D, ad D R, hoc eſt, ita D P, ad D R; erunt tres rectæ N D, D P, D R, continuè proportionales; ideoq; D R, ipſis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd ſi ex D, per R, arcus deſcribatur ſecans D C, in S, & recta D S, aqualis auferatur L M; applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur S T, erit D T, quarta proportionalis. Nã eadem ratione erit S T, ipſi C R, parallela, & ad D C, perpẽdicularis. [i] Quare erit, vt C D, ad D R, hoc eſt, vt A, ad D R, ita S D, id eſt, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor linea N D, D P, D R, D T, continuè proportionales. Quòd ſi ex D, per T, alius arcus deſcribatur ſecãs rectã D C, protractã, inuenietur eadẽ arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitũ.

[f] 29. prim.
[g] 33. prim.
[h] 2. vel ſexti.
[i] 2. vel ſexti.

EX



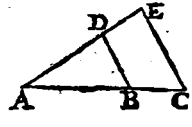
EX his ſine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, nõ quidem Geometricè omnino, ſed quaſi attentando, & praxim ipſam iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quarimus, aſſequamur. Vt ſi inter CD, DK, inuenienda ſint duæ mediæ proportionales, deſcripto circa maiorem CD, circulo CEDF, originus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusq; DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demiſſa EG, auferat rectam DG, recta DH, æqualem, hoc eſt, vt arcus ex D, per H, deſcriptus tranſeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Num vt oſtendimus, eſt vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propoſ. 8. huius lib.[a] Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc eſt, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continuè proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales ſunt. Quòd ſi rectæ DH, DG, comperiantur non eſſe æquales, ſi quidem DH, fuerit minor, elevanda erit DH, magis; ſi verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.

[a] 2. vel 4. ſexti.

10. **PROBL. 4. PROPOS. 12.**

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidem A B, ad BC, ita AD, ad quartam. Diſponantur primæ duæ AB, B C, ſecundum lineam rectam, quæ ſit AC: Tertia vero



AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrés rectæ AD, productæ, in E, puncto.

Dico

Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; [a] erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat. [a] 2. sexti.

SCHOLIVM.

HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oportet ipsis inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, vt AB, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum est, cum AC, EC, proportionaliter secentur in B. & D, punctis. [b] 2. sexti.

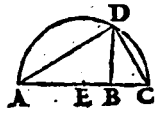
ALI-

ALITER. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat secunda, atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.

a 12. sexti.

9. PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; b erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cũ igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

b 31. tertij.

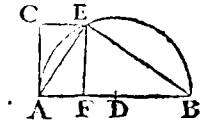
SCHOLIVM.

PERSPICVVM hinc fit, lineã rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri

diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpe dicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalem mediam in ter AD, & DC: Id quod liquido constat ex demonstrati ne huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; a si angulus ABC, rectus. Quare per coroll. propos. 8. consti propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, medi proportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG & GC, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendu est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametru perpendiculares ducentur.

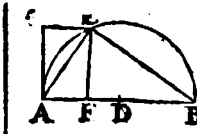
EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ n nor non sit, quam dupla illius) ita secare, data recta sit media proportionalis inter seg menta huius.



SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit quam dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulu rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centr interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describat AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, cans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Seca autem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quà semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circu ferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si aqu lis sit dimidio rectæ AB, hoc est, aqualis semidiametro D, ad angulos rectos educta. Cum ergo positum sit, AC, n esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, c cumferentiam, aut tanget.) a quo demittatur ad A perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportion

l.



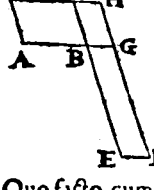
lem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [a] Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, [b] quod parallelogrammum sit ACEF; Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem, [b] & AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA;) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.

[a] 8. p. primi.

[b] 28. primi.

13. THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habẽtium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habẽtium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF: [c] erit vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed vt DB, ad BH, [d] ita est AB, basis ad basin BG,

[c] 7. quinti.

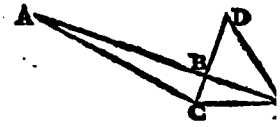
[d] 1. sexti.

B G, quòd parallelogramma ſint eiuſdem altitudin
& ſimiliter vt BF, ad B H, ita eſt baſis E B, ad baſin B
Igitur vt A B, ad B G, ita eſt E B, ad B C. Quod
propoſitum.

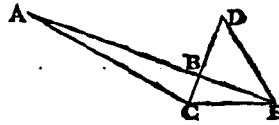
E CONTRARIO, ſint iam latera circa æqu
les angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, vt A B,
B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B
eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſi
vt AB, ad B G, ita E B, ad B C: = Vt autem AB, ad B
ita D B, ad B H; & vt E B, ad B C, ita B F, ad idem B
erit quoque vt D B, ad B H, ita B F, ad idem BH; ▸ A
que idcireo æqualia erunt parallelogramma D B, B
Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentiu
angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 10. PROPOS. 15.

**AEQVALIVM, & vnum vni æqu
lem habẽtium angulum, triangulorum
reciproca ſunt latera, quæ circum æqua
les angulos. Et quorum triangulorum
vnum angulum vni æqualem habenti
reciproca ſunt latera, quæ circum æqua
les angulos; illa ſunt æqualia.**



SINT duo triangula æqualia A B C, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt A B, ad B E, ita D B, ad B
Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, i
vt A B, B E, vnam efficiant lineam rectam. Quo fac
cum anguli A B C, D B E, ſint æquales; erunt & D
B C, vna recta linea, ut demonſtratum eſt ad propoſ.



lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia sunt triangula A B C, D B E; [a] erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum B C E, [b] ita est basis A B, ad basin B E, quòd hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt D B E, ad B C E, ita est basis D B, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita est D B, ad B C. Quod est propositum.

[a] 7. quinti.

[b] 1. sexti.

I A M vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt A B, ad B E, ita D B, ad B C; vt autem A B, ad B E, [c] ita triangulum A B C, ad triangulum B C E; & vt D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; [d] propterea que æqualia erunt triangula A B C, D B E. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 1. sexti.

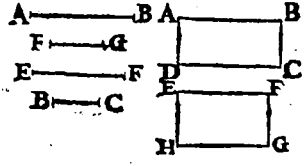
[d] 9. quinti.

15. THEOR. 11. PROPOS. 16.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C; vt

BC, vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectangulum A B C D, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum vero E F G H, comprehensum sub medijs EF, FG. Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. [a] Quare parallelogramma A C, E G, æqualia erunt. Quod est propositum.



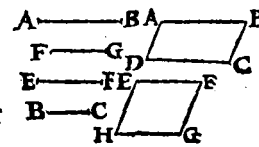
[a] 14. sexti.

CONTRA vero, sint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F; [b] erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 14. sexti.

SCHOLIVM.

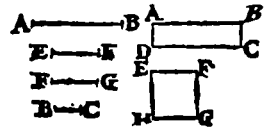
IDEM verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.



THEOR. 12. PROPOS. 17. 16.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub ex-

tremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod a media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ A B, EF, & BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: ſitq; rectangulum ABCD, contentum ſub extremis A B, BC, & quadratum mediæ EF, ſit E F G H. Dico æqualia eſſe rectangulum AC, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis ſit ipſi E F, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, B C, proportionales; vt quidem A B, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehenſum ſub medijs E F, FG, propter æqualitatem rectarum EF, F G. [a] Quare rectangulum A C, comprehenſum ſub extremis AB, BC, æquale eſt quadrato E G, hoc eſt, rectangulo ſub medijs E F, F G, comprehenſo: Quod eſt propoſitum.

[a] *16. ſexti.*

SED ſint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico eſſe vt A B, ad EF, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, & EG; [b] erit vt A B, ad EF, ita FG, ad BC: [c] Vt autem FG, ad BC, ita eſt EF, ipſi F G, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita eſt E F, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

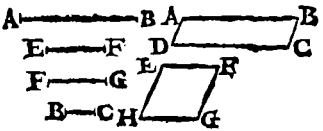
[b] *16. ſexti.*
[c] *7. quinti.*

COROLLARIVM.

EX poſteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalem inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale

æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

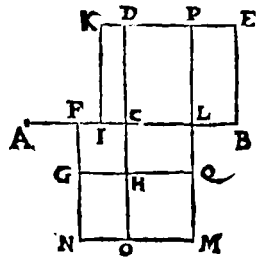
SCHOLIVM.



EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt EG, sit Rhòbus, & AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.

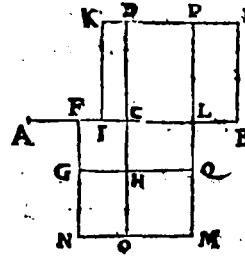
LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.



SIT recta AB, diuisa in C, vtcunque, oporteatque partem CB, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F; & FC, iterum bifariam in I, vt CI, quarta pars sit primæ partis AC: & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturq; recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, primæ parte, & recta IB, composita ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB; erit [2] *rectan-*

[2] *26. secundi.*



rectangulum sub AB, BC, vnà cum quadrato ex CF, æquale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, vnà cum quadrato ex CF. (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, æquale, cum vtrumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK, [a] quia sic est rectangulum CK, ad quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, vt CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; At uero quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati ex AC, ex [b] scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato ex BF. Si igitur [b] fiat quadratum rectangulo IE, æquale, erit eius latus minus rectæ FB. Sit ergo illud FL. Dico partem CB, ita sectam esse in L, vt tres partes AC, CL, LB, sint continuè proportionales. Describatur enim ex FL, quadratum FM, rectaque DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P: sumptisq; duabus FG, LQ, ipsi CF, æqualibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Erit q; GG, quadratum rectæ CF, ob æqualitatem rectarum CF, FG. Et quia ablatis æqualibus FC, FG, ex æqualibus FL, FN, reliqua CL, GN, æquales sunt; [c] & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, æqualis; æquales quoque erunt HQ, HO; ideoq; HM, quadratum erit rectæ CL. Rursus quia tam rectangulum CQ, comprehenditur sub CL, & CH, siue CF, semisse ipsius AC, quàm rectangulum GO, sub GN, siue CL, & GH, siue CF, semisse eiusdem AC, siue CD; [d] erunt duo rectangula CQ, GO, simul æqualia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL, & CD, quæ ipsis CH, GH, simul æqualis est. Itaq; cũ rectangulũ IE, quadrato FM, æquale sit; & rectangulum CK, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, siue AC, & BL, reliquo quadrato HM, æquale. Quocirca, cum datis

[a] 1. sexti.
[b] 14. secũdi.
[c] 34. primi.
[d] 1. secũdi.

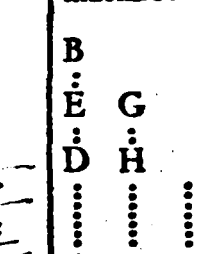
tis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis comprehensum æquale sit quadrato HM, media CL; erunt ipsa tres lineæ AC, CL, LB, continuè proportionales. Quod est propositum. [a] 17. sexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adjiciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adjiciemus CI, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet IB, in priorem partem 36. siue in lineam AC, ducemus, atque ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua si detrahemus CF, semissem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars CL, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atq; hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienum erit a nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunq; Medietatis, siue Arithmeticæ, siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT data duæ rectæ AB, & C, (quæ per unitates in longum dispositæ hic repræsentantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB. abscindatur alia æqualis AD: Diuiso autẽ segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmeticè proportionalẽ inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquidò constat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, medianam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis constatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, sit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. [a] Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum.

[a] 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, data duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur rectæ GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi FH, ponatur æqualis C.

Dico

Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, æquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura, data duæ rectæ C, & FG, quibus inueniendæ sit tertia maior in Medietate Arithmeticæ. Sumatur AE, ipsi FG, æqualis, eiq; addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, æqualis. Dico AB, esse tertiã proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cũ ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint æquales, patet propositum.

ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

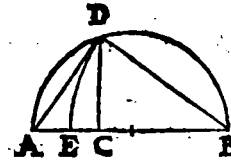
SI verò ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adijciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT



SINT data recta AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secans AB. in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis AD, BD; [a] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta BD, hoc est, ipsi aequalis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.

[a] 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura, data recta AB, BE, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; [b] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit BD, hoc est, ipsi aequalis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.

[b] 31. tertij.

VI.

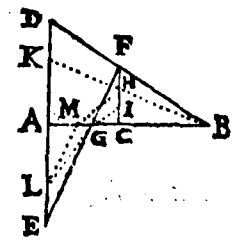
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, data recta CB, BE, eundem termi-

terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, secans BE, productam in A. Dico AB, tertiam proportionalem esse ipsis C B, B E. Quoniam enim angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B D, hoc est, BE, ipsi æqualis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



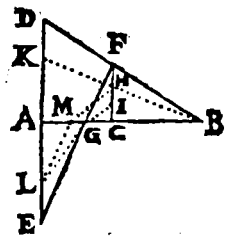
SINT data rectæ AB, BC, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ductæ per A, ad AB, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quamcunq; : Excitetur quoque ex C, ad A B, perpendicularis C F, secans ductam rectam B D, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur F E, secans AB, in G. Dico B G, esse mediam Harmonicè proportionalem inter AB, BC: Hoc est, esse AB, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primam AB, ac mediam BG, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam BC. Quoniam enim [a] C F, parallela est ipsi D E, ob rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt A B, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinem triangulorum AEG, CFG, [b] erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; & permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem

[a] 28. pri

[b] 4. sexti

vt

vt AE, ad CF, ita AB, ad BC. Igitur erit quoque AB, ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.



NON determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadē media BG, inuenietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendiculārem CF, in H, iungaturque recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triāgula æquiāgula ALM, MHC, si recta est HML. Est autē vt AB, ad BC, ita AG, ad GC, vt ostensum est. Igitur erit quoq; AM, ad MC, vt AG, ad AC: quod est absurdum. Nam [a] minor est proportio AM, ad GC, quàm AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, quàm ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quàm AG, ad GC. Non ergo ita est AM, ad MG, vt AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transit igitur per G: atque idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK, AL, æquales.

[a] 8 quinti.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura, data recta AB, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur æquales AD, AE, quantacunque: iuncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico BC,

BC, ipſis AB, BG, eſſe Harmonicè proportionalem: Hoc eſt, eſſe AB, primam ad BG, ſecundam, vt AG, exceſſus inter primam & ſecundam, ad GC, exceſſum inter ſecundam ac tertiam. Quod quidem demonſtrabitur, vt in præcedenti propoſitione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE: *quia vtcunque ſumantur ſiue maiores, ſiue minores, eadem tertia* BC, *reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, ſecet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LG; quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I; oſtendemus eodem modo, eſſe vt AB, ad BC, ita AK, ad CH, hoc eſt, ita AL, ad CH. Vt autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoq; vt AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia, ſi recta linea eſt LGI, ob ſimilitudinem triangulorum ALG, CIG,* [a] *eſt vt AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, vt AL, ad CI, ita AG, ad GC. Cum ergo oſtenſum ſit, eſſe vt AG, ad GC, ita AL, ad CH; erit AL, ad CH, vt ad CI.* [b] *Æquales ſunt igitur CH, CI, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo oſtendemus non cadere ſupra. Cadit ergo in H, vbi BK, perpendicularem CF, ſecat; ac proinde ex H, demiſſa perpendicularis HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonicè.*

[a] 4. ſexti.

[b] 9. quinti.

HINC ſequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam eſſe maiorem exceſſu, quo media minimam ſuperat. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC; ſit autem AB, prima maior quàm AG, exceſſus inter primam AB, & mediam BG; [c] *erit quoque BC, tertia maior quàm GC, exceſſus inter mediam BG, & minimam BC.*

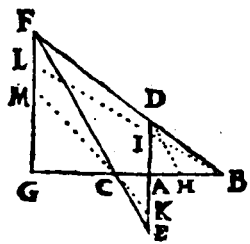
[c] 14. quinti.

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT data recta AB, BC, eandem habentes terminum B, quibus inuenienda ſit maior tertia Harmonicè proportionalis.

Ducta



Ducta per B, ad BC, perpendiculari DE, ponantur aquales AD, AE, quantacunque, ducaturque recta BD, quam producta secet EC, producta in F, puncto, (quòd autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, producta demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA. [a] Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit vt GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, vt GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC; [b] erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt GB, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessus inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam BC, & tertiam BA. Quod est propositum.

[a] 18. primi.

[b] 4. sexti.

QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, siue minima, maior erit BA, tertia, quàm CA, excessus, quo media BC, minimam BA, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quàm AC, non posset reperiri tertia maior. Cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia AB, maior excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, aqualis, connectaturq; recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, aqualia sunt, angulosq; comprehendunt aquales, vtpote rectos, siue ad verticem A; [c] erunt & anguli ACE, AHD, aquales: quicum alterni sint; [d] erunt recta EC, HD, parallela; [e] ac proinde anguli interni DHC, HCF, duobus rectis aquales erũt. [f] Cum ergo angulus DHC, maior sit interno angulo B; erunt duo anguli BCF, CBF, duobus rectis minores. [g] Quocirca BD,

[c] 4. primi.

[d] 27. primi.

[e] 29. primi.

[f] 16. primi.

[g] 13. prop.

BD, EC, *coibunt*. *Quod est propositum*.

NON *determinantur quoq; hic magnitudines rectarum* AD, AE: *quia vtcunque sumantur sive maiores, sive minores, eadem tertia* BG *reperietur. Sint enim aliæ æquales* AI, AK: *Ducta autem recta* BI, *quæ producta secet perpendicularem* FG, *in* L, *ducatur* KC, *quam productam dico cadere in* L. *Si enim cadat infra, vt in* M; *ostendemus eodem modo, esse vt* GB, *ad* BA, *ita* GL, *ad* AI, *id est, ad* AK. *Vt autem* GB, *ad* BA, *ita erat* GC, *ad* CA. *Erit igitur, vt* GB, *ad* CA, *ita* GL, *ad* AK. *Et quia, si recta linea est* KCM, *ob similitudinem triangulorum* GMC, AKC, [a] *est vt* GM, *ad* GC, *ita* KA, *ad* AC: *erit permutando, vt* GM, *ad* KA, *ita* GC, *ad* CA. *Cum ergo ostensum sit, esse vt* GB, *ad* AK, *ita* GC, *ad* CA; *erit quoque* GM, *ad* AK, *vt* GL, *ad* AK. [b] *Æquales sunt igitur* GM, GL, *pars & totum. quod est absurdum. Non ergo cadet* KC, *infra* L: *eademque ratione neque supra cadet. Cadit ergo in* L, *vbi* BI, *producta perpendicularem* FC, *secat; ac proinde ex* L, *demissa perpendicularis* LG, *ad* GB, *cadet in* G, *exhibebitque eandem tertiam* GB, *maiorem, Harmonicè proportionalem*.

