EVCLIDIS
ELEMENTORVM LIB. XV

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV̄
Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMON-
strationibus, accuratisq; scholijs illustrati: nunc iterum editi, ac multarum rerum accessione locupletati.

AVCTORE
CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI
È SOCIETATE IESV

ROMAE. APVD BARTHOLOMAEVM
Grassium. M D LXXXIX.
PERMISSV SVPERIORVM.

8

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

Christophorus Clauius a Societate Iesu S.P.D.

SCRIPSERAM *superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathemati-*

carum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quod te non fugit, Dux Serenissime, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui a principio in qualibet re scribenda, aut exponenda posit omnia peruidere: multa apparent iterum ac sepius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret *beret vulgatũ illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaque, cum priorem editionem sumerem postea in manus, multa esse animaduerti, quæ si adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumque inuentis videbantur melius explicari posse: si videlicet e pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipsum etsi tunc etiam præstiti, multo tamen nunc feci copiosius: interiiciens ea scilicet, quæ vel vtilia, vel necessaria fore censui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt specimen dem aliquod rerum,* *quæ hoc volumine accesserunt, demonstrationem Geometricam, eamque apertissimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam scimus a Proclo mutila esse atque imperfecta videatur. Descriptionẽ item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum a veteribus, tum a recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accurate, ac subtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum*

dratum æquale circulo, quam exquisite rectilinea figura qualibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immo (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quam ad figuram rectilineam plurimorum angulorum, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc *meum, qualiscumque est, cum ite rum essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, quã tibi, Dux Serenißime, dedicari posse. Primum quidem quod cum superiorem illam editionem sub Emmanuelis Philiberti clarissimi Ducis patris tui nomine appa rere uoluerim, stulte fecissem, si posteriorem hãc alij, q̃ tibi, qui eius es & ditionis, & humanitatis, et pietatis hæres, eiusque imago cor poris, atque animi, consecrassem: Deinde vero quod in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscri benda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod cum ita sit, quidni hoc tibi po-*

bi potißimum deberetur donum, (si tamen donum dicendum est id, quod qui dat videtur accepisse) quem Ioannes Baptista Benedictus scientißimus rerũ Mathematicarum ita testatur excellere in his artibus, illa pracipue in parte, qua principes viros, atque excellentes Imperatores decet, vt ea, qua pertinent ad instruendos exercitus, oppidaque munienda, per te ipse implere poßis. Neque vero hac postrema fuit causa, etsi postremo in loco ponitur: vt tibi, aliisque, quorum in manus hac scripta peruenerint, hac saltem ratione ostenderem ita tibi obligatam esse Societatem nostram vniuersam, vt iure tibi omnia mea

opera

opera, & labores vindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui videatur, atque exile, non dubito tamen futurũ, quin vbi tuam istam attigerit dexteram fortitudine fideque præstantem, plurimum sit accepturum vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept.

M. D. LXXXIX.

AD

AD LECTOREM.

ETSI ſummam diligentiam adhibuimus, vt hi commentarij quam caſtigatiſsimi in lucem prodirent: fieri tamen non potuit, (vt eſt humani ingenij imbecillitas) quin errata aliquot irrepſerint; quæ, ne curſum in demonſtrando impediant, monitum te paucis uolo, ut ea, antequam ad demonſtrationes te conferas, ad normam, quam hic deſcripſimus, prius corrigere ne grauere. Vale.

ERRA-

ERRATORVM PRIORVM sex lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata	Correcta.
31.	21.	*in se distent*	*inter se distent.*
38.	13.	*recta CD,*	*recta CD,*
65.	15	*lineam AE,*	*lineam A B,*
69.	3.	*in E.*	*in G.*
95.	13.	*limitem E,*	*limitem F,*
97.	16.	*anguli AED, EDA,*	*anguli EAD, EDA,*
102.	2.	*fuit 3.*	*fuit ;*
107.	17.	*angulos ad E,*	*angulos ad D ,*
122.	4. a fine.	*supra ED,*	*supra B D,*
123.	25.	*Angulum ABC,*	*angulum BAC,*
136.	5.	*8. primi.*	*4. primi.*
140.	4. a fine.	*ad AC.*	*ad BC,*
170.	14. a fine.	*angulo ABC,*	*angulo BAC,*
188.	27.	*Et quia latus BA, latere AC, ponitur non minus; erit*	*Et latus BA, latere AC, ponatur maius; eritq;*
188.	31.	*non maior*	*minor*
195.		*Deest litera A, in fig.*	*in extremo linea FE .*
212.	1.	*aequalium*	*parallelarũ aequaliũ*
256.	10.	*ipsi AB:*	*ipsi AC:*
256.	11.	*ipsi AC, vel BI ;*	*ipsi AB, vel CI;*
300.	5.	*ex AB, BD,*	*ex AB, BC,*
314.	2.	AC, EC	*AC, BC,*
315.	10. a fine.	*5. secundi*	*5. secundi*
317.	1.	*ad DH,*	*ad DE,*
336.	12. a fine.	*maxima vel minima propinquiores,*	*maxima propinquiores,*
338.	7. a fine.	*7. primi.*	*4. primi.*
402.	16.	*BCD, BDA,*	*BCA, BDA,*
417.	9.	*18. primi.*	*18. tertij.*
422.	8. a fine.	*in easdem partes*	*non in easdem partes*
424.	27.	*aequalia*	*aequalia duobus lateribus GE, GF,*

472.	24.	in A D B,	in A, & B.
486.	17.	& minus OH.	& minus PH.
580.	29.	a sesquialtera	a sesquitertia
643.	12.	vel vna excedant,	vel vna deficiant, vel vna æqualia sint, vel vna excedant.
654.	1.	vt nunquam	vt nonnunquam
665.	5. a fine.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{04}$.
687.	16.	erit in	erit ea
695.	17.	ad C, quartam.	ad D, quartam.
708.	1.	ita DH, ad HE.	ita DH, ad HF.
766.	5.	erit quoque HE,	erit quoque HF.
723.	19.	Ergo componendo	Ergo permutando
788.		In rectangulo AC, deest litera B.	
795.	9. a fine.	AE, primam	AB, primam
798.	1.	Ducta per D,	Ducta per A,
799.	8.	Erit igitur, vt GB, ad BA,	Erit igitur vt GC, ad CA,
799.	13.	vt GB, ad BA,	vt GL, ad AK,
818.	vltima.	22. quinti.	12. quinti.
911.	27. a fine.	ita SR, ad KR,	ita SK, ad KR.
925.	26.	cuius diameter	cuius semidiameter,

Alia errata minoris momenti facile quiuis corriget. Errata vero posteriorum librorum, ad finem totius Euclidis reperies.

QVÆ

QVAE PRAECIPVE Prioribus Commentarijs posteriore hac editione addita sint.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quā Proclus affert.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. pp. lib. 1. absque ope proportionū sexti lib.

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2.

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi

cobi Peletarij, de angulo contactus.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima ad finem lib. 4. de figuris æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoq; æquilatera.

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica.

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquemultiplicia definierit.

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur; circulus quadratur; angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur; Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra: Et denique

alia

alia ſcitu iucundiſsima perficiuntur.

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non.

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorũ fractorum demonſtrationes clariſsimæ.

XI.

DE Proportionum cõpoſitione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regulariũ in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierũ conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe.

Cætera quæ paſsim hiſce commentariis adiecta ſunt non pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.

IN EV-

IN EVCLIDIS

ELEMENTA PROLEGOMENA.

PRAEFATIO.

SIQVIS forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus, is facile sibi persuadebit, non temere id a nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim lõga, diuturnaq; experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem, & illustrem auctorem a plerisq; omnino negligi, a perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui ſedulam operam, ac ſtudium in perdiſcendis his elementis ponant, ob eam potiſsimum, vt arbitror, cauſam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obſcuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem ſibi citra erroris periculum ſequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in ſingulos Euclidis libros ſane eruditi, qui ſatis eſſe poſsint cuiuis ad facile conſequendam horum elementorum doctrinã: Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinẽ, ac methodum peruerterunt, verbaque propoſitionum eiuſdem locis non paucis immutarunt, vt verus, germanuſque auctoris ſenſus perdifficile poſsit intelligi; id quod maxime in decimo libro perſpicitur: Alter (Theonẽ intelligo) pene innumeris mendis, vitijſque incuria librariorum ita eſt deprauatus, & propter notas gręcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas, ac male expreſſas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem ſine maximo labore, ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram vſque memoriam maius aliquod ſtudium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel ſex priores tantum libros expoſuerunt, vel ſi qui in vniuerſum Euclidem commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demõſtrationibus certiſsimis, proprias alias, ac nouas con-

confinxerunt, quæ plerunq; non tam firmę sunt, neque rem ipsam simpliciter, & absolute conficiunt; præsertim quod modo e propositionibus voces quasdam perperam detrahũt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero, proprioque Euclidis sensu dubitare quis posit. Qua tamen in re Federicum Commãdinum Vrbinatẽ Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem latinè redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras, ac vigilias studiosis harum rerum nõnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, propter singularem vtilitatẽ, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque vnquam deponi ab his, qui fructũ aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere volunt, in eoque progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdũ factum videamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sunt enim hi nostri commentarij in vniuersum Euclidem cõscripti commodiore nunc forma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum plerisque asseueramus, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatē licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erãt scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantissimo poeta dictum est. *Breuis esse laboro, obscurus fio*: Interdum etiam, cum breuius, atque succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrunq; vitantes, eas, velut παραφραστικῶς, atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupiētes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius a studiosis, ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ta, ac theoremata ſcitu non iniucunda,neque a ſcopo Geometriæ aliena,quæ partim ex Proclo, Cāpano,alijſq; auctoribus decerpſimus,partim proprio (vt aiunt) Marte,aſsiduiſq; meditationibus ipſi confecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tāquam in ſcopulos quoſdam, incidentes, a recto curſu deflexerūt, & in errores varios, atque abſurdos, prorſumq; ab inſtituto diſciplinæ abhorrētes, dilapſi ſunt.) dilucide, atque perſpicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facile indicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excreſcerent,quam vt vnius libri ſpatijs, hac præſertim forma, commode includi poſſent, in duas partes totam tractationem diuiſimus. Altera ſex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vna cum decimoſexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente,quem ex Franciſco Fluſſate Candalla adijcere voluimus, complectitur.

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarũ disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi, benigne Lector, alteram editionem priore illa multò locupletiorẽ: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationẽ vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce commentarijs est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquã, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentã, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quòd eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquã enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam, quia tamen

men eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessario iam dubitationi locus esset. Neq; enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclid. de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam, & ratio ad circulũ quadrandum (res tot seculis à doctißimis viris exagitata) conficitur: quod alibi docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales, & improportionales per ęquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremò (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstrauimus. Hæc ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facilè comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulò considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium, atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas reserant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam *ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenã Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primùm ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia, atq; vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.*

MATHEMATICAE DISCIPLINAE CVR SIC DICTAE SINT.

D*ISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinę inter reliquas omnes solę sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinatò numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, qua anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo cõprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio respõderit, vt puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quod solæ modum, rationemq; scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam*

principijs

principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est muneris, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, ut & Aristoteles testatur; neque unquam aliquid non probatum assumũt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasue non semper obseruare videmus, cum plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratave, adducant. 1. Poster.

DISCIPLINARVM MATHEMATI-carum diuisio.

PYTHAGOREI, *quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas uniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atq; Astronomiam. Cũ enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines cõprehenduntur, & utraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum, quatuor prædictas facultates instituere, quæ utramque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eãdem quãtitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniã. Geometria de magnitudine siue quantitate continua, secundum se quoque, ut immobilis existit, disputat. Astronomia denique eãdem magnitudinem, ut est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica, & Geometria puræ, Musica vero, atque Astronomia mixtæ dicuntur, oẽs aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cætera huiusmodi, vel facile, ut ad capita, a quibus dependent, reduci possunt.*

ALIA

ALIA ratione a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, ut auctor est Proclus in commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica disciplina diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseq; docet, ad quenam sese extendat Mathematica disciplina, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subijcere statui. Volunt itaq; prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intelligibilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam vero in sensilibus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasq; scientias, Arithmeticam, & Geometriam: In posteriori vero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuã, Geodæsiam, Canonicam siue Musicam, Supputatricem, atq; Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis disserit motibus, de corporum cælestium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonum, exercetur: Methcoroscopica, quæ eleuationum differentias, siderumq; reperit distantias, nec non multa alia, & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumq; stellarum distantias huiuscemodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt a Geometria gigni, atque uti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs, & distantias, ut parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularia̅m, quæ circa varias, multiplicesq; versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, umbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, ut ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesq; videantur. Geodæsiam appellant eam scientiã, quæ res quantas metitur, ut materialium rerum aceruos, tanquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem

non

non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes cōcentuum considerat rationes, sensusq; vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæq; conuenctarū consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerēdis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra marique obsidentibus resistentia; Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio cōstruit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status vero æquilibrium esse causam censendum est, vt Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisq; animatas cōuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιία appellatur, ad cælestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouēdi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasque pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluere, sed vti eā volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendisque castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neque Historicam, neq; medendi artē Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam medici Mathematicis vtantur

vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero quamplurimas res in arte sua huiuscemodi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quę in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisque dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamē ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quae numerosa est, paucissimam ostendere multitudinē, castra, suosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdiam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hac igitur fere sunt, quę nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARUM disciplinarum.

OMNES *disciplinas Mathematicas a varijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historia testantur: Immo vero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoria quoque proditum est. Arithmetices.n. inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusque successores, nec nō Aegyptij, Gręci denique atque Arabes amplificarunt, varijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus vero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos praclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretque, vt nemo* *ut nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria capta est expoliri, & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiam cœlestia dimetienda conuertit, tradiditq; principia uniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimis, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Archytas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentã esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illũ suis humeris cœlum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores. Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoq; maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis, tamquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.*

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinę Mathematicę de rebus agunt, quę absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersę; perspicuum est, eas medium inter Methaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earũ consideremus, vt recte a Proclo probatur. Methaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si vero nobilitas, atque prętantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda haud dubie Mathematicę disciplinę inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq́;, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant; Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hęreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum sectę, (vt alios interim philosophos silentio inuoluam) quę ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortę, adeo & inter se, & nõnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Gręcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij deniq; Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriãtur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demõstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorũ, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam

tiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis sinceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, ut non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentq́;, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMAticarum disciplinarum.

N*ON solum utiles, verumetiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Methaphysicam, ut eleganter ostendit Proclus, ulli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasq́;, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque ullo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res methaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, ut facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrime nobis exponit B. August. lib. 2. de Doctrina Christiana demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac mystice posita sunt in scripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longe post pluribus verbis repetit eodem lib. Hoc idem*

Cap. 16.

Cap. 37.

idem docet D.Hieron. tomo 1. Epist. 5. asserens, magnam inesse numeris vim ad multa mysteria in scripturis intelligẽda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem, perhibet. Rursum B.August. loco, quem paulo ante retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Cap. 16. Cap. 19. *Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, summis laudibus D. Basilium preceptorem suum extollit, quod in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientijs Mathematicis, fuerit nõ mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, vt perspicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretũ cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, vt ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse,* ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. *Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse nõ dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit: Mathematicas disciplinas primo omniũ esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiose scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo, vt etiãsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni*

studio

studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemq; ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorẽ: Quod quidẽ experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra vero, eos qui ad hasce facultates idonei minime reperiuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atq; commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenua viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusque animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipua ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quã summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multũque versari solebant: Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatẽ ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excæcatur, defoditurq;, a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumq; grauissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum vtilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE commendatio.

QVISNAM *fuerit Euclides horum elemẽtorum institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim,* vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondẽdoque (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de vitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. lib. 2. vbi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiã discipulus fuit, cõductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natũ anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maxime adductus argumẽto, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissime enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquã morituram famã sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo philosopho lõge alius est, qui, cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicarit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes,

tes, Phanomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptũ, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item conica elementa, auctore Proclo, qua tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime vero hoc volumen elementorum Geometricorum nunquam omnium consensione satis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione cõtexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, qua ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea dũtaxat, qua visa sunt esse necessaria, atque vtilia, ad cõmunem omnium vtilitatem, argumentis, & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Caterum, quanta sit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersa Geometria, prastantia, ac vtilitas, partim ex ijs, qua ante scrisimus, partim ex ijs, qua nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eã ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hac Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hac Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in calo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarũ, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere varie illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machina *totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis deniq; totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur, atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cæli vniuersi, siderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque varij tam expedite cognoscuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis, ac Lunæ defectiones certissime, antequam fiant, in omne posterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mẽtis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumq; fidem superant, perspicua facere, credibiliaq; esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testãtur historię. Cum enim Hieron. Syracusarum rex nauem, quã Ptolemæo Ægyptiorum regi mittere statuerat, tanta esset molis fabricatus, vt eã omnes vna Syracusij a loco dimouere minime valerent, Archimedes Geometra peritissimus vnius Geometriæ viribus fretus regi promisit, se effecturum, vt ipsam solus rex absque vllo labore subduceret: Quod cum præstitisset, in conspectu omnium rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendũ est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri, & argenti põdera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime ostendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quã incolimus, e loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, verum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse memoria proditum est. Tantum denique nomen vna hac Geometria Archimedi peperit, vt* *vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quã diu Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata vrbis direptione, ac cade ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum, & voluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo habuit, quem viuo habere nõ potuit. Cuius sepulchrum Cicero a se, cum in Sicilia Quastoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Gracos fuerit Geometria. Accedit quoq; ad prestantiam, vtilitatemq; Geometria, quod cum demonstrationes Geometrica sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, qua sit vis demonstrationum, nemoq; eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidẽ ingenue fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorũ, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & pracepta miro cum animi ardore, studioq; arripuisset, nihil fere ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, qua tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse, Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hasitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmetica, Geometria, Dialecticaque (quibus artibus ab auis, & patre fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tũ ob eã etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit vtilis, vt alia artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hac summa laus Geometria, omnibusque modis pradicanda, quod non hasit in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolauit in calum vsque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cœlestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.*

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè sibi hunc scopum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque vero mirum alicui videri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propria contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis: Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimũ circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam constituũt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus vero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, vt proprias nancisserentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus vero quinq; de solidis acutissime disputat, eorumq; proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam vero cum res oẽs Geometricæ, tum præsertim solida illa quinq; regularia, quę corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absq; linearum cõmensurabilium, atq; incommensurabilium notitia; Immo vero quam plurimæ magnitudines sub mensurã cadere nulla ratione absq; earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenumero sint talia, vt ea cõmunis, & nota mensura data metiri nequeat, vt liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; vsum: idcirco vt hisce elementis Geometricis cõplecterentur oĩa documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimẽsionemq; requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librũ, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis differit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commen-

men-

mensurabilium, & incommensurabiliũ sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorũ passionibus, easq; copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totũ hoc volumen elementorũ Geometricorum quindecim libris cõprehensum (quorum quidẽ priores tredecim sine vlla cõtrouersia Euclidi ascribuntur ab omnibus, posteriores vero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes cõplectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq; disputet; Quarta deniq; reliquis quinq; libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum cõplectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur; In sexto deniq; proportiones figurarum planarum discutiũtur. Quid vero Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

D*EMONSTRATIO omnis Mathematicorũ diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocãt eam demonstrationẽ, quæ iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterũ constitui, appellabitur huiuscemodi demonstratio problema, quoniã docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius vtraq; pars contradictionis (vt ipsi loquuntur) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiã quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent cõstruere, & cuius contrarium effici etiã potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineã* rectam finitam triangulum æquilaterũ posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, vel scalenũ, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineũ secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tñ discrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nã in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantũ probabiliter, ita vt intellectus cuiusq; ambigat, vtranã illius pars vera sit: In Mathematico uero, quamcunq; quis partẽ elegerit, eam firma demonstratione, ita vt nihil omnino dubij sit reliquum, cõprobabit. Si.n. Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularem educere, efficiet vtiq; hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eodẽ modo dicendũ est, si ex eodem puncto velit educere lineã non perpendicularem. Theorema aũt appellant eam demonstrationẽ, quæ solũ passionem aliquam, proprietatemue vnius, vel pluriũ simul quantitatum perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triãgulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocãt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulũ, aut quippiam aliud construere, sed contẽplatur tantũmodo trianguli cuiuslibet constituti passionẽ hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis vtraq; pars vera vt sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadẽ ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaq; vt vno verbo dicã, quæsitum illud Mathematicũ construere aliquid docens, cuius etiam oppositũ potest effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam oẽs anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstrabitur lib. 3. propositione 31. Quamobrẽ theorema hoc, & non problema dicendũ erit. Cæterum tam problema, quã theorema dici cõsueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod vtrũque

que

quæ aliquid nobis proponat, vt in exemplis adductis constat. Hæc ideo diximus, vt studiosus lector non miretur quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionũ alias dici problemata, alias theoremata. Elementa.n. Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorũ interim volumina taceã,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concludunt his fere verbis: Quod faciendũ erat: Theorematũ vero hisce: Quod ostendendũ vel demonstrandum erat; habita nimirũ ratione finis vtriusq́. In quolibet aũt problemate, ac theoremate plures demõstrationes continentur et non vna tantũ, quamuis vltimus syllogismus demõstratiuus solum cõcludat id, quod in initio demonstrandũ proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM vero ad demonstrationes problematũ, atq; theorematũ sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus præcipue agiũ, vt breuius demõstrari possint. Vocant autem illa Lẽmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodum de alijs. Itaq; Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis assumiũ, vt demõstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisq; disciplina ex præexistente gignatur cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdẽ Aristotelis, aliorumq; philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt vtiq; & Mathematicę disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autem tria tãtummodo genera apud Mathematicos reperiunũ. In prima reponuntur oẽs definitiones, quas nonnulli cum Arist. suppositiones,

nes, ut vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicani, ne in tractatione ipsa, nominũ ambiguitate, aut obscuritate circũuenti in paralogismos incidamus. Secundũ genus complectitur petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeãt confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, seu cõmunes animi notiones, quæ non solũ in scientia proposita, sed etiam in oĩbus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula rectè perceperit. Atq; his principijs rectè mihi videt̃ accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles. A ianua quis aberrabit? Vt præclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igit̃ hoc in volumine Geometricorum elementorũ præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum oĩa hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidẽ facile a quouis intelligunt̃, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquã assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarent̃. Vnde hoc etiã nomine summis laudibus efferenda est Geometria, oĩbusq; seculis prædicanda, quod ex tã exiguis initijs cuilibet quantũuis rudi et ignaro notissimis, et quidem perfacilibus progrediat̃ ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tñ omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq; certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquat̃. Porro inhuiuscemodi principijs tradẽdis hic ordo ab Euclide seruat̃, vt in ipso quidẽ introitu scientię proponat principia toti Geometriæ cõmunia, in alijs autẽ deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadã ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neq; vero oĩa principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tñ ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt & intelligi. Verũ ne in hac quoq; parte defuisse videamur rerũ Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

TOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus, proprietatesque triangulorum tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdũ, interdum vero vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquãdo ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem, atque inæqualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas cõstitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarũ maximè primæ, ac præcipua.

citus, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositā exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate cōtinua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solum est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris pūctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

punctum

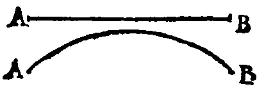
.

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT *hic lineam, primam speciem magnitudinis,*

nis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, nō autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq́; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & umbra extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusq; . Mathematici quoq; , vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari atque diuidi.



III.

LINEAE autem termini, sunt puncta.

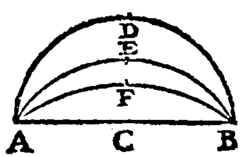
DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineā terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea quælibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita ut earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

RE-

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX *omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraq;. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc deflectẽdo subsultat; in qua deniq; nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcise spatiũ, quanta est distantia puncti A, a puncto B: Lineæ vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spatia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineã perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectũ, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non*



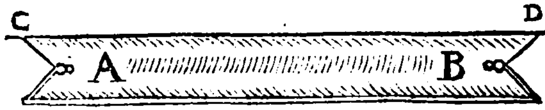
non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum rectà fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neq; in hanc partem, neq; in illam deflectat, sed æquabilē quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaque si duo puncta moueātur similibus prorsus motibus, ita vt semper æqualiter in se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformiū rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoides, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & alia huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquē conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in Sphæra docuimus. Difformium autem

infinitus

infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum.

Lib. 1. tex. 5.

SED *quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur.*



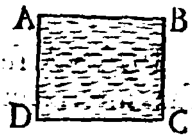
Deinde regula inuertatur, vt superior superficies fiat inferior, & inferior euadat superior, dextraque pars transeat in sinistram, & contra, hoc est, partes regulæ prope B, statuantur iuxta punctum C, recta descripta, & partes prope A, iuxta punctum D; & secundum idem latus regulæ C D, à puncto C, ad D, recta ducatur. Nam si posterior hæc priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST *lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate.*

ditate. Vt quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehensa, consideratáq; secundum longitudinem AB, vel DC, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur superficies.



Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbra corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoq;, propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea AB, fluat versus DC, efficietur superficies ABCD. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum. Alij vero, magnitudinem duobus constantem interuallis: Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

VI.

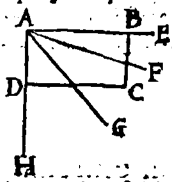
SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON *dissimilis est hęc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei ABCD, extrema sunt lineę AB, BC, CD, DA; Eodemq́; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.*

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC quoq; definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumùe subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorùe, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies



A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum; sed omnia puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci; propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaq; vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & deniq; secundum omnes partes. Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, quæ super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur; efficietur superficies

perfecte

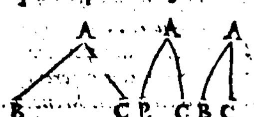
perfectè plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotũdæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ.

Quamuis enim superficies columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest. Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

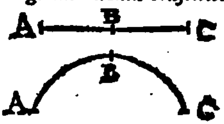
VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, *quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & nõ iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existẽtem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ*



lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum cõtactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangãt iacentes in directum, ita vt alterutra producta cõgruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnã integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta cõuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundũ suam inflexionem, & obliquum ductum



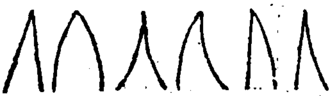
extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productę se mutuo secent: Curuę autem lineę, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotę cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

CVM

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineę, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS *omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta, qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum cõuexum, & concauum, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisùe linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdũ; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.*



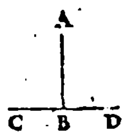
X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; ęqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS *frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acu-*

 ti, pro-

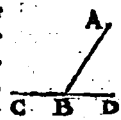
ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri.



Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc, quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



QVANDO recta A B, recta C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

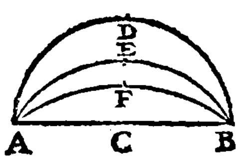
VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt unus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiũt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum vero, per angulum A B D; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

IAM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX *omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraq; . Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc deflectēdo subsultat; in qua deniq; nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum : In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcise spatiū, quanta est distantia puncti A, a puncto B: Linea uero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spatia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineā perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectū, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur : Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis*



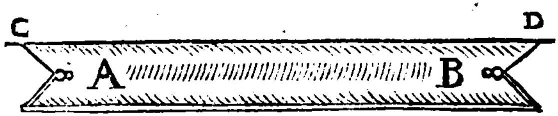
non

non rectis, ut perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum rectà fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neq; in hanc partem, neq; in illam deflectat, sed æquabilē quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaque si duo puncta moueātur similibus prorsus motibus, ita vt semper æqualiter in se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformiū rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoides, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquē conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus

infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum.

Lib. 1. tex. 5.

SED *quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur.*



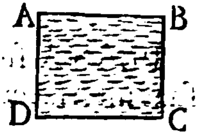
Deinde regula inuertatur, vt superior superficies fiat inferior, & inferior euadat superior, dextraque pars transeat in sinistram, & contra, hoc est, partes regulæ prope B, statuantur iuxta punctum C, recta descripta, & partes prope A, iuxta punctum D; & secundum idem latus regulæ C D, à puncto C, ad D, recta ducatur. Nam si posterior hæc priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST *lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate.*

ditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehensa, considerataq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbra corporum. Ha enim, cum interiorem terra partem penetrare non possint, longa tantum erunt, & lata. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter longitudinem linea, latum quoq;, propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur: Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem interuallis: Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.



VI.

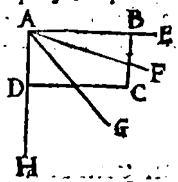
SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON *dissimilis est hęc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineę A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.*

VII.

PLANA superficies est, quæ ex ęquo suas interiacet lineas.

HAEC *quoq; definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumùe subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorùe, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies*



A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum; sed omnia puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta liberè non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaq; vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & deniq; secundum omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, quæ super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur; efficietur superficies

perfecte

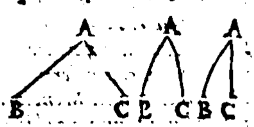
perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cætera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotũdæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ.

Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest. Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

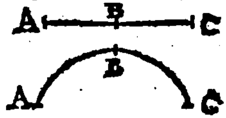
PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, *quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & nõ iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existẽtem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur.*



Dicuntur autem duæ

lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum cõtactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangãt iacentes in directum, ita vt alterutra producta cõgruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnã integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta cõuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundũ suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere.



Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productę se mutuo secent: Curuę autem lineę, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotę cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

CVM

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineę, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS *omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta, qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum cõuexum, & concauum, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur:*

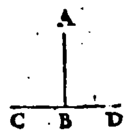
Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisùe linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdũ; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune est, non autem ita variatur, vt aliud constituat genus.

X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; ęqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS *frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acu-*

ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & qua nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest Angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D. insistet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis recta C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis recta A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc, quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

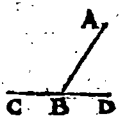


OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.

QVANDO recta AB, rectæ CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

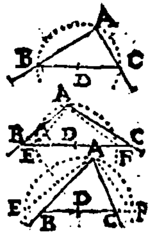


XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

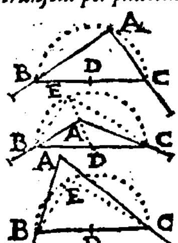
VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt unus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiũt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

IAM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcũque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro, ad interuallum D A, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat, [a] erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si verò idẽ semicirculus rectã B C, secet in E, F, erit angul[9] B A C, obtusus; propterea quòd, ductis rectis E A, F A, [b] angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem pars est anguli B A C: Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea quòd ductis rectis E A, F A, [c] angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.



a 31. tertij.
b 31. tertij.
c 31. tertij.

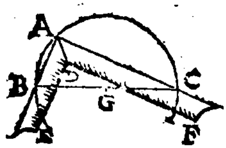
ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A, [d] datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si uero idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C; [e] eritque angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus [f] maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur rectæ E B, E C; [g] eritq; angulus B E C, rectus in semicirculo: qui cum [h] maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse uidetur à puritate demonstrationum Geometricarum. Non uideatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ



d 31. tertij.
e 31. tertij.
f 21. primi.
g 31. tertij.
h 21. primi.

quisita sint demonstrata. Satis est, ut praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim proprijs in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, ubi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessaria sint propositiones posterius demonstratæ.

FACILIVS idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert instrumẽtum A B C, constans duabus regulis A E, A F, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nã si latus A B, huius normæ recta A B, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & normæ latus A C, rectæ A C, congruat, erit angulus A rectus: si uerò citra rectã A C, cadat normæ latus A C, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ A C, ultra rectam A C, cadat, acutus erit angulus, ut perspicuum est.



ITA autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo B A C, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq; diametro B C, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, ut in A, latusq; unum normæ, ut A B, per B, punctum extremum diametri trãseat. Nam si alterum tunc latus A C, per alterum pũctum extremum C, transeat, ritè fabricata erit norma A B C; [a] quòd tunc angulus B A C, in semicirculo B A C, rectus sit: si uerò latus A C, non per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c. [a] 31. tertij.

X I I I.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim

enim terminus est, seu extremum lineæ: Lineæ superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione; ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quę sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

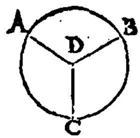
NON *omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, ut solida finita, Figuræ nomine appellabũtur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire; & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, uel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura uocari nulla ratione potest. Figuræ unico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus uero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circunscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos uariarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum uero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse uidetur.*

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quę peripheria appel-

appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quę intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineę inter se sunt æquales.

DEFINIT *hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ unica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea* A B C, *habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a* D, *omnes rectæ lineæ cadētes ad terminū* ABC, *quales sunt* D A, D B, D C, *inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo*



punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. *tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est* A B C, *appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi.* Circulus *est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib.xi. Vt si intelligatur recta* A D, *circa punctum* D, *quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum* A, *delineabit peripheriam* A B C: *Erit quoque punctum quiescens* D, *illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta* A D, *circumducta, omnes lineas, quæ ex* D, *possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.*

HOC

XVI.

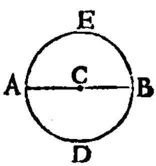
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, *punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est pręcedentis figurę punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphęra, a quo omnes rectę ad peripheriam circuli cadentes sunt ęquales, vt ait Theodosius in sphęricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphęrę, non autem in superficie circuli; quę tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cęterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineę cadentes in peripheriam sint ęquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes alię ab eodem puncto emissę inter se sint æquales.*

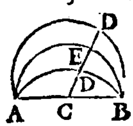
XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quę circulum bifariam secat.

SI *in circulo ducatur recta linea* A B, *per centrum* C, *ita vt extrema eius A, &* B, *terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quę per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrū duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest,*



test, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinque æquales circunferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, *accommodari, & coaptari portioni reliquæ* A E B, *ita vt diameter* A B, *communis sit vtrique portioni: Si igitur circunferentia* A D B, *congruat penitus circunferentiæ* A E B, *manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si uero circunferentia* A D B, *non omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam* A E B, *sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro* C, *secante circunferentiam* A D B, *in* D, *& circunferentiam* A E B, *in* E, *erunt duæ rectæ* C D, C E, *ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamẽ vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, uel intra, uel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoque æquales erunt. quod demonstrandum proponebatur.*



EX *hac demonstratione constat, diametrum non solum circunferentiã, uerumetiã totam areã circuli secare bifariam. Cũ enim semicircunferentiæ sibi mutuo congruant, ut ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & utramque circunferentiam comprehensæ, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.*

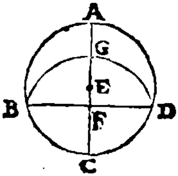
XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quę continetur sub diametro, & sub ea linea, quę de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI *gratia, in superiori circulo figura* A D B, *contenta sub diametro* A B, *& peripheria* A D B, *dicitur semicir-*

micirculus, quia, ut in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, *semicirculus. Idem autem punctum* C, *diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.*

QUOD si recta linea B D, *non transeat per centrum* E, *secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inæquales* B A D, B C D, *quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio* B A D, *maior est, quam alia* B C D, *extra quam centrum* E, *reperitur. Esse autem portiones* B A D, B C D, *inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum* E, *ducta diameter ad rectam* B D, *perpendicularis* A C. *Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio* B C D, *intelligatur moueri circa rectam* B D, *ut super portionem* B A D, *cadat, congruet illa portio huic, & recta* F C, *rectæ* F A, *congruet, ob angulos rectos ad* F, *qui oēs inter se æquales sunt ex defin. 10. cū sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo* F C, *quæ nunc eadem est, quæ* F A, *maior erit, quam* E A, *pars ipsius* F A. *Cum ergo ipsi* E A, *sit æqualis* E C, *quod ambæ ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoque* F C, *maior quam* E C, *pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio* B C D, *portioni* B A D, *congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio* B G D, *ut recta* F G, *eadem tunc existens, quæ* F C, *minor possit esse quam* E A, *uel* E C. *Si namque diceretur cadere extra, ut si circulus esset* B C D G, *cuius centrum* E, *& portio* B C D, *caderet extra* B G D, *qualis est portio* B A D, *esset rursus* F A, *eadem tunc existens, quæ* F C, *maior quam* E G, *hoc est, quam* E C, *atque ita pars* F C, *maior rursum foret toto* E C. *quod absurdum est. Ex quo patet, portionem* B A D, *in qua centrum* E, *existit, maiorem esse reliqua portione* B C D, *cum hæc æqualis sit portioni* B G D, *quæ pars est portionis* B A D.



XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quæ nam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS *Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.*

XXI.

QVADRILATERAE vero, quę sub quatuor.

EADEM *ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.*

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM *species rectilinearum figurarum sunt innume-*

numerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangula, sexangula, septangula, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

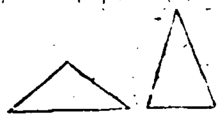
DESCENDIT *iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.*

ISO-

XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius; & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.



XXV.

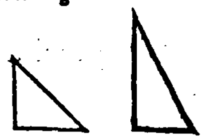
SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC deniq; ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triãgulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isosceli, tertium deniq; Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte cõstruenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

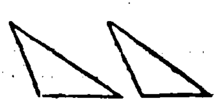
AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, ut supra diximus,) fit ut tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, ut ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusque obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17, & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtusum angulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, siue obtusangulum esse quoq; potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur, nō autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli

anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus, æquales, ideoq; cum vnus ponatur obtusus, omnes tres obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

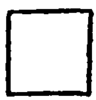
OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tum Isosceles, quam Scalenum, esse vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Isosceles Oxygonium rursum duplex, Isosceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atq; Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica sit species trianguli æquilateri, quatuor vero Isoscelis, & tres Scaleni: atq; in vniuersum octo triangulorum genera, æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Isosceles Oxygonium habens latus tertium vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles, habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorũ laterum æqualium vtrumuis tertio sit minus, vt recte animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur,

minantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in base trianguli, intelligeresq́; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

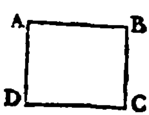
POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia



quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.



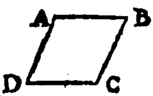
SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera AB, DC, inter se, & AD, BC,

inter

inter se quoque æqualia sunt, cum A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

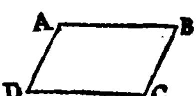
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo ABCD, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum ABCD, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.



EST hæc figura, quæ Rhomboides uocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque eius latera omnia æqualia sunt, neque vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, CD, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunque sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquę quadrilaterę figurę, trapezia appellentur.

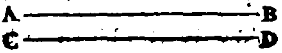
RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter se æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineę sunt, quę cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana, productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata,

modata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita ut circa illam circumducta tangat quoque



omnia puncta alterius rectæ C D; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum cõuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodẽ existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Quâ in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

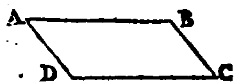
HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus defini-

tionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

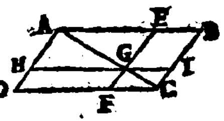
VT figura quadrilatera A B C D, si quidem latus A B, æquidistet lateri D C, *& latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solũ parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora uero duo nõ rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammũ rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterũ, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorũ quoq; aliud quidẽ habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturq́; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq́; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.*



XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter

meter ducta fuerit, duęq́; lineę lateribus parallelæ secantes diametrũ in vno eodemq́ue puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



SIT *parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC; et linea E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item linea H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaq́; lateribus A B, D C, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non transit, vocantur a Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.*

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

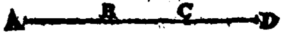
PRIMVM *hoc postulatum planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque* adeo

adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, *quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctũ* B; *ab eodemq; aliam ad punctum* C; *Item aliam ad punctum D; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.*

I I.

ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

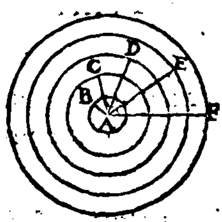
QVOD *si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam. Sic linea recta A* B, *producta est primo in continuum ad punctum* C, *Deinde ad punctum D, &c.*



I I I.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.

IAM *vero, si terminatam rectam lineã cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatã esse secundum alterum extremum ad quoduis punctũ, ipsamq; circa hoc punctũ fixum circũduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cepit; descriptus erit circulus, effectũq;, quod tertia petitio iubet. Exemplũ habes in his quinq; lineis A* B, *A C, A* D, *A* E, *A F, quæ singulæ circa centrum A,*



circum-

circumuoluta, singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER hæc tria postulata quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IIII.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS *enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quãtitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.*

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quę & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitu

dine

dine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius eſt, aut minus.

FIERI *nulla ratione poteſt, vt duę quantitates inęquales, ęquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitę quantitati ęqualis extiterit, excedet eandem neceſſario maior illarum; Et ſi maior æqualis fuerit propoſitę quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quę eidem quantitati ęquales fuerint, inter ſe ęquales quoque eſſe. Reliquę quoque partes Axiomatis à nobis adiectę, quod frequentem vſum habeant, clariſſimę ſunt.*

I I.

ET ſi ęqualibus ęqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

S I *enim quantitates conflatæ, ſiue compoſitæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus eſſet adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.*

I I I.

ET ſi ab ęqualibus ęqualia ablata ſint, quę relinquuntur, ſunt ęqualia.

N A M *ſi reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuiſſet detractum, quam a maiore.*

I I I I.

ET ſi inęqualibus ęqualia adiecta ſint, tota ſunt inęqualia. Et, ſi inęquali-

bus

bus inęqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inęqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN & *, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adijciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.*

V.

ET si ab inęqualibus ęqualia ablata sint, reliqua sunt inęqualia. Et si ab inęqualibus inęqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inęqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC *etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuũ maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferãtur ab inæqualibus. Cæterũ Euclides non docet, quidnã simpliciter, & absolutè gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quãtitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim composita quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia.*

lia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3 & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO *in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.*

VI.

ET quę eiusdem duplicia sunt, inter se sũt ęqualia. Et quod vnius ęqualiũ duplũ est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, *quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c, alicuius quantitatis, deficeret vtique minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertia illa addatur, erunt composita duplices illius tertiæ,* [a] *sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflata triplices eiusdem tertiæ. Cum igitur* [b] *& æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porrò partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron.

b 2. pron.

ET

VII.

ET quę eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ęqualia ſunt. Et contra, Quę ęqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARI *ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.*

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertiæ, vel quartæ, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt. Partem quoque ſecundam huiuſce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris vſurpatur.

VIII.

ET quę ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt ęqualia.

HOC *eſt, duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.*

ECONTRARIO, *Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuo congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuo congruentes, eſſe æquales, ſecundum id duntaxat, in quo ſibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.*

I X.

ET totum sua parte maius est.

CVM *pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.*

IN sequentibus porrò pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inserenda esse censuimus valde necessaria, cùm ex ijs Axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

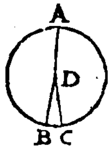
X.

DVAE lineæ rectę non habent vnum & idem segmentum commune.

NON *est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura recta linea. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt dua linea recta habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, prater vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, dua recta AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA,* [a] *describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C;* [b] *Erunt igitur dua circunferentia AB, ABC, inter se aquales, (Sunt enim circunferentia semicirculorum aqualium, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo dua recta habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.*

[a] *3. petit.*

[b] *17. defi.*



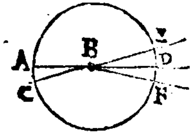
POSSVNT tamen dua linea recta commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, recta AD, BC, commune habẽt segmentũ CD; quia amba vnam rectam cõstituũt lineam

lineam A B. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonstratum.

X I. o.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuò in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum A B, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentū commune B D, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, sitq; vna recta



linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam A C D, quam C F, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ A C D, C F, vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.

DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

X I I. x.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuiue nequeat, sed prorsus sit immutabilis. Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neq; magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitque A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quod angulus D E F, minor ponitur angulo A B C.

a 2. petit. *Producatur C B, in rectum & continuum vsque ad H; Cum igitur angulus A B C sit rectus,* [b] *erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior etiam angulo A B G.* [c] *Producta autem G B, in rectum & continuum vsq; ad I, cadet portio producta B I, infra C B, productam, vt in præcedenti Axiomate est demonstratum. Quare cum angulus A B G, ponatur rectus,* [d] *fiet angulus A B I, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus A B H, maior quoque erit angulo A B I, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademque est ratio in cæteris.*

b 10. def.

c 2. petit.

d 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

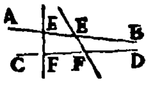
XI.

XIII.

ET si in duas rectas lineas altera re-

cta

cta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



VT si in duas lineas rectas AB, CD, *incidens alia recta* E F, *faciat duos angulos internos, & ex eadem parte* B E F, D F E, *minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem cõuenturas esse ad aliquod punctum vnũ, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum uideri solet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quiuis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum, & in duabus rectis* A B, C D, *accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis: Idcirco pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, vt firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter,*

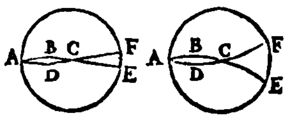
ter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

XII.

XIIII.

DVAE rectæ lineę ſpatium non comprehendunt.

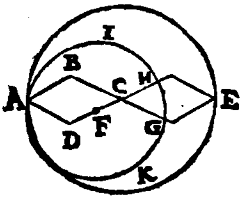
NVLLAM prorſus habet difficultatem hoc principiũ. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis diſiungentur, ſi producantur, vt in exemplo propoſito perſpicuum eſt. Quare vt ſuperficies, ſpatiumùe quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri poteſt, vt duæ lineæ rectæ claudant ſuperficiem, comprehendant duæ rectæ A B C, ADC, ſuperficiẽ ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A, & C.



a 3. pet. Facto deinde cẽtro C,[a] deſcribatur circulus interuallo C A,
b 2. pet. [b] & producantur rectæ A B C, A D C, in rectum, & continuum vſque ad circunferentiam, nempe ad puncta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, tranſeunt per centrum C,
c 17. def. [c] erunt ſemicirculi A E, A E F, inter ſe æquales, & idcirco circunferentia quoque A E, circunferentiæ A E F, æqualis erit, pars toti, quod fieri non poteſt. Non ergo rectæ duæ lineæ ſpatium comprehendunt. Quod eſt propoſitum.

SED quia fortaſſis aduerſarius dicet, rectas ABC, ADC, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atque adeo non ſequi, partem æqualem eſſe toti, demonſtrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, ſi fieri poteſt, in E. Sumpto puncto F, in recta A D C, quocunque, erit A F, minor, quam F E, cum minor ſit, quàm A F C, hoc eſt, quam C H E, quæ ipſi AFC, æqualis eſt, atque adeo multo minor, quàm F E. Circulus igitur

igitur ex F, ad interuallum F A, descriptus secabit rectam F E, in in H, atque adeo C G E, in E. Quoniam igitur A F H, diameter circuli est, erit A I H, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem A I G, in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia



A I G, minor quam A I H, pars quam totum, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio A I G, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam A B G, perpendiculari, & circumuoluta portione A I G, circa rectam A B G, cadet circumferentia A I G, intra circumferentiam A K G, ne pars maior sit quàm totū, vt supra demōstrauimus.

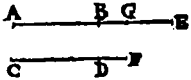
CONSTAT hoc etiam Axioma ex defin. lineæ rectæ. Cū enim recta linea sit breuissima extēsio ab uno pūcto ad aliud, duci poterit vnica tantū linea ab vno puncto ad aliud. Quare si A B C, recta est, non erit A D C, recta. Quod etiam patet ex defin. Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ A D C, non obumbrant extrema, cum visus per rectam A B C, feratur. Non ergo recta est A D C.

HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atque Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI ęqualibus inęqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui ęqualis.

HOC, *& sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus* A B, C D, *addantur*



inæquales B E, D F, sitq; B E, maior quam D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur
[a] 2. pron. æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F, [a] erũt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quo magnitudo D F, adiuncta a magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositum.

O.

XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quę a principio erant, ęqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt G E, sit excessus, quo quantitas B E, quantitatem D F, superat. Quoniam igitur æquali-
[b] 2. pron. bus B G, D F, addita sunt æqualia A B, C D, [b] erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, superabit totam C F, eodem excessu G E, quo maior quantitas proposita B E, minorem D F, superat. Quod est propositum.

O.

XVII.

SI ab ęqualibus inęqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum ęqualis.

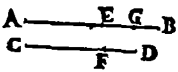
A B æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq; EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF; ita vt B G, æqualis sit ipsi D F. Quia igitur ab

[c] 3. pron. æqualibus A B, C D, ablata sunt æqualia B G, D F, [c] remanebunt

manebunt A G, C F, *æqualia. Perspicuum ergo est, residuũ* A E, *superari a residuo* C F, *eodem excessu* E G, *quo magnitudo ablata* B E, *ablatam magnitudinem* D F, *superat. Quod est propositum.*

XVIII.

SI ab inęqualibus ęqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum ęqualis.



A B *inæqualibus* A B, C D, *auferantur æqualia* A E, C F. *Sitq́;* B G, *excessus, quo tota quantitas* A B, *superat totam quantitatem* C D, *ita vt* A G, *æqualis sit ipsi* C D. *Quoniam igitur ab æqualibus* A G, C D, *ablata sunt æqualia* A E, C F, [a] *remanebunt* E G, F D, *æqualia. Quare residuum* E B, *superabit residuũ* F D, *eodem excessu* B G, *quo tota quantitas* A B, *superat totam quantitatem* C D. *Quod est propositum.* a 3. pron.

IN his quoque quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas. 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

o.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM *omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.*

o.

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI *potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & Axiomata, quod cum vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem Postulatum a problemate, quod constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquid nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idē iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.*

CON-

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronũciatis. Nã octauũ, decimũ, vndecimũ, duodecimũ, tertiũdecimũ, & quartũdecimũ soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie atq; ordine propositionũ, id quod maxime in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quãdo numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondeat alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, cita-

citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt facilius cognoſcatur, ad quem locum qualibet citatio ſit referenda. Porrò citationes intelligendæ ſunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & ſic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Poſtulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propoſitio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.*
6. tertijd.	*Sexta tertijdecimi libri.*
9. ſextid.	*Nona ſextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi. &c.*

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PRO-

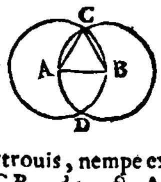
PROBLEMA I.

PROPOSITIO I. I.

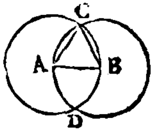
SVPER data recta linea terminata triangulũ AEquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematibus perspici potest. Hæc etiã duo reperiũtur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construẽdũ est, atq; efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [b] ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; [c] Eritque super rectam A B, constitutum triangulum



a 3. pet.
b 1. pet.
c 20. def.



lum A B C, hoc est, figura rectilinea cõtenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, [a] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis est rectæ A B. [b] Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

[a] 15. def.
[b] 1. pron.

S C H O L I V M.

VT autem videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, [c] est æquilaterum.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, [d] inter se quoque sunt æqualia.

Duo latera A C, B C, *æqualia sunt eidem lateri A* B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera AB, BC, *AC, æqualia existunt.*

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, [e] inter se sunt æquales.

Lineæ A B, A C, sunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, *æquales inter se.*

Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, *ad circunferentiam* C A D. *Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.*

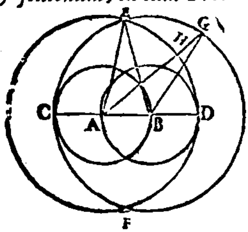
Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones non solum

[c] 23. def.
[d] 1. pron.
[e] 15. def.

lum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

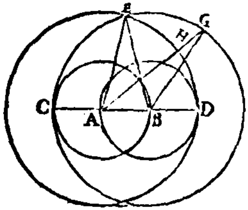
Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI QVIS autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius.[a] Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circũferentias vsq; ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D,[b] describatur circulus E D F. Itẽ



centro B, interuallo uero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E,[c] ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit super recta A B,[d] triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circumferentiam E D F,[e] erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circumferentiam E C F,[f] erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter se, (vtraque enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediãtur.[g] Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur communi recta A B[h] erit tota A D, toti B C, æqualis.)[i] Igitur A E, B E æquales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque A E, B E, maior sit quam A B, perspicuum est, cum A D, æqualis ostensa ipsi A E,[k] maior sit, quam A B; Item B C, æqualis demonstrata ipsi B E,[l] maior quoque sit, quam A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Procli, aliorumq; interpretum Euclidis.

[a] 2 petit.
[b] 3. pet.
[c] 1. pet.
[d] 20. def.
[e] 15. def.
[f] 15. def.
[g] 1. pron.
[h] 2. pron.
[i] 1. pron.
[k] 9. pron.
[l] 9. pron.



BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triãgulum A B E, esse Isosceles, hac ratione. a Quoniã A E, æqualis est recta A D, & recta A D, est dupla recta A B, ꝓpterea quod B A, B D, æquales inter se sunt; erit & A E, dupla recta A B. Rursus b q̃a B E, æqualis est recta B C, & B C, dupla est ipsius A B, ꝓpterea q̃d c A B, A C, æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cũ igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdẽ A B, d erũt A E, B E, inter se æquales, maioresq; ꝓpterea recta A B. Isosceles ergo est triãgulũ A B E.

a 15. def.
b 15. def.
c 15. def.
d 6. pron.