[a] 4. sexti.

[b] 9. quinti.

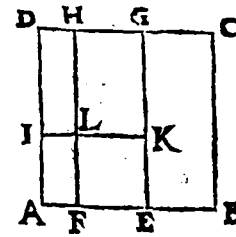
EX *his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel duplæ maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in* 3. *regula proportionalitatis Harmonica diximus. Quia enim ostendimus,* BA, *minimam lineam esse maiorem excessu* AC, *quo media* BC, *minimam* AB, *superat; erit* AB, *maior semisse ipsius* BC; *ac proinde* BC, *ad* AB, *media ad minimam, minorem proportionem habebit, quàm duplam. Quòd si* BC, *ad* AB, *esset dupla, vel maior quàm dupla, esset* AB, *vel æqualis ipsi* AC, *vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate*.

SED *demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonica in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib.* 5. *explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri* 7. *cum ea ex lib.* 5. *& 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus*.

EX.

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extreni eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.



EX qualibet recta AB, deſcribatur quadratũ ABCD. Sumptiſque duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipſis AD, BC, parallelæ. Item ſumpta recta AI, æquali ipſi BE, vel EF, agatur IK, ipſis AB, DC, parallela ſecans FH, in L. Erit rectangulum AG, contentum ſub AB, (id eſt, ſub ſumma rectarum AE, EB: [a] *cum EG, ſit ipſi BC, ideoque ipſi AB, æqualis) & AE, (maiore ſcilicet parte ſummæ AB.) Rectangulum vero EC, continebitur ſub AB, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiuſdem ſummæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quàm GL, ſub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quòd AI, ſumpta eſt ipſi EB, æqualis; & HL, LK, ipſis AE, EB, æquales.* [b] *Cum enim FH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi AB; & FL, ipſi AI, hoc eſt, ipſi EB, ſit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, æqualis:* [c] *At KL, ipſi EF, ſiue ipſi EB, æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, ſimul continere duplum eius, quod ſub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & ſummã duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, conſtituere proportionalitatem Harmonicã: hoc eſt, vt eſt AG, primum, ad EC, tertium, ita eſſe IH, exceſſum inter primum AG, & ſecundum HLIAEG, ad AL, exceſſum inter ſecundum HLIAEG, & tertium EC, ſiue FG,* [d] *quod ipſi EC, æquale eſt. Nam cum HL, ipſi AE; & LF, ipſi EB, æqualis ſit, vt oſtendimus;* [e] *erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB,* [f] *ita eſt AG, ad EC:*

Et

34. primi.
34. primi.
34. primi.
36. primi.
7. quinti
1. ſexti.

Et vt HL, *ad* LF, *ita est* HI, *ad* AL. *Igitur erit quoq;* AG, *primum ad* EC, *tertium, vt* HI, *excessus inter primum ac medium, ad* AL, *excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.*

ITAQVE si AE, *ponatur* 6. *&* EB, 4. *erit summa* AB, 10. *quam si ducamus in* AE, *&* EB, *fiet* AG, 60. *&* EC, 40. *Duplum autem eius, quod fit ex* AE. *in* EB, *hoc est,* HL IAEG, *fiet* 48. *medium Harmonicum. Tres igitur numeri* Harmonicè *proportionales erunt* 60. 48. 40. *quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri* 6. 4. *Cum enim eadem summa* 10, *ex* 6. *&* 4. *collecta multiplicans vtrũq;* 6. 4. *produxerit extremos* 60. 40. [a] *erit* 60. *ad* 40. *vt* 6. *ad* 4. *Quod etiam patet ex figura.* [b] *Est enim* AG, *id est,* 60. *ad* EC, *id est, ad* 40. *vt* AE, *id est,* 6. *ad* EB, *id est, ad* 4.

[a] 17. *septimi.*
[b] 1. *sexti.*

HAC *arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.*

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. *statuatur medius Arithmeticè proportionalis,* 5. *nimirum semissis eorum summæ, hoc modo.* 6. 5. 4. *Deinde medius* 5. *in extremos* 6. *&* 4. *ductus gignat* 30. *&* 20. *inter quos statuatur medius* 24. *quẽ extremi inter se multiplicati producunt, hoc modo,* 30. 24. 20. *Dico hos tres esse* Harmonicè *proportionales. Quoniam enim tres numeri* 60. 48. 40. *qui fiunt ex summa* 10. *datorum numerorum* 6. 4. *in datos numeros* 6. *&* 4. *&* ex 4. *in* 6. *bis, dupli sunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, &* ex 4. *in* 6. *semel, vt perspicuum est: erit quoq; tã excessus inter* 60. *&* 48. *duplus excessus inter* 30. *&* 24. *quàm excessus inter* 48. *&* 40. *ipsius excessu inter* 24. *&* 20. *vt ad propos.* 10. *ostendimus. Cum ergo tres numeri* 60. 48. 40. *sint* Harmonicè

60. 48. 40.	
30. 24. 20.	

proportionales, vt in precedenti problemate demonstrauimus; erunt quoque eorum semisses, 30. 24. 20. [a] eisdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60.48.40. quippe cum excessus numerorū 30.24.20. semisses sint horum numerorum 60.48.40. excessuum, vt dictum est.

[a] 15. quinti.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex maiore AB, 15. numerus BD, minori BC, 10. aqualis, &

A ... E .. D ..... B C

reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10. productusq; numerus 50. diuisus per AC, 25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem DE, 2. qui additus minori BD, 10. faciat BE, 12. Dico BE, esse medium proportionalem Harmonicè inter AB, BC, hoc modo, 15.12.10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit, diuiso per AC, Quotiens est DE; producetur idem numerus diuisus ex DE, Quotiente in diuisorem AC, vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum, qui ex BC, vel BD, secundo, in AD, tertium; [b] erit AC, primus ad BC, secundum, vt AD, tertius ad DE, quartum: Et diuidendo, AB, ad BC, primus datus ad tertium datum, vt AE, excessus inter primū AB, & mediū inuentū, BE, ad DE, excessum inter medium BE, & BD, suus tertium BC. Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

[b] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si differentia datorum numerorū ducatur in minorem, numerusq; productus diuidatur per datorum numerorum

rorum ſummam, ac denique Quotiens minori adjiciatur, conſtabitur medius terminus Harmonica proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12, *quibus inueniendus eſt minor* Harmonicè proportionalis. *Addatur* BD,

A ..... E .. C ... B ... D

aqualis ipſi BC, *exceſſui inter datos numeros. Per hanc ſummam* AD, 18, *collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus* 36. *factus ex minore dato* AC, *in* BC, *differentiam datorum numerorum; & Quotiens* CE, *ex minore dato* AC, *detrahatur. Dico reliquum* AE, 10. *eſſe terminum tertium minorem quaſitum, hoc modo,* 15. 12. 10. *Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BC, *fit, diuiſo per* AD, *Quotiens eſt* CE; *producetur idem numerus diuiſus ex* CE, *Quotiente in diuiſorem* AD, *multiplicato, vt ex Diuiſionis defin. manifeſtum eſt. Quia igitur idem numerus gignitur ex* AD, *primo, in* CE, *quartum, qui ex*

A ..... E .. C ... B ... D

BC, *ſecundo in* AC, *tertium;* [a] *erit* AD, *primus ad* BC; *ſecundum, hoc eſt, ad* BD, *vt* AC, *tertius ad* CE, *quartum. Et diuidendo,* AB, *ad* BD, *hoc eſt, ad* BC, *vt* AE, *ad* CE: *Et permutando,* AB, *primus datus ad* AE, *tertium inuentum, vt* BC, *exceſſus inter primum* AB, *& medium* AC, *ad* CE, *exceſſum inter medium* AC, *& tertium* AE. *Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *id eſt,* 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. *Quod eſt propoſitum.*

[a] 19. *ſeptimi vel* 16. *ſexti.*

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collecta diuidatur numerus

ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AB, *15.* & AC, *12. quibus inueniendus sit minor in* Harmonica Medietate. *Maiori* AB, *addatur* BD, *aqualis differentiæ* BC, *3. datorum*

A . . . . . E . . C . . . B . . . D

numerorum: Et per summam AD, *18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum* AB, AC, *hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitq; Quotiens* AE, *10. Dico* AE, *minorem extremum esse in Medietate* Harmonica. *Quoniam enim numero, qui ex* AB, *in* AC, *gignitur, diuiso per* AD, *Quotiens fit* AE; *producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus sit ex AD, primo in AE, quartum, qui ex AB, secundo in* AC, *tertium;* [a] *erit AD, primus ad* AB, *secundum, vt* AC, *tertius ad AE, quartum; ac proinde cum AD, maior sit, quàm* AB, *erit quoque* AC, *maior quàm AE. Quare erit & diuidendo* BD, *id est,* BC, *ad* AB, *vt* CE, *ad* AE: *Et conuertendo* AB, *ad* BC, *vt* AE, *ad* CE: *Et permutando* AB, *primus ad AE, tertium inuentum, vt* BC, *excessus inter primum* AB, & *medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* AC, & *tertium AE. Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *hoc est, 15. 12. 10.* Harmonicè proportionales. *Quod est propositum.*

[a] *19. septimi vel 16. sexti.*

ITA QVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonica Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT

SINT dati duo numeri AB, *10. &* AC, *12. quibus inueniendus sit tertius in Medietate Harmonica. Ex minore*

A . . . . . D . . B . . C . . . E

AB, *detrahatur* BD, *æqualis differentiæ* BC, *2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum* AD, *8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero* AC, *12. in differentiam datorum numerorum* BC, *2. vel* BD. *Quotiens autem* CE, *3. maiori numero* AC, *12. adijciatur. Dico summam* AE, *15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros* AE, AC, AB, *nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BD, *fit, diuiso per* AD, *Quotiens sit* CE; *producetur idem numerus diuisus ex* CE, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex* AC, *primo in* BD, *quartum, qui ex* CE, *secundo in* AD, *tertium;* 2 *erit* AC, *primus ad* CE, *secundum, vt* AD, *tertius ad* BD, *quartum: Et componendo* AE, *ad* CE, *vt* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC: *Et permutando* AE, *primus ad* AB, *tertium, vt* CE, *excessus inter primum* AE, *& medium* AC, *ad excessum* BC, *inter medium* AC, *& tertium* AB. *Sunt ergo tres numeri* AE, AC, AB, *nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.* 2 19. *septimi vel 16. sexti.*

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensque maiori numero adijciatur, cõstabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, *10. &* AC, *12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore* AB, *dematur* BD, *æqualis excessui* BC, *datorum numerorum: Et per reliquum numerum* AD, *8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum* AB, *10. &* AC, *12. procreatus, Quotiensque sit* AE, *15. Dico* AE, *esse terminum maiorem in proportionalitate Har-*

A ..... D .. B .. C ... E

monica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, in AC, diuiſo per AD, Quotiens eſt AE; producetur idem numerus diuiſus ex AE, Quotiente in diuiſorem AD, ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idē numerus gignitur ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, ſecundo in AE, tertium; [a] erit AB, primus ad AD, ſecundum, vt AE, tertius ad AC, quartum; ac proinde cum AB, maior ſit quàm AD, erit & AE, maior quā AC. Et cū ſit, vt AE, ad AC, ita AB, ad AD; erit per conuerſionē rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc eſt, ad BC: Et permutādo AE, primus inuentus ad AB, tertium, vt CE, exceſſus inter primum AE, & medium AC, ad BC, exceſſum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15. AC, 12. AB, 10. Harmonicè proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 19. ſeptimi vel 16. ſexti.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonica.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonſtrare, quibus ad finem tractationis proportionū ex aqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & viciſſim ex inaqualitatis proportione qualibet aqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam, oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam aqualium terminorum, quàm inaqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inaqualium terminorum.

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus; Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel: ac tertius ſemel, ſunt Geometricè proportionales.

SINT

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A,B,C: ſitque D, ſumma ex A, ſemel, & B, bis, & C, ſemel collecta: At E, ſumma ex B, & C, ſemel conflata, ac denique

A, 1.	*B*, 1.	*C*, 1.	*A*, 12.	*B*, 6.	*C*, 3.
D, 4.	*E*, 2.	*F*, 1.	*D*, 27.	*E*, 9.	*F*, 3.

F, ipſi C, æqualis. Dico D,E,F, Geometricè quoque proportionales eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A,B, ſimul ad B, vt BC, ſimul ad C. [1] *Igitur omnes antecedentes ſimul, nimirum A,B, & B,C, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad B,C, vt vna antecedens, hoc eſt, B,C, ad vnam conſequentem C. Eſt autem D, æqualis ipſis A,B, & B,C: Et E, ipſis B,C: ac denique F, ipſi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D,E,F, Geometricè ſunt proportionales. Quod eſt propoſitum.*

[1] 12. quinti.

HINC manifeſtum eſt, ſi termini A,B,C, ſint æquales; D,E,F, eſſe duplos. Nam B,C, ſimul dupli erunt ipſius C; ac propterea & E, ipſius F: quod E, ipſis BC, & F, ipſi C, ſit æqualis. Cum ergo D,E,F, ſint continuè proportionales, ipſi erunt in dupla proportione. Quod ſi termini æquales A,B,C, ſint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D,E,F, in minimis terminis 4.2.1. propterea quòd F, æqualis eſt ipſi C, hoc eſt, vnitati.

A.	*B.*	*C.*
1.	*1.*	*1.*
D.	*E.*	*F.*
4.	*2.*	*1.*

SI vero A, B, C, ſint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam ſi B, ipſius C, duplus eſt; erit ſumma ex B,C, collecta, id eſt, E, ipſius C, hoc eſt, ipſius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & ſic in infinitum.

A.	*B.*	*C.*
1.	*2.*	*4.*
D.	*E.*	*F.*
9.	*3.*	*1.*

AT ſi termini A,B,C, ſint dupli inuerſo ordine, erunt D,E,F, geniti, ſeſquialteri. Nam cum B, ſit ſemiſſis ipſius C, erit ſumma ex B,C, collecta, hoc eſt, E, ipſius C, ſiue ipſius F, ſeſquialtera. Eodem modo, ſi A, B, C, ſint conuerſo ordine tripli, erunt procreati D, E, F, ſeſquitertij. Nam B,

A.	*B.*	*C.*
1.	*2.*	*4.*
D.	*E.*	*F.*
9.	*6.*	*4.*

A. B. C. 1. 3. 9. D. E. F. 16. 12. 9.

erit ipſius C, tertia pars. Igitur ſumma ex B, C, conflata, id eſt, E, continebit C, ſiue F, ſemel, & inſuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuum proportionem ſeſquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuerſis naſcentur ſeſquiquarti, & ex inuerſis quintuplis, ſeſquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monſtrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus rectè eſſe præſcriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quadammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

XV.

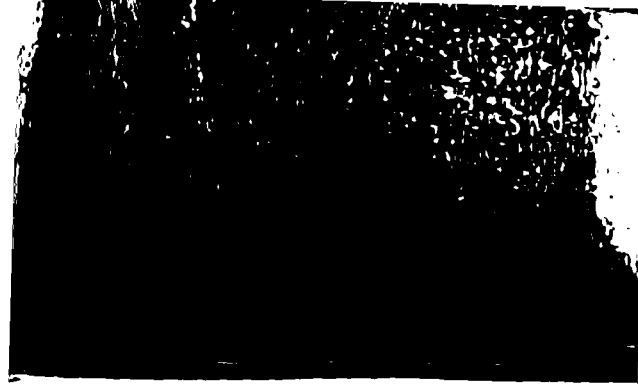
PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiuè inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata: ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: ſitq; D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, ſemel: At E,

A, 1. B, 1. C, 1. A, 12. B, 6. C, 3.

D, 5. E, 3. F, 1. D, 39. E, 21. F, 3.

ſumma conflata ex A, B, C, ſemel: Ac deniq; F, ipſi C, æqualis. Dico D, E, F, eſſe Arithmeticè proportionales. Quoniam enim ſumma ex A, bis, & B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ſuperat ſummam ex A, B, C, ſemel, hoc eſt, terminum E, aggregato ex A, B, ſemel collecto: Item ſumma ex A, B, C, hoc eſt, terminus E, ſuperat terminum C, ſiue F, eodem aggregato ex A, B, ſemel collecto; erit idem exceſſus inter D, & E,



qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, ſiue Medietatem conſtituent. Quod eſt propoſitum. A. E. C. 3. 20. 1.

EADEM prorſus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuſcunque, etiamſi non ſint proportionales: vt in hoc exemplo perſpicuum eſt. D. E. F. 47. 24. 1.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel: ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel: & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coacernata, Harmonicè proportionales ſunt.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C ſitq; D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, ſemel At E, ſumma ex B, bis, & C, ſemel conflata: Ac denique F ſumma ex B, ſemel, & C, ſemel collecta. Dico D, E, F, conſti

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 6.	E, 3.	F, 2.	D, 45.	E, 33.	F, 9.

tuere proportionalitatem, ſiue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex ſcholi propoſ. 22. lib. 5. vt A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, ſemel, ad B, ita B, bis, & C, ſemel ad C. Igitur vt omnes antecedentes ſimul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad ſummam ex B, C, id eſt, ad F, ita omnes antecedens, nimirum A, bis, & B, ſemel ad B. Eſt autem A bis, & B, ſemel exceſſus, quo A, bis, & B, ter, & C, ſemel, ſuperant B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, exceſſus inter D, primum

term

terminum, & medium E: At B, exceſſus, quo B, bis, & C, ſemel, ſuperant ſummam ex B, C, hoc eſt, exceſſus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F tertium, ita exceſſus inter primum & medium, ad exceſſum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod eſt propoſitum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, ſunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifeſtum eſt. Quando autem A, B, C, non ſunt vnitates, etiamſi in ſua proportione minimi ſint, non ſemper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquidò conſtat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis pro-

A, 6. B, 6. C, 4. | A, 1. B, 4. C, 16. | A, 9. B, 12. C, 16.
D, 40. E, 16. F, 10. | D, 30. E, 24. F, 20. | D, 70. E, 40. F, 28.

portionis ſeſquialteræ, & in ſecundo ex minimis terminis ſubquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis ſubſeſquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod ſi termini inuertantur, tum demum (quod mirum eſt) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonſtrant.

A, 4. B, 6. C, 9. | A, 16. B, 4. C, 1. | A, 16. B, 12. C, 9.
D, 35. E, 21. F, 15. | D, 45. E, 9. F, 5. | D, 77. E, 33. F, 21.

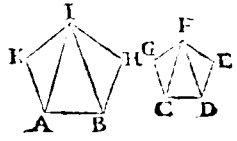
19.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

A DATA recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

SIT data recta A B, ſuper quam deſcribendum ſit rectilineum rectilineo C D E F G, ſimile ſimiliterque poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos, rectæ lineæ, quæ rectilineum reſoluãt in

in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cùm æquales sint duobus angulis FCD, FDC, qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus DIH: Et, quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BIH, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis; erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K; eritque triangulum quoq; AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt colligat ex constructione: cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero [c] vt est AB, ad BI, vt CD, ad DF; sic ita BI, ad BH, vt DF, ad DE; [d] erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos AIH, CDE, proportionalia sunt. [e] quemadmodum & latera circa æquales angulos IH, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI,



[a] 17. primi.
[b] 32. primi.
[c] 17. primi.
[d] 17. primi.
[e] 4. sexti.
[f] 22. quinti.
[g] 4. sexti.

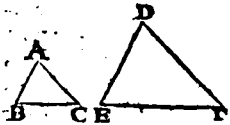
BHI, DEF. [a] Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD; & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC; & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. [b] Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG; & ideo latera quoque circa angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describimus. Quod faciendum erat.

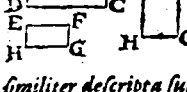
a 4. sexti.

b 22. quinti.

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas de scripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & vt sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quamquam similia sint.) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E.



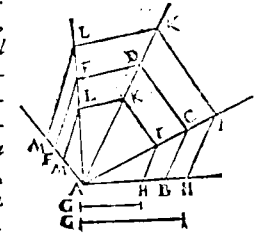


Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam ut AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At vero rectangula ACIG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.

CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super qualibet earum latera.

FORTASIS autem expeditius Problema propositum conficiemus

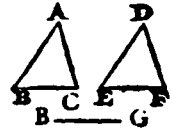
conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel alii æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur



AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, vlteriùs producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per I, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera figuræ tangant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF: faciumque erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterque posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB constituta. Cum enim angulus HAM, sit communis; & anguli ABC, AFE, æquales sint anguli AHI, AML; Item anguli ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus AIK; Eodemque modo anguli CDE, DEF, æquales sint angulis IKL, KLM: Æquiangula erit rectilinea AHIKLM ipsi ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, Erit, [b] vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, vt BC, ad CA, ita HI, ad IA, Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK. Ac proinde, ex æquo, vt BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur, ex def. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea, quæ [illegible] me hoc scholio scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homolog[illegible]

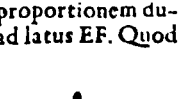


SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationé habere duplicatã eius, quã habent latera homologa BC, & EF; vel AB, & DE, vel AC, & DF: Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG; itaesse triangulũ ABC, ad triangulũ DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defi. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF; proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas, habere proportionem duorũ laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorũ laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continuè proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, [a] quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: Proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magni-

[a] 38. primi.

magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus EF. Quod est propositum.

SIT deinde BC, latus latere E F, maius; & ex B C, [a] abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturque recta A G. Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem B C, ad EF, ita est per constructionem EF, ad B G. Vt ergo AB, ad DE, [b] ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, [c] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum D E F, [d] ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G: Vt autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis, [e] ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum DEF, ita est BC, ad B G. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint cõtinuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiã BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secũdam. Igitur & triangulũ ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 11. sexti.

[b] 11. quinti.

[c] 15. sexti.

[d] 7. quinti.

[e] 1. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT

SINT enim tres recta proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio recta A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis recta A, ad rectam B. Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B,

19. sexti.

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

19. sexti.

SCHOLIVM.

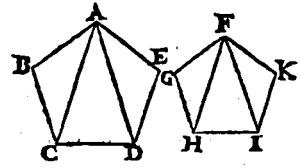
ITAQVE si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quæ proportionem habeat triangulũ ABC, ad triangulũ DEF. Si enim proportio 6. ad 5. cõtinuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulũ ad triãgulũ, vt 36. ad 25. hoc est, habebit ꝓportionẽ, cuius denominator est 1 11/25. Quia enim proportio 36. ad 30. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulũ, vt 36. ad 25. Eandem proportionẽ trian-

triangulorum cognoſcemus, ſi denominatorem proportionis laterum homologorum, numerum $1\frac{1}{5}$. in ſe multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id eſt $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, qua duplicata eſt proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum; quòd hæc etiam duplicata ſit eiuſdem proportionis laterum.

SIC etiam, ſi latera homologa habeant proportionem, quæ 10. ad 1. habeant triangula proportionem, quàm 100. ad 1. cum hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id eſt, 10. in ſe multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata eſt.

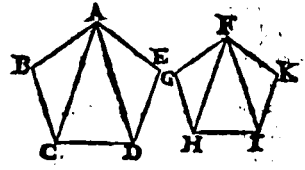
THEOR. 14. PROPOS. 20. 18.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & ſic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint AC, AD, FH, FI; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia

[a] 6. ſexti.



angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G, lateribus homologis oppositos: [a] Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt: Eadē ratione erunt similia triangula A E D, F K I, habentia angulos E A D, K F I, & angulos A D E, F I K, æquales. Deinde [b] quia est vt A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; vt autem C B, ad C D, ita est, ex hypothesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum: [c] erit ex æquo vt A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; est autem & ablatus A C B, ostensus æqualis ablato F H G; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. [d] Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoq; similia. Eademq; ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint.

[a] 4. sexti.
[b] 4. sexti.
[c] 22. quinti.
[d] 6. sexti.

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula A B C, F G H; [e] erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H. Atque eodem argumento proportio triangulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris A C, ad latus F H. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum A D E, ad triangulum F I K, vt A C D, ad F H I: Atque ita deinceps, si plura fuerint triágula. Sunt igitur proportionalia triágula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius cósequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, [f] ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia.

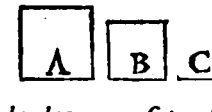
[e] 19. sexti.
[f] 12. quinti.

quentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygo ni ad ſibi reſpondens triangulum alterius, ita erit to tum polygonum ad totum polygonum; ideoque trian gula homologa erunt totis polygonis.

DICO poſtremo, polygona inter ſe proportioner habere duplicatam eius, quam habent latera homologa hoc eſt, ſi homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, in ueniatur tertia linea proportionalis, ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt eſt prima line AB, ad tertiã inuentã: ac proinde, cum proportio AB, a illã tertiã, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG; d ci quoq; proportionem polygoni ad polygonum dupli catam proportionis laterum homologorum AB, FG Cum enim ſit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, habea proportionem duplicatam eius, quam habent latera ho mologa AB, FG, hoc eſt, eandem, quam habet AB, ad il lam tertiã inuentã; habebunt quoque polygona inter ſ proportionem duplicatam proportionis eorundem late rum homologorum AB, FG, hoc eſt, eandem, quã habe AB, ad illã tertiã inuentam. Itaque ſimilia polygona i ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtran dum erat.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ lineæ proportionales, vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſe cundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: Vel ita eſ polygonum ſuper ſecundam deſcriptum ad polyg num ſuper tertiam ſimile ſimiliterque deſcriptum.



HOC non aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, qu oſtenſum fuit. corollarium præcedentis theorematis ex ſi theoremate: Vt perſpicuum eſt in hac figura appoſita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, similia esse. Quoniã anguli ACB, FHG, aquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui aquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: aquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademque ratione aquales ostendentur anguli ADC, FIH: ac propterea, [a] & reliqui CAD, HFI, aquales erunt. Igitur cum aquiangula sint triangula ACD, FHI, [b] habebunt latera circa angulos aquales proportionalia, ac proinde similia erunt.

[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex aqualitate, & prop. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli aquales, prater vnum, qui videlicet prope pracedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest aqualis angulo FIH; quòd tunc alia adhuc triangula supersint vsque ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet, frustra in prop. nos dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex aqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoq; cum anguli ACD, FHI, sint aquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hac enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cum omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob similitudinem polygonorum; erit ex aquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, aqualis ponitur angulo HIK: Est autem & ablatus ADC, ostensus ablato FIH, aqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, aqualis. [c] Quare triangula ADE, FIK, similia erunt. Atque ita deinceps, si fuerint plura triangula.

[c] 6. sexti.

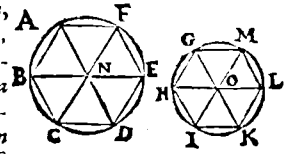
QVOD si polygona similia, fuerint aquilatera, & aquiangula,

angula, dividentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circumscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico trianguła NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis. Quoniam enim anguli CND, IOK, æquales sunt, (quòd æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrumque spatium N, & O, quatuor rectis æquivalens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. dividitur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus, [a] *ipsi inter se æquales erunt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum utrobique sit proportio æqualitatis;* [b] *Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, ut patet;* [c] *habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.*

[a] 27. tertij.

[b] 6. sexti.

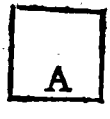
[c] 15. quinti.



PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum inter se proportionem



tionem habeant duplam; erit proportio quadraterum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est dupla proportionis, vt hic apparet. 1. 2. 4.

SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadraterum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, vt dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in exemplo adducto superius apparet.

ITAQVE si proportio lateris AB, ad latus FG, nota sit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonstratum est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{25}{16}$. id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, qua duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex iis, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cum hac sit ipsam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam; cum hac illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR.

THEOR. 15. PROPOS. 21. 20.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

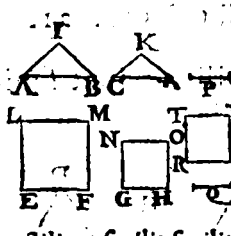
SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinē, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; [a] erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribꝰ eiusdem rectilinei G H I; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

[a] 1. prop.

[b] 11. quinti.

THEOR. 16. PROPOS. 22. 21.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidē AB, ad CD, ita EF, ad G H; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta, EFML, GHON. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. [b] eritque ex æquo, vt A B, ad P, ita EF, ad Q. Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. [c] Igitur vt ABI, ad CDK ita erit EM, ad GO. Quod est propositū.

[a] 11. sexti.
[b] 22. quinti.
[c] 11. quinti.

DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, vt quidem AB, ad C D, ita EF, ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; positum; [e] & obid rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur E M, ad G O. [f] Igitur erit vt EM, ad R V, ita EM, ad G O, [g] Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, cōstitent necessario, vt mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt E F, ad R S, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt A B, ad C D. Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 12. sexti.
[e] 21. sexti.
[f] 11. quinti.
[g] 9. quinti.
[h] 7. quinti.
[i] 11. quinti.

LEMMA

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, qualia ſunt GO, RV, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt GH, RS; ſit GH, maior. Cum igitur, ob ſimilitudinem rectilineorum, ſit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam RS; a erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipſum poſſit conſtitui; quod eſt abſurdum, cum ſit contra hypotheſim. Non ergo inæquales ſunt rectæ GH, RS. Quod eſt propoſitum. a 14. quinti.

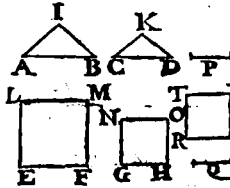
ALITER.

Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & ſimilia ſimiliterque poſita. Dico latera homologa, cuiuſmodi ſunt rectæ AB, DE, eſſe æqualia. Si enim non credantur æqualia, ſit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, vt AB, ad DE, ita DE, ad G; Eſt autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita eſt rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior ſit, quam G; erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod eſt abſurdum, cum poſitum ſit æquale. Non ergo maior eſt AB, recta, quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus

minus ostenderetur rectilineo D E F: quod est contra hypothesim. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, immo diem; manifestum est, quod proponitur.



BREVIVS tota hac propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoque vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. [a] *Cum enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H; erunt proportiones A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicata sunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum.*

[a] 19. vel 20. sexti.

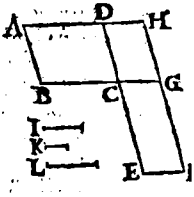
PONATVR deinde esse, vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. [b] *Cum enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.*

[b] 19. vel 20. sexti.

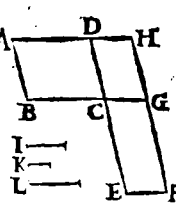
THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogrā-ma inter ſe rationem habent eam, qua ex lateribus componitur.



SINT parallelogramma æqui-angula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum eſſe compoſitā ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedētia proportionum ſint in vno parallelogrammo, & conſequentia in altero; hoc eſt, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE. Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE & rectæ DC, ad rectam CG. Id eſt, ſi ſumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, ſit, ſicut BC, latus ad latus CG & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita eſſe parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt eſt recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compoſitam eſſe ex eiſdem proportionibus, hoc eſt, ex proportionibus BC ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam: Quo poſito, cum anguli BCD & ECG, ſint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propoſ. 14. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producatur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaq; (vt diximus, recta I, quacunq;) inueniatur tribus BC, CG & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K quart



[a] 1. sexti. quarta proportionalis L. Quoniã igitur est, [a] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K; [b] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [c] ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L. [d] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammũ CF. Eademq; ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 11. quinti.

[c] 1. sexti.

[d] 22. quinti.

SCHOLIVM.

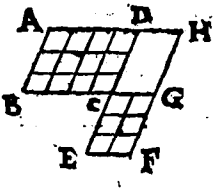
EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [e] *Cum sit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG: & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE; Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad CH, & CH, ad CF; componetur quoque eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.*

[e] 1. sexti.

HANC porrò propos. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ sint in numeris, veniemus quoque ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE,

CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterũ, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammũ CF: quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{22}{11}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certè hoc modo. Posita prima proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, $11.5.7\frac{6}{7}$. Quòd si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.



SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. coninuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem habeat duplam, at DC, ad CE proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF, solum 6 atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominato

minator sit 1 $\frac{22}{35}$. In posteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inaqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inaqualitatis, tum ex aqualitatis proportione; quod idem interpretes negant. In exemplo namque prioris proportio lateris DC, ad CE, est minoris inaqualitatis, in posteriori vero, aqualitatis. Sed hac de re plura scribemus in propos. 5. lib. 8.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; [a] atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis, [b] quorum sunt dimidia, [c] eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF.

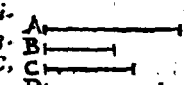
[a] 23. sexti.
[b] 34. primi.
[c] 15. quinti.

PRO-

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere. [a] *Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quòd his illa sumpta sint æquales.*

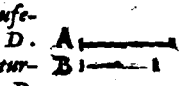


[a] 12. sexti.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. [b] *Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D; Si proportio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*



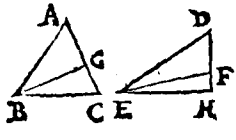
[b] 12. sexti

VERVM hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio proprie, quia alius tum totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad propos. 5. lib. 8. ostendemus.

TRIAN-

IIII.

TRIANGVLA, *quæ unum* angulum uni angulo æqualem habent, *eandem* proportionem habent, quam rectangula, *quæ* sub lateribus æqualem angulum comprehendẽtibus continentur.



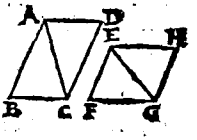
SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH; erunt triãgula ABG, DEH, æquiangula, vt constat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, sint æquales. [a] *Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA,* [b] *ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF.* [c] *Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF,* [d] *ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF,* [e] *quòd hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases AC, DF, altitudinesque easdem BG, EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.*

[a] 4 sexti.
[b] 1. sexti.
[c] 11. quinti.
[d] 15. quinti.

PARAL-

V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.



SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. [a] Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG; [b] quòd hæc ipsorum sint dimidia; [c] Erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.

[a] 15. quinti.
[b] 34. primi.
[c] 11. quinti.

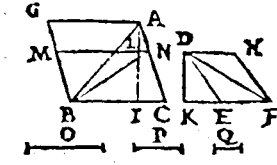
VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habẽt compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M;

Vt autem A I, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, aqualis, quòd & AI, ipsi DK, aqualis ponatur; [a] *Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt BC, ad EF.* [b] *At vero, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH.* [c] *Igitur quoque erit, vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.*

[a] 7. quinti.
[b] 1. sexti.
[c] 11. quinti.



SINT iam altitudines AI, DK, inaquales, & AI, maior; bases vero BC, EF, vel aquales, vel etiam inaquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, aquali ipsi DK; ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturq; recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad triangulum NBC, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, aqualem, hoc est, vt O, ad P, per ea, qua ad 1. prepos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quòd triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, ita est, basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q: [c] *erit ex aquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF:*

[d] 1. sexti.
[c] 22. quinti.

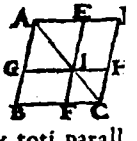
EF: Ex eiſdem proportionibus componetur proportio triangu
li ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, a
parallelogrammum EH. Quod eſt propoſitum.

EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli DEF
cuius altitudo minor eſt, ad triangulum ABC, & parallel
grammi EH, ad parallelogrammum CG, compoſita eſſe
proportione baſis EF, ad baſin BC, & proportione altitudin
DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q
ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, v
prius; [a] erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & p
rallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, a
BC, hoc eſt, vt Q. ad P. Item triangulum NBC; ad triangu
lum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogramm
CG, vt LI, ſeu DK, ad AI, hoc eſt, vt P, ad O; ex iis, quæ a
propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demonſtrauimus. [b] E
æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q
ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex pr
portione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis EF, ad baſ
BC; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudi
nis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proport
DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eiſdem propoſitionibu
Quod eſt propoſitum.

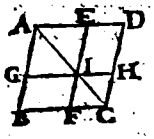
THEOR.

PROBL. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ ci
ca diametrum ſunt, parallelogramm
& toti, & inter ſe ſunt ſimilia.



ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parall logrammo, & inter ſe ſe. Quòd enim æquiangula ſi toti, facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, q



a 29. primi. angulus B A D; a & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus A G I, externus interno ABC; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est E G, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC; & triangulum A E I, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. b erit vt A B, ad B C, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus c erit vt BC, ad C A, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. d Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad I E; ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo B D; e atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. sexti.

c 4. sexti.

d 22. quinti.

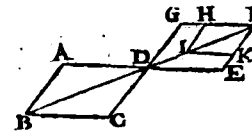
e 21. sexti.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, qua habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi producta consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera recta duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, ijsdem fere modis ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad E, circa quam consistat parallelogram-

lelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrãmi AC. Dico parallelogrammum GE, simile esse parallelogrammo AC. Quòd enim ambo inter se sint aquiangula, facile ostendetur. [a] Nam quia angulus A, aqualis est angulo alterno ADG; huic autem aqualis quoque est alternus angulus G; erunt aquales anguli A, & G.



Quare hu oppositi C, & E, aquales quoque erunt. [b] Rursus quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt aquales, [c] erunt hu quoque oppositi ABC, GFE, aquales. Igitur aquiangula sunt GE, AC, parallelogramma. Quòd autem latera habeant proportionalia circum aquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum BAD, aquiangulum sit triangulo DGF; & triangulum BCD, triangulo DEF, ut constat ex propos. 29. lib. 1. [d] Erit ut BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rursus ut AD, ad DB, ita GF, ad FD; & ut DB, ad DC, ita FD, ad FE, [e] ac propterea ex aquo ut AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis aquales sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos aquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma AC, GE.

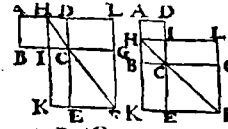
a 29. primi.
b 34. primi.
c 15. primi.
d 34. primi.
d 4. sexti.
e 22. quinti.

QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & G; erit HK, simile ipsi GE, [g] ut Euclides demonstrauit: Atqui eidem GE, simile est quoque AC, ut nunc ostendimus. [h] Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum. SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

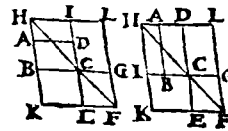
g 24. sexti.
h 21. sexti.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

DVO parallelogramma aquiangula, sed non similia, sint

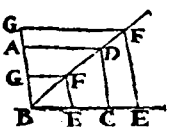


ABCD, CEFG; & ex ABCD, abscindendum sit parallelogrammum ipsi CEFG, simile. Coniungantur ambo ad angulos aquales BCD, ECG, *ita vt sit vna linea recta* BCG, *& propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratum est,* ECD, *quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter* FC, *producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus AB; (Neque enim in punctum A, cadet: quia* AC, *esset simile ipsi* CF, *vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammum abscissum* HC, *simile esse ipsi* CF. *Si enim totum parallelogrammum* KL, *compleatur, erunt* HC, CF, *circa diametrum. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.*



EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, *vt fiat ipsi CEFG, simile. Coniungantur vti prius, & diameter* FC, *extendatur, donec in H, secet vel latus B A, protractum, vel latus DA, protractum. Neq; enim in punctum A, cadet: quia* AC, *esset ipsi* CF, *simile, vt demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi A D, vel ipsi A B, donec secet vel latus* CD, *protractũ, vel* CB, *protractũ in I. Dico parallelogrammũ auctum* HC, *simile esse parallelogrãmo* CF. *Nam si cõpleatur totum parallelogrammũ* KL, *consistens* HC, CF, *circa diametrũ;, Quare similia inter se erũt.*

* 24. sexti.

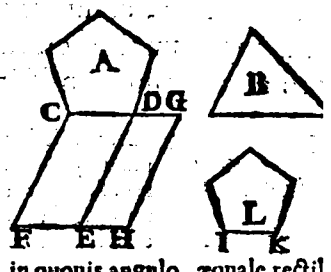


PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis proposiri in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, *si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe* BC; *Atque ex E, quolibet puncto vltra* C, *ipsi* CD, *parallela* EF, *ducenda, secans*

ſecans diametrum BD, producta etiam F, & per F, ducta FG, parallela ipſi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. Erit enim parallelogrammum GE, ſimili ſimiliterque poſitum ipſi AC, & reliqua eodem. Quod ſi minus debeat deſcribi, ſed maius erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.

PROBL. 7. PROPOS. 25.

DATO rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.



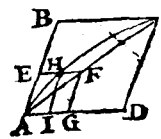
SINT data duo rectilinea A, & B, ſitque conſtituendum aliud rectilineum, quod ſimile quidem ſit ipſi A, æquale vero ipſi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui ſimile debet conſtitui, [b] conſtituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et ſuper rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis ſit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipſi B, eritque; tam CDG, quàm FEH, linea vna recta, vt demonſtratum eſt propoſ. 45. lib. 1. [c] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; [d] ſuper quam conſtituatur rectilineum L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitum. Dico L, æquale eſſe alteri rectilineo B. Cum enim ſint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per corroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG tertiam, ita A, rectilineum ſuper primam CD, ad rectilineum L, ſuper IK, ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: [e] Vt autem CD, ad DG, ita eſt parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiuſdem altitudinis

a 11. quinti. b 7. quinti. c 11. quinti d 9. quinti.

a Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. b Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quòd parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. c Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L. d propterea quæ æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrãmum ablatum sit, & simile toti; & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



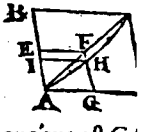
EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrũ AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H. puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; e ipsa erunt similia, similiterque posita. f Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG; quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. g Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG. h Ac propterea æquales

e 24. sexti. f 1. definit. sexti. g 11. quinti. h 9. quinti.

erunt

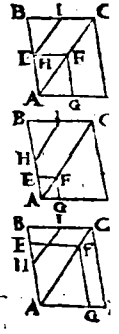
erunt rectæ AI, AG; pars, & totum: quod eſt abſurdum.

QVOD ſi dicatur recta AHC, ſecare alterũ latus FG; Tunc ducta HI, parallela ipſi EF; [a] erunt rurſus ſimilia parallelogramma BD, IG, ſimiliterq; poſita. [b] Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque eſt GA ad AE, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BD EG. [c] Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE [d] ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum Quod eſt abſurdum. Conſtituunt ergo rectæ AF, FC ynam rectam lineam; hoc eſt, ducta diameter AC tranſit per punctum F; & ducta diameter AF, c dit in punctum C. Itaq; ſi a parallelogrammo parallel grammum ablatum ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

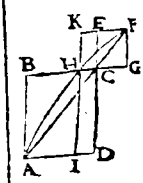
ALITER idem theorema demonſtrabimus oſtenſiui hoc modo. Diuiſis lateribus AB, BC, bifariam in punctis I I, ſiue punctum H, cadat in punctum E, ſiue ſupra, ſiue infr ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter ſimilitudinem parallelogrammorum, eſt vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autẽ tota AB, ad totam BC; [e] ita eſt dimidia HB, ad dimidiam BI; [f] Erit vt HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, ([g] qui æquales ſunt, internus, & externus.) latera proportionalia, [h] erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. [i] Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam vero recta, qua ex puncto A, ad punctum C, ducitur concipitur, [k] parallela quoque eſt rectæ HI; propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc conſtitu AB C, proportionaliter eſſent ſecta in H, & I, vtpote bif riam; efficitur, vt ducta recta AC, eadem fiat, quæ AI tranſeatq; per punctum F; cum ex puncto A, ſolum vna l



nu

nea parallela recta H I, posſit duci, vt manifeſtum eſt. Conſiſtunt ergo B D, E G, parallelogramma ſimilia, ſimiliterque poſita circa eandem diametrum A F C. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi duo parallelogramma ſimilia ſimiliterq; poſita non habeant angulum communem, ſed vnum ſit extra aliud, hac tamen lege, vt ita ſint connexa inter ſe ſecundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas conſtituant: demonſtrabimus iiſdem fere mediis, ea circa eandem conſiſtere diametrum. Sint enim duo parallelogramma ſimilia ſimiliterque poſita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungantur, vt lineæ B C, C G, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. oſtendimus, lineæ D C, C E, vnam quoque lineam rectam componant.



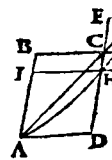
Dico parallelogramma B D, E G, circa eandem conſiſtere diametrum, hoc eſt, diametrum A C, cum diametro F C, vnam rectam lineã conficere. Si enim A C, F C, non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta ſecans B C, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipſi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, productæ conſiſtunt, efficiuntq; duæ rectæ B H, H I, cum duabus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipſa erunt ſimilia ſimiliterq; poſita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonſtrauimus. Quare erit vt H B, ad B A, ita F K, ad K H.

[a] 8. quinti. *[a] Habet autem C B, maior ad B A, maiorem proportionem, quam H B, minor ad eandem B A; & eſt vt C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur ſimilia ſimiliterque deſcripta. Igitur & F E, ad E C, hoc eſt, ad ſibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc eſt, quam F K, ad K H. Quam obrem ſi F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam*

[b] 10. quinti. *F K, ad eandem K H; [b] erit E F, maior quam F K; pars quã totum: Quod eſt abſurdum.*

QVOD ſi quis dicat, rectam A H F, ſecare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ

ita FG, protracta in K; erunt rursus similia, similiterq; posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit vt HD, ad DA, ita FK, ad KH.

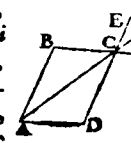


[a] Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et est vt CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterq; posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam FK, ad KH; [b] ideoque FG, maior erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum.

[a] 8. quinti.

[b] 1. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli B, E, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; [c] atq; idcirco æquiangula erunt, habebuntq; angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, æquales: [d] Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales; [e] Ac propterea AC, FC, vnam component rectam lineam. Quod est propositum.

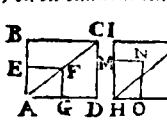


[c] 6. sexti.

[d] 29. primi.

[e] 14. primi.

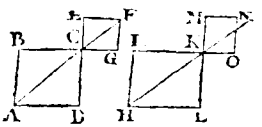
RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a tota ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum consistens, [f] erit EG, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo IL, quod sit æquilaterum & æquiangulum ipsi BD, sumatur HM, æqualis ipsi EF, & MN, æqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum MO, æquale & simile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo IL;



[f] 24. sexti.

lo I L; ſed tamen quia non eſt ſimiliter poſitum, non conſiſtet circa eandem cum toto I L, diametrum.

IDEM quoque hic perſpicitur in rectangulis ſimilibus, quorum vnum eſt extra alterum, ſecundum tamen angulos

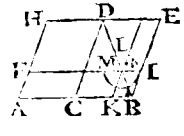


eorum ita inter ſe connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia ſunt parallelogramma rectangula E D, E G; & I L, M O; in quibus EG, quidem conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam eſt ſimiliter poſitum: At vero M O, minime conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non eſt ſimiliter poſitum, quamuis ſimile ſit, cum prorſus ſit æquale ipſi EG. Nam KM, æqualis eſt ipſi EF, & MN, ipſi F C, &c.

26. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrāmis ſimilibus ſimiliterq; poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur; maximū id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

DETVR recta A B, diuiſa bifariam in C, ſuperq; eius dimidiam BC, conſtituatur quodcunque parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur com



pleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, ſuper dimidiam A C, conſiſtens, applicatum ſecundum A B, deficiens parallelogrammo C E, & exiſtens

existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, [a] quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. [b] Quoniam vero complementa C G, G E, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: [c] Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoque communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc D G,) erit quoque A D, [d] æquale existens ipsi C E, propter bases æquales A C, C B, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

[a] 24. sexti.
[b] 43. primi.
[c] 36. primi.
[d] 36. primi.

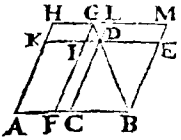
ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. [e] Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, ([f] quod ipsi G E, æquale est,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atque ideireo addito communi C F; maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

[e] 36. primi.
[f] 43. primi.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta H M, quæ sit parallela ipsi A B, occurrat; rectis A K, B E, protractis in H, & M; Item ducta G F, parallela

rallela ipſi A H; erit parallelogrammum A G, applicatum ſecundum rectam A B, deficiens parallelogrammo FM, [a] quod ipſi C E, eſt ſimile ſimiliterq; poſitũ, cum ſit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius eſſe A D, ipſo A G. Protracta enim C D, ad L, [b] erunt æquales rectæ H I, L M, [c] ideoque æqualia parallelogramma H D, D M. [d] Cum igitur D M, ſit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipſi D F. Eſt autem H D, maius quam H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit quam H I, eodem parallelogrammo I L; Ac propterea communi addito A I, maius erit A D, quam A G, eodem parallelogrammo I L. Iiſdem argumentis concludes A D, maius eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam A B, vt punctum G, ſit vltra D, in diametro B D, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe A C, habetque maiorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrâmo C E. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandẽ rectã lineam applicatorũ, &c. Quod erat demonſtrandũ.

[a] 24. ſexti.
[b] 34. primi.
[c] 36. primi.
[d] 43. primi.



SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidiata A C; qualis eſt A K, in priori figura; vel minorem; cuiuſmodi eſt A F, in figura poſteriori: prout punctum G, ſumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.

27. PROBL. 8 PROPOS. 28.

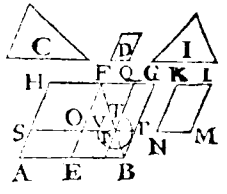
A D datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiẽs figura parallelogrâma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato.

Oportet

Oportet autem datũ rectilineũ, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cũ ſimiles fuerint defectus & eius, quod ad dimidiã applicatur, & eiꝰ, cui ſimile deeſſe debet.

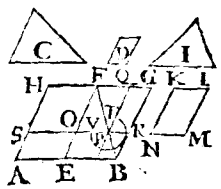
AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod ſit ſimile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in E, ſuper medietatem EB, [a] deſcribatur parallelogrammum EFGB, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale eſt ipſi C; cum ſit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, ſimili ipſi D; factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius eſt quam C. (Neque enim minus eſſe debet. Nam cum per propos præcedentem, ipſum ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari vllum ad AB, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque ſibi æquale EG, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) [b] & conſtituatur parallelogrammum KLMN, ſimile quidem ſimiliterq; poſitum ipſi D, ſeu ipſi EG, æquale vero exceſſui inuẽto I; vt ſit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, ſimul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG, maiora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, eſſet etiam EG, æquale ipſi NL, vel minus, vt conſtat. Quare abſciſsis rectis FO, FQ, quæ

[a] 18. ſexti.



[b] 25. ſexti.

quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi L N, æquale, & eidem simile similiterq; positum, & propterea ipsi E G: [a] atque adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, quæ sit BF. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, [b] quod simile est ipsi E G, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. [c] Nam cum P G, æquale sit complemento P E; si addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, [d] quod æquale est ipsi E R, propter bases æquales E A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C, (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.



[a] 26. sexti.

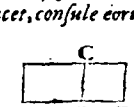
[b] 24. sexti.

[c] 43. primi.

[d] 36. primi.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quam de re, si placet, consule eorum commentarios.

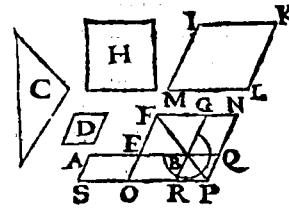


PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis linea per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B,

CB, erit AC, applicatum, rectangulum contentum sub AD, & DC. Cum ergo DC, æqualis sit ipsi DB, propter quadratum CB; continebitur quoque AC, sub segmentis AD, DB, per applicationem factis.

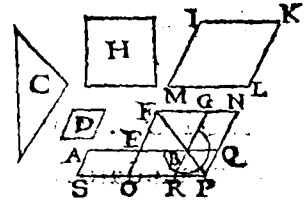
PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

A D datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



A D datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; [a] super dimidiam EB, constituatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterq; positum. [b] Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; [c] cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile vero, ipsi E G, similiterque positum; eritque propterea I K L M, maius quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cũ parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque M K, vel æquale ipsi E G, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo ON; erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cum sit æquale ipsi M K, & simile. [d] Quare O N, E G, circa eandem

[a] 10. sexti.
[b] 14. secũdi.
[c] 45. sexti.
[d] 26. sexti.



diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, [a] quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. [b] Nam cum A O, E R, sint æqualia, [c] & E R, æquale complemento B N; erit & A O, ipsi B N, æquale. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon E P G, æqualis est rectilineo C. (Nam cum M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, vna cum E G; si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P G, & rectilineum C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

[a] 24. sexti.
[b] 36. primi.
[c] 43. primi.

29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIT recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato A B C D; [d] ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, ita vt sit A F, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint D F, &, A C; si demat̃ commune

[d] 29. sexti.

mune AE, remanebunt æqualia GH, HC; quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos; erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit vt tota AB, ad segmentum AH, vt segmentum AH, ad segmentum HB; secta est AB, extrema media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato medianæ AH; erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema media ratione.

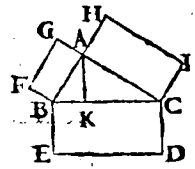
ALITER totum problema consideremus. Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ recta extrema ac media ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus. Habet autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates, proprietatesque, vt in libris Geometria manifestum erit; vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quandam ob admirabilem eius vim, nuncupatæ, dicatur habere proportionem: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

31. THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quę-uis a latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ prio ri illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.