IAM vero, si ex puncto A, e ducatur linea recta A G, ad circumferentiam E G F, quæ non sit eadem quæ A E, vel A D, secans circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B f ducatur alia recta G B, g constitutum erit triangulum A B G, super recta A B, quod dico esse scalenum. h Quoniam A G, maior est quam A H: i Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & A G, maior quam A E, hoc est, quàm B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, k cum B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior, quam A B, propterea quod tota B C, æqualis ipsi B G, l maior sit quam A B, pars. Omnia ergo tria latera trianguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

e 1. pet.
f 1. pet.
g 20. def.
h 9. pron.
i 15. def.
k 15. def.
l 9. pron.

BREVIVS quoque ostendemus, triangulum A G B, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam m A H, A D, ex centro A, ductæ, sunt æquales, quam B G, B C, ex centro B, ductæ: Sunt autem A D, B C, ipsius A B, duplæ, quod A B, vtrique B D, A C, æqualis sit; erunt quoque A H, B G, ipsius A B, duplæ, ac propterea maiores, quã A B. Cum ergo n A G, maior sit, quam A H, siue quam B G, scalenum erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum; B G, medium, & A B, minimum.

m 15. def.
n 9. pron.

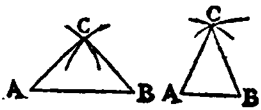
PRAXIS.

CONABIMVR, in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere;

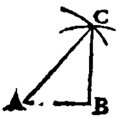
construere; Idq́; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentio rem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

ITAQVE triangulum æquilaterum ita facile construetur super data recta A B. *Ex centris* A, *&* B, *interuallo vero datæ rectæ* A B, *describantur duo arcus circulorum se interse cantes in puncto* C, *siue hoc infra lineam contingat siue supra. Post hæc ducantur duæ rectæ* A C, B C, *ex puncto* C, *ad puncta* A, *&* B; *factumq́; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent inte gri, ac perfecti. Transirēt enim necessario per puncta* A, *&* B.

ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, *&* B, *interuallo vero maiore quam* A B, *si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in* C. *Postea ducantur rectæ* A C, *&* B C; *constructumq́; erit Isosceles: quoniam* A C. B C, *æquales erūt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta* A B.



SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. *Ex centro* B, *interuallo vero maiore, quam* B A, *describatur arcus aliquis: Item ex centro* A, *interuallo vero adhuc maio re, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in* C. *Deinde ducantur rectæ* A C, B C; *constitutumq́; erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.*

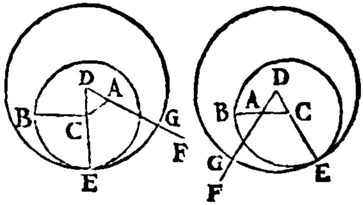


CÆTERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

AD datum pūnctum, datę rectę lineę ęqualem rectam lineam ponere.

SIT



SIT punctũ datum A,& data recta linea B C, cui aliam rectam æqualẽ ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta vero A C, [c] construatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, [d] extendantur; D C, quidem opposita puncto dato A, vsque ad circunferentiam in E; D A, vero opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferentiam E G, [f] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus triãguli æquilateri A C D, [g] remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, [h] æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadãt ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidẽ vtraque æqualis est ostensa rectæ C E, inter se [i] æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

[a] 3. pet.
[b] 1 pet.
[c] 1. primi.
[d] 2 pet.
[e] 3. pet.
[f] 15. def.
[g] 3. pron.
[h] 15. def.
[i] 1. pron.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, [k] describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta [l] ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C, [m] æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

[k] 3. pet.
[l] 1 pet.
[m] 15. def.

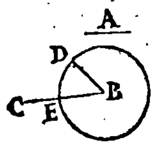
SCHO-

SCHOLIVM.

HVIVS problematis varii esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel e directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat; vel non e directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.



SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatque ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, [a] ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus [b] describatur secans BC, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, [c] æqualis est rectæ B D, & eidem BD, æqualis est recta A, per constructionem; [d] erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

a 2. primi.
b 3. pet.
c 15. def.
d 1. pron.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4\.

THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo ęqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

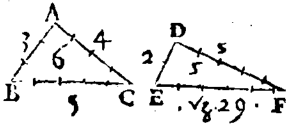
SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, cōtentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoq; esse ęquales,

les. Quoniam enim recta AB, rectę DE, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri supponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [a] ipsę sibi mutuo congruant, punctumq; B, in punctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectę AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, [b] quod est impossibile. Quòd si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. [c] quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectę DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta EGF, vel EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quàm EHF, rectá esse, cum vtraq; ponatur esse eadem, quæ recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectę superficiem [e] claudere non possunt, Quocirca [f] basis BC, basi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

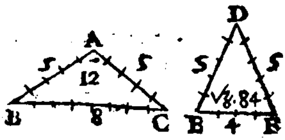
[a] *8. pron.*
[b] *10. pron.*
[c] *14. pron.*
[d] *8. pron.*
[e] *14. pron.*
[f] *8. pron.*

SCHOLIVM.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus ęqualis sit angulo alterius contento lateribus, quę istis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonstratur: Triangula vero ipsa licet possint esse æqualia, posteriore *duntaxat conditione deficiente, vt ex scholio propos. 37 huius lib. constabit, tamen raro admodum illud continget. Sint enim triangulorum* A B C, D E F, *anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera* A B, A C, *æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitq;* AB, *3.* AC, *4. vt ambo simul efficiant 7. At vero* D E, *sit 2. &* D F, *5. vt ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis* B C, *5. & basis* E F, *radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli* A B C, *erit 6. area vero trianguli* D E F, *5. Anguli denique super basim* B C, *inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non vtrumque latus vtrique lateri æquale existit in dictis triangulis* A B C, D E F.



RVRSVS triangulorum A B C, D E F, *latera* A B, A C, *æqualia sint lateribus* D E, D F, *vtrumque vtrique, sitq; vnumquodque 5; anguli vero* A, & D, *contenti dictis lateribus inæquales, sitq;* A, *maior, quã* D. *Quibus concessis, erit basis* B C, *maior base E F, vt propos. 24. huius libri ostendetur. Quod si basim* B C. *ponamus esse 8. basim autem E F, 4. erit area trianguli* A B C, *12. area vero trianguli* D E F, *radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor vero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, vt vtrumque latus vnius æquale sit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, vt optime dixit Euclides.*

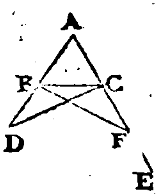


THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

5.

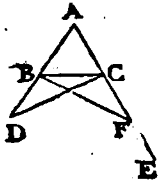
ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis ęqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se ęquales erunt.



SIT triangulum Isosceles ABC; in quo duo latera AB, AC, inter se sint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, supra basim BC, æquales inter se esse: Item si latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra basim eandem BC, esse ęquales. Ex linea enim AE, producta infinite [a] abscindatur AF, ęqualis ipsi AD, [b] & ducantur rectæ BF, CD. Considerentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, ęqualia sunt duobus lateribus AC, AD, trianguli ACD, vtrumque vtrique, nempe AB ipsi AC, ex hypothesi, & AF, ipsi AD, ex constructione; angulusq; A, contentus lateribus AB, AF, æqualis est angulo A, contento lateribus AC, AD, immo angulus A, communis est vtrique triangulo: [c] Erit basis BF, æqualis basi CD; & angulus F, angulo D; & angulus ABF, angulo ACD; cum & priores duo, & posteriores opponantur ęqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rursus considerentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam vero rectę AD, AF, ęquales sunt per constructionem, fit vt, si auferantur ex ipsis ęquales AB, AC, [d] & reliquę BD, & CF, sint ęquales. Quare duo latera BD, DC, trianguli BDC, ęqualia sunt duobus lateribus CF, FB. trianguli CFB, vtrumque vtrique, videlicet BD, ipsi CF, & DC, ipsi FB, vt probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis

[a] 3. primi.
[b] 1. petit.
[c] 4. primi.
[d] 3. pron.

lateribus ęqualibus ęquales, vt ostensum etiam fuit. Igitur [a] erit angulus D B C, angulo F C B, ęqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quam posteriores, ęqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim B C, vtriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos ęquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli ęquales CBF, B C D, (quos itidem in posterioribus triãgulis modo probauimus esse ęquales) [b] remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, ęquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse ęquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt ęquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 4. primi.

[b] 3. pron.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualibus, siue reliquum latus* B C, *ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione tradicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum quibus nondum sunt assueti. Veruntamen, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, si modo memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem*

quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

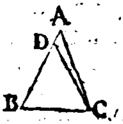
VERITAS porrò huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoq; demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo A B C, duo latera æqualia AB, A C, quæ producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos A B C, A C B, supra basim B C, inter se æquales esse, quam angulos D B C, E C B, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo A C B, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta A B. recta A C, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum A B, A C. Quo posito, cadet recta A C, super rectam A B, ob æqualitatem, siue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo E C B, congruet, [a] ac proinde tam illi, quàm hi, inter se æquales erunt. [a] 8. pron.

COROLLARIVM.

EX hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, [b] erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat. [b] 5. primi.

6. **THEOR. 3. PROPOS. 6.**

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub equalibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, equales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque equalia. Si enim non credantur equalia, existentibus nihilominus angulis dictis equalibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, [a] abscindatur in D, recta B D, equalis recte A C, (que minor dicitur esse quam A B,) ducaturque recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, aequalia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, aequalem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus aequales, per hypothesin: [b] Erunt triangula A C B, D B C, aequalia, totum, & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera AB, A C, inaequalia, si anguli B, & C, super latus B C, aequales sunt, ne totum parti aequale esse concedamus: sed aequalia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 3. primi.

[b] 4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem praecedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se equalia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque equales: Hic vero, si anguli ad basim sint equales, latera quo-

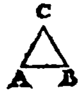
que

quę angulis illis opposita esse ęqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligat per demonstrationem consequens aliquod, nunc vero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessarijs, quales sunt propositiones Geometricę, potest interdum prędicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hęc propositio; (Omnis homo est animal.) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessarijs: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figurę cuiusuis rectilineę vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemque modo multę alię propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, vt prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quę conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quę aliquam uidebuntur afferre vtilitatem.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum ęquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt

ęqua-



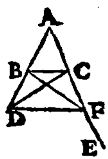
æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim triãguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, [a] erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.

a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta [b] abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: [c] erunt & bases C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus, [d] remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In-

b 3. primi.

c 4. primi.

d 3. pron.

quibus

quibus quoniam latera D B, B F, *æqualia sunt lateribus* F C, C D, *vtrumque vtrique, nempe* D B, *ipsi* F C, *per constructionem, &* B F, *ipsi* C D, *vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus* D B F, F C D, *æquales, vt etiam fuit nuper demonstratum*:[a] *Erit angulus* B D F, *super basim* D F, *trianguli* D B F, *æqualis angulo* C F D, *super eandem basim* F D, *trianguli* F C D. *Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo* A D F, *duo anguli* A D F, A F D, *sint æquales, vt nunc ostendimus,*[b] *erunt latera* A D, A F, *æqualia. A quibus si recta* BD, C F, *per constructionem, æquales demantur*, [c] *remanebunt* A B, A C, *latera trianguli* A B C, *æqualia. Quod erat ostendendum.*

[a] 4. primi.
[b] 6. primi.
[c] 3. pron.

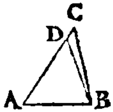
THEOR. 4. PROPOS. 7.

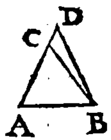
7.

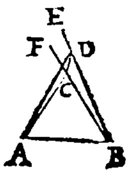
SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliȩ duæ rectȩ lineȩ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, vtraque vtrique, nempe A C, ipsi A D, quȩ eundẽ habent terminũ A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiam æquales. Aut igitur pũctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam A C, vel B D, in ipsam B C, cadat; aut intra

tra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, sit pars ipsius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia [a] erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; [b] Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alterã cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idẽ absurdum incidemus, nempe angulũ D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, vt ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, [d] erunt anguli A C D, A D C, supra







[a] 5. primi.
[b] 9. pron.
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.

supra basim C D, æquales: Ac proinde [a] cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, [b] erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

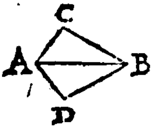
[a] 9. pron.

[b] 5. primi

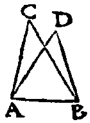
SCHOLIVM.

FIERI potest, vt duæ lineæ A D, B D, *æquales sint duabus* A C, B C, *vtraque vtrique, vt* A D, *ipsi* B C, *&* B D, *ipsi* A C. *vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, vt constat. Solæ enim* A C, A D, *eundem limitem possident* A; *Item* B C, B D, *eundem* B; *optimeq́; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, vt* A C, A D, *inter se sint æquales, ita vt* B C, B D, *quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione apposita sunt hæc verba: eosdemq́; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ lineæ simul sumptæ* A D, B D, *æquales duabus lineis* A C, B C, *simul sumptis, vt in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse vtramque vtrique esse æqualem, &c.*

Eadem ratione possunt ex A, *&* B, *infra* A B, *basim trianguli* A B C, *hoc est, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ* A D, B D, *conuenientes ad aliquod punctum, ita vt* A D, *exiens e puncto* A, *æqualis sit ipsi* A C; *&* B D, *egrediens ex* B, *æqualis ipsi* B C, *vt perspicuum est in apposita figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides, ad easdem partes. Denique esse* *poterunt*



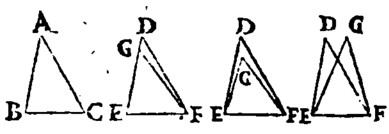
poterunt duæ lineæ A C, A D, *æquales inter se, eundem termi num* A, *possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ* B C, B D, *terminum habentes eun dem* B, *inter se quoque sint æquales, vt in hac figu ra apparet, & ab Euclide est demonstratum. Ap posite igitur dictum est in propositione: duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Eu clidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singu la verba propositionis sunt ponderanda.*



8. THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, ęqualia, habuerint vero & basim basi ęqualem: Angulum quoque sub ęqualibus rectis lineis contentum angulo ęqualem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; sit autem & basis B C, basi E F, æqualis. Dico angulum A, ęqualem esse angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F, [a] neutra excedet alteram, sed
[a] 8. pron.
punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur ęquales inter se. Deinde si triangulũ ABC, cogitetẽ cadere super triangulum D E F, cadet punctũ



A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum

ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea [a] angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunque id contingat, hoc est, siue in latus E D, siue intra triangulum E D F, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadē est, quæ B A,) æqualis ipsi E D; & F G, (quae eadem est, quae C A) aequalis ipsi F D, propterea quod latera vnius trianguli aequalia ponantur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum [b] demōstratum est, cum tam rectae E G, E D, terminum eundem E, quàm rectae F G, F D, eundem limitem E, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, aequalis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 8. pron.

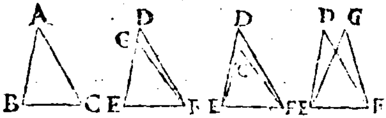
[b] 7. primi

SCHOLIVM.

VT vides, hac propositio conuertit primam partem propositionis quarta. Sicut enim ibi ex aqualitate angulorum, qui lateribus aqualibus continentur, collecta fuit basium aqualitas; ita hic ex aqualitate basium concludit Euclides aqualitatem angulorum, qui lateribus aqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartae propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrunque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

SIT enim basis B C, *aequalis basi* E F, *& angulus* B, *angulo* E, *angulusq;* C, *angulo* D F E. *Dico latus quoque* A B, *lateri* D E, *& latus* A C, *lateri* D F, *aequale esse, angulumq;*



gulumque A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, [a] congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, proptereaque omnia inter se æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie convertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. ut eo loco monebimus.

[a] 8. pron.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

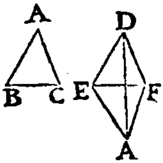
PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eo, quod in antecedente, superponi intelligatur basis B C, basi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, quale est triangulum A E F. Aut igitur duo latera, nempe D F, F A, constituunt vnam

lineam

lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant unam lineam rectam, veluti D A, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta eadem, quæ A B, quæ per hypothesin rectæ D E, æqualis est) [a] erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si vero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula, vel extra.

[a] 5. primi.

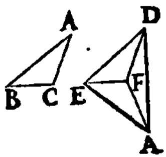
Cadat primùm intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniã igitur in triangulo AED, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli A E D, E D A, æquales ad basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, DF, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, [c] fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum.



[b] 5. primi.

[c] 2. pron.

Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia, [d] erunt anguli EAD, EDA, æquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis, [e] remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.



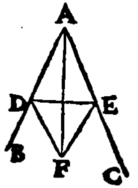
[d] 5. primi.

[e] 3. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9. 9

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT diuidendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta A B, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, [a] secetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturque recta D E. Deinde super D E, [b] constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, vtrumque vtrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem, sit æquale, & A F, commune; Sit autem & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, constructum sit æquilaterum: [c] Erit angulus D A F, angulo E A F, æqualis, ideoque angulus B A C, diuisus bifariam, quod erat faciendum.



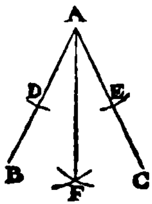
[a] 3. primi.
[b] 1. primi.
[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

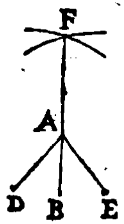
PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariam secabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales A D, A E, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (posses tamen ipsum variare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta A F, secabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum D A F, æqualem esse angulo E A F. Non descripsimus autem dictas lineas, vt nuda praxis



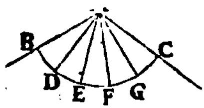
praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatq́; confusionem.

QVOD si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, vsque ad B, eiecta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.

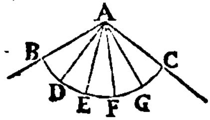


SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos aequales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos aequales angulos fuerit diuisus, si horum vterque iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos aequales; Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos aequales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides vsquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes aequales possit diuidi, quia id à nemine vsque ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdam lineae curuae, vel inflexae, ad finem lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quemcunque propositum in quotuis partes aequales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua; vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & saepius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos aequales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunq; interuallũ, secans rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus



beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in *quot angulus propositus est diuidendus, vt in exẽplo proposito in quinq; punctis scilicet in D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus* B A C, *in quinque æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint*



æqualia interualla B D, D E, *&c. si ducantur rectæ* B D, D E, *&c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera* B A, A D, *trianguli* BAD, [a] *æqualia duobus lateribus* E A, A D, *trianguli* E A D, *vtrumque vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem* B D, *basi quoque* D E, *vt dictum fuit, æqualis est:* [b] *Angulus igitur* B A D, *angulo* E A D *æqualis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum* E A D, *angulo* E A F, *æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ* B D, D E, *&c. acceptæ sint omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quolibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales: Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur recte esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.*

a 15. defin.

b 8. primi.

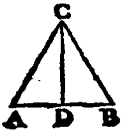
PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10. 10

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. [a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, [b] diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: [c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

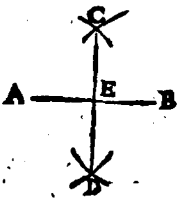
a 1. primi.
b 9. primi.
c 4. primi.



P R A X I S.

EX centro A, ad quouis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, *excedat, describantur duo arcus, vnus superne, alter inferne; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in* C, *&* D. *Recta igitur ducta* C D, *secabit rectam* A B, *in* E, *bifariam. Si enim ex* A, *&* B, *ad* C, *&* D, *ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera* A C, C D, *æqualia sunt lateribus* B C, C D, *vtrumque vtrique, & basis* A D, *basi* B D, [d] *erit angulus* A C D, *angulo* B C D, *æqualis. Rursus quia latera* A C, C E, *æqualia sunt lateribus*

d 8. primi.



a 4.primi. BC, CE, vtrumque vtrique, & angulus ACE, angulo BCE, vt ostensum fuit 3. [a] erit basis AE, basi BE, æqualis.

IAM vero si linea bifariam diuidenda, posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in D, siue hoc fiat infra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, educta secabit rectam AB, bifariam.

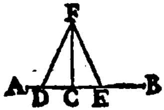
SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quæuis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longè facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonstrentur. Neque vero vnquam diuisione lineæ in plures, quàm in duas partes æquales, ad eum locum vsque indigebimus.

11.
PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

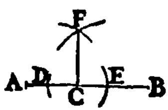
RECTA linea data sit AB; & in ea punctum C, a quo



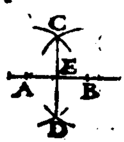
a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D,[a] cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, [b] constituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea a puncto in ea dato &c. Quod faciendum erat.

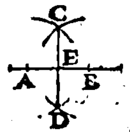
[a] 3. primi.
[b] 1. primi.
[c] 8. primi.
[d] 10. def.

PRAXIS.



EX puncto C, abscindantur vtrinque lineæ æquales C D, C E. *Et ex* D, *&* E, *describantur duo arcus secantes sese in* F. *Recta namque ducta* F C, *erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ* D F, E F, *quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex* D, *&* E, *descriptos, qui se intersecant in puncto* F. *Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit* A C, *& punctum datum* C, *extremum; protrahenda erit* A C, *in* B, *& sumendæ æquales* C D, C E, *&c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis* A, *&* B, *quibuscunque lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus sese intersecantes in* C, *&* D. *Nam*

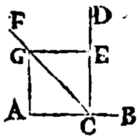




recta ducta C D, *erit perpendicularis ad* A B, *hoc est, faciet duos angulos ad* E, *rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad* E, *æquales, quippe qui super æquales bases A E, B E, consistant, opponanturque æqualibus lateribus* A C, B C, *quæ ex* C, *ad puncta A, &* B, *ducerentur.*

EX PROCLO.

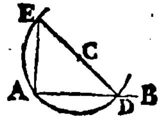
SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, *puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis* C D, *ut docuit Euclides; & a abscindatur* C E,



a 3. primi. *æqualis ipsi* A C: Deinde b *diuidatur an-*
b 9. primi. *gulus* C, *bifariam, ducta recta* C F: *Et ex* E, *rursus, ut docuit Euclides, educatur* E G, *perpendicularis ad* C D, *secans rectam* C F, *in* G. *Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cum latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia sint lateribus* E C, C G, *trianguli* E C G, *vtrumque vtrique, & anguli hisce lateribus con-*
c 4. primi. *tenti æquales quoque, per constructionem:* c *Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri* C G, *æquales; Sed* E, *est re-*
d 10. defi. *ctus per constructionem; igitur & A, rectus erit,* d *ideoque A G, ad A B, perpendicularis.*

SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea A B, *punctumque in ea A. Ex centro* C, *extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodo recta A* B, *producta cum ipso non conueniat) interuallo*

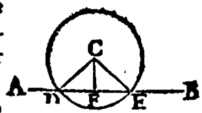


teruallo vero accepto vsq; ad A, describatur arcus circuli secās AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcū in E. Recta igitur ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo DAE, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo lineae, inuenies in scholio propos. 31. huius lib.

PROBL. 7. PROPOS. 12. 12

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.



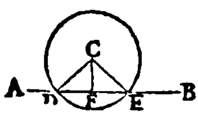
SIT recta AB, interminatae quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E, (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret)[a] Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, aequalia duobus lateribus E F, F C, trianguli, E F C, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, aequalis, cum hae sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare[b] erit angulus D F C, angulo E F C, aequalis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

non.
a 10. primi.
b 8. primi.

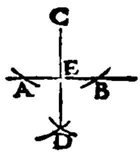
SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam: infinitam. *Si*

Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Ut si linea finita esset B E, *& punctũ* C, *non posset ex* C, *describi circulus secans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex* C, *perpendicularis duci ad* B E. *Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si* B E, *producatur, donec circulus ex* C, *descriptus secet totam* B *A, productam in D, &* E, *&c.*

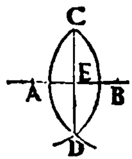


PRAXIS.

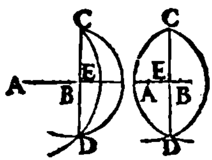


CENTRO *facto* C, *& interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, &* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodemq; interuallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in* D. *Nam ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *erit perpendicularis ad* A B. *Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi propositionis 10. Nam anguli ad* E, *erunt recti,*[a] *nempe inter se aequales.*

[a] *4. primi.*

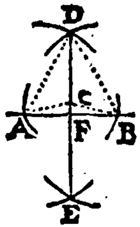


IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, *in linea data; & interuallo quolibet usque ad* C, *assumpto, arcus circuli describatur*: Deinde *ex quolibet alio puncto* B, *interualloq; usque ad idem* C, *alius arcus describatur priorem secans in* C, *&* D; *Eritq; ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *perpendicularis ad* A B. *Demonstratio eadem est, quae prior. Non est autem necesse, ut interuallum* BC, *aequale sit interuallo* AC, *ut in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.*



QVOD

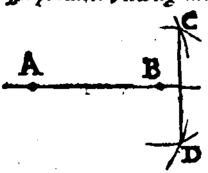
QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ AB, ita agendũ erit. Cẽtro C, ad quoduis interuallũ secetur recta A B, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam A C, vel B C, bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta necessario ꝑ punctũ E, transibit, perpendicularis erit ad rectam A B, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis A D, B D, A C, B C. Quoniam duo latera D A, D C, trianguli A C D, duobus lateribus D B, D C, trianguli B C D, æqualia sunt, nec non & bases A C, B C, æquales sunt, [a] erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera D A, D F, trianguli A D F, duobus lateribus D B, D F, trianguli B D F, æqualia sint, contineantque angulos ad D, æquales, vt ostendimus; [b] erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.



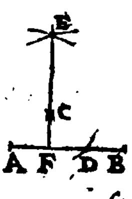
[a] 8. primi.

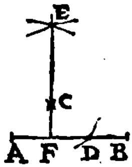
[b] 4. primi.

IAM vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ AB, describantur duo arcus supra, & infra lineam A B, ad interuallum B C. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B, (Quò autem magis distabunt inter se puncta A & B, eò commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum A C, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam A B.



SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, datc, lineæ sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ AB, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum A C, vbicumque punctum A, sumatur, de-



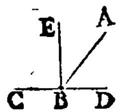


scribatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, sese intersecantes in E. Recta namque ex D, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt supra demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam A B.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

13 THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea AB, consistens super rectã C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, [a] erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnũ quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [b] Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero angulus rectus E B D, [c] æqualis est duobus angulis D B A, A B E; [d] erunt, apposito cõmuni angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus quia [e] angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; [f] erunt, apposito communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiã esse

a 10. defin.
b 11. primi.
c 19. pron.
d 2. pron.
e 19. pron.
f 2. pron.

esse duos rectos E B D, EBC; quæ autem eidem æqualia, [a] inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam cõsistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat. [a] 1. pron.

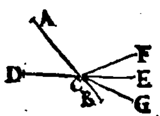
SCHOLIVM.