TRIANGVLVM rectangulum ſit ABC, habens angulũ BAC, rectum; deſcribaturque ſuper BC; quæcunq; figura rectilinea BCDE, [a] cui ſimiles ſimiliterq; poſite ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK; erit per corollarium propoſ. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primã, ad figuram CH, ſuper ſecundam, ſimilem ſimiliterq; poſitam, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Nõ ſecus oſtendetur, eſſe quoque vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, ſint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur eſt vt CK, prima quantitas ad BC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, ſecundã, ita BG, ſexta ad BD, quartam; [b] erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, ſecundam, ita tertia CH, cum ſexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, ſimul æquales ſecundæ BC Igitur tertia CH, & ſexta BG, ſimul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod eſt propoſitum.

[a] 18. ſexti.

[b] 24. quinti.

[c] 8. ſexti.

ALITER. Cum triangulo ABC, ſimile ſit triangulum KAC, ſintq; homologa latera ipſorum BC, CA;

(Nam

(Nam est vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) [a] habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. [b] Habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. [c] Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum KBA, ad triangulũ ABC, ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergò rursus est, vt KAC, prima quantitas ad ABC, secũdam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; [d] erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, ita composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod est propositum.

[a] 19. sexti.

[b] 19. vel 20. sexti.

[c] 11. quinti.

[d] 24. quinti.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; [e] cum vtraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundã quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem. [f] Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: [g] Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis; &c. quod erat ostendendum.

[e] 19. vel 20. sexti.

[f] 24. quinti.

[g] 47. primi.

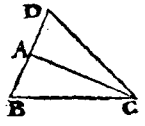
SCHOLIVM.

VIDES igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod solis quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus.

Videtur tamen & theorema illud, quod tibi ex Pappo demonſtrauimus, aliqua ex parte adhuc eſſe vniuerſalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammiſq; etiam non ſimilibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figuriſq; ſimilibus, & ſimiliter poſitis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quam 47. propoſitionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.



DETVR triangulum ABC, ſitque figura quæuis ſuper latus BC, deſcripta æqualis duabus figuris ſibi ſimilibus ſimiliterq; deſcriptis ſuper reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, eſſe rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ ſit ipſi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus eſt, [a] *erit figura ſuper CD, (quæ ſimilis ſit ei, quæ ſuper BC, ſimiliterque poſita) deſcripta æqualis figuris ſuper AD, AC, deſcriptis, quæ ei ſimiles ſint, ſimiliterque poſita: Eſt autem figura ſuper AD, æqualis figuræ ſuper AB, ob æqualitatem laterum. Igitur figura ſuper CD, æqualis erit figuris ſuper AB, AC. Cum igitur figura ſuper BC, eiſdem figuris ſuper AB, AC, æqualis ponatur, erunt figura ſuper CD, BC, inter ſe æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, vt conſtat ex lemmate propoſ. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & baſis DC, oſtenſa eſt quoque æqualis baſi BC;* [b] *erunt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cum DAC, rectus ſit, ex conſtructione, rectus quoque erit BAC. Quod eſt propoſitum.*

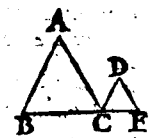
[a] 31. ſexti.

[b] 8. primi.

THEOR.

THEOR. 22. PROPOS. 32. 30.

SI duo triangula, quæ duo latera duo bus lateribus proportionalia habeant, secũdum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.



HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, [a] erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa [b] erunt inter se equiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo equalibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: [c] Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 29. primi.

[b] 6. sexti.

[c] 32. primi.

[d] 14. primi.

SCHOLIVM.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundũ

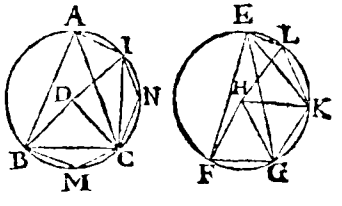
vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quē triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse aequales, & propterea triangula esse aequiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliqua hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaque sunt ad angulum CBD, ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

32. ## THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandē habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistant anguli B D C,



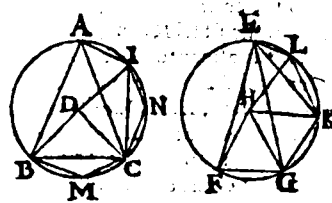
BDC,FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcũ FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG; & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehẽdunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, [a] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC; At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, [b] erunt quoque æquales arcus BC, CI; [c] ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione equales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHI, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, [d] necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est; Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [e] Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC,

[a] 1. quarti.
[b] 28. tertij.
[c] 27. tertij.
[d] 27. tertij.
[e] 6. defin. quinti.

BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

QVONIAM vero, vt angulus BDC, ad angulum FHG, [a] ita est angulus BAC, ad angulum FEG; [b] cum illi horum sint dupli; perspicuum est, [c] ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, [d] qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus BAC, CBAL. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, [e] atque adeo inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, [f] quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero, si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, [g] quæ inter se respondent. Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent



[a] 15. quinti.
[b] 20. tertij.
[c] 11. quinti.
[d] 27. tertij.
[e] 24. tertij.
[f] 4. primi.
[g] 6. definit. quinti.

bent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM. I.

HINC manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, vt eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. Quare & inter ſe eadem erunt. [a] 11. quint.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circumferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum.

NAM vt eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro, [b] *ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propoſ. lib. 5. demonſtrauimus. Quod eſt primum. Quoniam igitur eſt vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur.* [c] *Cum ſit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum; erit quoque, per ea, quæ ad propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitum.*

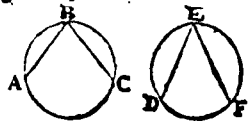
[b] 33. ſexti

[c] 33. ſexti

SCHO-

SCHOLIVM.

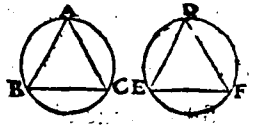
CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum, qui circumferentia alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate.



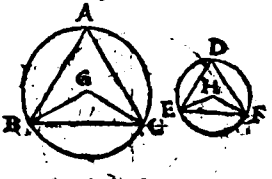
Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam cõstituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcus DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

NON obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similiũ, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoq; sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ; veluti in expositione prædicta definitionis docuimus. Sint enim primũ duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, segmẽta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem prafatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere

habere eãdem proportionem ad integras circulorum circumferẽtias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, a arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, b eandem proportionem habebunt: Atq; idcirco, quæ pars est arcus BAC, totius circũferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.



SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, dicẽtur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia.



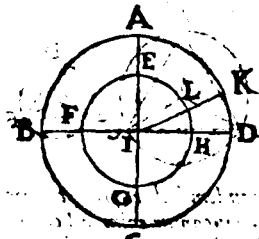
Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales, c cum hi illorum dupli existant. d Quare quatuor recti ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum H. Atqui ut quatuor recti ad angulum G, ita est tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BC: Et ut quatuor recti ad angulum H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. e Igitur ut tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuersionem ergo rationis erit quoq;, ut tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcũ EDF. Et componendo, ut arcus BAC, ad totã circũferẽtiã ABCA, ita arcus EDF, ad totã circumferentiã DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD. Quod est propositum.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in Sphæram, & ad propos. 22. lib. 3. sive proportionibus ostendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I. descripti. Si igitur egrediantur e centro I, duæ rectæ IB, ID, efficientes unam lineam rectam BD, manifestum est, arcus BAD, FEH, similes esse, cum sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ IA, IC, constituentes angulum rectum AID, perspicuum quoque est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib. 3 sint Quadrantes suorum circulorum.

EMITTANTVR iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunque angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt est arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. 2. huius propos. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; [a] *erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH: ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum.*

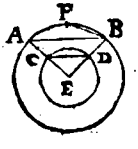
[a] 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HL, insistunt in centro I, anguli æquales, immo idem, erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, ut paulo ante ostensum est.

SED

SED placet etiam hic demonſtrare lemma, quod ad propoſ. 6. lib. 3. Theodoſij propoſuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem eſt eiuſmodi.

AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqu alibus auferunt arcus inæquales, maiorque eſt arcus minoris circuli, quàm vt ſimilis ſit arcui circuli maioris.



SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, deſcripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunque EA, EB, ſecantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntque arcus AB, CD, ſimiles, vt proximè demonſtrauimus. Et quoniam recta EA, EB, ſecta ſunt in C, D, proportionaliter, quòd tàm EA, EB, quàm EC, ED, inter ſe æquales ſint; [a] erunt ductæ rectæ AB, CD, parallelæ; atque ideo triangula EAB, ECD, ex Coroll. propoſ. 4. huius lib. ſimilia erunt. [b] Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Eſt autem EA, maior quàm EC. [c] Igitur & AB, maior erit quàm CD. Accommodetur ergo itaque CD, in circulo AB, æqualis BF; eritque ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, ſimilis ſit; erit arcus CD, maior, quàm vt ſimilis ſit ipſi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorque eſt arcus CD, circuli minoris, quàm vt ſimilis ſit arcui FB, circuli maioris. Quod eſt propoſitum.

HINC perſpicuum eſt, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quàm vt ſimilis ſit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipſi BF, auferat arcum CD, maiorem, quàm vt ſimilis ſit arcui FB; multò magis linea maior quàm CD, auferet maiorem arcum, quàm vt ſimilis ſit arcui FB; cum illa maiorem arcum abſcindat, quàm CD, vt in ſcholio propoſ. 28. lib. 3. oſtendimus.

HÆC autem demonſtratio propoſitum tantum colligit, quando arcus abſciſſi ſunt ſemicirculo minores, quales ſunt

BF,

BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alium non constituetur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm vt similis sit arcum semicirculo minori circuli maioris, multo minorem esse arcum semicirculo maiore circuli minoris, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quod si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquidò constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quàm vt similis sit arcui semicirculo minoris circuli maioris; neque opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, & absolutè inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quàm vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ GD, BF, æquales, auferantq; CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim rectâ GD, rectæ FB, cadet necessario arcus CED, extra arcũ FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra se contineat, sintq; ambo arcus in eandem partem cuni, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neq; vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, totî circumferentiæ circuli FGB, atque adeo æquales erunt circuli, quod est absurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus GED, dicatur cadere intra arcũ FGB, cuiusmodi est arcus CAD; quoniam vt paulo ante ostẽdimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm vt similis sit arcui FGB; sumatur arcus BFH, arcui CAD, similis, atque adeo maior arcu FGB. Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtrumque; ducantur rectæ AF, AB, productæq; recta FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. Itaque quoniam arcus

CAD,

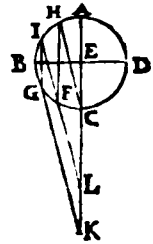
CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes æquales. [2] *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multò maior angulus CAD, angulo HGB. quod est absurdum. Ostensus enim est æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: sed neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo extra; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum est. Quod est propositum.* [2] 16. primi.

EX quo liquidò constat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

NEQVE verò omittenda videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat, & quam lib. 3. demonstrare debueramus, nisi memoria excidisset. Ea est eiusmodi.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

IN circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur versus C, quantumlibet. Diuisa autem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, GB, & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectæ FH, GI, quæ ex scholio propos. 27. lib. 3. ipsi AC, parallelæ erunt, eum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur



recta B G, occurrens A C, producta in K. Dico rectam A K, æqualem esse omnibus parallelis A C, H F, I G, simul sumptis. Ductis enim rectis H C, I F, & productis, donec cum A K, conueniant;
a quoniam anguli C H F, H F I, arcubus æqualibus C F, H I, insistentes, sunt æquales; 27. tertij.
b erunt rectæ H C, I L, parallelæ: Est autem & F H, ipsi C L, parallela. Parallelogrammum ergo est C H F L; 27. primi.
c ac proinde recta C L, rectæ F H, æqualis erit. 34. primi.
Eadem ratione erit K L, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi A C, fiet tota A K, omnibus A C, H F, I G, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.

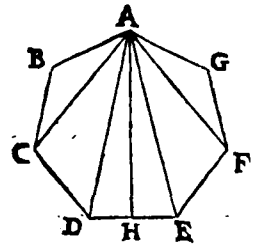
H V C quoque referenda est propositio sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quæ per incuriam in lib. 4. demonstrata non est, vt ad finem eiusdem lib. 4. diximus. Nimirum.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam; Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.

S I T primum figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum A B C D E F G, & ex angulo A, demissa recta A H, secet latus oppositum D E, bifariam. Dico angulum quoque B A G, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad

omnes

omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, aqualia ſunt, angulosq; continẽt aequales, ex hypotheſi; erũt & baſes AC, AF, aequales, & tam anguli BAC, GAF, quã BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur aequales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, aequales.



[a] 4. primi.

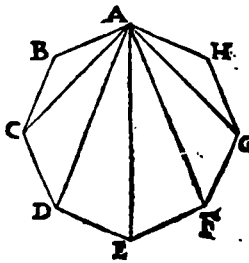
Quia igitur rurſus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, aequalia ſunt, continentq; angulos aequales, vt oſtenſum eſt; [b] erunt & baſes AD, AE, aequales, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppoſitum peruentum ſit. Vbi quia rurſus toti anguli CDE, FED, aequales ſunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, aequales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, aequalia ſint, angulosque aequales contineant, [c] erunt etiam anguli DAH, EAH, aequales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, ſint aequales, ſinguli ſinguli; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, aequalis; ac proinde angulus BAG, ſectus erit bifariam. Quod eſt propoſitum.

[b] 4. primi.

[c] 4. primi.

SED iam recta AH, ſecet angulum BAG, bifariam. Dico eam ſecare quoque latus oppoſitum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non ſecari bifariam, ſi ex A, ducatur alia recta ſecans DE, bifariam, ſecabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam oſtendimus. Duae igitur rectae eundem angulum BAG, ſecabunt bifariam. quod eſt abſurdum, cum vna medietate maior eſſet quàm altera. Recta ergo AH, ſecans angulum BAG, bifariam, ſecat quoque latus DE, bifariam. Quod erat propoſitum.

SIT deinde figura aequilatera & equiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppoſitum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, ſecare angulum BAH, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonſtrabimus, vt in antecedente



figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis; ideoque totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod est propositum.

SED recta iam AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumq; diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam ostendimus. Dua igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatque propterea, vt demonstratum est proximè, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

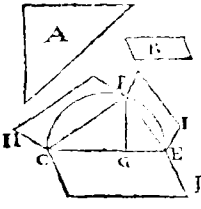
HOC demonstrato, perspicuum est, rectas lineas, quæ duos angulos proximos figuræ æquilateræ & æquiangulæ secent bifariam, se mutuò secare intra figuram, antequam ad opposita latera, vel angulos oppositos perueniant: ac proinde rectè demonstrari posse, punctum illud sectionis esse centrum circuli intra, vel circa figuram describendi, vt factum est propos. 13. & 14. lib. 4.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur; Hinc autem exordium capiemus.

A DATO

I.

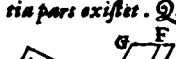
A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positum. [a] *Constituatur rectilineum CD, æquale quidem ipsi A, simile vero, & similiter positum ipsi B, superq; vnum eius latus CE, semicirculus describatur CFE.* [b] *Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, EF,* [c] *super quas constituantur rectilinea FH, FI, similia similiterque posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod iubetur.* [d] *Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat,* [e] *erit rectilineum CD, æquale rectilineis HF, FI, atque adeo, si auferatur rectilineum FI, simile similiterq; positum ipsi B, ex rectilineo CD, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineum HF, simile quoque ipsi B, similiterq; positum. Quod autem rectilineum ablatum FI, sit tertia pars rectilinei CD, ita ostenditur.* [f] *Quoniam est vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE;* [g] *quod triangula CGF, CFE, sint similia: Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales sint tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. huius lib.* [h] *Itē rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineū FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineum CD, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE,*

[a] *25. sexti.*
[b] *9. sexti.*
[c] *18. sexti.*
[d] *31. tertij.*
[e] *31. sexti.*
[f] *4. sexti.*
[g] *8. sexti.*
[h] *19. vel 20. sexti.*

ipſius GE, tripla, per conſtructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars exiſtit. Quod eſt propoſitum.



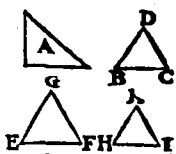
[a] 45. primi

QVOD ſi pars imperata, nempe tertia, ſimpliciter ſit auferenda, fiet id breuiſſime, hac arte. [a] Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata; & per E, agatur ipſi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam eſſe partem ipſius DG, hoc eſt rectilinei dati A. Cum enim ſit [b] vt DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autem per conſtructionẽ DE, ipſius DB, pars tertia; erit & DF, ipſius DG, tertia pars. Quod eſt propoſitum.

[b] 1. ſexti.

II.

DVOBVS datis rectilineis, tertiam proportionalem inuenire.



[c] 25. ſexti.
[d] 11. ſexti.
[e] 18. ſexti.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum ſit tertium proportionale. [c] Conſtituatur ipſi A, rectilineum æquale EFG, ſimile vero ſimiliterque poſitum ipſi BCD. Deinde late ribus homologis EF, BC, [d] inueniatur tertia linea proportionalis HI; [e] ſuper quam conſtituatur rectilineum HIK, ſimile ſimiliterque poſitum ipſis EFG, BCD. Dico HIK, eſſe tertium proportionale. Cum enim proportionales ſint recta EF, BC, HI; [f] erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis deſcripta (cum ſint ſimilia, ſimiliterque poſita) proportionalia. Cum ergo EFG, per conſtructionem, æquale ſit ipſi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod eſt propoſitum.

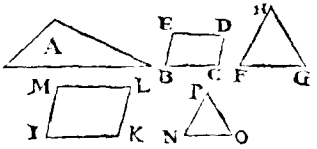
[f] 22. ſexti.

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

TRIA

TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale. [a] Constituatur rectilineũ IKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterq; positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, [b] inuenta quarta proportionali NO; [c] constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterque positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales, [d] erunt & rectilinea similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A, erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.

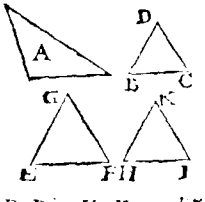


[a] 25. sexti.
[b] 12. sexti.
[c] 18. sexti.
[d] 22. sexti.

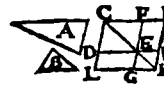
IIII.

DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniendum est proportionale. [e] Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC, [f] inuenta media proportionali HI, [g] constituatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, mediũ esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI, BC; [h] erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit æquale ipsis A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HIK, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod est propositum.



[e] 25. sexti.
[f] 13. sexti.
[g] 18. sexti.
[h] 22. sexti.



ALITER. *Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale.* [a] *Constituatur ipsi A, aequale parallelogrammũ quodcunq; CDEF;* [b] *ipsi vero B, aequale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positum ipsi CDEF. Connectanturq; hae parallelogramma ad angulos aequales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quae ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, vna quoque linea recta componatur ex FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammũ KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc est, ita EI, ad EG;* [c] *quòd recta EI, EG, rectis GH, HI, aequales sint.* [d] *Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG:* [d] *Vt autẽ DE, ad EI, ita est DF, ad EK; & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.*

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum [e] DF, GI, *similia sint, similiterque posita,* [e] *consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, aequalia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI,* [f] *quòd vtraque proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod est propositum.*

[a] 45. primi.
[b] 25. sexti.
[c] 34. primi.
[d] 1. sexti.
[e] 26. sexti.
[f] 1. sexti.

V.

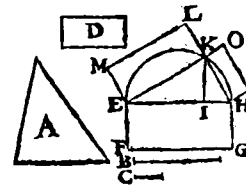
DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, data aque proportio recta B, ad C, oporteatque constituere duo rectilinea, quae ipsi A, aequalia sint, habeantque proportionem, quam B, & C; ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis D. [g] *Constituatur rectilineum EFGH, aquale ipsi A, & simile similiterque positum*

[g] 25. sexti.

ipsi

ipſi D. Diuiſo deinde latere eius EH, in I, ſecundum proportionẽ B, ad C, ex ijs, quæ ad propoſ. 10. huius lib. demonſtrauimus: deſcribatur circa EH, ſemicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ EK, HK.[a] Deſcribantur iam ſuper EK, KH, rectilineæ EKLM, KHNO, ipſi EG, vel ipſi D, ſimilia ſimiliterq; poſita; quæ dico æqualia etiam eſſe ipſi EG, ſeu ipſi A, habereq; proportionem datam B, ad C. [b] Cum enim angulus EKH, in ſemicirculo exiſtens rectus ſit; [c] erunt rectilineæ EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum ſint ſimilia inter ſe, ſimiliterq; deſcripta. [d] Quoniam vero eſt, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, cum triangula EIK, EKH, ſimilia ſint; Eſt autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK; quòd tres EI, IK, IH, ſint, ex corollario propoſ. 8. huius lib. proportionales: [e] Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologum KH; erit vt EI, ad IH; hoc eſt, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo ſimul æqualia EL, HO, quæ ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter ſe datam B, ad C. Quod eſt propoſitum.



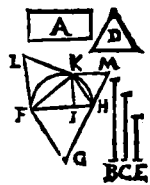
[a] 18. ſexti.
[b] 31. tertij.
[c] 31. ſexti.
[d] 4. ſexti.
[e] 19. vel 20. ſexti.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatque conſtituere duo rectilinea ipſi A, æqualia, & ſimilia ipſi D, propoſito, ſimiliterq; poſita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. [f] Inuenta ipſis B, C, tertia proportionali E; [g] fiat rectilineum FGH, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diuiſoque latere FH,

[f] 11. ſexti.
[g] 25. ſexti.

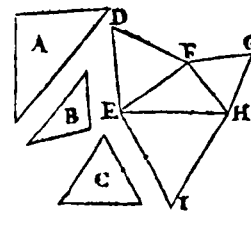


FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; describatur circa FH, semicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ FK, HK. [a] Describantur iam super FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterq; posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumq; latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. [b] Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit; [c] erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque & rectilineo A, æqualia. [d] Quoniam vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.

a 18. sexti.
b 31. tertij.
c 31. sexti.
d 4. sexti.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.



DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterque positum ipsi C. [e] Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterque positum ipsi C. Item ipsi B, æquale cõstituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positũ. Deinde rectilinea DEF, GFH,

e 25. sexti.

GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta EH, [a] *super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C.* [b] *Perspicuum autem est EHI, aquale esse duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.*

[a] 18. sexti.

[b] 31. sexti.

BREVIVS. Constituatur parallelogrammum aquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. [c] *Si enim huic parallelogrammo cõstruxerimus aquale rectilineum EHI, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum EHI, aquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

[c] 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: Erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

IN circulo ABCD, se mutuo secent rectæ AC, BD, in E. Dico segmenta AE, EC, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. [d] *Cum enim rectangulum sub AE, EC, comprehensum aquale sit rectangulo sub BE, ED, contento;* [e] *erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.*

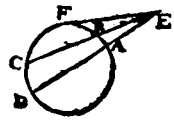
[d] 35. tertij.

[e] 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

EXTRA

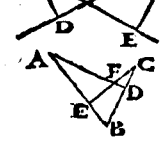


EXTRA circulum ABCD, ſumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, ED, ſecantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB. eſſe reciprocas rectis E D, E A: Hoc eſt, eſſe, vt EC, ad ED, ita E A, ad EB: Vel vt EC, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, [a] tangente circulum in F, erit rectangulum ſub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum ſub ED, EA, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula ſub [b] EC, EB, & ſub ED, EA, æqualia erunt: [b] Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. [c] Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale eſt tam rectangulũ ſub EC, EB, quàm rectangulum ſub ED, EA; [d] erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quàm tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo E F, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum ſecet, & ſegmentum eius exterius. Quod eſt propoſitum.

[a] 36. tertij.
[b] 14. ſexti.
[c] 36. tertij.
[d] 17. ſexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & ſectionem, altera vero inter ſectionem, & prioris lineæ aſſumptę perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ.



DVÆ rectæ AB, CB, ſe mutuo ſecẽt in B, & ex terminis A, C, ad ipſas demittantur perpendiculares; A D, quidem ad CB, at vero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, ſi angulus ABC, fuerit obtuſus; in ipſas vero introrſum, ſi idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & ſectionem B; poſterior vero inter ſectionem B, &

B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipſam AB, aſſumptam ducitur) reciprocas eſſe duabus CB, BD, (quæ inter ſimiles terminos includuntur) hoc eſt, eſſe vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cũ enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales ſint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti ſunt; [a] & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in poſteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. [b] Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ae propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod eſt propoſitum.

[a] 15. prim.

[b] 4. ſext.

PORRO eadem ratione ſegmenta perpendicularium AD, CE, in poſteriori figura ſe mutuo ſecantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, ſint æquiangula; [c] erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod eſt propoſitum.

[c] 4. ſext

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuo ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ ſe mutuo ſecent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, [illegible] BI, IC, eſſe proportionalia. [d] Cum enim ſit, vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; [e] Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod eſt propoſitum.

[d] 1. ſext

[e] 11. quin

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris ſe mutuo ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVI-

DIVIDANT *diametri* A C, BD, *se mutuo secantes in* E, *quadrilaterum* ABCD. *Dico quatuor triangula* AED, CED, AEB, CEB, *esse*

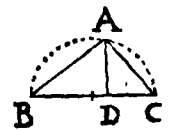
[a] *1. sexti.* *proportionalia.* [a] *Erit enim vt* AE, *ad* EC, *ita triangulum* AED *ad triangulum* CED; *& triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB. [b] *Quare vt triangulum* AED, *ad triangulum* CED, *ita triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB. *Eademque ratione ostendes esse, vt* BEA, *ad* DEA, *ita* BEC, *ad*

[b] *11. quinti.*

[c] *1. sexti.* DEC; [c] *cum vtraque proportio eadem sit proportioni* BE, *ad* ED. *Constat ergo propositum.*

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



IN rectangulo triangulo ABC, *ex angulo recto A, demissa perpendiculari* AD, *secet basim* BC, *in* D, *extrema ac media ratione, sitque maius segmentum* BD; *ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus* AB, *latere* AC, *maius. Dico tria latera* BC, BA, AC, *esse continuè proportionalia. Quoniam enim*

[d] *17. sexti.* *per hypothesin est vt* BC, *ad* BD, *ita* BD, *ad* DC; [d] *erit quadratum ex* BD, *rectangulo sub* BC, CD, *aquale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib.* AC, *media proportionalis est inter*

[e] *17. sexti.* BC, CD; [e] *erit quoque quadratum ex* AC, *eidem rectangulo sub* BC, CD, *aquale. Quare quadrata ex* BD, AC, *aqualia inter se erunt, ac proinde & recta ipsa aqualia erunt. Est autem, ex coroll. propos. 8. huius lib.* AB, *inter* BC, BD, *media*

propor-

proportionalis. Igitur eadem A B, *media proportionalis erit inter* BC, AC: *hoc eſt erit vt* BC, *ad* AB, *ita* A B, *ad* A C. *Quod eſt propoſitum.*

SINT deinde tria latera B C, A B, A C, *in triangulo rectangulo* ABC, *continuè proportionalia, hoc eſt, ſit* B C, *ad* AB, *vt* AB, *ad* AC, *demittaturque perpendicularis* AD, *ad baſim* BC. *Dico* BC, *ſectam eſſe in* D, *extrema ac media ratione. Quoniam enim eſt, vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC: *Eſt autem vt* BC, *ad* AB, *ita quoque* AB, *ad* BD; *quòd* AB, *media proportionalis ſit inter* BC, BD, *ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* [a] *erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AB, *ad* BD: [b] *ac proinde aquales erunt* AC, *&* BD. [c] *Vt igitur* AC, *ad* CD, *ita erit* B D, *ad* C D. *Sed vt* AC, *ad* CD, *ita eſt* B C, *ad* AC, *quod ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* A C, *ſit media proportionalis inter* BC, *&* CD. [d] *Igitur erit quoque* BC, *ad* A C, *hoc eſt, ad* BD, *vt* AC, *hoc eſt, vt* BD, *ad* CD: *ac propterea* B C, *in* C, *ſecta erit extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

[a] *11. quinti.*
[b] *9. quinti.*
[c] *7. quinti.*
[d] *11. quinti.*

ITAQVE ſi ſuper datam rectam BC, *conſtruendum ſit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia ſint, ſecanda erit data recta* B C, *extrema ac media ratione in* D. *Deſcripto deinde ſemicirculo* B A C, *circa eandem datam* B C, *erigenda erit ad* B C, *perpendicularis* DA, *iungendaſq; recta* B A, C A. *Triangulum enim* ABC, *rectangulum erit,* [e] *cum angulus* B A C, *in ſemicirculo rectus ſit; ac proinde cum perpendicularis* AD, *ſecet baſim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonſtratum eſt.*

[e] *31. tertij.*

XIIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineã rectam ducere, quę triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.

SIT triangulum ABC, *oporteatque a dato puncto* D, *in eius latere* BC, *lineam rectam ducere, qua triangulum ſecet in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam* E, *ad* F. *Diuidatur* BC, *in* G, *ſecundum proportionem* E, *ad* F, *cadatque primò*

primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturque recta DA. [a] Quoniam igitur est vt BD, ad DC, ita triangulum BDA, ad triangulum CDA, secabit recta DA, triangulum datum secundum proportionem datam B G, ad GC, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.

a 1. sexti.

C A D A T deinde punctum G, inter C, & D, vt in secunda figura. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq; recta D H. Dico rectam D H, secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt E, ad F, seu vt BG, ad GC. Ducta enim recta G A; [b] erũt triãgula H G A, G H D, aqualia, cum sint super eandem basin GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addito igitur communi triangulo CGH, fient aqualia triãgula CGA, CDH: [c] Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionẽ ad CGA, & ad CDH. [d] Diuidendo igitur, erit vt triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium B D H A, ad triangulum CDH. [e] Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur erit & trapezium B D H A, ad triangulum CDH, vt BG, ad GE, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositũ.

b 37. primi.
c 7. quinti.
d 17. quinti.
e 1. sexti.

C A D A T tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq; recta DA, cui rursus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rursus, rectam ductam D H, secare triangulum A B C, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, vt E, ad F. Ducta enim recta G A; [f] erunt, vt prius, triangula HGA, GHD, aqualia; additoque communi B G H, aqualia fient B G A, B D H. [g] Quare erit ABC, ad BGA, vt ad BDH. [h] Diuidendo ergo erit CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH; & conuertendo, vt BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA. [i] Est autem B G A, ad C G A, vt BG, ad GC. Igitur & B D H, ad trapezium CDHA, erit vt BG, ad GC, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.

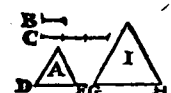
f 37. primi.
g 7. quinti.
h 17. quinti.
i 1. sexti.

H I N C perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, qua à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto

puncto ductam dividatur triangulum ſecundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor ſit denominatore partis imperatæ, (vt ſecundum proportionem triplam, ſi quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifeſtum eſt. Habebit enim tunc totum triangulum ad ſegmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis eſt denominatori partis propoſitæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis aſſumptæ addatur vnitas, quæ ante deerat.

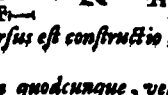
XV.

DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius, vel minus, ſecundum proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui ſimile ſimiliterque poſitum ſit deſcribendum maius, ſecundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (ſit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] ſuper quam ipſi A, deſcribatur rectilineum I, ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico I, maius eſſe quam A, ſecundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales ſint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propoſ. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc eſt, per conſtructionem, vt B, ad C, ita rectilineũ A, ſuper primam ad rectilineum I, ſuper ſecundam, illi ſimile ſimiliterq; poſitum. Quod erat faciendum.

[a] 12. ſexti.
[b] 13. ſexti.
[c] 18. ſexti.

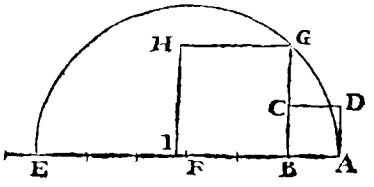


NON ſecus dato rectilineo A, minus rectilineum I, deſcribemus, illi ſimile ſimiliterq; poſitum, ſecundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum eſſe cernis. Eadem enim prorſus eſt conſtructio, atque demonſtratio.

FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus,

bimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim construemus quoque rectilineum simile, similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit, non multum tamen eius demonstratio à praecedenti differt, vt mox ostendemus.

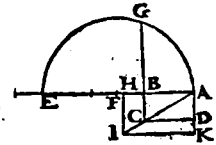


SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandũ. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi AB, æquales, a puncto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circumferentiam vsque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplũ esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiã, ita BH, quadratum secundæ, ad AC, quadratum tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD

QVOD si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BEI, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulũ ABCD, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producto sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractæ in I, perficiaturque parallelogrammum HK; [2] *erit HK, ipsi BD, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secunda æqualis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum. Quod est propositum.*



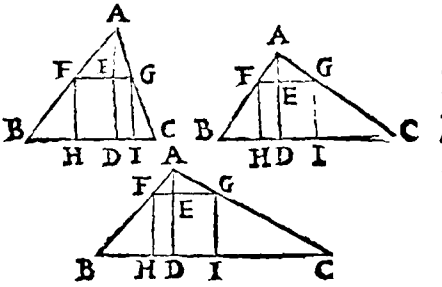
[2] 24. sexti.

EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod hac simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere.



SIT dato triangulum A B C, acutãgulũ. Ex angulo quocunq; A, ad B C, perpendicularis demittatur A D, quæ intra triangulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita ſecetur, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri docuimus, vt eadem ſit proportio A E, ad E D, quæ A D, ad BC. Deinde per E, agatur F G, ipſi B C, parallela. Poſtremo ex F, & G, ipſi D E, parallelæ ducantur F H, G I. Dico F G I H, rectilineum triangulo A B C, inſcriptum, eſſe quadratum. Cum enim F G, ipſi B C, ſit parallela; erit vt B D, ad DC, ita FE, ad EG, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. &

[a] 4. ſexti. *componendo, vt BC, ad DC, ita F G, ad E G.* [a] *Sed vt D C, ad A D, ita eſt EG, ad A E; quòd per coroll. propoſ. 4. huius*

[b] 22. quinti. *lib. triangula A DC, A EG, ſint ſimilia.* [b] *Igitur erit ex æquo, vt BC, ad A D, ita FG, ad A E. Quia vero per conſtructionem eſt, vt A D, ad B C, ita A E, ad E D;*

[c] 22. quinti. [c] *erit rurſus ex æquo, vt BC, ad BC, ita F G, ad E D: Eſt autem B C, ipſi*

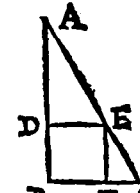
[d] 34. primi. *BC, æqualis, immo eadem. Æqualis igitur eſt & F G, ipſi E D.* [d] *Quare cum F G, ipſi H I; & E D, ipſis F H, G I, æqualis exiſtat; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia*

[e] 29. primi. *inter ſe.* [e] *Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales ſunt: Eſt autem E D H, per conſtructionem, rectus; erit & F H D, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonſtrauimus, & reliqui anguli H F G, F G I, G I H, recti ſunt in paralle-*

parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD, ad DB, qua AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelã ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. [a] *Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD; quòd triãgula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autem per constructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB,* [b] *erit ex aquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi aqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.*



[a] 4. sexti.

[b] 22. quinti.