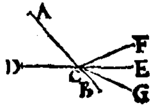
VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, *superat rectum angulum* E B C, *eo reliquus angulus* A B D, *superatur ab angulo recto* E B D. *Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli* A B C; A B D, *duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.*

THEOR. 7. PROPOS. 14. 14

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duę rectæ lineę non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectae A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectae C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis aequales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse cõstitutas in directũ, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim non est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cum A C, consistat super rectam D C F, [b] fient duo anguli A C D, A C F, duobus rectis aequales; [b] 13. primi.





aequales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, aequales duobus rectis; [a] & omnes recti sunt inter se aequales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt aequales. Ablato igitur communi angulo ACD, [b] remanebunt anguli ACF, ACE, inter se aequales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta DC, producta cadet supra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, aequales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quae CE; propterea que, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

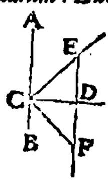
[a] 12. pron.
[b] 3. pron.

SCHOLIVM.

EST haec propositio praecedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si DCE, *sit recta, angulos* ACD, ACE, *duobus esse rectis aequales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis aequales, rectas* DC, EC, *esse vnam lineam rectam.*

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac: & non ad easdem partes. Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri potest; vt ad punctum aliquod lineae datae ad easdem partes duae lineae ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis aequales, quae tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductae partes. Sit enim punctum C, *in linea* AB, *datum. Ducatur* CD, [c] *perpendicularis ad* AB, [d] *diuidaturque rectus angulus* ACD, *bifariam per rectam* CE. *Deinde ex* D, *quolibet puncto rectae* CD, [e] *ducatur* DE, *perpendicularis ad* CD, *secans rectam* CE, *in* E. *Producta autem* ED, *ad partes* D, [f] *sumatur* DF, *aequalis rectae* DE, *& ducatur recta* FC. *Quoniam igitur latera* ED, DC, *trianguli* EDC, *aequalia*



[c] 11. primi.
[d] 9. primi.
[e] 11. primi.
[f] 3. primi.

aequalia sunt lateribus F D, D C, *trianguli* F D C, *vtrumq; vtrique, & anguli* D, *ipsis contenti aequales, nempe recti;* [a] *erit basis* E C, *basi* C F, *aequalis, & angulus* E C D, *angulo* F C D. *Sed angulus* E C D, *dimidium est recti (Est enim rectus* A C D, *diuisus bifariam.) Igitur &* F C D, *dimidium erit recti. Quare* C F, *cum* A C, *facit angulum* A C F, *constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem* C E, *cum eadem* A C, *angulum* A C E, *dimidium etiam recti; Duo igitur anguli* A C F, A C E, *quos ad easdem partes faciunt rectae* C F, C E, *cum* A B; *aequales sunt duobus rectis: Et tamē* C F, C E, *non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ductae ad diuersas partes, sed ad easdem.* [a] 4. *primi.*

THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duae rectae A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse aequales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, [b] erunt duo anguli A E D, D E B, aequales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis aequales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint aequales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, aequales. Dempto igitur communi angulo D E B, [d] remanebit angulus A E D, angulo B E C, aequalis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se aequales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, qui duobus sunt rectis aequales, aequales erunt duobus quoque angulis DEB, B E C, qui duobus rectis sunt aequales. Ablato igitur angulo communi B E C, [f] remanebunt anguli A E C, B E D, aequales inter se. Si igitur

[b] 13. *primi.* [c] 12. *pron.* [d] 3. *pron.* [e] 13. *primi.* [f] 3. *pron.*

igitur duae rectae lineae se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exēplaria hoc corollarium nō habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B, quam duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

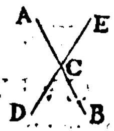
COROLLARIVM II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plurimas partes,[a] quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circūstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

[a] 19. pron.

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

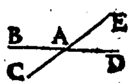


EX puncto C, recta A B, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, C E, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus A C E, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE, [a] *erunt duo anguli* ACE, ECB, *duobus angulis* DCB, BCE, *æquales: Sed* [b] *anguli* ACE, ECB, *sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo* DCB, BCE, *duobus erunt rectis æquales. Quamobrem* CD, CE, [c] *erunt lineæ vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimaquintæ.*

[a] 2. pron.
[b] 13. primi.
[c] 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos BAC, D A E. inter se æquales. Dico tam B A, A D, facere vnam lineam rectam, quam C A, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æquales illis addantur anguli BAC, DAE, [d] *erunt duo anguli* BAE, *B A C, æquales duobus angulis* CAD, DAE. *Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt qua-*

[d] 2. pron.

tuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli B A E, BAC, *æquales sunt duobus rectis;* [a] *atque adeo* CA, *A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis* DAC, CAB, *Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.*

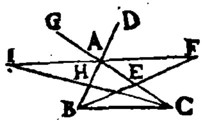
[a] *14. primi.*

16.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemque maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur [b] enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt E F, [c] abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturque recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, [d] inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit [e] basis C B, æqualis basi AF, & angulus E C B, angulo EAF; Est autem angulus D A C, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, maiorem esse interno angulo, & opposito ABC; Est



[b] *10. primi.*
[c] *3. primi.*
[d] *15. primi.*
[e] *4. primi.*

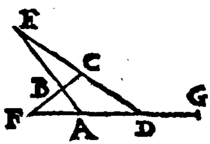
Est autem [a] angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cum lineæ B D, C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus D A C, maior quoque ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 15. primi.

SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem esse angulo BAC, *interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet* ACB, ABC, *internorum, sibique oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. per quã angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.*

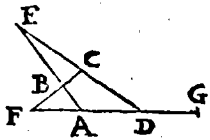
ID vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cum & vno latere figura quadrilatera producto, externus angulus quilibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluemus.



SIT figura quadrilatera A B C D, *cuius angulus* B A D, *obtusus, &* ABC, *rectus constituatur, hac tamen lege, vt recta* AB, DC, *producta ad partes* B, *&* C, *in puncto E, nec non & recta* DA, CB, *ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum ADE, obtusangulum, & producta D A, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad A E, perpendicularis F B, secans latus* D E, *in C. Dico, si* A D, *producatur ad G, angulum externum* C D G, *maiorem esse quolibet trium internorum* BAD, ABC, BCD, *sibi opposito-*

 rum.

[a] 16.primi.

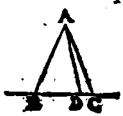


rum. Cum enim ADE, triangulum sit, [a] erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursus cum DAB, obtusus maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipso ABC. Postremo, quia & in triangulo CDF, [b] angulus externus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis BAD, ABC, BCD. Quam ob rem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.

[b] 16.primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se aquales. Si enim fieri potest,



ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, sunt æqualia, [c] erunt anguli ACB, & ABC, æquales super basim BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt æqualia, [d] erunt anguli ADB, & ABC, super basim BD, æquales. Quare cum vterq; angulus ACD, & ADB, æqualis sit angulo ABC, [e] erit angulus ADB, æqualis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.

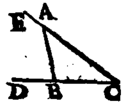
[c] 5.primi.

[d] 5.primi.

[e] 1.pron.

17. PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



SIT triangulum A B C; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemque duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quævis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur [a] angulus A B D externus maior est interno & opposito angulo A C B; si addatur communis angulus A B C, [b] erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: [c] Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur A B C, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, [d] maior sit angulo CAB, interno & opposito; [e] erunt, apposito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo [f] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus B A E, [g] maior sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, [h] erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo [i] sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 16. primi.
[b] 4. pron.
[c] 13. primi.
[d] 16. primi.
[e] 4. pron.
[f] 13. primi.
[g] 16. primi.
[h] 4. pron.
[i] 13. primi.

EX PROCLO.

HINC *perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam unam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam* B C, *duæ perpendiculares A B,* A C. *Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, &* C, *duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum.* [k] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam una, ex A, ad* B C, *deduci possunt. Quod est propositum.*

[k] 17. primi.

COROLLARIVM. I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta A B, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad C D, perpẽdicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD.

Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat, si fieri potest, perpẽdicularis A C, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus, & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis: a sed & duobus rectis sunt minores, qđ est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

a 17. primi.

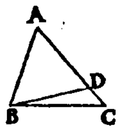
COROLLARIVM. III.

PARI ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes

omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isosceles supra basin, esse acutos. Nam a cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; b sintque simul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores. [a] *5. primi.* [b] *17. primi.*

THEOREMA 11. PROPOS. 18. 19.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

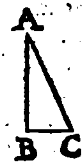


IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum a maiori latere AC, maiorem esse angulo ACB, qui a minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, c auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, d erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem e angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum f angulus totus ABC, maior adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, maius ponatur latere BC. ostendes angulum ABC, maiorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

[c] *3. primi.* [d] *5. primi.* [e] *16. primi.* [f] *9. pron.*

COROLLARIVM.

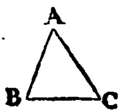
EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, ut monuimus defin. 15. huius lib.



lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.

18. THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus *A* C, maius non est latere *AB*, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur *A* C, æquale esse ipsi *A* B, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si vero *AC*, minus esse dicatur latere *A*B, erit angulus B, subtensus a minori latere *A* C, minor angulo C, subtenso a maiore latere *AB*; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cum igitur *A* C, latus neque æquale sit lateri *AB*, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus *A* C, maius esse latere *B* C, si angulus *B*, maior esse concedatur angulo *A*. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

a *5. primi.*

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducatur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarũ AD, sola sit perpendicularis ad BC, et nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED,[a] sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare [b] maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

[a] 17. primi.

[b] 19. primi.

EX PROCLO.

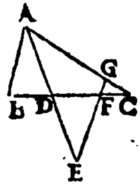
POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori.

TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusque segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse a 3. primi. | *esse latere* A B. *Producatur enim* A D, *ad* E, [a] *vt sit* D E, *aequalis ipsi* A D. *Deinde ex maiori segmento* D C, *auferatur recta* D F, *aequalis minori segmento* D B, *& per* F, *ex* E, *extendatur recta* E F G. *Quoniam igitur latera* A D, D B, *trianguli* A D B, *aequalia sunt lateribus* E D, D F, *trianguli* E D F, *vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem & [b] anguli* A D B, E D F, *dictis lateribus contenti aequales;* [c] *Erunt bases* A B, *&* E F, *aequales, & angulo* B A D, *angulus* F E D, *aequalis: Est vero & angulus* C A D, *angulo* B A D, *aequalis, per hypothesin; Igitur* [d] *anguli* G A D, G E A, *trianguli* A G E, *aequales erunt,* [e] *ideoque latera* A G, E G, *aequalia erunt. Est autem recta* A C, *maior quam* A G; *quare &* A C, *maior erit, quam* E G. *Et quia* E G, *maior est, quam* E F, *erit &* A C, *multo maior, quam* E F. *Cum igitur demonstratum sit rectam* E F, *aequalem esse recta* A B, *erit* A C, *latus maius latere* A B, *quod erat ostendendum.*

b 15 primi.

c 4. primi.

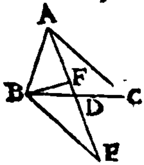


d 1. pron.

e 6. primi.

HOC *ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo* A B C, *angulus* A B C, *maior sit angulo* C. *Dico latus* A C, *maius esse latere* A B. *Diuisa enim recta* B C, *(super quam constituti sunt dicti anguli inaequales,) bifariam in* D; *ex* A, *per* D, *extendatur recta* A D E, [f] *vt sit* D E, *aequalis ipsi* A D; *ducaturque recta* B E. *Quoniam igitur latera* A D, D C, *trianguli* A D C, *aequalia sunt lateribus* E D, D B, *trianguli* E D B, *vtrumque vtrique, per constructionem,* [g] *sunt autem & anguli* A D C, E D B, *dictis comprehensi lateribus aequales:* [h] *Erũt bases* A C, *&* B E, *aequales, angulusq;* A C D, *angulo* E B D, *aequalis: Et quia angulus* A C D, *ponitur esse minor angulo* A B C, *erit & angulus* E B D, *minor eodem angulo* A B C; *Ideoque angulus* A B E, *per rectam* B D, *diuidetur in partes inaequales. Si igitur bifariam secetur per rectã* B F, *cadet* B F, *supra* E D, *eo quod angulus* A B D, *maior sit angulo* E B D. *Quia vero* E F, [i] *maior est, quam* E D, *&* E D, *posita est aequalis ipsi* A D, *erit* E F, *maior, quã* A D; [k] *Sed adhuc* A D, *maior est, quam* A F; *Multo igitur maior*

f 3. primi.



g 15. primi.

h 4. primi.

i 9. pron.

k 9. pron.

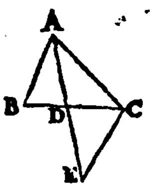
maior erit E F, *quam* A F. *Itaque quia recta* B F, *diuidens angulum* A B E; *bifariam, secat basin* A E, *inęqualiter in* F, *estque maius segmentum* E F, *minus autem* A F; *erit per theorema a Proclo proxime demonstratum, latus* B E, *maius latere* A B. *Ostensum est autem* B E, *ęquale esse lateri* A C. *Igitur & A C, latus latere* A B, *maius erit. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

HÆC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quę apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides *propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.*

POTERIMVS quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.

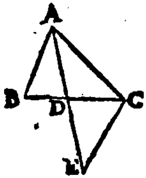


DVO latera A B, A C, *trianguli* A B C, *sint inæqualia;* A C, *maius, &* A B, *minus. Recta autem* A D, *diuidens angulum* A B C, *bifariam, secet basin* B C, *in* D. *Dico segmentum* D C, *maius esse segmento* D B. *Si. n. non est maius, erit vel ęquale, vel minus. Si dicatur esse aquale; producatur* AD, *ad* E, [a] *vt* DE, *aqualis sit ipsi* D A, *ducaturq; recta* E C. *Quoniam igitur latera* A D, D B, *aqualia sunt lateribus* E D, D C, *vtrumque vtrique;* A D, *videlicet ipsi* E D, *per constructionem, &* D B, *ipsi* D C, *per hypothesin aduersarij, Sunt autem &* [b] *anguli ad* D. *dictis lateribus contenti aquales:* [c] *Erit basis* A B, *basi* E C, *aqualis*

[a] 3. primi.

[b] 15. primi.

[c] 4. primi.



æqualis & angulo BAD, *angulus* CED. *Positus aũt est & angulo* B A D, *angulus* C A D, *ęqualis; Igitur & anguli* C E D, C A D, *æquales erunt*; [a] *Ideoq;* *latus* A C, *lateri* E C, *æquale. Cũ igitur ostensum sit, lateri* E C, *æquale esse quoq; latus* A B [b], *erunt latera* A C, AB, *æqualia; quod est absurdum, quia* A C, *maius ponebatur, quam* A B. *Non erit igitur segmentum* D C, *segmento* D B, *æquale. Quod si* D C, *dicatur esse minus, &* D B, *maius; erit, per theorema Procli, latus* A B, *maius latere* A C; *Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit* D C, *quam* D B. *Quare erit necessario maius.*

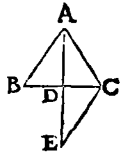
[a] 6. primi.

[b] 1. pron.

EODEM *modo demonstrari poterit hoc theorema.*

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter sæ æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM *recta* A D, *secans angulũ* B A C, *bifariam diuidat quoque basin* B C, *in* D, *bifariam. Dico latera* A B, A C, *inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in precedenti theoremate ostensum fuit, latus* A C, *æquale esse lateri* A B, *si* D C. *segmentum segmento* D B, *ęquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas.*



Cum enim latera A D, D B, *æqualia sint lateribus* E D, D C; [c] *& anguli ad* D, *dictis lateribus contenti ęquales*; [d] *erunt bases* A B, E C, *ęquales, & angulus* C E D, *angulo* B A D, *hoc est, angulo* C A D, *ęqualis. Quare* [e] A C, *ęquale erit ipsi* E C, *hoc est, ipsi* A B.

[c] 15. primi.

[d] 4. primi.

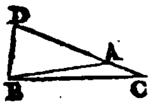
[e] 6. primi.

DEINDE *sint latera* A B, A C, *æqualia, & recta* A D. *secans basin* B C, *in* D, *diuidat angulum* B A C, *bifariam;*

riam. Dico segmentum DC, *equale esse segmento* DB. *Cum enim latera* AD, AB, *aequalia sint lateribus*; AD, AC, *vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus aequales per hypothesin*, [a] *erunt bases* BD, DC, *aequales*. [a] *4.primi.*

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.



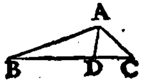
SIT triangulum ABC. Dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnũ ex illis, vt CA, vsque ad D, [b] sitque recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia inter se sunt, per hypothesin, [c] erunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem angulo ABD, [d] maior angulus CBD. Igitur & angulus CBD, maior erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum maiori angulo CBD, [e] maius erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC, [f] fiet tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] *3.primi.* [c] *5.primi.* [d] *9.pron.* [e] *19.primi.* [f] *2.pron.*

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphy-

Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C. *trianguli* A B C, *maiora esse latere* B C. *Diuidatur angulus* BAC, *illis lateribus contentus* [a] *bifariam per rectam* A D. *Quoniam igitur trianguli* C D A, *latus* C D, *protractum est ad* B, [b] *erit angulus externus* B D A, *maior interno & opposito* C A D; *Igitur & maior angulo* B A D. *Quare in triangulo* A B D, *latus* A B, *maiori angulo* A D B, *oppositum* [c] *maius erit latere* B D, *quod minori angulo* BAD, *opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus* A C, *maius esse, quam* C D, *quia angulus* C D A, [d] *maior est angulo* B A D, *hoc est, angulo* CAD, *&c. Quamobrem duo latera A B*, AC, *maiora erunt latere* B C. *Eademque est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*



a 9. primi.

b 16. primi.

c 19. primi.

d 16. primi.

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutę fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At vero angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triãgulo B A E, duo latera BA, A E, [e] maiora sunt latere B E, si addatur commune E C, [f] erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo

e 20 primi.

f 4. pron.

duo latera C E, E D,[a] maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, [b] erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Ostensum vero iam fuit, A B, C A, maiora esse, quam B E, E C. Multo igitur maiora erunt B A, C A, quam B D, C D, quod primo proponebantur. Preterea, quoniam angulus B D C, [c] maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est, eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

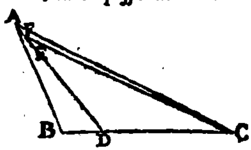
[a] 20. primi.
[b] 4. pron.
[c] 16. primi.

SCHOLIVM.

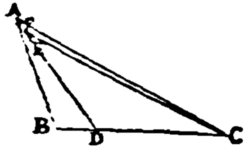
QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

*SIT triangulum habens exempli gratia angulum A*BC, *obtusum.* Dico *ab extremo* C, *& a quouis puncto, nempe a* D, *prope aliud extremum* B, *lateris* B C, *duci posse duas lineas intra triangulũ ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus* B A, *A* C. *Ducatur enim recta* D *A: Et quoniam in triangulo* A B D, *duo anguli* A B D, A D B, [d] *minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A* B D, *maior recto, nempe obtusus;*



[d] 16. primi.



ſus; erit A D B, min...
nimque minor angul...
[a] 19 primi. [b] 3. primi. Quare latus A D, [a] m...
latere A B. Ex D A, [b]...
[c] 10 primi. datur recta D E, æqua...
A B, & reliqua linea ...
fariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad...
ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D...
triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Q...
[d] 20. primi. enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C, [d] ma...
latere A C; E, F autem recta A F, ipsi F E, æqualis...
structionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C...
igitur æqualia addantur E D, & A B, fient recta C...
[e] 4 pron. [e] maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. S...
ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ...
ta C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, vi...
des demonstrauit.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius
[f] 3. primi. maximum B C, minimum A B. Ex B C, [f] auferatur
æqualis recta A B, & ducatur A D.

ad cuius punctum quodlibet, vt ad...
extremo C, recta ducatur C E. Cum
igitur erunt intra triangulum duæ
C E, D E, quæ minorem angulum comprehendunt ...
efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera
[g] 5. primi. B D, æqualia sint, [g] erunt duo anguli B A D, B D A, æ...
[h] 16. primi. les: Sed B D A, angulus [h] maior est angulo C E D. Ma...
tur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare mu...
ior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod er...
tum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra tria...
lum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius...
ris, vt minores quidem sint duobus reliquis triangulis la...
bus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim p...
sitio vera non esset, vt iam est demonstratum.

VERVM de constitutione duarum linearum intra tri...
gulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, p...
ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

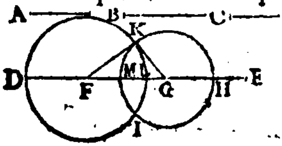
PRO...

PROBL. 8. PROPOS. 22.

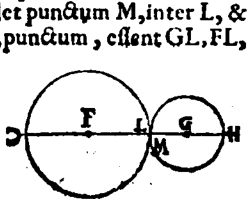
22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tri-s datis rectis lineis æquales, trian-lum constituere. Oportet autem duas iqua esse maiores omnifariam sum-ıs: quoniam vniuscuiusque triangu-duo latera omnifariam sumpta reli-ıo sunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum libet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non alet constitui triangulum, vt constat ex propos. 20. ua ostensum fuit, duo quęuis latera trianguli reliquo maiora.) oporteatque construere triangulum has tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta ta quauis DE, infinitę



gnitudinis [a] abscinda recta DF, æqualis re-A; Et ex reliqua FE, ta FG, æqualis rectæ & ex reliqua GE, re-GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo o FD, circulus descr ibatur DIK: Item centro G, eruallo autem GH, alius circulus describatur HIK, necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum m duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; si ex sumatur recta FL, æqualis ipsi FD: & ex GD, re-GM, æqualis ipsi GH, cadet punctum M, inter L, & Si namque M, caderet in L, punctum, essent GL, FL, est, GH, & FD, æquales æ FG: Si vero M, caderet r G, & L, essent cę dem duę GM, hoc est, DF, GH, iores recta FG; quorum

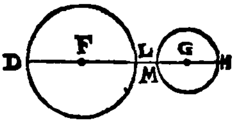


umq; est contra hypothe-

I sin.)

[a] 3. primi.

fin.)Id quod ex appositis figuris apparet.) ex quorũ quolibet,nimirum ex K,ducantur ad puncta F,G,rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A,B,& C.Cum enim recta FK, [a] æqualis sit rectæ FD,& recta A, per constructionem eidem FD, æqualis; [b] erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C,æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale.Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A,B,C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales,triangulum: Quod faciendum erat.



a 15.def.

b 1.pron.

P R A X I S.

SVMATVR recta DE, æqualis cuicunque rectarum datarum,nempe ipsi B,quam nunc volumus esse basin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ A,arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C,alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF,EF,factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis.Erit enim latus DF,æquale rectæ A,propter interuallum ipsius A,assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum interuallum C; DE, vero latus,acceptum est rectæ B,æquale, ab initio.

S C H O L I V M.

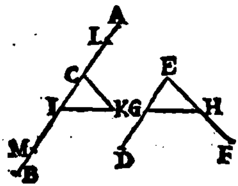
HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq́ꝫ, & quoad aream ipsius, constituemus.Sit namq; triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas

rectas datas AB, BC, CA, quarum qualibet dua [a] *maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam* DE, *aqualem vni lateri, nempe B C; & ex D. interuallo lateris* A B, *arcum describo, item alium ex* E, *interuallo reliqui lateris* C A, *qui priorem secet in F, &c.* a 20. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 23. 23.

A D datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde [b] constituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI, æquale sit ipsi E G; & CK, ipsi E H; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G; & C L, ipsi E H, & I M, ipsi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero C L, & I M, circuli describantur secantes sese in K, &c) Dico angulũ C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, vtrumque vtrique, & basis I K, basi GH, per constructionem; [c] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. b 22. primi. c 8. primi.

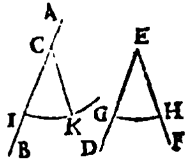


P R A X I S.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in

 prace-

præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; beneficio circini arcus IK, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta CK, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ IK, GH, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato vtramq; distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & *duo latera* IC, C K, *æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti;* [a] *erunt anguli* I C K, *GEH, æquales.*



[a] 8. primi.

C ÆTERVM *qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.*

24.

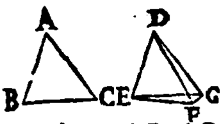
THEOR. 15. PROPOS. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus vero A, maior sit angulo E DF. Dico basin BC, maiorem esse base E F. Ad lineam enim DE, ad eiusq; punctum D, [b] constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus EDF, minor ponatur

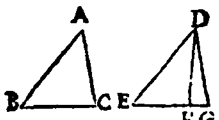
[b] 23. primi.

ponatur angulo A)[a] ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra



E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus DE, DG, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; [b] Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG, inter se sunt æqualia; [c] erunt anguli D F G, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, [d] maior angulo EGF. Igitur & angulus D F G, eodem angulo EGF, maior erit Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur E F G, [e] maius erit latus E G, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.

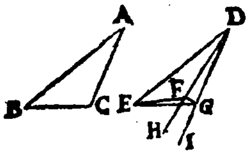
a 3. primi.
b 4. primi.
c 5. primi.
d 9. primi.
e 19. primi.



CADAT deinde E G, in ipsam E F. Et quia rursus, vt prius, basis E G, [f] æqualis est basi BC: Et E G, [g] maior quam E F, erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.

f 4. primi.
g 9. prou.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, [h] basis E G, basi B C, æqualis. Deinda quia duo latera D F, DG, æqualia sunt inter se, per constructionem, [i] erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autem angulus F G I, [k] maior angulo F G E. Igitur & angulus GFH, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodē angulo FGE. In triangulo ergo E F G, [l] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis basi E F. Si igitur duo trian-

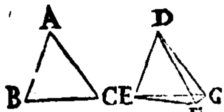


h 4. primi.
i 5. primi.
k 9. prou.
l 19. primi.

gula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

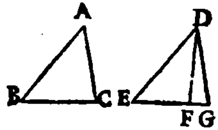
SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triãgulum maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor est semper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui æqualis est per 4. propos. angulo ABC,)



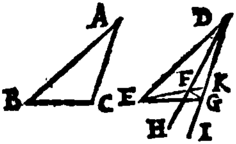
a 9. pron. *[a] minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 1. propos. At vero angulus ACB,*
b 16. prim. *minor est angulo DFE, cum angulus DFE, [b] maior sit angulo DGF. externus interno, & opposito; & angulus DGF, æqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus*

ABC,

ABC, maior quidem est angulo DEF, propterea quod angulus DEG, (æqualis existens per 4. propos. angulo ABC,) [a] maior sit eodem angulo DEF, totum parte: Sed angulus ACB, minor est angulo DFE. Nam si recta EF, producatur secans rectam [a] 9.pron.



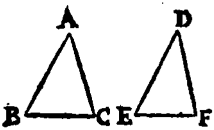
DG, in K, fiet angulus DFE, [b] *maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. propos. æqualis est angulo ACB. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.* [b] 16.primi.



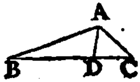
THEOR. 16. PROPOS. 25. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit base EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit



Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C. *trianguli* A B C, *maiora esse latere* B C. *Diuidatur angulus* BAC, *illis lateribus contentus* [a] *bifariam per rectam* A D. *Quoniam igitur trianguli* C D A, *latus* C D, *protractum est ad* B, [b] *erit angulus externus* B D A, *maior interno & opposito* C A D; *Igitur & maior angulo* B A D. *Quare in triangulo* A B D, *latus* A B, *maiori angulo* A D B, *oppositum* [c] *maius erit latere* B D, *quod minori angulo* BAD, *opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus* A C, *maius esse, quam* C D, *quia angulus* C D A, [d] *maior est angulo* B A D, *hoc est, angulo* CAD, *&c. Quamobrem duo latera* A B, AC, *maiora erunt latere* B C. *Eademque est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*



a 9. primi.
b 16. primi.
c 19. primi.
d 16. primi.

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutę fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C; intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At vero angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linea tum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triãgulo B A E, duo latera BA, A E, [e] maiora sunt latere B E, si addatur commune E C, [f] erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo

e 20 primi.
f 4. pron.

duo latera C E, E D, [a] maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, [b] erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Ostensum vero iam fuit, A B, C A, maiora esse, quam B E, E C. Multo igitur maiora erunt B A, C A, quam B D, C D, quod primo proponebantur. Praeterea, quoniam angulus B D C, [c] maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est, eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 20. primi.
[b] 4. pron.
[c] 16. primi.

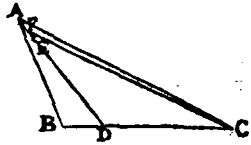
SCHOLIVM.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quae maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quae minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

*SIT triangulum habens exempli gratia angulum A*BC, *obtusum.* Dico *ab extremo* C, *& a quouis puncto, nempe a* D, *prope aliud extremum* B, *lateris* B C, *duci posse duas lineas intra triangulũ ad aliquod punctum, quae maiores sint duobus lateribus* B A, *A* C. *Ducatur enim recta* D *A: Et quoniam in triangulo* A B D, *duo anguli* A B D, A D B, [d] *minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A* B D, *maior recto, nempe obtusus;*

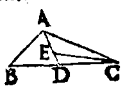
[d] 16. primi.



sus; erit A D B, minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, [a] maius erit latere A B. Ex D A, [b] abscindatur recta D E, æqualis rectæ A B; Et reliqua linea A E, [c] bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C, [d] maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, fient rectæ C F, F D, [e] maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, vt Euclides demonstrauit.

[a] 19 primi.
[b] 3. primi.
[c] 10 primi.
[d] 20. primi.
[e] 4 pron.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, [f] auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ



C E, D E, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, æqualia sint, [g] erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus [h] maior est angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.

[f] 3. primi.
[g] 5. primi.
[h] 16. primi.

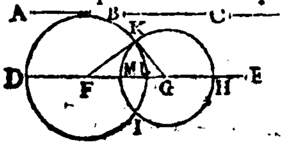
VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

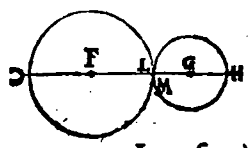
PROBL.

PROBL. 8. PROPOS. 22. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

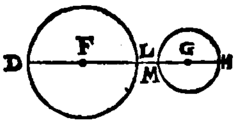
TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex propoſ. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quęuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis DE, infinitę magnitudinis [a] abſcindatur recta DF, æqualis rectæ A; Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero F D, circulus deſcribatur D I K: Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus deſcribatur HIK, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; ſi ex F E, ſumatur recta F L, æqualis ipſi F D: & ex G D, recta G M, æqualis ipſi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, eſſent GL, FL, hoc eſt, G H, & F D, æquales rectæ F G: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent cędem duę F L, GM, hoc eſt, D F, G H, minores recta F G; quorum vtrumq; eſt contra hypotheſin.)





[a] 3. primi.

fin.)Id quod ex appositis figuris apparet.) ex quorũ quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ KF, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, [a] æqualis sit rectæ F D, & recta A, per constructionem eidem F D, æqualis; [b] erit latus F K, rectæ A, æquale. Rursus quia G K, æqualis est ipsi G H, & recta C, eidem G H; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



[a] 15. def.

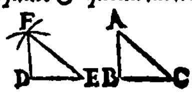
[b] 1. pron.

PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum interuallum C; DE, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.

SCHOLIVM.

H A C arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq́;, & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namq; triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas



rectas datas A B, B C, C A, quarum qualibet dua [a] *maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam* D E, *aqualem vni lateri, nempe B C; & ex* D. *interuallo lateris* A B, *arcum describo, item alium ex* E, *interuallo reliqui lateris* C A, *qui priorem secet in F, &c.*

a 20. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 23.

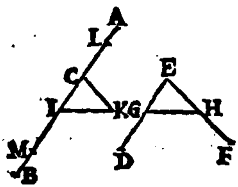
23.

A D datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde [b] constituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI, æquale sit ipsi E G; & CK, ipsi E H; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G; & C L, ipsi E H, & I M, ipsi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero C L, & I M, circuli describantur secantes sese in K, &c) Dico angulũ C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, vtrumque vtrique, & basis I K, basi GH, per constructionem; [c] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

b 22. primi.

c 8. primi.

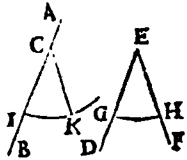


PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in

 præce-

præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato vtramq; distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera IC, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; [a] erunt anguli I C K, G E H, æquales.



[a] *8. primi.*

CÆTERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.

24.

THEOR. 15. PROPOS. 24.

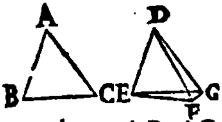
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus vero A, maior sit angulo E DF. Dico basin BC, maiorem esse base E F. Ad lineam enim DE, ad eiusq; punctum D, [b] constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus EDF, minor

[b] *23. primi.*

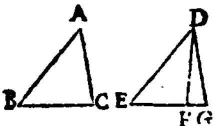
ponatur

ponatur angulo A)[a] ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus DE, DG, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; [b] Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG, inter se sunt æqualia; [c] erunt anguli D F G, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, [d] maior angulo EGF. Igitur & angulus D F G, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur E F G, [e] maius erit latus E G, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.



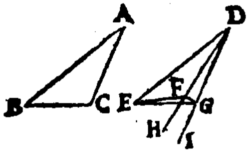
a 3.primi.
b 4.primi.
c 5.primi.
d 9.primi.
e 19.primi.

CADAT deinde E G, in ipsam E F. Et quia rursus, vt prius, basis E G, [f] æqualis est basi BC: Et E G, [g] maior quam E F; erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.



f 4.primi.
g 9.pron.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, [h] basis E G, basi B C, æqualis. Deinda quia duo latera D F, DG, æqualia sunt inter se, per constructionem, [i] erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autem angulus F G I, [k] maior angulo F G E. Igitur & angulus GFH, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodẽ angulo FGE. In triangulo ergo E F G, [l] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis basi E F. Si igitur duo triangula

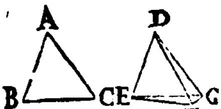


h 4.primi.
i 5.primi.
k 9.pron.
l 19.primi.

gula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

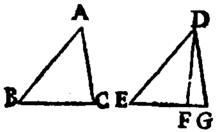
SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera unius trianguli aequalia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus aequales, concluserit non solum aequalitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli aequalia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inaequales, colligat tantum inaequalitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inaequalitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triãgulum maiorem habens angulum aliquando aequale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo aequale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, *minor est semper angulo* DEF; *cum angulus* DEG, (*qui aequalis est per 4. propos. angulo* ABC,) [a] *minor sit eodem angulo* DEF, *pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus* ABC, *angulo* DEF, *aequalis, per 4. propos. At vero angulus* ACB, *minor est angulo* DFE, *cum angulus* DFE, [b] *maior sit angulo* DGF. *externus interno, & opposito; & angulus* DGF, *aequalis sit angulo* ACB. *In tertia denique figura angulus* ABC,

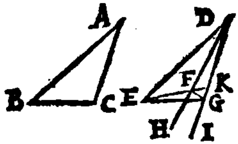


[a] 9. pron.

[b] 16. primi.

ABC, *maior quidem est angulo* DEF, *propterea quod angulus* DEG, *(æqualis existens per 4. propos. angulo* ABC,*)* [a] *maior sit eodem angulo* DEF, *totum parte: Sed angulus* ACB, *minor est angulo* DFE. *Nam si recta* EF, *producatur secans rectam* DG, *in* K, *fiet angulus* DFE, [b] *maior angulo* DKE, *externus interno; Est autem & angulus* DKE, *maior adhuc angulo* DGE, *externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus* DFE, *angulo* DGE, *qui per 4. propos. æqualis est angulo* ACB. *Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.*





[a] 9. pron.

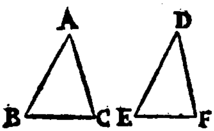
[b] 16. primi.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

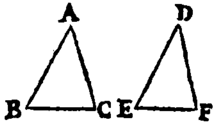
25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit base EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit



 vel



[a] 8. primi.

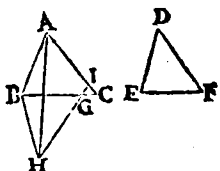
vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypothesin; [a] erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdũ; Ponitur enim basis B C, base E F, maior: Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis E F, [b] maior basi B C; quod magis est absurdum, cum E F, ponatur esse minor quam B C. Quare cum angulus A, neque posit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 24. primi.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostẽsum fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hęc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quę explicata sunt in propos. 18. & 19. Nam in 19 demonstratum est, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius ęqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex base maiore B C, [c] *abscindatur recta* B G, *ęqualis basi minori* E F. *Fiat quoque angulus* G B H, [d] *ęqualis angulo* DEF, [e] *& sit* BH, *æqualis ipsi* BA, *atq; adeo ipsi* D E. *Ducta aũt recta linea* A H, *ducatur quoque recta per* G, *ex* H, *secans* A C, *in* I. *Quoniam igitur duo latera*

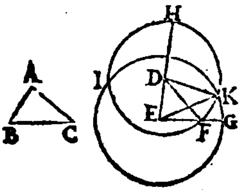


[c] 3. primi.
[d] 23. primi.
[e] 3. primi.

latera B A, B H, aequalia sunt, [a] erunt anguli B A H, B H A, aequales. Rursus quia latera B G, B H, aequalia sunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique, & angulus G B H, aequalis angulo D E F, per constructionem; [b] erit basis H G, basi D F, atque adeo ipsi A C, aequalis, angulusque G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, [c] maior est quam H G, quae est ostensa aequalis ipsi A C, erit quoque maior H I, quam A C; Sed A C, [d] maior est adhuc, quam A I. Multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H, [e] maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui ostensi sunt aequales, fiet [f] totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonstratus fuit aequalis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

[a] 5. primi.
[b] 4. primi.
[c] 9. pron.
[d] 9. pron.
[e] 18. primi.
[f] 4. pron.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F, ad G, vt sit E G, [g] aequalis basi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, describatur circulus, producaturque E D, ad H, in circunferentiam. Quoniam igitur D H, [h] est aequalis ipsi D F, erit quoque D H, aequalis ipsi A C. Additis igitur aequalibus D E, A B, [i] fient A C, A B, simul aequales toti H E: Sed A C, A B, [k] simul maiores sunt, quam B C, atque adeo quam E G. Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo E G, intersecabit rectam E H, atque adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectae D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, aequalia sunt duobus lateribus D E, D K, vtrumque vtrique, (est enim D K, aequale ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est aequale lateri A C) & basis B C, basi E K, aequalis: (cum E K aequalis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit aequalis basi B C.) [l] Erit angulus B A C, angulo E D K, aequalis: Sed angulus E D K, maior est [m] angulo E D F. Quare & an-



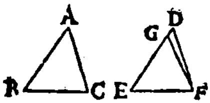
[g] 3. primi.
[h] 15. def.
[i] 2. pron.
[k] 20. primi.
[l] 8. primi.
[m] 9. pron.

& angulus A, *angulo* E D F, *maior existet. Quod est propositum.*

26. ## THEOR. 17. PROPOS. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtriq; & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtendun tur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri D E, sit D E, maius, a quo [a] abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera AB,



[a] 3. primi.

B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; [b] Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale

[b] 4. primi.

æquale. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum. [a] 4. primi.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & CA, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; [b] ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturq; recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtriq; & anguli contenti B, & E, aequales, per hypothesin; [c] Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, ęqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [d] Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 3. primi. [c] 4. primi. [d] 16. primi.

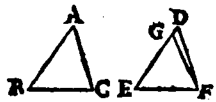
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, [e] erunt tota quoque triangula æqualia inter se. [e] 4. primi.

SCHOLIVM.

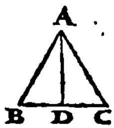
PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulo-

angulorum ipsis contentorum, collecta fuit aequalitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex aequalitate basium B C, E F, *& angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus aequalia esse, reliquumq́ angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.*



HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpẽdicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si vero basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo A B C, *duo latera aequalia* A B, A C, *diuidatq́ primum recta* A D, *angulum* A, *bifariam. Dico rectam* A D, *esse ad* A C *perpendicularem, secareq́ basin* B C, *bifariam. Cum enim duo latera* A B, A D, *duobus lateribus* A C, A D, *sint*
[a] 4.primi. *aequalia, angulosq́ aequales contineant, ex hypothesi, [a] erunt & bases* B D, C D, *aequales, & anguli ad* D, *atque adeo recti.*

DIVIDAT deinde recta A D, *basin* B C, *bifariam. Dico rectam* A D, *ad* A C, *perpendicularem esse, & angulum* A, *secare bifariam. Cum enim duo latera* B D, D A, *duobus lateribus* C D, D A, *aequalia sint, & basis* A B, *basi*
[b] 8.primi. A C, *ex hypothesi, [b] erunt quoque anguli ad* D, *aequales, atque*

que adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, *aequales erunt.*

SED *iam recta* A D, *sit ad* B C, *perpendicularis*. *Dico & basim* B C, *& angulum* A, *secari bifariam.* [a] *Erunt enim anguli* B, C, *supra basin* B C, *aequales. Itaque quoniam duo anguli* D, B, *trianguli* A B D, *duobus angulis* D, C, *trianguli* A C D, *aequales sunt, vterq; vtrique, latusq́; AD, aequalibus oppositum angulis* B, C, *commune;* [b] *erunt & reliqua latera* B D, C D, *aequalia & reliqui anguli ad* A, *aequales. Quod erat demonstrandum.* [a] 5. primi. [b] 26. primi.

SED *& hoc theorema verum est.*

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

IN *eodem triangulo* A B C, *sit* A D, *ad* B C, *perpendicularis, diuidatque primum basin* B C, *bifariam. Dico & latera* A B, A C, *esse aequalia & angulos ad* A, *aequales. Quoniam enim duo latera* B D, D A, *duobus lateribus* C D, D A, *aequalia sunt, angulosq́; comprehendunt aequales, nempe rectos;* [c] *erunt quoque & bases* A B, AC, *& anguli ad* A, *aequales. quod est primum.* [c] 4. primi.

SECET *deinde perpendicularis* AD, *angulum* A, *bifariam. Dico & latera* AB, A C, *aequalia esse, & rectas* B D, C D. *Quoniam enim duo anguli* D, A, *trianguli* A B D, *duobus angulis* D, A, *trianguli* A C D, *aequales sunt, latusq́;* A D, *illis adiacens, commune;* [d] *erunt quoque & latera* A B, A C, *& latera* B D, C D, *aequalia. Quod est secundum.* [d] 26. primi.

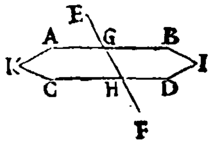
THEO-

27.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineę.

IN duas rectas A B, C, D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum



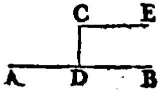
A B, recta continuata sit, item recta C D, vsque ad punctum I,) angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; [a] quoniam externus interno maior est. Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 16. primi.

SCHOLIVM.

NECESSE est, vt lineæ, quæ dicuntur parallelae, in eodem existant plano, vt ex definitione constat: Quare non satis est duos angulos alternos aequales inter se esse, vt duae lineae probentur esse parallelae, nisi ponatur, eas in vno, eodemq;

demq; existere plano. Fieri enim potest, ut linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos aequales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quae in subiecto plano existit; & ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuum est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos aequales, cum sint recti; & tamen C E, A B, non sunt parallelae, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris disseritur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

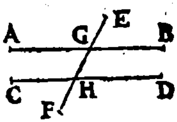


Theor.

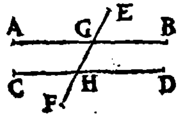
~~PROBL.~~ 19. PROPOS. 28. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidẽs linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, ęqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis ęquales: Parallelæ erũt inter se ipsæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidẽs E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam enim angu



lo A B,



a 15 primi. lo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, [a] æqualis eſt angulus H G B; [b] erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales.
b 1. pron.
c 27. primi. Quare lineæ A B, C D, [c] parallelæ erunt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

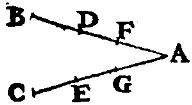
DEINDE faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rurſus rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur;
d 13. primi. Sunt autem & anguli A G E, A G H, [d] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & oppoſito ad eaſdem partes æqualis. Quare vt iam oſtenſum eſt, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem oſtendetur, ſi duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

IAMDVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur ſequens propoſ. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt ſine eius auxilio demonſtrari nequeat, opera pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonſtratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demõſtratione confirmare, vt in expoſitione dicti Axiomatis polliciti ſumus. Primo autem loco demonſtrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque euidentius demonſtrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonſtret, duo præmittit. Primum eſt.

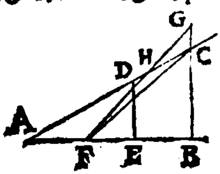
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedet.

EXEANT



EXEANT a puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniã igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra recta lineã A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset earum distantia; igitur & lineæ ipsæ vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinite iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ A B, A C, producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ A B, AC, *quò longius protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit, puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare quàm F, & G, Item B, & C, plus, quàm* D, *&* E, *&c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in recta A C, acceptis, ad A B, perpendiculares C B,* D E, *quæ distantias punctorum C, D, à recta A B, metientur, cum sint minima*



omnium rectarum ex C, D, *ad* A B, *ductarum vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico* C B, *maiorem esse, quàm* D E, *ac proinde plus distare rectam* AC, *à recta* A B, *in puncto* C, *remotiore, quàm in puncto propinquiore* D. *Si enim* C B, *non est maior, quàm* D E, *erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis, & recta A E, abscindatur æqualis* B F, *ita vt punctum F, cadat vel inter* A, *&* E, *vel in* E, *vel denique inter* F, *&* B; *ducaturque recta F C. Quoniam igitur duo latera* A E, ED, *trianguli* AED, *duobus lateribus* FB, BC, *trianguli* FBC, *æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq́; continent æquales, vtpote rectos:* [a] *erunt & bases* A D, F C, *& anguli* D A E, C F B, *inter se æquales. Igitur cum externus angulus* C F B, *interno* D A E, *æqualis sit* [b] *parallelæ erunt* AC, FC, *quod est absurdum, cum concurrant in* C. a 4. primi. b 27. primi.

K SIT

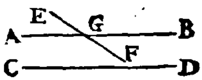
SIT deinde CB, *minor quàm* DE, *si fieri potest, & producta* BC, *fiat* BG, *ipsi* DE, *æqualis, iungaturq́; recta* FG. *Quia igitur duo latera* AE, ED, *trianguli* AED, *duobus lateribus* FB, BG, *æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales, puta rectos;* [a] *erunt & bases* AD, FG, *& anguli* EAD, BFG, *inter se æquales. Igitur cum externus angulus* BFG, *interno* EAD, *æqualis sit* [b] *erunt* AC, FG, *inter se parallelæ, quod absurdum est, cum se mutuo secent in H. Quocirca* BC, *ipsa* ED, *maior erit, cum neque æqualis, neque minor esse possit, vt demonstratum est.*

[a] 4. primi.

[b] 27. primi.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiusmodi est.

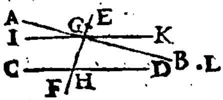
SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.



SINT duæ parallelæ AB, CD, *& recta* EF, *secet ipsam* AB, *in* G. *Dico rectam* EF, *si producatur, secturam esse quoq; ipsam* CD. *Quoniam duæ rectæ* GB, GF, *in puncto* G, *angulum faciunt, si producantur infinite, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela* AB, *à parallela* CD, *distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia* GB, *à* GF, *maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam* GF, *productam secuisse rectam* CD. *Nam quamdiu* GF, *continebitur inter duas parallelas, minori distantia a* GB, *remouebitur, quam* CD, *ab eadem* GB, *vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.*

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

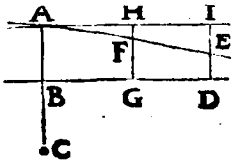
IN rectas AB, CD, *incidens recta* EF, *faciat internos angulos ad partes* B, *&* D, *vt* BGH, DHG, *duobus rectis minores.*



Dico rectas AB, CD, *coire ad easdem partes* B, *&* D. *Quoniam enim duo anguli* BGH, DHG, *minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli* DHG, DHF, [a] *duobus rectis aequales; Erunt duo anguli* DHG, DHF, *maiores duobus angulis* DHG, BGH. *Ablato ergo communi angulo* DHG, *remanebit angulus* DHF, [b] *maior angulo* BGH. *Si igitur ad rectam* FG, *& ad punctum* G, [c] *constituatur angulus* KGH, *aequalis angulo* DHF, *cadet* GK, *supra* GB, [d] *secabitq; producta rectam* AB. *Quoniam igitur in duas rectas* IK, CD, *recta incidens* EF, *facit angulum externum* DHF, *aequalem interno, & opposito* KGH; [e] *Erunt rectae* IK, CD, *parallelae. Secat autem recta* AB, *ipsam* IK, *in* G; *Producta igitur secabit quoque ipsam* CD, *vt demonstratum est. Quare* AB, *cum* CD, *conueniet ad partes* B, *&* D, *nimirum in puncto* L. *quod est propositum.*

[a] 13. primi.
[b] 5. pron.
[c] 23. primi.
[d] 11. pron.
[b] 28 primi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonstrare: Sed quoniam principium, quod primo loco praemisit, aequè dubium, & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quae semper sibi mutuò fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duae rectae, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hae enim sibi mutuò appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus; Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quòd dari possunt in eodem plano duae lineae, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuò magis ac magis appropinquantes, quae tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambae producantur, quorum illud ab Apollonio Pergaeo, hoc vero à Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos supra demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ cōchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia datam quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq; sit recta A B. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum nunquam æqualem esse rectæ A B, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ.

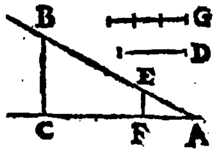


Producta enim recta A B, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem A B, describatur linea concheideos A E, inflexa nimirum linea, quæ rectæ B D, fiat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta A I, ad A C, perpendicularis, [a] quæ ipsi B D, parallela erit. Postremo ex duobus punctis H, I, vtcunque in recta A I, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares H G, I D, [b] quæ parallelæ, [c] atque adeo æquales inter se erunt, angulosque [d] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propos. 29. huius lib, vbi primum vsus illius apparere incipit: vti verè à nobis mox ante propos. 29. demonstrabitur. Itaque quoniam F G, maior est, quàm E D, vt Nicomedes demonstrauit, erit F H, reliqua minor, quam reliqua E I. Magis ergo inter se distant lineæ A I, A E, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita semper eas probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit

a 28. primi.
b 28. primi.
c 34. primi.
d 29. primi.

erit, quàm recta A B, hoc est, quàm perpendicularis ex recta A I, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea A E, ad rectam B D, nunquam perueniat, ut demonstratum est à Nicomede.

SCIO principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinẽ D. Nam ex quouis puncto E, in recta A B, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ



si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si vero non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem A B, ipsius A E, ita multiplici, ut multiplex est G, ipsius E F, demittatur ex B, ad A C, perpendicularis B C, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim[a] est, ut A B, ad B C, ita A E, ad E F; (quòd ex coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quæ[b] parallelæ sunt.) Et permutando, ut A B, ad A E; ita B C, ad E F: erit ita multiplex B C, ipsius E F, ut multiplex est A B, ipsius A E, hoc est, ut multiplex est G, ipsius E F. Cum ergo B C, & G, æque multiplices sint ipsius E F. erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & B C, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. quod est propositum.

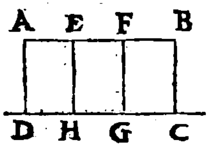
[a] 4. sexti.

[b] 13. primi.

VERUM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulò dedimus operam, ut illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solum, quæ ante propos. 29. primi lib. demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. usus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationẽ *illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.*

I.

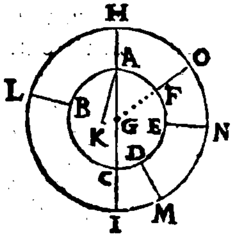
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ AB, *à recta* DC, *æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam* DC, *ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ* AB, *æqualiter distant à recta* DC, *ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilque in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta* DC. *Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta* DC, *distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, vna cum ijs, quæ vsque ad propos. 29. huius lib.*

lib. ostensa sunt, Axioma 13. demonstrabimus, adeo clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sana mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

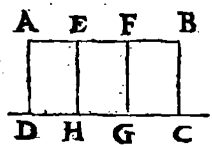
IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nã etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, proptereaque recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quę æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus ABCDEF, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex cẽtro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se æquales. Producta enim IG, vsque ad A, si semicirculus ABC, circa diametrum AC, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruent, at proinde æquales erunt. Efficiat iam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quæ ex proximè demonstratis angulos GAB, GAF, constituet æquales. Non ergo æquales sunt KAB, KAF. Quod est contra hypothesin.



HOC ostenso, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF, omniaq́ eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem *illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.*

I.

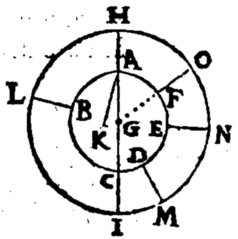
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ A B, *à recta* DC, *æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam* D C, *ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ* A B, *æqualiter distant à recta* D C, *ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilque in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta* D C. *Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta* D C, *distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, vna cum ijs, quæ vsque ad propos. 29. huius lib.*

lib. ostensa sunt, Axioma 13. demonstrabimus, adeo clarum, ut lumine naturali cognitum sit, nemoque sanæ mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmo di, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nã etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, proptereaque recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quę æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus ABCDEF, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex cẽtro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se æquales.



Producta enim IG, vsque ad A, si semicirculus ABC, circa diametrum AC, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quæ ex proximè demonstratis angulos GAB, GAF, constituet æquales. Non ergo æquales sunt KAB, KAF. Quod est contra hypothesin.