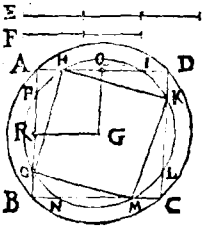
VERVM hoc problemate Commandini multò ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem, quam recta E, ad rectam F, quacunque ea sit, dummodo maior non sit, quàm dupla. Nã si latera quadratã

secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est; erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, describi nequeat, quàm illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido constat, quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inueniatur ex propos. 15. huius scholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Eritque eius semidiameter maior, quam semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, subduplũ est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, esse quadratũ in circulo HIKLMNOP, descriptũ, atque adeo æquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionẽ E, ad F. Descripto enim circulo circa datũ quadratũ ABCD, ex cẽtro G, ductisq; ex G, ad latera AD, AB, perpẽdicularibus GQ, GR, a secta erunt tam rectæ AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales sunt, b æqualiter distabunt à cẽtro G, propterea q; & HI, OP, æqualiter ab eodem centro distabunt. c Quare æquales erunt HI, OP, idcoq; & earum semisses QH, QI, RO, RP, inter se erunt æquales.



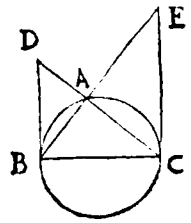
a 3. tertij.
b 14. tertij.
c 14. tertij.

æquales. Sunt autem & ſemiſſes QA, QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur ſi illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, DI, PA, OB. Eademq; ratione, ſi ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, oſtendẽtur æquales NB, MC, LC, KD, & inter ſe, & illis quatuor HA, DI, PA, OB. Item quia æquales ſunt HI, OP, ſi addantur æquales ID, PA, fient totæ æquales HD, AO: Atq; eadem de cauſa æquales erunt BM, KC, & inter ſe, & illis duabus HD, AO. Itaq; quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia ſunt, angulosq; continent æquales, nimirum rectos; [a] erunt & baſes HK, HO, æquales. Eodemq; modo demonſtrabũtur KM, MO, æquales & inter ſe, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo eſt figura HKMO. Dico & rectangulam eſſe. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia ſint, [b] erunt & quatuor arcus, quos ſubtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo ſunt OHK, HKM, KMO, MOH, [c] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis ſemicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum eſt, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumque circumſcribat. Circulus enim HKMO, deſcriptus eſt ad interuallum ſemidiametri circuli inuento quadrato circumſcripti. Quod eſt propoſitum.

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehenſum ſub vtralibet ſecantium, & eius ſegmẽto interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propoſitio eſt Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. ſicut & ſequitur. Vtramq; autẽ demonſtrauit Io. Baptiſta Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC,



ad quam in B,C, excitẽtur duæ perpendiculares BD, CE, ac per aſſumptum quoduis punctũ A, in circumferentia ex eiſdem punctis B, C, eductæ rectæ BA, CA, ſecent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum ſub EB, BA, quàm ſub DC, CA, quadrato diametri BC, æquale eſſe. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angulo recto C, demiſſa eſt CA, ad baſin BE, perpendicularis; [a] quod angulus BAC, in ſemicirculo rectus ſit: erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare [b] rectangulum ſub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum ſub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis eſt inter DC, CA, ex eodem coroll. propoſ. 8. huius lib. Conſtat ergo id, quod proponitur.

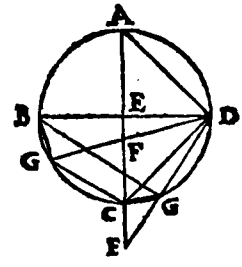
[a] *31. tertij.*

[b] *17. ſexti.*

XIX.

SI in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non productam; erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circũferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, ſecent ſe ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturq; ex puncto D, recta vtcunque DF, ſecans diametrum AC, in F, & circumferentiam



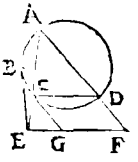
cumferentiam in G. Dico rectangulum ſub FD, DG, quadrato intra circulum deſcripto eſſe æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter ſe. Nam angulus CDF, cõmunis eſt, & angulus DCF, angulo DGC, æqualis; [a] ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quòd autem anguli DCF, DGC, æquales ſint, ita oſtendemus. Si punctum quidem F, eſt intra circulum; [b] erunt anguli DCF, DGC, inſiſtentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales: Si vero punctum F, eſt extra circulum, ducta recta AD; [c] erunt anguli DAC, DCA, inſiſtentes quadrantibus æquales: [d] Sed tam DAC, DGC, [e] quàm DCA, DCF, æquales ſunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, æquales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula ſint; [f] erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc eſt, tres lineæ DF, DC, DG, continuè proportionales erunt. [g] Igitur rectangulum ſub extremis DF, DG, æquale eſt quadrato mediæ DC, hoc eſt, quadrato intra circulum deſcripto, cum DC, latus ſit quadrati circulo inſcripti, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Ducta recta BG; [h] erit angulus BGD, in ſemicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, [i] æquiangula erunt. [k] Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG. [l] Rectangulum ergo ſub DF, DG, æquale erit rectangulo ſub DB, DE. [m] Sed rectangulum ſub DB, DE, æquale eſt quadratum rectæ AD, hoc eſt, quadratum circulo inſcriptum; propterea quòd ex corell. propoſ. 8. huius lib. AD, media proportionalis eſt inter DB, DE, vt patet, ſi ducatur recta AB. [n] Fiet enim triangulum rectanguli BAD, & ex angulo recto perpendicularis demiſſa erit AE. Igitur & rectangulum ſub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod eſt propoſitum.

DATO

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus eæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.



HOC problema non minus acutum quàm curiosum in tres propositiones Pappus distribuit quod nos in vnam redigentes multò clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior est, quàm EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturq; recta AF, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt, [a] *erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale:* [b] *Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub EA, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi potest.* [c] *Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G,* [d] *qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis:* [e] *Est autem & angulus DCG, angulo A, in alterno segmẽto æqualis.*

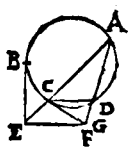
[a] 17 sexti.
[b] 36. tertij.
[c] 22. tertij.
[d] 13. primi.
[e] 32. tertij.

Igitur

Igitur anguli D C G, C G E, inter se æquales erunt, atque ideo, cum sint alterni, [a] recta C D, E F, parallelæ erunt. Quod est propositum.

[a] 27. primi.

C A D A T deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando E F, ipsi E B, æqualis est. Ducta igitur rursus recta G C, circulum tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturq; recta A F, secans circumferentiam in D.

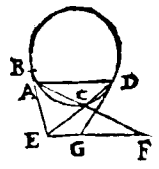


Dico rursus ductam rectam C D, ipsi E F, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt E B, E F; [b] estque rectangulum sub A E, E C, quadrato ex E B, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub E F, æquale. Quare [c] si circa triangulum A C F, circulus describatur, cum eum secet recta E A, recta autem E F, eidem applicetur, [d] tanget recta E F, eum circulum. [e] Angulus ergo E F C, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: [f] Est autem & angulus F C D, eidem angulo A, in alterno segmento circuli A B G D, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli E F C, F C D: qui cum sint alterni, [g] erunt rectæ C D, E F, parallelæ. Quod est propositum.

[b] 36. tertij.
[c] 5. quarti.
[d] 37. tertij.
[e] 32. tertij.
[f] 32. tertij.
[g] 27. primi.

C A D A T tertio punctum G, vltra F. quod contingit, quando E F, minor est quàm E B. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales sunt, [h] erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: [i] Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub A E, E C. Igitur rectangulum sub E F, E G, hoc est, sub E G, E F, rectangulo sub E A, E C, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. [k] Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento C A G F, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C F, inter se æquales erunt: [l] Est autem angulus G C D, angulo A, in alterno segmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, [m] parallelæ erunt C D, E F. Quod est propositum.

[h] 17. sexti.
[i] 36. tertij.
[k] 21. tertij.
[l] 32. tertij.
[m] 27. primi.



SI vero ex eisdem punctis datis E, F, *ducenda sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexa circumferentia, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ punctæ* E, F, *connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta* EB, *circulum tangente in* B, *inueniatur duabus rectis* EF, EB, *tertia proportionalis* EG, *cadatque primum* G, *punctum inter* E, F. *Ducta igitur ex* G, *recta* GD, *tangente circulum in* D, *non tamen versus priorem tangentem* EB, *ducatur* ED, *secans circumferentiam in* C, *puncto, per quod recta ejiciatur ex* F, *secans circumferentiam in* A. *Dico rectam* AD, *ductam esse rectæ* EF, *parallelam. Quoniam enim tres rectæ* EF, EB, EG, *continuè sunt proportionales,* [a] *erit rectangulum sub* EF, EG, *quadrato ex* EB, *æquale:* [b] *Est autem & rectangulum sub* ED, EC, *eidem quadrato ex* EB *æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub* EF, EG, *& sub* ED, EC: *ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta* C, D, F, G, *circulus describi potest.* [c] *Duo ergo anguli* CDG, *&* F, *in eodem segmento* C D F G, *illius circuli, cuius chorda esset ducta recta* CG, *inter se erunt æquales.* [d] *Est autem angulus* C D G, *angulo* A, *in alterno segmento dati circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* F, *angulo* A, *alterno æqualis erit,* [e] *ideoque parallelæ erunt* AD, EF. *Quod est propositum.*

[a] 17. sexti.
[b] 36. tertij.
[c] 21. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 27. primi.

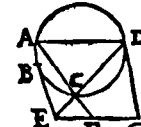
CADAT deinde punctum G, *in* F. *Ducta igitur rursus recta* GD, *tangente circulum in* D, *non tamen versus priorem tangentem* EB, *ducatur recta* ED, *secans circumferentiam in* C, *puncto, per quod recta ducta ex* F, *secet circumferentiam in* A. *Dico ductam rectã* AD, *rectæ* EF, *parallelã esse. Cũ enim æquales sint* EB, EF, *(quod sit* EF, *ad* EB, *ut* EB, *ad* EF.) *erunt earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub* ED, EC, *quadrato ex* EB, *æquale. Igitur & quadrato ex* EF. *Quia ergo, (si circa triangulum* CDF, *circulus describatur, recta* ED, *eum secat, &* EF, *applicata est,* [g] *tanget* EF, *eum circulum.* [h] *Angulus ergo* E F C, *angulo* F D E, *in alterno*

[f] 5. quarti.
[g] 37. tertij.
[h] 32. tertij.

segmento

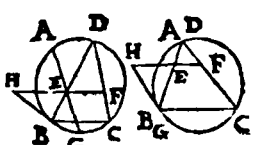
segmento eius circuli æqualis erit:[a] Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. [b] Quare parallela erunt AD, EF. Quod est propositum. [a] 32. tertij. [b] 27. primi.

CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem cõstructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continuè proportionales, [c] erit rectangulum sub EF, EG, siue sub EG, EF, æquale quadrato ex EB:[d] Est autem eidem quadrato æquale rectangulũ sub ED, EC. Igitur rectãgulum sub EG, EF, rectangulo sub ED, EC, æquale erit; propterea, ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus poterit describi. [c] 17 sexti. [d] 36. tertij.



[e] Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erũt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, [f] qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi CFG, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: [g] Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno æqualis erit: [h] æque idcirco parallela erunt AD, EF. Quod est propositum. [e] 22. tertij. [f] 13. primi. [g] 32. tertij. [h] 27. primi.

SED sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta AG, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui æqualis sit EH, ducaturque HB, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ductam rectam BC, parallelam esse rectæ EF. Quia enim ita est EF, ad EA, vt EG, ad EH; [i] erit rectangulum sub EF, EH, æquale rectangulo sub EA, EG: [k] Est autem rectangulum sub EA, EG, æquale rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem rectangulo sub ED, EB, æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. [l] Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmen- [i] 16. sexti. [k] 37. tertij. [l] 21. tertij.



segmento DEH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erunt. a Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DEH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. b Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod esi propositũ.

a 32. tertij.

b 28. primi.

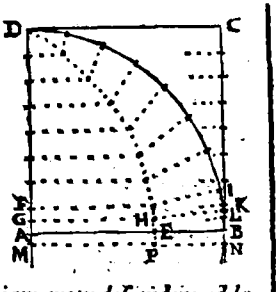
QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

DE MIRABILI NATVRA lineæ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nõnulli iuniores excogitarunt ad circulũ quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios diuarum rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reijciantur, tanquam inutiles, & quæ describi non possint; nos tamen eam simillimis motibus Geometrice describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse cẽsuimus, propterea quod beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu peruenusta, & quæ ad hunc vsque diem desiderata fuere, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. facturos nos hoc loco recepimus. Etsi autem ibidem Quadraturam circuli diximus à nobis differri in librum de mensurationibus magnitudinũ, visum tamen est, eam breuiter hic actum iri, reijciendo pleniorem eiusdem Quadraturæ tractationem in eum, quem diximus, librum. Sic ergo describitur linea Quadratricis huiusmodi.

IN

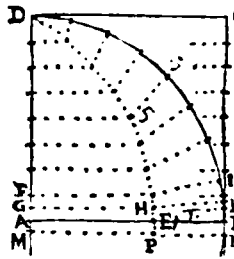
IN quadrato A B C D, deſcribatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter A D, æquabiliter ferri intelligatur circa cẽtrum A, quàm latus ſupremum C D, deorſum verſus æquabiliter quoq; ita vt quo tempore punctum D, circumferẽtiam D B, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu deſcendens ad latus A B, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo lateri A B, ſit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; ſecabunt ſe continuè ſemidiameter in circumferentia D B, circumacta, & recta D C, deorſum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent, hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt linea inflexa D E. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici non poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc ſit ea proportio, & qua per hanc lineam inueſtiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus D B, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque A D, B C, in totidem æquales partes. Facillima diuiſio erit, ſi & arcus D B, & vtrumque latus A D, B C, ſecetur primum bifariam, deinde vtraque ſemiſſis iterum bifariam, & ſingula rurſum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diuiſiones, eò accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in 8. partes æquales.



DEINDE bina puncta laterum A D, B C, æqualiter diſtantia à latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex cẽtro A, alia recta occulta ad ſingula diuiſionum puncta Quadrantis D B, extendãtur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primã, ſecunda ſecundã, &c.

per

per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt nunquam sinuosa, sed aquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, secans semidiametrum A B, in E.



SED quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem B I, arcus D B, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte A F, facta sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A G, totius lateris A D. Particula deinde A G, aquales abscindemus B L, B N, A M, ducemusq; rectas occultas G L, M N. Ducta vero ex A, centro recta occulta A K, qua secet G I, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, aqualem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus aquabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in E, puncto, quod quaritur. Nam propter paruam rectarum G H, A E, M P, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint aquales, licet Geometricè loquendo, recta A E, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum ea recta inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ namque G L, A B, M N, si parum inter se distent, in circulo omnino aquales iudicabuntur, quamuis verè A B, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ G H, A E, M P, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM porrò A D, vocabimus latus Quadratricis, & rectam

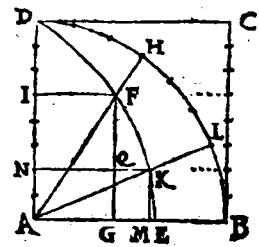
& rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrũ A, per arcum DB, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi; fit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tũc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent vniformes, aut nõ eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quàm latus DC, peruenirent. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus DB, emissa, & linea parallela per partes laterum DA, CB, ducta, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes ex constructione, liquido constat, puncta linea inflexa DE, à nobis Geometricè inuenta à punctis, qua à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hac igitur est descriptio linea Quadratricis, qua Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, qua per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometrica dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxia, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, qua ad earum descriptiones sunt necessaria, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergaus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint prestantissimi Geometra. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa praclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac deniq; eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis linea, vt Geometricam. Adde quòd linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas pro-

portionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittãtur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittãturq; ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus; cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, rectæ DI, cõtinet, propterea quòd rectæ AH, IF, se intersecãt in puncto F, Quadratricis;

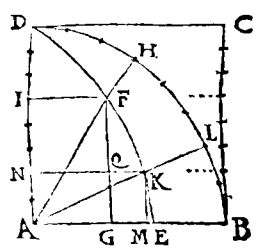
dratricis: Neque hac similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quàm recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem uniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB; si cogitetur talis pars minor quàm DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdū, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, qua pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, qua pars est reliqua recta IA, totius lateris DA. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quàm conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c. [a] 34. primi.

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG; erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo, vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG. [b] 34. primi.

RVRSVS quia est, vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



SIT primùm arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AE, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P; ductaque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniũ enim vt propos. 1. ostendimus, vt HL, ad LB, ita est IN, ad NA: Est autem IN, ad NA, ex constructione, vt O, ad P; 11. quinti. erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P.

DEINDE totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, vt sit DI, ad IA, sicuti R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadratricẽ in F. Ducta igitur recta AFH; erit ex propos. 1. DH, ad HB, vt DI, ad IA, hoc est, vt R, ad S.

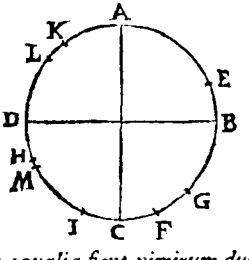
O 3
P 2

R 3
S 5

T 8
V 2

TERTIO sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnũ eorũ habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur AN. Ducta autem NK, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc est, vt T, ad V.

QVARTO



QVARTO *semicirculus* ABC, *diuidendus sit in datam proportionem, uidelicet in triplã. Secetur uterq; Quadrans* AB, BC, *secũdum datam proportionem triplam in* E, F, *& arcui* AE, *uel* BF, *æqualis abscindatur arcus* EG. *Si igitur ex arcu communi* ABC, *æqualia demantur, nimirũ duo arcus* AE, BF, *simul, & arcus* AG; *reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus* EB, FC, *simul, & arcus* GC. *Et quoniam est, ut* AE, *ad* EB, *ita* BF, *ad* FC; [a] *erunt* AE, BF, *simul ad* EB, FC, *simul, hoc est, arcus* AG, *ad arcum* GC, *ut* AE, *ad* EB: *Habet autem* AE, *ad* EB, *datam proportionem triplam. Igitur & arcus* AG, *ad arcum* GC, *eandem proportionem datam habebit.* [a] 12. quinti.