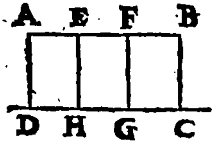
HOC ostenso, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF, omniaq; eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes recta ab ea linea in circularem *lineam cadentes, efficientesq́ angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt* H A, L B, *I* C, *M* D, N E, O F. *Hæ enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant* [a] *erũt omnium ex punctis H,* L, *I, M,* N, O, *in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab* Eucl. *propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29 huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeò eorum distantias à subiecta linea circulari metientur.* Dico lineam HLIMNO, *esse circularem.* Cum *enim omnes, vt proximè ostendimus, per centrum* G, *transeãt, si æqualibus* H A, O F, *addantur æquales* A G, F G, *erunt tota* H G, O G, *æquales; eademq́ ratione omnes aliæ ex linea inflexa* H L I *M* N O, *ad* G, *ducta æquales erunt & rectis* H G, O G, *& inter se*. Ex *defin. circuli igitur linea inflexa circularis est.* Quod erat *demonstrandum.* Ex *hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum, videlicet.*

[a] 8. tertij.

II.

SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

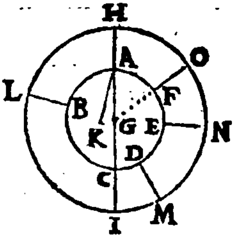
VT si in priore figura recta A D, *ad* D C, *perpendicularis moueatur in transuersum super rectam* D C, *constituens cum ea in* D, *semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum* A, *rectam quoque lineam, nempe* A B. Constat *hoc ex eo, quod primo loco præmisimus, propterea quod omnia puncta lineæ A* B, *descripta æqualiter à recta* D C, *distant, nimirum per rectam A* D. Ex *quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed aequaliter inter ipsa iaceant, quippe*



cum

cum nullum eorum magis aut minus a recta CD, *abscedat sursum, aut deorsum vergẽdo, quam aliud. Patet hoc etiã ex ijs, quae ad definitionem lineae rectae scripsimus. Cum enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quod recta A D, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed pũcta* D, A, *aeque velociter incedant, aequaliterque semper inter se distent.) describent utique lineas similes, ut in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D, rectam* D C, *describat, erit quoque linea* A B, *quam punctum* A, *describit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur uniformiter sine ulla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem unum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter uniformem illum, aequabilemq; motum utriusque puncti extremi. Est principium hoc aequè clarum, & euidens, atque antecedens.*

CONTINGIT *autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circularem in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari aequales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo hucatque illuc, circularem lineam altero suo extremo describit, ita ut naturam circularis lineę subiectae, à qua aequaliter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta* A D, *super rectam* D C, *in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum cum ea in suo extremo* D, *angulos semper rectos, ita ut nusquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam* A B, *altero extremo* A, *delineat: adeo ut linea descripta* A B, *naturam induat rectae lineae subiectae* D C, *à qua aequaliter semper recedit. Rectam autem, quae super lineam circularem in trãsuersum fluit aequabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facile demonstrabimus.*

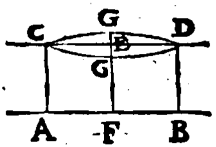


Moueatur enim in figura posteriore recta HA, *in transuersum*

uersum super peripheriam ABCDEF, *aequabiliter, faciens semper in extremo* A, *cum ea angulos aequales.* Dico *lineam* HLIMNO, *ab altero extremo* H, *descriptam esse quoque circularem.* Cum *enim recta* HA, *in omni situ motus illius imaginarij faciat aequales angulos cum peripheria* ABCDEF, *fit vt ea producta in centrum* G, *cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis aequalibus* H A, O F, *ad rectas aequales* A G, F G, *fient totae rectae* H G, O G, *& omnes aliae, inter se aequales: ac propterea ex defin. circuli* H L I M N O, *circumferentia circuli erit. Quod ostendēdum erat.* Hinc *sequitur tertium.*

I I I.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculare rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.

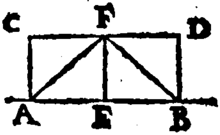


SINT ad rectam AB, *erectae duae perpendiculares* AC, BD, *inter se aequales: Et ducta recta* CD, *demittatur ex quolibet eius puncto* E, *ad* AB, *perpendicularis* EF. *Dico* EF, *vtrique* AC, BD, *esse aequalem. Si namque aequalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo aequali* FG, *si intelligatur recta* AC, *moueri in transuersum per rectam* AB, *faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum* C, *lineam rectam per* G, *transeūtem, vt supra ostensum est, qualis est* CGD. *Duae ergo rectae* CED, CGD, *superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est* EF, *vtrique* AC, BD. *Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.*

IIII.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam A B, *erectae duae perpendiculares* A C, B D, *aequales inter se, ducaturq́ recta* C D. *Dico vtrumq; angulum* C, D, *rectum esse. Secta namque recta* A B, *bifariam in* E, *excitetur in* E, *ad* A B, *perpendicularis* E F, *iunganturq́ rectae* A F, B F. *Quoniam igitur duo latera* A E, E F, *trianguli* A E F, *duobus lateribus* B E, E F, *trianguli* B E F, *aequalia sunt, vtrumq; vtrique, angulosq́ continent aequales. puta rectos,* [a] *erunt quoque & bases* A F, B F, *et tã anguli* F A E, F B E, *q̃* A F E, B F E, *inter se aequales.*



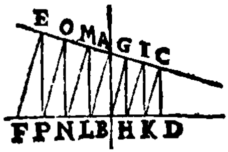
Ablatis igitur aequalibus angulis F A E, F B E, *ex rectis aequalibus* C A E, D B E, *reliqui erunt aequales anguli* C A F, D B F. *Itaque cum duo latera* C A, A F, *trianguli* C A F, *duobus lateribus* D B, B F, *trianguli* D B F, *aequalia sint, angulosq; complectantur aequales, vt ostendimus,* [b] *erunt quoque & bases* C F, D F, *& tam anguli* C, D, *quam* C F A, D F B, *inter se aequales. Si ergo aequalibus angulis* C F A, D F B, *addantur anguli* A F E, B F E, *ostensi aequales, fient toti anguli* C F E, D F E, *aequales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis* E F, *vtriq;* A C, B D, *aequalis est, vt proximo theoremate ostendimus, erunt dua recta* A C, E F, *ad* A E, *perpendiculares, inter se aequales. Quare, vt de angulis* C, D, *proximè probatum est, anguli* C, *&* E F C, *aequales inter se erũt. Est autem* E F C, *ostensus rectus. Igitur &* C, *rectus erit, ac proinde & angulus* D, *qui ostensus est ipsi* C, *aequalis.*

CÆTERVM *angulos* C, D, *rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.*

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.



RECTA linea A B, *in rectas* A C, BD, *incidens faciat angulũ* A B D, *rectum, & B A C, acutum*. Dico *rectas* A C, B D, *minus semper inter se distare versus* C, D, *productas, magis vero, si versus* E, F, *producantur*. [a] Ducatur *enim ex* B, *ad* A C, *perpendicularis* B G, *quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli* B A C, *cadet. ac propterea angulus* G B D, *pars recti anguli* A B D, *acutus erit*. Demissa *ergo ex* G, *ad* B D, *perpendicularis* G H, *cadet quoque ad partes anguli acuti* G B D, *ex eodem coroll. angulusq́; propterea* H G C, *pars recti anguli* B G C, *acutus erit. Rursus ergo ducta perpendicularis* H I, *ad* A C, *per idem coroll. ad partes acuti anguli* H G C, *cadet, ideoq́; angulus* I H D, *pars recti anguli* G H D, *acutus erit*. Atque *ita deinceps in infinitum. si ex* I, *ad* B D, *perpendicularis* I K, *ducatur, & ex* K, *perpendicularis* K C, *ad* A C, *& ex* C, *ad* B D, *perpendicularis* C D, *&c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo* A B G, *angulus* B A G, *acutus est, &* A G B, *rectus*, [b] *erit recta* A B, *maior quam* B G; *& in triangulo* B G H, *recta* B G, *angulo recto* G H B, *opposita, maior quam* G H; *& in triangulo* G H I, *recta* G H, *maior quam* H I: *Atque ita deinceps erunt semper rectae, quæ ipsi* A B, *propiores sunt, maiores ijs, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cum nunquam possit esse finis ducendarum perpendicularium. Quapropter recta* A C, *in* G, *minus distabit à recta* B D, *quam in* A, *& in* I, *minus, quam in* G, *& in* C, *minus, quam in* I, *&c. quandoquidem perpendiculares* A B, G H, I K, C D, *&c. quae ordinatim decrescunt, vt osten-*

[a] 12. primi.

[b] 19. primi.

ostendimus, minimae sunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, vt ex coroll. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum distantias ab eadem recta B D, metiuntur. Constat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter se distantes. quod est primum.

DVCATVR rursus [a] ex A, ad A C, perpendicularis A L, qua angulum obtusum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc est, cadet inter A B, & A E; eritque angulus A L B, acutus, cum ambo A B L, A L B, [b] sint duobus rectis minores, atque A B L, rectus sit; ac proinde angulus A L F, obtusus erit. Eadem ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, facietque angulum L M A, acutum, & L M E, obtusum: Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumque M N B, acutum, & M N F, obtusum constituet. Atque ita deinceps in infinitum, si ex N, ad B F, perpendicularis erigatur N O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes sigillatim angulos obtusos, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus est, & A L B, acutus, [c] erit A L, recta maior, quam A B, & in triãgulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, opposita, maior quam A L; atque in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, opposita, maior quam M L: Atque ita deinceps erunt semper rectae, quae ab A B, longiùs absunt, maiores ijs, qua propinquiores sunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis à recta B F, distabit, quam in A, & in O, magis, quam in M, & in E, magis, quã in O, &c. quandoquidem perpendiculares A B, M L, O N, E P, &c. quae ordinatim augeri ostensae fuere, minimae sunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam B F, cadentium, &c. Liquido ergo constat, rectas A C, B D, ad partes E F, productas continẽter fieri magis inter se distãtes, quod est secundum. Quòd si proteruus quispiam vellet contendere, rectam A L, quae ad A C, perpendicularis est, non concurrere cum D B, producta; constabit multò magis id, quod demonstrandum proponitur. Nam linea D B, vltra punctum B, multò magis à recta C A, distabit, quam in puncto B; quandoquidem A L, ad A C,

[a] 11. primi.

[b] 17. primi.

[c] 19. primi.

A C, *perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum* D B, *cum tamen* G B, *ad eandem* A C, *perpendicularis cum* D B, *concurrat in* B, *&c.*

H Æ C *cum ita sint, nullo negotio demonstrabimus, in superiori figura angulos* C, D, *esse rectos. Nam si angulus* C, *verbi gratia, non dicatur esse rectus, erit vel acutus, vel obtusus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta* C A, *in rectas* A B, C D, *incidens efficit angulum* C A B, *rectum, &* C, *acutum, minus semper inter se distabunt rectae* C D, A B, *ad partes* D, B, *productae, hoc est, perpendiculares ex* C D, *in* A B, *demissae ordinatim minores fient, quam* C A, *vt proximè demonstratum est. Minor ergo est perpendicularis* D B, *quam* C A, *quod est absurdum, cum ponatur aequalis. Non igitur acutus est angulus* C. E*ademque ratione neque angulus* D, *acutus erit. Sit deinde angulus* C, *obtusus. Quia igitur recta* C A, *in rectas* C D, A B, *incidens facit angulum* C A B, *rectum, &* C, *obtusum, magis semper inter se distabunt rectae* C D, A B, *ad partes* D, B, *productae, hoc est, perpendiculares ex* C D, *in* A B, *demissae continenter augebuntur, vt proximè ostendimus. Maior ergo est perpendicularis* D B, *quam* C A, *quod est absurdum, cum aequalis ponatur. Non igitur obtusus est angulus* C. E*ademq; ratione neq; angulus* D, *obtusus erit. Sed neque acutus est ostensus. Rectus igitur vterque est, quod erat ostendendum.*

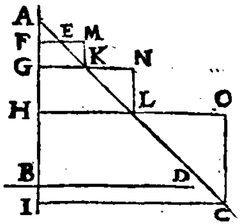
E X *his demonstratis, facile iam* Axioma 13. *demonstrabimus hoc modo.*

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duę illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

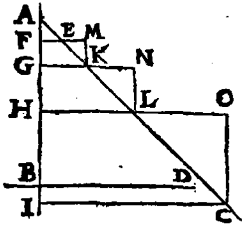
H O C *est* Axioma 13. *apud* Euclidem *in nostris commentarijs; apud alios est vndecimum, quod demonstrandum susce-*

suscepimus. Incidens ergo recta A B, *in rectas* A C, B D, *faciat internos, ad easdemq; partes angulos* A B D, B A C, *duobus rectis minores.* Dico *rectas* A C, B D, *ad partes* C, D, *productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe* A B D, *rectus, & alter* B A C, *acutus. Sumpto in recta* A C, *puncto quolibet* E, [a] *ducatur ex eo ad rectam* A B, *perpendicularis* E F, *& rectae* A F, *aequalis accipiatur* F G, *&* G H, *aequalis ipsi* A G, *&* H I, *ipsi* A H, *ita vt* A G, *ipsius* A F, *&* A H, *ipsius* A G, *&* A I, *ipsius* A H, *dupla sit. Et quoniã si rectae* A F, *abscindatur continuè aequales rectae ex* A B, *aliqua tandem pars vltra* B, *punctum cadet, quod finita recta* A B, *per continuam ablationem unius eiusdemq; quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea* A F, *ita multiplicari potest, (quod fit, sumendo ipsi in* A B, *continenter partes aequales) vt tandem aliquando finitã lineam* A B, *superet: Id quod Euclides frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaequalibus proportionem inter se habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit vt multò magis, si ipsi* A F, *aequalis abscindatur* F G, *& toti deinde* A G, *non autem soli* A F, *aequalis auferatur* G H: *Item toti* A H, *non autem soli* A F, *vel* A G, *aequalis dematur* H I, *& sic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum* B. *Statuatur ergo punctum* I, *terminans tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctũ* B. *Accipiatur quoq; in recta* A C, *recta* E K, *ipsi* A E, *&* K L, *ipsi* A K, *&* L C, *ipsi* A L, *aequalis, ita vt tot sint partes in recta* A C, *quot in recta* A I; *ducanturq; rectae* K G, L H, C I, *producanturq; vnà cum* E F, *vt* E M, K N, L O, *ipsis* E F, K G, L H, *fiant aequales, ac tandem rectae iungantur* M K, N L, O C. *Itaque quoniam duo latera* K E, E M, *trianguli* K E M, *duobus lateribus* A E, E F, *trianguli* A E F, *per constructionẽ aequalia sunt, vtrumque vtrique,* [b] *angulosq; ad verticem* E, *continẽt aequales,* [c] *erit & basis* M K, *basi* A F, *& angulus* M, *angulo* F,

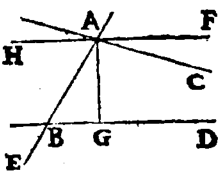


[a] 12. primi.
[b] 15 primi.
[c] 4. primi.

lo, F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. a 1. pron. *Igitur & MK, FG,* [a] *æquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad F M, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli A K G, æqualia sunt, ex constructione,* b 15. primi. [b] *angulosq; comprehendunt æquales ad K, verticem,* c 4. primi. [c] *erit & basis N L, basi A G, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & G H, ex constructione, eidem A G, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH,* d 1. pron. *inter se* [d] *erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quacirca per præcedens theorema, erit etiã angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus.* e 28. primi. *Igitur rectæ IC, BD,* [e] *parallelæ sunt; ac propterea B D, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum.*



SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, *rectus, sed* ABD, *quidem acutus, &* BAC, *vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli* ABD, BAC, *duobus rectis ponuntur minores;* f 13. primi. [f] *sunt autem duo anguli* ABD, DBE, *duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi* ABD, *maior erit reliquus* D B E, *reliquo* BAC. g 23. primi. [g] *Constituatur in A, ad rectam* A B, *angulus* B A F, *angulo* D B E, *æqualis: Cadetq; recta* A F, *supra rectã* AC, *cum AF, maiorem angulum cum AB, cõstituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus* DBE, *interno* B A F, *ex eadem parte opposito æqualis est,* h 28. primi. [h] *erunt rectæ* A F, B D, *inter se parallelæ. Demittatur quoque ex* A, *ad*



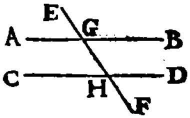
ad BD, [a] perpendicularis AG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritque angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, vt proximè demonstrauimus, recta AF, BD, ad partes F, D, producta coibunt tãdem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallela. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt recta AF, BD, ad partes H, B, producta, quod est absurdum, cum parallela sint ostensa. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent recta AC, BD, ad partes C, D, producta, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsa recta AC, BD, ad partes C, D, producta conuenient. Quod erat ostendendum. [a] 12. primi.

QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB,CD, recta incidat E F. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus BGH, [a] erũt duo AGH, BGH, maiores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, [b] æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, [c] coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.



[a] 4. pron.
[b] 13. primi.
[c] 13. pron.

DICO secundò, angulum externum AGE, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniá enim angulo BGH, æqualis est alternus CHG, vt ostensum est; & eidem B G H, [d] æqualis est angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, [e] inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse angulo D H G.

[d] 15. primi.
[e] 1. pron.

DICO tertio, angulos internos ad easdem partes, AGH, CHG, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo CHG, interno; si addatur cõmunis AGH, [f] erũt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, [g] æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

[f] 2. pron.
[g] 13. primi.

SCHOLIVM.

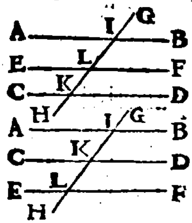
CONVERTIT autem hoc præsens theoremá duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelę, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD [illegible]em rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, [a] erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, [b] erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, [c] æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, [d] erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



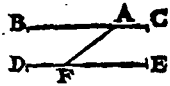
[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 1. pron.
[d] 27. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemque lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, *coeuntes in A, parallelæ ipsi D E. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto*



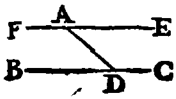
enim A, *ducatur recta A F, secans DE, in F, vtcunque. Quoniam igitur* AB,
[a] 9. primi. DE, *sunt parallelæ*, [a] *erunt anguli alterni* BAF, AFE, *æquales. Addito ergo*
[b] 2. pron. *communi angulo* C A F, [b] *erunt duo anguli ad A, æquales*
[c] 29. primi. *duobus angulis* CAF, A F E, *Sed hi duo* [c] *æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas* AC, DE. *Igitur & duo anguli ad* A, *duobus erunt rectis æquales; ac*
[d] 14. primi. *propterea* [d] *in rectum erunt constituta ipsa* AB, AC. *Quod est propositum.*

31

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad BC, linea A D, vtcumque, faciens an-
[e] 23. primi. gulum quemcunque A D B; Cui ad A, [e] æqualis constituatur E A D. Dico rectam E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem,



[f] 27. primi. [f] Erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

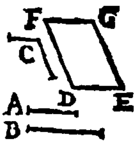
DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, ut hæc producta cum illo nõ conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq́ puncto ad eandem rectam nõ plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, ut ostendimus propos. 17.

ex

ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quam vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodẽ, quod est absurdum, [a] cum sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ. [a] 30. primi.

EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio cõstituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendẽtia datis duabus rectis lineis æqualia.

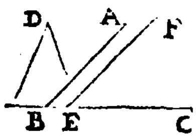
SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta DE, quæ rectæ A, sit æqualis, [b] fiat angulus EDF, angulo C, [c] & recta DF, rectæ B, æqualis. Deinde per E, [d] agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione; [e] parallelogrammum erit DEGF. Quod cum ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.



[b] 23. primi.
[c] 3. primi.
[d] 31. primi.
[e] 35. def.

PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineam rectã, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. polliciti sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea BC, [f] constituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod iubetur. Si vero non transeat per A, [g] ducatur per A, recta AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualem esse. Cũ enim parallelæ sint AB, EF, [h] erit



[f] 23. primi.
[g] 31. primi.
[h] 29. primi.

angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte opposito æqualis. Cum ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis, [a] æquales inter se erunt anguli ABC, & D. quod est propositum.

[a] 1. pron.

NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, rectè Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum ABC, sintque latera AB, AC, latere BC, maiora. Abscindatur BD, æqualis ipsi BC, [b] ducaturque DE, ipsi AC, parallela: [c] eritque angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales sunt, vterque vtrique, latusque BC, lateri DB, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim BE, minus, quàm BC, atque adeo neque lateri AC, neque lateri AB, æquale esse potest; quòd hæc latera maiora ponantur latere BC. Causa huius rei est, quòd latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis est.

[b] 31. primi.
[c] 29. primi.

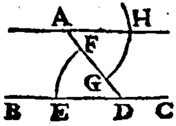
SIT rursus triangulum FGH, sintque iterum latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius, quàm FG. Abscindatur HI, ipsi FG, æqualis, [d] ducaturque IK, ipsi FG, parallela: [e] eritque angulus HKI, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, æquales, vterque vtrique, latusque FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim HK, minus, quàm HG, atque adeo neque lateri HG, neque lateri FH, æquale esse potest; quòd latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei est, quòd latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K; in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo H, sed angulo G, est æqualis, [f] qui maior est

[d] 31. primi.
[e] 29. primi.
[f] 18. primi.

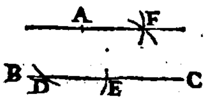
ior est angulo H, propterea quòd latus FH, *maius posuimus latere* FG. D*istulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.*

PRAXIS.

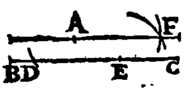
SIT ducenda parallela ipsi BC, *per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad* BC, *& ex* D, *& A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes* B, *alter ad partes* C: Deinde *beneficio circini arcui* EF, *abscindatur ex arcu altero arcus* GH, *aequalis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, a erit haec parallela ipsi* BC. N*am anguli* EDF, *HAG, sunt aequales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.* a 27. primi.



ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum lineae parallela lineae datae BC, *hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans* BC, *in puncto* D; *& eodem interuallo ex* D, *sumatur punctum* E, *in eadem recta* BC: Deinde *eodem interuallo ex A, &* E, *describantur duo arcus secãtes sese in* F. N*am ducta recta AF, erit parallela rectae* B C. *Quoniam enim propter idem interuallum assumptum recta AF, aequalis est rectae* DE; *& recta A,* D, *rectae* EF, *si ducerentur hae lineae; erit A* F, *opposita* DE, *parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.*

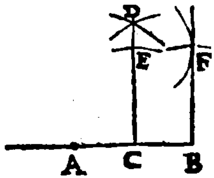


QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectae BC, *commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum* D, *in* BC, *ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectae* BC, *nempe* E, *quod tamen aliquantulum distet a puncto* D, *(Quo enim maior fuerit distantia inter* D, *&* E, *eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A:* Deinde *ex A, interuallo* DE, *alter arcus descriptus secet priorem arcum in* F. *Recta namque ducta AF, erit parallela rectae* BC, *vt prius; quia recta A* F, *aequalis*



est recta D E, ob idem interuallum; & recta A D, recta EF, si hæ recta ducta essent, &c.

EX his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur recta C B, æqualis CA, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturq; recta DC, quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi CD, parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propos. proxime explicatam.

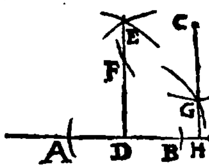


Ex CD, abscissa recta quantacunque CE, describatur ex B, ad interuallum CE, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum CB, descriptus, ducaturq; recta B F. Hac namque ipsi C D, parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igi-

[a] 29. primi.

tur cum angulus A C D, [a] æqualis sit interno CBF; sit autem ACD, rectus, erit & CBF, rectus, ac proinde B F, ad A B, perpendicularis erit.

SIMILITER si data sit recta AB, & punctum extra ipsam C, in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad A B, perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto D, vtcunq; in linea AB, abscindantur vtrinque inter se æquales DA, DB, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturque recta ED, quæ ex praxi propos. 11. ad AB, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi DE, parallela, hoc modo, secũdũ praxim huius propos. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam DE, in F: eodemq; interuallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, intersecet alius



arcus

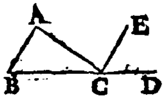
arcus ex C, *ad interuallum* D F, *delineatus. Recta namq; ducta ex* C, *per* G, *secans A B, in H, parallela erit recta* D E, *ex praxi huius propos. 31. Quare, ut proximè scripsimus,* C *H, ad AB, perpendicularis erit, sicuti &* E D, *ad eandem perpendicularis est.*

THEOR. 22. PROPOS. 32. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et triãguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. [a] Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quonaim igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, [b] erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, [c] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, [d] fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

[a] 31. primi. [b] 29. primi. [c] 29. primi. [d] 2. pron.



DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, [e] erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, AC B, [f] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

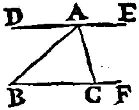
[e] 2. pron. [f] 13. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorũ, & oppositorũ superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triãgulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodem externo angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt angulo A C B. &c.

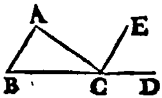
OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, [a] ducatur rectæ B C, parallela DE. Quoniam igitur [b] anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt; si addãtur æquales EAC, & A C B, (sunt enim & hi alterni) [c] erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Addito ergo communi angulo A B C, [d] erũt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam. n. anguli ABC, B A C, A C B, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit: [e] Sunt autem & anguli A C F, A C B, duobus rectis æquales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, æquales. Dempto igitur communi angulo A C B, [f] remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, æqualis.



[a] 31. primi.
[b] 29. primi.
[c] 2. pron.
[d] 2. primi.
[e] 13. primi.
[f] 3. pron.

FA-

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab uno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, sitq; angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico, rectas BC, CD, in directum iacere. Cum enim angulus ACD, æqualis sit angulis ABC, BAC; si addatur communis angulus ACB, [a] *erunt anguli ACD, ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB,* [b] *æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD, ACB, duobus erunt rectis æquales. Quare BC, CD, vnam lineam rectam constituunt.*



[a] 2. pron.

[b] 32. primi.

QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineae, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secundæ figurae rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineae aequales sunt bis tribus rectis, sex uidelicet rectis; Et sic de reliquis. Eũ autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figurae constitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse

esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur unum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cũ sit decimaoctaua, habebit 20. angulos aequiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figurę 10. lateribus contentae, aequiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc *autẽ hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineae rectę, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulũ in quatuor, &c.*

Cum igitur anguli horum triangulorum constituãt omnes angulos rectilineae figurae propositae, & omnes anguli cuiuslibet trianguli aequales sint duobus rectis; perspicuum est omnes angulos figurae cuiusuis rectilineae aequales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.

SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figura rectilinea, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, dẽptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

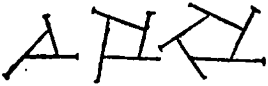
HOC *est, anguli cuiuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figura continentis 20. latera aequiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.*

Demon-

Demonstratio autem huius rei talis est. Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos rectae lineae ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosùe figura ipsa continet. Cum igitur anguli cuiuscunque trianguli a aequales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figurae rectilineae propositae, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figurę propositę, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes aequales 4. rectis tãtummodo, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiusque figura bis tot rectis sunt aequales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

a 32. primi.

EX hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figura cuiusuis rectilinea producantur ordinatim versus eandem partem, omnes angulos externos aquales esse quatuor rectis. Nã quilibet externus, & illi deinceps internus, b aquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi vna cum omnibus internis aquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosùe figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis aquales, minus quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis aquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni et externi simul aquales sunt sex rectis. Cum igitur interni c duobus sint rectis aquales, erunt soli externi aquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni simul aquales sunt octo rectis. Cum igitur interni soli aquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis aquales. In pentagono, seu quinquangulo,



b 13. primi.

c 32. primi.

gulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramque, ita vt qualibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.

IN pentagono A B C D E, *latera in vtrãque partem producta coeant in punctis* F, G, H, I, K. *Dico quinque angulos* F, G, H, I, K, *æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim* B H K, *cum latus* H B, *sit protractũ ad* F, [a] *erit externus angulus* F B K, *duobus internis, & oppositis* H, K, *æqualis. Eadem ratione in triangulo* A I G, *erit externus angulus* F A G, *æqualis duobus internis, & oppositis* I, G. *Quare duo anguli* F B A, F A B, *æquales sunt quatuor angulis* G, H, I, K. *Addito igitur communi angulo* F, [b] *erũt tres anguli* A, B, F, *trianguli* A B F, *æquales quinque angulis* F, G, H, I, K. *Sed anguli* A, B, F, *trianguli* A B F, [c] *æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli* F, G, H, I, K, *duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.*

[a] 32. primi.

[b] 2. pron.

[c] 32. primi.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, [d] *æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reli-*

[d] 32 primi.

& reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq; erunt ipsa triangula.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isosce le, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, [a] cum omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare [b] cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.

[a] 32. primi.
[b] 5 primi.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum triãguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [c] quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

[c] 32. primi.

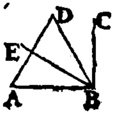
COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reli-

reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.

PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit



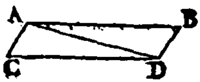
enim angulus rectus A B C. *Super rectam* A B, [a] *constituatur triangulum aequilaterum* ABD. *Et quia per corollarium 3. angulus* A B D, *facit duas tertias partes anguli recti* A B C; *erit angulus* C B D, *pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo* A B D, [b] *bifariam, per rectam* B E, *erit vterque angulus* A B E, E B D, *tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus* A B C, *diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.*

[a] 1. primi.

[b] 9. primi.

33. PROBL. 23. PROPOS. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D, Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, [c] erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [d] erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, [e] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales.

[c] 29. primi.

[d] 4. primi.

[e] 27. primi.

Rectæ

Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

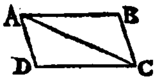
SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas aequales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt ipsę coniungentes sint & aequales & parallelae. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, *&* D. *Item ad* B, *&* C, *neque coniungentes lineę essent parallelę vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent ęquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.*

THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita AB, DC, inter se esse æqualia, nec non latera opposita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB, DC, sint parallelæ, [a] erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rursus quia AD, BC, sunt parallelæ, [b] erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. Itaque cum duo anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, vterque vtrique; & latus AC, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [c] erit recta AB, æqualis oppositæ rectæ DC, & recta BC, oppositæ rectæ AD. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales



[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 26. primi.

les anguli DAC,BCA,toti quoque anguli BAD,BCD, [a] sunt æquales; constat secundum,angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB,BC, trianguli ABC,æqualia sunt duobus lateribus CD,DA, trianguli CDA,vtrumq; vtriq;,& angulus B,angulo D, æqualis, vt iã ostendimus; [b] erunt triãgula ABC,CDA, ęqualia,ideoq; parallelogrammum ABCD,diuisum erit bifariã a diametro AC,quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum ęqualia sunt inter se,quæ ex aduerso &c. Quod ostendendum erat.

a 2. pron.

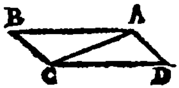
b 4. primi.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam,non autem & angulos. In Quadrato enim,& Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Item opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemq́; lineas AD, *BC. Ducta enim diametro* AC, *erunt duo latera AB, B*C, *trianguli AB*C, *æqualia duobus lateribus* CD, DA, *trianguli* CDA, *vtrumque vtrique, & basis A C, communis. Igitur [c] erit angulus* B, *angulo* D, *æqualis. Rursus quia latera* AB, BC, *æqualia sunt lateribus* CD, DA, *vtrumque vtrique, & anguli* B, D, *ostensi æquales; [d] erit angulus* BAC, *angulo* DCA, *alterno æqualis, & angulus* BCA, *alterno angulo* DAC. *Quare [e] erunt* AB, *&* DC, *parallelæ; Item* AD, *&* BC, *quod est propositum.*



c 8. primi.

d 4. primi.

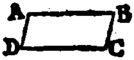
e 27. primi.

HINC

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorũ latera sunt inter se aqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat aqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se aqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

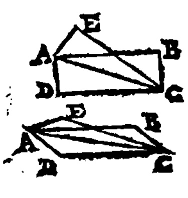


SINT in quadrilatero ABCD, *anguli oppositi* A, & C, *equales; Item oppositi anguli* B, & D. *Dico* ABCD, *esse parallelogrammum; hoc est, lineas* AB, DC, *esse parallelas; Itemq́; lineas* AD, BC. *Nam si equalibus angulis* A, & C, *addantur aquales angulis* B, & D; [a] *erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, aquales, & idcirco anguli A, et B, dimidiũ facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor aquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis aquales. Quare A D, B C,* [b] *parallela sunt. Eadem ratione erunt A B, DC, parallela. Erunt enim duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, & C, aquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiã manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi aquales sint, per definitionem. similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi aquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.*

[a] 2. primi.

[b] 28. primi.

HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum esse ostẽsum est; in quo, ducta diametro AC, constituatur super AC, triangulo ABC, aquale triangulum AEC, inuerso



 ordine,

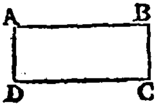
ordine, ita vt latus C E, sit æquale lateri A B, & A E, ipsi C B, vt in scholio propos. 22. docuimus; fiatque trapezium AECD. Quoniam verò triãgulum ABC, triangulo ADC, æquale est, [a] quòd diameter A C, bifariam secet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.

a 34. primi.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogramum erit, vt ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

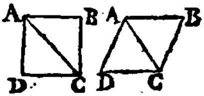


SINT in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti; [b] erunt A D, B C, parallelæ. Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo ABCD, parallelogrammum. quod est propositum.

b 28 primi.

HINC rursum constat, Quadratum, & Altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos vero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus



ABCD, in quo diameter AC. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli DAC, vtrumque vtrique, & basis BC, basi DC; (sunt enim hæ figuræ æquilateræ) [c] erunt anguli BAC, DAC, æquales.

c 8. primi.

Quare

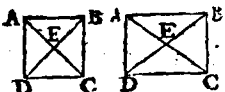
Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.

SIT rursus Altera parte lõgius, vel Rhõboides A B C D, in quo diameter A C, sitque, maius latus A B. Quoniam

igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C, [a] erit angulus B C A, maior angulo B A C. Est autem angulus BCA, [b] aequalis angulo D A C, alterno; quod B C, A D, parallelae sint. (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inaequaliter diuiditur a diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

[a] 18. primi.
[b] 29. primi.

EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore aequales esse; At vero in Rhombo, & Rhomboide inaequales, maiorem quidem eam, quae angulos acutos, minorem vero eam, quae obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri A C, BD, quas dico esse aequales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli A B C, aequalia sint duobus lateribus A B, A D, trianguli B A D; vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus; [c] erit basis A C, basi B D, aequalis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore aequales sunt.



[c] 4. primi.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri AC, BD; sitque angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim aequales sunt, quia alias vterque esset rectus, cum ambo [d] aequales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, aequalia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, vtrumque vtrique, & angulus

[d] 29. primi.

[a]24.primi. *B A D, angulo* ABC, *maior existit ;* [a] *erit basis* B D, *maior base* A C. *quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ* A C, *B D, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales* A B, D C *quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.*

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, [b] *æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli B E C, vterque vtrique ; &* [c] *latus A D, æquale lateri* B C, *opposito in parallelogrammo* A B C D, *quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis ;* [d] *Erit &* A E, *recta rectæ* C E, *& recta* D E, *rectæ* B E, *æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.*

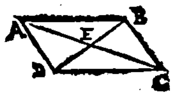
[b]29.primi. [c]34.primi. [d]26.primi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

IN quadrilatero enim A B C D, *diametri* A C, B D, *se mutuo bifariam diuidãt in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus* C E, *E D, trianguli* C E D, *& anguli contenti ad verticem E,* [e] *æquales quoque;* [f] *erunt & bases* AB, C *D, æquales, & angulus ABE angulo alterno* C *D E, æqualis.* [g] *Quare rectæ* A B, C *D, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur* A *D,* C *B. Parallelogrammum ergo est* A B C D.

[e]15.primi. [f]4.primi. [g]27.primi.

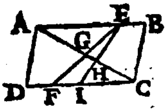


HVC quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunq;, diuidit parallelogrammum bifariam quoque : & recta linea

nea diuidẽs parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

IN parallelogrammo ABCD, *diametrum* AC, *bifariã secet recta* EF, *in puncto* G. *Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus* EAG, [a] *aequalis est angulo alterno* FCG, *&* [b] *angulus* EGA, *angulo* FGC: *Est autem & latus* AG, *lateri* CG, *aequale, per hypothesin, quae ambo aequalibus angulis* AEG, CFG, *opponũtur;* [c] *erunt & latera* EG, FG, *aequalia. Quare cum latera* AG, GE, *aequalia sint lateribus* CG, GF, *& anguli quoque contenti aequales;* [d] *erũt triangula* AGE, CGF, *aequalia. Addita igitur communi quãtitate* BCGE, [e] *erit triangulum* ABC, *trapezio* BCFE, *aequale: Sed triangulum* ABC, [f] *dimidiũ est parallelogrammi* ABCD. *Igitur & trapezium dimidiũ erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta* EF, *parallelogrammum bifariam secat.* a 29. primi. b 15. primi. c 26. primi. d 4. primi. e 2. pron. f 34. primi.



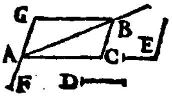
SECET iam EF, *parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum* AC, *bifariam secari in* G. *Si enim diameter* AC, *non bifariam diuiditur in* G, [g] *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in* H, *per quod ducatur recta* EHI. *Erit ergo, vt iam demonstrauimus,* EICB, *trapezium dimidium parallelogrammi* ABCD, *atque adeo aequale trapezio* EFCB, *quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur* AC, *bifariam in* G, *& non in alio puncto, quod erat propositum.* g 10. primi.

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusq; punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quae parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, *in latere* AB, *ducenda est recta* EF, *per* G, *punctum, in quo diameter* AC, *bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis.*

DEMONSTRAT quoque hic Pelatarius problema non iniucundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quę cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem esse duobus rectis.

DVÆ rectæ infinitæ AB, AC, *contineant angulũ BAC, sitq́; data recta finita quæcunque* D, *&* *angulus datus* E, *hac lege, vt duo anguli E, & B* A C, *minores sint duobus rectis.*



Oportet igitur inter rectas AB, AC, *collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cum alterutra vero illarum, nimirũ cum* A C, *facientem angulum æqualẽ angulo dato E.*

[a] 23. primi. *a Fiat angulus* C A F, *æqualis angulo E, & producta F A, ad G, b sit A G, æqualis*

[b] 3. primi. *rectæ D; & per G, c ducatur G B, parallela ipsi* A C, *secans*

[c] 31. primi. A B, *in B: Deinde per* B, *ducatur* B C, *parallela ipsi* A G, *secans* A C, *in C. Dico rectam* B C, *collocatam inter rectas* A B, A C, *æqualem esse rectæ* D, *angulumq́;* B C A, *angulo E. Cum enim parallelogrammum sit, per constructionem,*

[d] 34. primi. A C B G, *d erit recta* B C, *rectæ G A, æqualis: At G A, æqualis est, per constructionem, rectæ* D. *Igitur &* B C, *rectæ* D, *æqualis erit. Rursus quia, e angulus* B C A, *angulo*

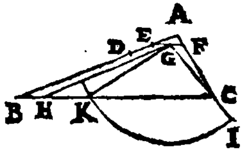
[e] 29. primi. *alterno* C A F, *æqualis est; & eidem angulo C A F, æqualis est, per constructionem, angulus E; erunt anguli E, &* B C A, *æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum* A B C, *si anguli* B A C, *&* B C A *æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.*

SCHO-

SCHOLIVM. II.

NON alienum erit à nostro instituto, adijcere quędam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quę à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non sit ęquilaterum; vel Isosceles habens basim latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duae rectae intra triangulum, quae simul sumptae maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam aequales.

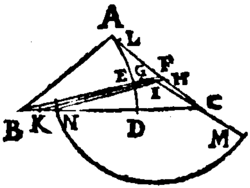
SIT enim primum triangulum ABC, habens latus AB, latere AC, maius, sitq́; BD, dimidium vtriusque lateris AB, AC, simul: Sumpto autem inter AD, puncto E, vtcunque, agatur EF, ipsi BC, parallela; & ex quouis puncto G, lateri AB, parallela ducatur GH, rectaq́; iungatur GC, Et quoniam EA, AF, a maiores sunt, quam EF: Itē CF, FG, maiores, quàm GC; erunt EA, AC, FG, simul maiores, quam EF, GC, simul: ablataq́; communi FG, erunt EA, AC, simul maiores, quam EG, GC, simul; ac proindè multò maiores, quam GC, sola. Producatur ergo GC, fiatq́; GI, ipsis EA, AC, simul aequalis. Quia vero BE, maior est, quam vtraque EA, AC, simul, quod BE, superet BD, dimidium vtriusque BA, AC, simul, at EA, AC, simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque DA, AC, simul; erit quoque BE, maior, quam GI, quę ipsis EA, AC, simul est ęqualis. Cum igitur b ipsi BE, aequalis sit GH, in parallelogrammo BEGH; erit quoque GH, maior, quam GI. Si igitur centro G, & interuallo GI, circulus describatur, secabit is rectam GH, ac propterea & ipsam CH, prius secabit in K. Connectatur GK. Dico vtramque GH, GK, simul aequalem esse vtriq; AB, AC, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam GH, ipsi BE, aequalis est, & GI, hoc est, GK, ipsis EA, AC, simul.



a 20. primi.

b 34. primi.

mul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotius à D, sumptum fuerit, & punctum G, à puncto E; hoc est, prout tam A D, *quam* E F, *infinitis in punctis secari potest.*



SIT deinde Isosceles ABC, *habens basim* B C, *vtrouis latere maiorem. Descripto ex centro* B, *per* A, *arcu* A D, *secante rectam* B C, *in* D, *ducatur vtcunque recta* B F, *secans arcum in* E, *& latus* A C, *in* F; *& in* E F, *per quoduis punctum* G, *ipsi* B C, *parallela agatur* G H, *& per quodcunque eius punctum* I, *ipsi* B F, *parallela ducatur* I K, *rectaq; iungatur* I C; *atque ipsi* E G, *aequalis abscindatur* A L. *Erit igitur* B G, *ipsis* A B, A L, *simul aequalis, at* L C, *minor quam* BE, *siue* A B, *& ob id multò minor, quam* B G. *Et quia ipsi* BG,

[a] 34. primi. [a] *aequalis est* I K, *in parallelogrammo* B G I K; *erit quoque* I K, *ipsis* A B, A L, *simul aequalis, maior autem, quam* L C.

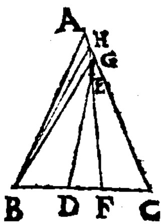
[b] 20. primi. *Itaque* [b] *quia* G F, F H, *maiores sunt, quam* G H; *&* H C, H I, *maiores, quam* I C: *erunt* G F, F C, H I, *simul maiores, quam* G H, I C; *& ablata communi* H I, *erunt reliqua* G F, F C, *simul maiores, quam* G I, I C, *simul; ac proinde apposita communi* B G, *fient* B F, F C, *simul maiores, quam*

[c] 20. primi. B G, G I, I C, *simul. Sed ipsis* B F, F C, [c] *maiores sunt* B A, A C, *simul. Ergo multò maiores erunt* BA, A C, *simul, quam* B G, G I, I C, *simul. Cum ergo* B G, *ipsis* B A, A L, *simul aequalis sit, erit reliqua* L C, *maior, quam reliqua* G I, I C, *simul, ac proinde multò maior, quam* I C, *sola. Ponatur* I M, *(producta* I C*) ipsi* L C, *aequalis. Et quia* I K, *ostensa est maior, quam* L C, *hoc est, quam* I M; *si ex centro* I, *per* M, *arcus circuli describatur, secabit is rectam* I K, *ac proinde prius ipsam* C K, *secabit in* N. *Connectatur* I N. *Dico vtramque* I K, I N, *simul aequalem esse vtrique* A B, A C, *simul. Id quod ex constructione patet. Est namque* I K, *ipsis* A B, A L, *simul aequalis, &* I N, *hoc est,* I M, *ipsi* L C, *aequalis. Atque hoc infinitis modis fieri potest; cum* B F, *infinitis modis duci possit; & tam* E F, *quam* G H, *infinitis modis secari.*

CON-

CONSTAT autem, si intra idem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I, I N, in posteriori includunt, eas maiores fore simul sumptas lateribus A B, A C, simul sumptis: quippe quæ [a] maiores forent rectis H G, G K, in priori triangulo, vel rectis K I, I N, in posteriori. [a] 21. primi.

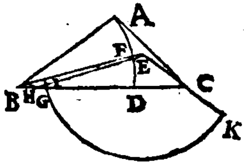
AT verò in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtroque latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim A B C, cuius duo latera A B, A C, æqualia, & basis B C, nõ maior, [b] sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ D E, E F, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus A B, A C, simul sumptis. Producatur enim D E, secans latus A C, in G, iungaturq́ recta G B. Quoniam igitur [c] duo anguli A B C, & C, æquales sunt, estq́ A B C, maior angulo G B C, erit quoque C, maior angulo G B C. Est autem [d] & angulus G D B, angulo C, maior, externus interno. Igitur multò maior erit angulus G D B, angulo G B C; [e] ac proinde latus G B, latere G D, maius erit. Quia vero [f] angulus B G A, maior est angulo C, externus interno; angulusq́ C, vel æqualis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoq; angulus B G A, angulo A, maior. Quare [g] latus A B, latere G B, maius erit: Sed recta G B, ostensa est maior, quã G D; ac proinde multò maior, quam D E. Igitur latus A B, multò etiam maius erit, quam D E. Eadem ratione, si F E, producatur secans A C, in H, iungaturq́ recta H B, ostendemus latus A B, ac proinde & A C, maius esse, quam F E. Quocirca latera A B, A C, simul maiora sunt duabus rectis D E, E F, simul sumptis. Quòd si F E, producta secaret latus A B, demonstraremus eodem modo, latus A C, maius esse recta E F.



[b] 5. vel 18. primi.
[c] 5. primi.
[d] 16. primi.
[e] 19. primi.
[f] 16. primi.
[g] 19. primi.

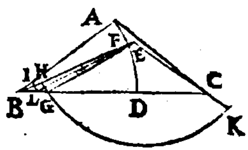
IAM verò, si admirabile videatur ijs, qui Geometriæ ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interio-

interiores, quæ simul sumpta maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sanè erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primum constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo A B C, cuius latus A B, minus non sit latere A C, at latus B C, vtrouis latere A B, A C, maius. Descripto ex centro B, arcu circuli A D, sumatur quoduis punctum E, inter arcum A D, & latus A C, ducaturq́ recta B E, secans arcum in F; ita vt B E, maior sit, quam B F, hoc est, quam B A, iungaturq́ E C.



*21.primi. Quia vero * B E, E C, simul minores sunt, quam A B, A C, simul, estq́ B E, maior, quam A B, erit E C, multò minor, quam A C. Producta igitur E C, fiat E K, ipsi A C, æqualis, ac propterea minor, quam E B; describaturq́ ex E, per K, arcus circuli, qui rectam E B, secabit, ac proinde & ipsam C B, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta E H, secans arcum in I: factumq́ erit, quod proponitur. Nam B E, maior est, quam B A, & E H, maior, quam E I, hoc est, quam E K, vel A C.

DEINDE sint singulæ lineæ singulis lateribus æquales constituendæ intra idem triangulum: fiatq́ eadem constructio, dempta linea E H, sed arcus K G, secet rectam E B, in H. Et quia latus BA, latere AC, ponitur non minus, erit B E, recta maior, quam A B, cum maior sit, quam B F, hoc est, quam A B. Sumpta igitur E I, æquali ipsi A B, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem E B, maior est, quam A B, & E H, non maior, quam A B. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans B C, in L, iunganturq́ rectæ E L, E G: factumq́ erit, quod proponitur. Nam E L, ipsi E I, hoc est, ipsi AB, æqualis est, & EG, ipsi E K, hoc est, ipsi A C.



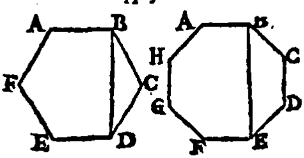
PRÆTER hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ diximus,

diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionẽ datam, quæ tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habẽte numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

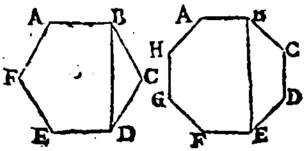
LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraque parte latera habent æqualia numero; vt in hexagono A B C D E F, *latera opposita erunt* A B, E D; *quoniam tam ad partes* A, *&* E, *duo sunt latera, quam ad partes* B, *&* D. *In octogono vero* A B C D E F G H, *latera opposita erunt* A B, F E, *quia tam ad partes* A, *&* F, *tria sunt latera, quam ad partes* B, *&* E. *Et sic in alijs figuris æquilateris pariũ laterum, ex vtraque parte oppositorum laterum erunt tot latera,*



quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur quælibet latera opposita esse parallela; A B, *nimirum ipsi* E D, *in hexagono; &* A B, *ipsi* F E, *in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdẽ partes linea recta, qualis est in hexagono* B D, *& in octogono* B E. *Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli* B, C, D, *eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli* B C D, C B D, C D B, *trianguli* B C D, [a] *duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli* A B D, E D B, *duobus rectis* [a] *32. primi.*

a 28. primi. *ctis æquales erunt. Quare* [a] *parallelæ erunt* A B, *&* E D. *Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B*, C, D, E, *sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri* B C D E, *æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli* A B E, F E B, *duobus*

b 28. primi. *erūt rectis æquales,* [b] *atq; adeo* AB, F E, *parallelæ erūt. Eodē modo demonstrabitur, in omnibus alijs figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorū laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiāgula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales: At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis.* Demptis *igitur octo, remanent duo recti, &c.*



QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, *& alijs* Geometris *parallelogrammum dici consueuit, propterqaque in definitionibus. Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.*

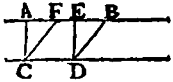
35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INTER duas parallelas A B, C D. super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quādo duo latera opposita partes sunt parallelarum,

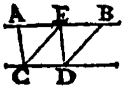
vt in

vt in exemplo proposito cernitur. Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta A E,[a] æqualis est rectæ C D, oppositæ; & eidem C D æqualis est F B, in parallelogrammo C D B F, opposita; Erunt A E, F B,[b] inter se æquales. Dempta igitur communi F E,[c] remanebit A F, ipsi E B, æqualis:[d] Est autem & A C, ipsi ED, opposite æqualis in parallelogrammo C D E A;[e] & angulus B E D, angulo F A C, externus interno.[f] Quare triangulum F A C, triangulo B E D, æquale erit. Addito igitur communi trapezio C D E F,[g] fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Quod est propositum.



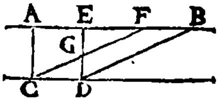
[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 3. pron.
[d] 34. primi.
[e] 29. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. pron.

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ A E, E B, æquales, nec non & anguli B E D, E A C; atq; adeo[h] triãgula EAC, BED, æqualia. Addito igitur cõmuni triangulo C D E,[i] fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia.



[h] 4. primi.
[i] 2. pron.

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F;[k] erit tota A F, toti E B, æqualis, nec nõ & anguli B E D, F A C, æquales erunt; atque adeo[l] triãgulum F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo communi triangulo E G F,[m] remanebit trapezium A E GC, trapezio F G D B, æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.



[k] 2. pron.
[l] 4. primi.
[m] 3. pron.

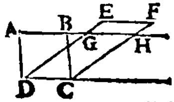
SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propositionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

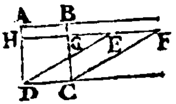
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, *super eandem basin* C D, *& ad easdem partes. Dico rectam* A B, *productam in directum iacere ipsi* E F, *& propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias.n.* A B *producta vel cadet infra* E F, *vel supra.* *Cadat primo infra, qualis est* A H.



Erit igitur parallelogrammum C D G H, [a] *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur autem eidem parallelogrammo* A B C D, *æquale parallelogrammum* C D E F. *Quare parallelogramma* C D E F, C D G H, [b] *æqualia erunt, totum, & pars, quod est absurdum.* Non *ergo cadet* A B, *infra* E F.

[a] 35. primi.

CADAT secundo A B, *producta supra* E F. *Cadet igitur* F E, *protracta infra* A B. *Quare, vt prius, erunt parallelogramma* A B C D, C D H G, *æqualia, totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si* C F, D E, *producerentur vsque ad* A B, *protractam. Eademq́ demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt, hoc est, siue punctum* E, *sit vltra* B, *siue non, vt perspicuum est.* Non *ergo cadet* A B, *supra* E F; *sed nec infra, vt demonstratum est: ergo producta in directum iacet ipsi* E F; *ac proinde parallelogramma* A B C D, C D E F, *in eisdem sunt parallelis.*



36.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super

per æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT, duo parallelogramma ACEF, GHDB, super æquales bases CE, HD, inter easdem parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad easdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, [a] æqualis est GB, in parallelogrammo GHDB, opposita; erunt CE, GB, [b] æquales inter se: Sunt autem & parallelæ, per hypothesin. Quare & CG, EB, ipsas coniungentes, [c] parallelæ erunt, & æquales, ideoq; CEBG, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma ACEF, GCEB, sint inter easdem parallelas, & super eandem basin CE, [d] erit parallelogrammũ ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rursus quia parallelogramma GCEB, GHDB, sunt inter easdem parallelas, & super eandem basin GB, [e] erit quoq; parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, [f] inter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, &c. Quod ostendendum erat.