QVINTO *in eandem proportionem secandus sit arcus* ACD, *tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus* AB, BC, CD, *in eam proportionem in* E, F, H, *sumatur arcus* EG, *ipsi* BF, *& arcus* GI, *ipsi* CH, *æqualis. Si igitur ex communi arcu* ACD, *demantur æqualia, nimirum tres arcus* AE, BF, CH, *simul, & arcus* ABI; *reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus* EB, FC, HD, *simul, & arcus* ID. *Et quia tres arcus* AE, BF, CH, *ad tres arcus* EB, FC, HD, *eandem habent proportionem;* [b] *habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus* ABI, *ad arcum* ID, *eandem proportionem, quam unus arcus* AE, *ad unum arcum* EB, *uidelicet datam.* [b] 12. quinti.

POSTREMO *sit eodem modo diuidendus arcus* ACK. *Diuisis rursus tribus quadrantibus, & arcu* DK, *ut proponitur, in* E, F, H, L, *sumatur arcus* EG, *arcui* BF, *& arcus* GI, *arcui* CH, *& arcus* IM, *arcui* DL, *æqualis. Si igitur ex communi arcu* ACK, *æqualia auferantur, uidelicet quatuor arcus* AE, BF, CH, DL, *simul, & arcus* ABM; *reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus* EB, FC, HD, LK, *simul, & arcus* MK. *Et quia quatuor arcus* AE, BF, CH, DL, *ad quatuor arcus* EB, FC, HD, LK, *eandem proportionem habent;* [c] *habebunt omnes* [c] 12. quinti.

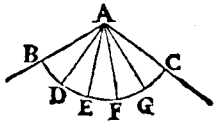
quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur.

COROLLARIVM.

EX his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: [a] *cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.*

[a] 33. sexti.

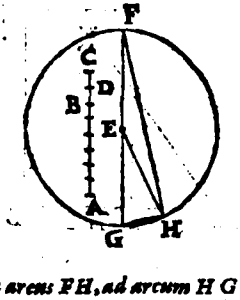


QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna vnitate minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G, in proportionem quadruplam. Nam GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque



tocunq; FGH, ductaq; in eo diametro FG; secetur ita semicircumferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ recta AB, ad rectam BD: iungaturq; recta HE, HG. Dico Isoscelis trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basim GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datã AB, ad BC. Cum enim sit, vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG Et vt arcus FH, ad arcum HG, [a] ita angulus FGH, a angulum GFH; [b] erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, eius duplam, it est angulus GFH, ad angulum GEH, [c] cui illius duplus est Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, a angulum GEH. Quod est propositum.

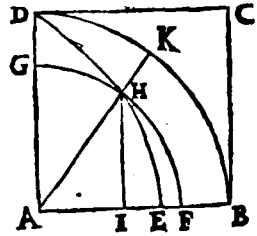
COROLLARIVM.

ITAQVE si construantur triangula Isoscelia in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquun proportiones habeant tum multiplices sesquialteras tum multiplices ordine, describentur per priora om nes figuræ æquilateræ parium laterum, per posterio ra vero laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus quot latera angulosue figura inscribenda habere debet, &c.

IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erũt arcus Quadrantis, semidiameter & basis Quadratricis continuè proportionales



SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continuè esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, vt DA, ad AE. Sin minus, sit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipsa AE, minoremve, sitque primum AF, maior quàm AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturq; perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc est, vt AB, ad AF, sitq; vt AB, semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli

[a] 15. quinti. *ad circumferentiam circuli;* [a] *erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad*

[b] 15. quinti. *eandem circumferentiam;* [b] *ac proinde etiam vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est,*

[c] 11. quinti. *vt arcus BD, ad arcum FG.)* [c] *Erit quoque arcus BD, ad rectam DA, vt idem arcus BD, ad arcum FG:*

[d] 9. quinti. [d] *ac propterea æquales erunt rectæ DA, & arcus FG. Quia vero ex theor. 1. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcũ FH, quòd arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint, vt supra in hoc scholio ostensum est:*

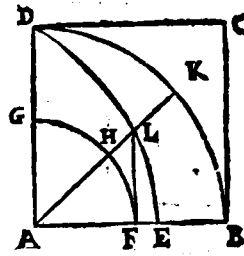
[e] 11. quinti. [e] *Erit quoque recta DA, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta*

[f] 14. quinti. *DA, ostensa sit arcui FG, æqualis;* [f] *erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis, quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF,*

[g] 3. tertij. [g] *secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcũ; ex scholio propos. 27. lib. 3.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam maiorem basi AE, Quadratricis.*

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Descripto

Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH, vt est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex scholio propos. 36. lib. 3. arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, [a] *ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur;* [b] *ideoque & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, dua illa tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam minorem basi AE, Quadratricis: Sed neque vt DA, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.*



[a] 4. vel 8. primi.
[b] 26. tertij.

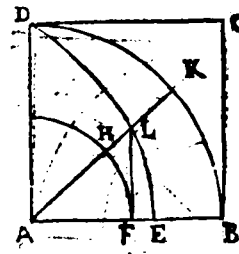
COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius Quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, vt DA, ad AE; erit conuertendo quoq; AE, ad DA, vt DA, ad arcū Quadrātis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia

propor-

[a] 11. quinti.



[b] 9. quinti.

proportionalis; erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraque proportio sit eadē, quæ AE, ad AD. Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcui BK, qui minor est Quadrāte, inuenienda sit recta æqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ex L, ad AB, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaque erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum sit, ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK;

[c] 11. quinti.

erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis DB.

[d] 14. quinti.

Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui BK. Si verò arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

COROLLARIVM. II.

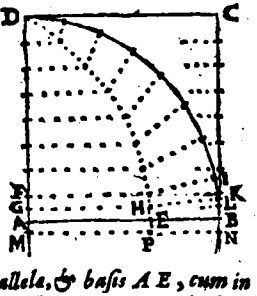
SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc est, vt tertia illa

illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem ſemidiametri AE: ſit autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, vt oſtenſum eſt: [a] erit & recta DA, Quadranti ſemidiametri AE, æqualis. Dupla linea ergo ipſius DA, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis. [a] 14. quint.

EADEM ratione, ſi duæ rectæ eandem proportionem habeant, quàm DA, AE, & minor ponatur ſemidiameter alicuius circuli, oſtendetur maior æqualis Quadranti illius circuli, &c.

SED ſi lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem eſt) ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, [b] cum ſit vt circumferentia ad diametrum, ita ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem deſcripſimus, diuiſum eſſe in grad. 90. & ſingulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuiſum eſſe, erit parallela ex vltima particula vſque ad Quadratricem educta ferme æqualis baſi AE, ob exiguam diſtantiam illius parallelæ, & baſis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam ſextamdecimam, qua $\frac{1}{16}$. multò maior eſt quàm $\frac{1}{5400}$. vix à baſe AE, ſuperetur: ita vt ſine errore notabili eam parallelam pro baſe accipere poſſimus. Quia vero vltima illa particula lateris DA, eſt ſinus arcus Min. 1. & parallela illa ſinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt conſtat, ſi ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit ſinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, ſinus anguli AHG, Min 1, poſito ſinu toto AH, vt in tractatione Sinuum oſtendimus. Si igitur ſinus totus AH, ſtatuatur 10000000. [b] 15. quint.



(Ita

Ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quàm si sinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus DA, earundem partium erit 15708600. vt constat, si 5400. particulæ lateris DA, ducantur in vnam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4 duplum lateris DA, æquale est semicircumferentiæ, cuius semidiameter AE; erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum AE, eadem ferè, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{14172003}{9999999}$. hoc est, in minimis terminis, à $3\frac{1}{1}\frac{4}{1}\frac{7}{1}\frac{4}{1}\frac{6}{1}\frac{7}{1}$. quæ proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

ITAQVE vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta: Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

V.

DATO circulo quadratũ æquale cõstituere.

QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. precedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro [a] constituatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.

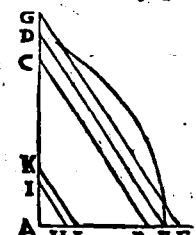
[a] 12. sexti.

INVENIETVR autem recta æqualis semicircumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, [b] si fiat vt basis Quadratricis descriptæ ad eiusdem latus, ita semidiameter

[b] 12. sexti.

meter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea aqua lis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propoſ. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam ſemicircumferentiæ æqualem; quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.

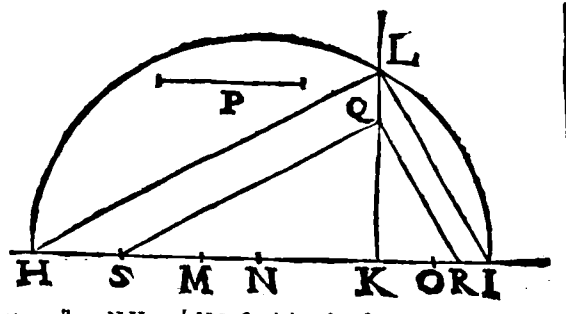
VERVM vt expeditius quilibet circulus poſſit quadrari, conſtruenda erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptiſſima, hoc modo. Conſtituatur angulus rectus D A E, ſitque AD, æqualis ſemidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, & A E, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, noua Quadratrix deſcribatur D E, cuius latus AD, & baſis A E. Ducta autem recta DE, conſtructum erit vnum inſtrumentum circulis quadrandis aptiſſimum. Si enim circuli quadrandi ſemidiameter æqualis ſit rectæ AE, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiuſdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propoſ. liquet. Si autem ſemidiameter minor ſit, quàm A E, abſcindemus ei æqualem AB, parallelamque ipſi DE, agemus B C. Si denique ſemidiameter ſit maior, quàm A E, abſcindemus ei æqualem A F, ex A E, producta, & per F, ipſi DE, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propoſ. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius ſemidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius ſemidiameter AF: [2] propterea quòd eſt, vt A E, ad A D, ita tam AB, ad A C, quàm A F, ad A G.



DEINDE ducta recta H I, cuiuſcunque longitudinis, excitetur ad eã perpendicularis quantacunq; K L; paratũ erit alterũ inſtrumentũ quadrandis circulis accommodatũ.

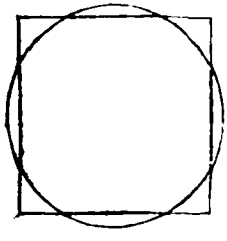
PER duo hæc inſtrumenta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius ſemidiametro in priori inſtrumento æqualis ſit recta A B, & per B, ipſi D E, parallela agatur BC. In poſteriori vero inſtrumento ſumantur duæ KM, M H, ipſi AC, æquales, & recta K I, ſemidiametro A B, æqualis. Diuiſa autem tota recta H I, bifariam in N, deſcribatur ex N, ad inter-

[2] 2. vel 4. ſexti.



interuallum NH, vel NI, ſemicirculus ſecans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cuius ſemidiameter AB, in priori inſtrumento, vel KI, in poſteriori, æquale eſſe. Quoniam enim KL, media proportionalis eſt inter KH, KI, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. [a] *erit quadratum ex KL, rectangulo ſub KH, KI, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato ſit æquale, vt ad initium huius propoſ. diximus, quòd KH, ſit æqualis ſemicircumferentiæ, & KI, ſemidiametro; erit quoque idem quadratum ex KL, dato circulo, cuius ſemidiameter AB, vel KI, æquale. Si igitur quadratum rectæ KL, deſcribatur, & ex eius centro ad interuallum AB, in priori inſtrumento, vel KI, in poſteriori circulus deſcribatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in appoſita figura apparet.*

[a] 17. ſexti



CÆTERVM diuiſio rectæ HI, in poſteriori inſtrumento in duas partes æquales facile ſic fiet. Diuiſo ſemidiametro KI, bifariam in O, (hæc enim quia minor eſt, quàm HI, facile bifariam ſecabitur.) accipiatur rectæ KO, æqualis MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales ſint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipſi MO, æqualis: Eſt autem MO, ipſi HN, æqualis. (quia enim æquales ſunt HM, MK; additis æqualibus NN, KO, totæ æquales

æquales sient H N, M O.) Igitur & N I, ipsi H N, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur æqualis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ductâ rectâ L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, æqualem esse quadrato dato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem rectâ K H, quæ semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, sit æqualis, ductaque rectâ L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cum ergo H K, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. S K, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K R. Quia vero K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R; [a] quòd angulus R Q S, rectus sit, [a] quippe cum eius partes R Q K, S Q K, paribus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales sint: (Nam [b] angulus H L I, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.) [c] erit quadratum ex K Q, æquale rectangulo sub S K, K R, hoc est, circulo, cuius semidiameter K R: hoc est, circulus semidiametri K R, æqualis est quadrato lateris K Q, vel P. Quod est propositum.

[a] 29. primi.
[b] 31. tertij.
[c] 17. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

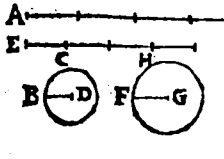
EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ
a 14. secūdi. *describimus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.*

RVRSVS si, per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato
b 25. sexti. *constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.*

VII.

DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentia dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nunc autem, vt viciſſim recta data linea circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cuius circumferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei rectæ æqualis E. quod facile ita fiet. In priori instrumento propos. 5. sumatur AH, *æqualis semidiametro* BD, *descripti circuli, & per* H, *agatur ipsi* DE, *parallela* HI. *Nam AI, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propos. 5. diximus. Deinde*



tribus

tribus rectis E, A, BD, inueniatur quarta proportionalis FG, atque ex G, ad interuallum GF, circulus describatur FH. Dico eius circumferentiam data recta A, aqualem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita BD, ad FG; hoc est, a ita tota diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli FH: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH, vt Pappus demonstrauit; b erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum ergo E, facta sit aqualis circumferentiæ BC; c erit & recta A, circumferentia FH, aqualis, hoc est, circumferentia circuli FH, inuenta est data recta A, aqualis. Quod est propositum.

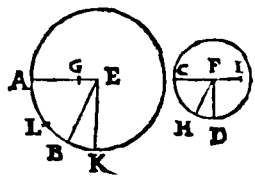
a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 14. quinti.

ALITER, & facilius. Quarta parti rectæ datæ A, accipiatur aqualis AK, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur KL, ipsi DE, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius diameter AL, aqualis erit datæ rectæ A; propterea quòd eius circumferentia quadrans aqualis est rectæ AK, quartæ parti datæ rectæ A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoq; arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inæquales AB, CD, quorum centra E, F, & semidiametri AE, CF; sitq; AB, maior, & CD, minor. Datus autem primum sit in minori circulo arcus CD, cui aqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior est, erit & semidiameter AE; semidiametro CF, maior. Abscindatur ergo AG, ipsi CF, aqualis, secetur q; arcus CD, ita in H, ex propos. 2. vt eadem sit proportio arcus CH, ad arcum HD, quæ rectæ AG, ad rectam GE: arcui q; CH, similis auferatur arcus AB. quod facile fiet, si ducta recta FH, angulo CFH, aqualis fiat angulus



AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, æqualem, vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, vt AE, semidiameter ad semidiametrum CF, [a] *hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH.* [b] *Igitur erit quoque, vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcũ CH; ac proinde arcus CD, AB,* [c] *æquales inter se erunt. Quod est propositum.*

5. quinti.

1. quinti.

9. quinti.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quàm circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit æqualis; secetur per propos. 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; circuiq; BL, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD. quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualem esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, [d] *hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD.* [e] *Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea q; arcus AB, CD,* [f] *æquales erunt inter se. Quod est propositum.*

5. quinti.

1. quinti.

9. quinti.

COROL.

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, cuiuis datæ rectæ abſcindi poſſe ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non ſit, quàm recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum ſupra oſtenſum eſt in coroll. 1. propoſ. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri poſſe rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulò ante in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſi quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quàm data recta linea; ſecetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cùm ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æqualis, erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quàm recta linea data; ſumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ ſemicirculi ſit æqualis. Nam ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quã data linea recta, ſecetur ſemicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt ſemicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam. quod quidem facile fiet, ſi data recta ex dupla illa linea recta abſcinda-

tur aqualis, & ſemicircumferentia ſecetur, per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota ſemicircumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille data recta aqualis erit. Cum enim ſit, dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla aqualis ſemicircumferentia; quinti. [a] erit quoque data recta illi arcui aqualis.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quàm data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt aqualis, vt tota recta compoſita aqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & triplæ prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc linea tripla fuerit data recta aqualis; erit arcus trium quadrantum eidem data recta aqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quàm recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam. quod facile etiam fiet, ſi data recta ex tripla illa linea recta abſcindatur recta aqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille data recta linea erit aqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſt $\frac{1}{3}$ tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum aqualis; quinti. [b] erit quoque data linea recta aqualis illi arcui abſciſſo.

DENIQVE ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quã data recta linea, addatur ei rurſus prior linea

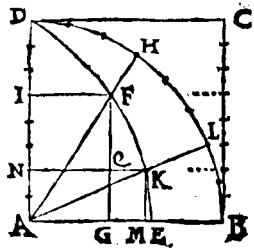
linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compo ſita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prio-ris linea inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor eſſe non poteſt: alioquin data recta eſſet maior, quàm circumferentia dati circuli. quod eſt contra hypotheſin) ſecetur tota circumferentia in duos arcus, ex propoſ. 2. vt ad vnũ eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, ſi ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli ſecetur, vt quadrupla illa recta eſt ſecta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim ſit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ità tota circumferentia ad arcum abſciſſum; ſit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; [a] erit quoque data recta linea arcui abſciſſo æqualis. [a] 14. quinti.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propoſ. 4. rectæ æquali circumferentiæ dati circuli, abſcindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propoſ. 2. ſecetur, vt ſecta eſt inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abſciſſum. Cum ergo tota illa recta ſit æqualis toti circumferentiæ, [b] erit quoque data recta arcui abſciſſo æqualis. Quod eſt propoſitum. [b] 14. quinti.

COROLLARIVM II.

EX ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quàm angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quàm angulum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quæ duæ rectæ inuentæ; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quàm angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam. n. per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, [a] vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.



33. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

REGESTVM

✱ A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iij Kkk Lll Mmm.

Omnia ſunt folia integra, præter M m m, ſemifolium.

ROMAE, *Apud Sanctium, & Soc.*

M. D. LXXXIX.