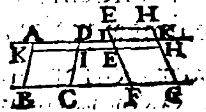
[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.
[d] 35. primi.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.

SCHOLIVM.

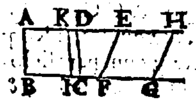
CONVERSVM huius theorematis duplex est, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, super bases æquales BC, FG, & ad easdem partes constituta. Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut supra. Quo posito sequitur, totum & partem esse æqualia, quemadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligenda sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta BG.



SINT secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, [a] abscindatur
[a] 3. primi. BI, æqualis rectæ FG, & [b] ducatur
[b] 31. primi. IK, parallela ipsi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, [c] æquale
[c] 36. primi. parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod est absurdum. Non ergo BC, maior est, quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases BC, FG, æquales sunt.



SEQVENS quoque theorema facile hinc demonstrabitur.

SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, sitque basis BC, maior base FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius
[d] 3. primi. esse. [d] Auferatur enim rectæ BI, ipsi FG, æqualis; [e] duca-
[e] 31. primi. turque IK, ipsi AB, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma
[f] 36. primi. BK, FH, supra æquales bases BI, FG, æqualia. Cum igi-
[g] 9. pron. tur BD, [g] maius sit, quam BK, erit idem BD, maius, quam FH.

SINT rursum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico basim BC, maiorem esse base FG. Nam si

foret

foret æqualis; [a] essent parallelogrãma æqualia, quod est absurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum FH, maius, quam BD, ut proximè ostendimus, quod multò magis est absurdum, cùm BD, maius ponatur, quam FH. Basis ergo BC, cum neq; æqualis sit ipsi FG, neque minor, erit maior, quàm FG, quod est propositum. [a] 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

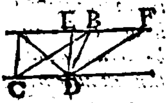
37.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, sint constituta duo triangula ACD, BCD. Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quãdo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [b] ducatur DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. [c] Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin CD, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula ACD, BCD; [d] quod AD, BD, diametri bifariam secent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, [e] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 31. primi.

[c] 35. primi.

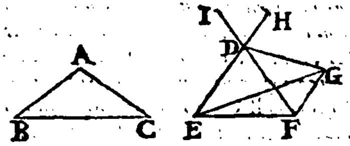


[d] 34. primi.

[e] 7. pron.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porrò ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula ABC,



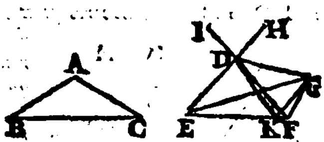
DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, sintq; primum hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; [a] fiatq; angulus EDG, æqualis angulo A, [b] & recta DG, rectæ DF, seu AC; ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam igitur duo anguli A, & EDF, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus EDG, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH, [c] duobus rectis æquales: Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, æquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG, [d] remanebit angulo EDF, æqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF, [e] æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, æquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt æqualia in triangulo DFG; [f] erunt anguli DFG, DGF, æquales; qui cum [g] æquales sint externo angulo GDI, erit vterlibet eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI. [h] Quare anguli GDH, DGF, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG, [i] erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem [k] triangula DEG, DEF, æqualia erunt, cũ habeant eandẽ basin DE, sintq; inter easdẽ parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG, [l] æquale est triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, æqualis angulus EDG; erit & triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod est propositum.

[a] 23. primi.
[b] 3. primi.
[c] 13. primi.
[d] 3. pron.
[e] 15. primi.
[f] 5. primi.
[g] 32. primi.
[h] 7. pron.
[i] 27. primi.
[k] 37. primi.
[l] 4. primi.

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulũ, minus esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; [m] fiatq; angulus EDG, æqualis angulo A, [n] & recta DG, rectæ DF, seu AC, æqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiore

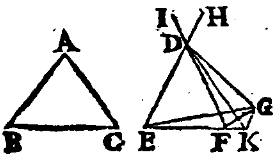
[m] 23. primi.
[n] 3. primi.

inores duobus rectis, erũt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sũt aũt anguli EDG, GDH, [a] æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero [b] angulus EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, maior quam GDH; atq; adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, æqualia sunt: [c] erunt anguli DFG, DGF, æquales: qui cum sint [d] æquales externo GDI, erit vterius eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, [e] æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK, [f] parallela ipsi DE, secabitq; GK, rectam EF. Ducatur ex D, ad K, vbi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, [g] æquale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, [h] æquale est triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, [i] minus sit triangulo DEF; erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est propositum.



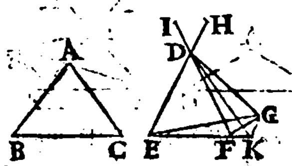
a 13. primi.
b 15. primi.
c 5. primi.
d 32. primi.
e 23. primi.
f 27. primi.
g 37. primi.
h 4. primi.
i 9. pron.

SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [k] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [l] & recta DG, rectæ DF, seu AC; ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores: Sunt [m] autem anguli EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igitur



k 23. primi.
l 3. primi.
m 13. primi.

tur EDG, EDF, *minores sunt, quàm* EDG, GDH; *demptoq́; communi* EDG, *remanebit* EDF, *minor, quã* GDH. *Est autẽ* EDF,



a 15. primi. [a] *æqualis ipsi* HDI. *Quare & HDI, minor erit, quàm GDH; atque adeo GDH, maior est dimidio anguli GDI. Quoniam autem* DGF, *dimidium est eiusdem anguli* GDI, *vt iam supra ostensum fuit; erit GDH, maior, quam DGF. Fiat igitur angulus DGK,* [b] *æqualis angulo GDH,*
b 23. primi.
ducta recta G K, *quæ secabit rectam E F, protractam in* K; *& ducatur recta* D K. *Erit ergo, vt prius,* G K, [c] *parallela*
c 27. primi.
d 37. primi. *ipsi* DE; [d] *triangulumq́;* DEG, *triangulo* DEK, *æquale: Est*
e 4. primi. *autem iterum* DEG, [e] *æquale ipsi* ABC. *Igitur &* ABC,
f 9. pron. *æquale est ipsi* DEK. *Quocirca cum* DEK, [f] *maius sit, quàm* DEF; *erit &* ABC, *maius, quàm* DEF. *Quod demonstrandum erat.*

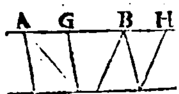
EX his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

38.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super æquales basos CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. [g] Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF:
g 31. primi.



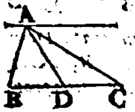
h 36. primi. Eruntq́; [h] parallelográma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum [i] dimidia sint triangula ACE,
i 34. primi.
k 7. pron. BFD; [k] erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostenditur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo A B C, ex angulo A, recta A D, diuidens bifariam latus B C, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi B C, erunt duo triangula ABD, A D C, inter easdem parallelas; & super aequales bases. a Quare aequalia erunt. a 38. primi.

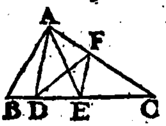


EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quae bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt est ostensum: Si vero D, non diuidit B C, bifariam, b secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta D A, & per E, c parallela E F, ipsi D A, secans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifariam à linea D F. Nam ducta recta E A, d erunt triangula E F A, E F D, aequalia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E, e erunt tota triangula A E C, C D F, aequalia: Est autem A E C, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.

b 10. primi. c 31. primi. d 38. primi. e 2. pron.

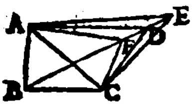


QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, *eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes* B, *trapezium vero ad partes* C, *vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in* C, *&* C, *in* B. *Hoc tamen problema multo nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.*

39. THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes.



Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primum supra, qualis est A E, coeatque cum B D, protracta in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoq; DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 31. primi.
[b] 37. primi.
[c] 1. pron.

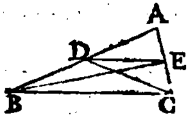
SCHO-

SCHOLIVM.

EX his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, *latera* A B, A C, *trianguli* A B C, *bifariam in* D, *&* E. *Dico* D E, *parallelam esse lateri* B C. *Cum enim triangula* A D E, B D E, *sint super aequales bases* A D, D B, *& inter easdem parallelas; (si per* E, *duceretur parallela ipsi* A B,) a *erit triangulum* B D E, *triangulo* A D E, *aequale: Eadem ratione erit triangulum* C E D, *eidem triangulo* A D E, *aequale. Quod etiam constat ex scholio praecedentis propos. Recta enim* E D, *secabit triangulum* A E B, *bifariam, & recta eadem* D E, *triangulum* A D C, *bifariam etiam, quòd bases* A B, A C, *sectae sint bifariam à recta* D E, *ex hypothesi. Igitur triangula* D B E, C E D, b *aequalia erunt: Habent autem eandem basin* D E, *& sunt ad easdem partes constituta. Quare* c *inter easdem erunt parallelas, & idcirco* D E, B C, *parallelae erunt. Quod est propositum.*



a 38. primi.

b 1. pron.

c 39. primi.

ID *autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.*

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum A B C D, *diuidatur bifariam ab vtraque diametro* A C, B D. *Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula* A D C, B D C, *dimidia sint eiusdem quadrilateri* A B C D, d *ipsa inter se aequalia erunt. Quare cum eandem habeant basin* D C, *ad easdemque partes sint,* e *ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco rectae* A B, D C,

d 7. pron.

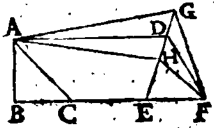
e 39. primi.

parallelae

parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. *Parallelogrammum igitur est* A B C D. *Quod est propositum.*

40. ## THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, super bases æquales B C, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primum supra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ sunt A G, B F, [a] erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale. Igitur [b] triangula DEF, GEF, æqualia erũt, pars & totũ. Quod est absurdũ. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triãgula HEF, DEF, æqualia, pars & totũ, quod est absurdum. Est igitur A D, parallela ipsi B F. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 38. primi.

b 1. pron.

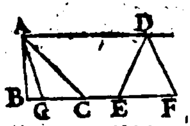
SCHOLIVM.

HÆC propositio conuertit vno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propos. 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter easdem paralle-

parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.

SINT triangula æqualia A B C, D E F, *inter parallelas* A D, B F, *&* *super bases* BC, EF, *quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit* B C, *maior.* a *Abscissa ergo recta* C G, *æqualis ipsi* E F, *&* *ducta recta* G A; b *erit triangulum* A G C, *triangulo* D E F, *æquale: Ponitur autem & triangulum* A B C, *eidem triangulo* D E F, *æquale. Igitur triangula* A G C, A B C, c *æqualia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases* B C, E F, *sed æquales. Quod est propositum.*



a 3. primi.
b 38. primi.
c 1. pron.

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

SI duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, *triangula* A B C, D E F, *sitque basis* B C, *base* E F, *maior. Dico triangulum* ABC, *maius esse triangulo* DEF. *Ablata enim recta* CG, d *æquali ipsi* EF, *ductaque recta* AG; e *erunt triangula* A G C, D E F, *supra æquales bases* G C, E F, *æqualia. Cum ergo* f *triangulum* A B C, *triangulo* A G C, *maius sit; erit idem triangulum* A B C, *maius, quam* DEF.

d 3. primi.
e 38. primi.
f 9. pron.

SINT rursus triangula A B C, D E F, *inæqualia, &* A B C, *maius. Dico basin* B C. *base* E F, *maiorem esse. Si enim dicatur æqualis,* g *erit triangulum* A B C, *triangulo* D E F, *æquale. quod est absurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur esse minor, erit triangulum* DEF, *maius triangulo* A B C, *vt proximè ostendimus, quòd multò magis est absurdum, cum* A B C, *ponatur maius, quam* D E F. *Recta igitur* B C, *maior erit, quam* E F, *cum neque æqualis sit ostensa, neque*

g 38. primi.

ſa, neque minor. Quod eſt propoſitum.

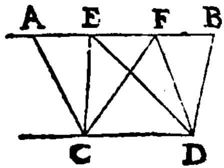
QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq́; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoque demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, parteſq́; ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur A B, C D, *ſuper eadem baſi* C D, *conſtituta ſint duo trapezia* A C D E, F C D B, *quorum baſes oppoſitæ* A E, F B, *æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis* E C, F D, [a] *erunt tã triangula* E C D, F C D, *ſuper eadem baſi* C D, *& in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia,* [b] *quam triangula* A C E, F D B, *ſuper æqualibus baſibus* A E, F B, *& in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus* E C D, F C D, *addantur æqualia* A C E, F D B, [c] *erunt tota trapezia* A C D E, F C D B, *inter ſe æqualia.*



[a] 37. primi.
[b] 38. primi.
[c] 2. pron.

SINT iam trapezia A C D E, F C D B, *æqualia. Dico baſes oppoſitas* A E, F B, *æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus* [d] *triangula* E C D, F C D, *æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [e] *æqualia erunt reliqua triangula* A C E, F D B. *Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* A E, F B, *æquales erunt.*

[d] 37. primi.
[e] 3. pron.

TRA-

II.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq; est illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

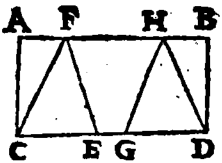
VT in eadem figura, si basis A E, *dicatur esse maior base F B;* Dico *trapezium* A C D E, *maius esse trapezio* FCDB. [a] *Erunt enim rursus triangula* E C D, F C D, *æqualia: At triangulum* A C E, *triangulo* F *D* B, *maius, vt in hoc scholio demonstrauimus.* [b] *Totum ergo trapezium* A C D E, *toto trapezio F C D B, maius erit.* [a] 37. primi. [b] 4. pron.

RVRSVS si trapezium A C D E, *dicatur esse maius trapezio F C D B;* Dico *basin* A E, *base* F B, *maiorem esse.* [c] *Erũt.n.rursus triãgula* E C D, F C D, *æqualia. Quare reliquum triangulum* A C E, *reliquo triangulo* F D B, [d] *maius erit: ac proinde, vt in hoc scholio ostensum est, basis* A E, *maior erit base* F B. *Quod ostendendum erat.* [c] 37. primi. [d] 5. pron.

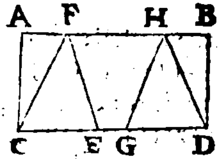
III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.

INTER parallelas A B, C D, *super æquales bases* C E, G D, *constituta sint duo trapezia* A C E F, H G D B, *quorum bases opposita* A F, H B, *æquales quoque sint.* Dico *ipsa trapezia æqualia esse. Ductis enim rectis* F C,



HD,



[a] 38. primi.
[b] 2. pron.

HD, [a] erunt tam triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, quam ACF, BDH, super bases æquales AF, BH, inter se æqualia: [b] Tota ergo trapezia æqualia erunt.

[c] 38. primi.
[d] 3. pron.

SINT iam trapezia ACEF, HGDB, *æqualia super bases æquales* CE, GD. *Dico bases oppositas* AF, BH, *æquales quoque esse.* [c] *Erunt namque rursus triangula* FCE, HGD, *super æquales bases* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula* ACF, BDH, [d] *æqualia erunt; ac proinde, ut paulo antè in hoc scholio ostendimus, bases* AF, BH, *æquales erunt.*

IIII.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum opposite bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq; est illud, cuius basis maior est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorq; est illa, cuius trapezium maius est.

[e] 38. primi.
[f] 4. pron.

VT in eadem figura, si basis AF, *dicatur esse maior base* HB, *erit trapezium* ACEF, *trapezio* HGDB, *maius:* [e] *Erunt enim rursum triangula* FCE, HGD, *super æquales bases* CE, GD, *æqualia:* At *triangulum* ACF, *maius triangulo* BDH, *ut supra ostensum est, quod basis* AF, *maior ponatur base* BH. [f] *Totum ergo trapezium* ACEF, *toto trapezio* HGDB, *maius erit.*

[g] 38. primi.
[h] 5. pron.

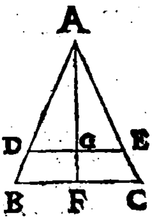
RVRSVS si trapezium ACEF, *maius ponatur trapezio* HGDB, *erit basis* AF, *base* BH, *maior.* [g] *Erunt enim rursus triangula* FCE, HGD, *super æquales bases* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum* ACF, *reliquo triangulo* BDH, [h] *maius erit;*

erit; ac proinde, ut in hoc scholio ostensum fuit, basis A F, base B H, maior erit. Quod erat ostendendum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes aequales diuidemus: quod nos in scholio propos. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem confici possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, ut lib. 6. ostendemus, iucundum tamen est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam.

IN triangulo A B C, aequidistet D E, ipsi B C, & recta A F, secet alterutram B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo posito,[a] *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur* [a] 29. primi.



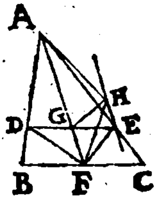
B C, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quae in scholio propos. 26. huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta A G, ad basim D E, trianguli A D E, perpendicularis, diuidensq; angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque basim D E, ut ibidem ostendimus, quod est propositum.

SI vero D E, ponatur diuidi bifariã, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariam; ac proinde recta A F, ad basim B C, perpendicularis; diuidensq; angulum A, bifariam, basim quoque B C, bifariam secabit, quod est propositum.

SINT deinde anguli ad F, non recti; sed A F C, obtusus, & A F B, acutus. Quo posito, erit & A G E, obtusus, & A G D, acutus,[b] *cum his illi sint aequales, externi internis.* [b] 29. primi.

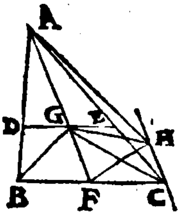
Si

a 23. primi. *Si igitur* B C, *diuiditur bifariam,* [a] *constituatur acuto angu-*
b 3. primi. *lo* A G D, *æqualis angulus A G H;* [b] *&*



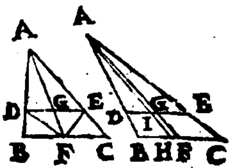
recta G H, *rectæ* G D, *æqualis, ducan-*
turque rectæ A H, H F, F D, F E. *Quia*
igitur tam triangula tota A B F, A C F,
ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia
c 38. primi. *sunt,* [c] *quam triangula ablata* D B F,
d 3. pron. E C F, *ob æquales bases* B F, C F: [d] *erunt*
quoque reliqua triangula A D F, *A E F,*
æqualia. Rursus quoniam duo latera A G,
G D, *trianguli* A G D, *duobus lateribus*
A G, G H, *æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales*
e 4. primi. *A G D, A G H, ex constructione,* [e] *erunt quoque triangula*
A G D, *A G H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera* D G,
G F, *duobus lateribus H G, G F, æqualia sunt; ex constru-*
ctione, angulosq; continent æquales D G F, H G F, (cum
enim per constructionem anguli A G D, A G H, æquales sint,
erunt quoque reliqui duorum rectorum D G F, H G F, æqua-
f 13. primi. *les.* [f] *sunt enim tam* A G D, *D G F, quam A G H, H G F,*
g 4. primi. *duobus rectis æquales.)* [g] *erunt quoque triangula D G F,*
h 2. pron. *H G F, æqualia:* [h] *ac proinde & tota triangula A D F,*
A H F, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo A D F,
i 1. pron. *æquale ostensum triangulum* A E F. *Igitur & inter se* [i] *æqua-*
k 39. primi. *lia erunt triangula A H F,* A E F: [k] *ac propterea inter duas*
easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta E H, *erit basi*
l 37. primi. *A F, communi parallela. Igitur* [l] *& triangula H G F, E G F,*
inter easdem parallelas, & super eadem basi F G, æqualia
inter se erunt. Est autem triangulum H G F, *triangulo* D G F,
ostensum æquale. Igitur triangula quoque D G F, *E G F,*
æqualia inter se erunt; proptereaq; basis quoque D G, *basi*
G E, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod
est propositum.

m 23. primi. *SI vero D E, ponatur bifariam diuidi,* [m] *constituatur an-*
n 3. primi. *gulo acuto* A F B, *æqualis angulus A F H,* [n] *& recta* F H, *re-*
ctæ F B, ducanturq; rectæ A H, *H G, G B, G C. Quo-*
niam igitur tam triangula A G D, *A G E, ex scholio propos.*
o 34. primi. *38. huius lib. æqualia sunt,* [o] *quam triangula* D G B, *E G C,*
p 2. pron. *ob æquales bases* D G, *E G;* [p] *erũt tota etiam triangula* A G B,
A G C, *æqualia. Rursus quia duo latera* A F, *F B, duobus*
lateribus



lateribus AF, FH, *aqualia sunt, continentq́ angulos aquales* AFB, AFH, *ex constructione;* [a] *erunt triangula quoque* AFB, AFH, *aqualia. Pari ratione, quia duo latera* GF, FB, *duobus lateribus* GF, FH, *aqualia sunt, aqualesq́ continent angulos* GFB, GFH, *ex constructione;* [b] *erunt quoq; aqualia triangula GFB, GFH: quibus demptis ex aqualibus AFB, AFH,* [c] *aqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est autem eidem triangulo AGB, ostensum aquale triangulum AGC.* [d] *Igitur & triangula AGC,* AGH, *inter se erunt aqualia.* [e] *Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est, ducta recta* CH, *ipsi AF, parallela erit; ac proinde* [f] *aqualia inter se erunt triangula* GHF, GFC. *Fuit autem ostensum triangulum* GHF, *triangulo* GBF, *aquale.* [g] *Igitur & aqualia inter se erunt triangula* GFC, GFB; *ideoq́, ut in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB, aquales erunt. Quod est propositum.*

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 3. pron.
[d] 1. pron.
[e] 39. primi.
[f] 37. primi.
[g] 1. pron.



ALITER. Diuisa sit primum B C, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse diuisam in G. Si enim D G, G E, non sunt aquales, sit maior D G, ducanturq́ recta F D, F E. Erit igitur per ea, qua in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quàm triangulum F D G, triangulo F E G, maius. [h] *Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF,* [i] *qua propter bases aquales* BF, *CF, aqualia sunt,* [k] *fiet totum triangulum A B F, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, ut in hoc scholio monstrauimus, basis B F, base F C, maior erit: Sed & aqualis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est D E, in G. Quod est propositum.*

[h] 4. pron.
[i] 38. primi.
[k] 4. pron.

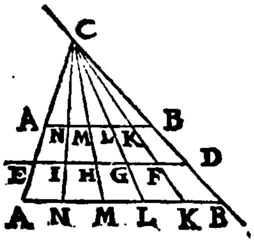
SIT iam D E, secta bifariam in G. *Dico & B C, diuidi bifariam in* F. *Sin minus,* [l] *diuidatur B C, in H, bifariam, ducaturque recta A H, secans D E, in I. Quoniam igitur A H, secat B C, bifariam in H, secabit eadem ipsam D E,*

[l] 10. primi.

quoque bifariam in I, vt proximè oſtendimus. Quod eſt abſurdum, cum bifariam ſecta eſſe ponatur in G. *Sequeretur enim partem toto eſſe maiorem.* N*am ſi D I, æqualis eſt ipſi I E, cum I E, maior ſit, quàm* G E, *erit quoque D I, maior, quam* G E, *hoc eſt, quàm D G, quæ ipſi* G E, *æqualis ponitur. Diuiditur ergo B C, bifariam* F. *Quod erat demonſtrandum.*

H O C *oſtenſo theoremate, ad diuiſionem lineæ rectæ in quotuis æquales partes iam veniamus.*

D A T A M rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales ſecare.



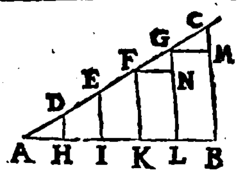
S I T data recta A B, ſecanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, *ducta recta* B C, *vtcunq; & aſſumpto in BC, puncto quocunq;* D, *ſiue infra* B, *ſiue ſupra,* [a] *ducatur per* D, *ipſi A B, parallela* D E, *in qua* [b] *abſcindantur quinque partes inter ſe æquales* D F, F G, G H, H I, I E, *hac tamen lege, vt exiſtente puncto* D, *infra* B, *recta* DE, *ex quinque partibus æqualibus compoſita maior ſit, quàm data A B, minor vero, exiſtente puncto* D, *ſupra* B, *vt nimirum recta A C, per alterum extremum A, & per* E, *ducta cum* B D, *concurrere poſſit in pũcto aliquo, vt in C: A quo ſi per pũcta F, G, H,* I, *rectæ ducantur, ſecta erit data recta A* B, *in quinque partes æquales* B K, K L, L M, *M N*, N *A. Quoniam enim in triangulo* C B L, *recta* D G, *ipſi B L, eſt parallela, vel in triangulo* C D G, *recta B L, ipſi* D G; *ſectaque eſt* D G, *biſariam in* F, *ſecta quoque erit bifariam B L, in* K, *vt in proximo theoremate demonſtrauimus. Eademque ratione recta* K *M, in L, ſecta erit biſariam, quemadmodum &* F H, *in* G, *bifariam ſecta eſt. Sunt ergo tres partes* B K, *K L, L M, inter ſe æquales, ſicuti tres* D F, F G, G H, *atque ita de cæteris.*

[a] 31. primi.

[b] 3. primi.

A L I T E R. Ad extremum A, lineæ A B, ſecandæ in

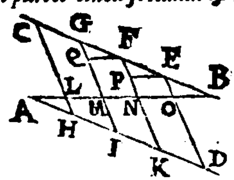
quinque



quinque partes æquales, cõstituatur angulus rectilineus quicunq; A, & in recta A C, [a] *abscindantur quinque partes quantacunq; inter se æquales A D*, D E, E F, F G, G C: *ductaq; recta* C B, [b] *agantur ei parallelæ G L*, F K, E I, D H. Dico *rectam A B, sectam esse in quinque partes æquales.* [c] Ductis *enim per* G, F, *ipsi A B, parallelis* G *M*, F *N*; [d] *quæ inter se etiam parallelæ erunt,* [e] *& ipsis B L, L* K, *æquales in parallelogrammis* G *B*, *F L*; [f] *erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis G L, C B, quàm anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli* C, G, *trianguli CGM, duobus angulis* G, F, *trianguli GFN, æquales sunt, vterq; vtrique, lateraque illis adiacentia CG*, G F, *æqualia per constructionẽ;* [g] *erunt quoque latera G M, F N, æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis BL, LK, erunt quoque B L, L* K, *inter se æquales. Eademque ratione ostendemus K L, K I, æquales esse, necnon IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta A B, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.*

a 3. primi.
b 31. primi.
c 31. primi.
d 30. primi.
e 34. primi.
f 29. primi.
g 26. primi.

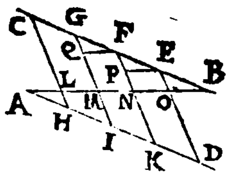
A L I T E R. Ad extrema puncta A, B, lineæ A B, in quinque partes æquales diuidendæ constituantur duo æquales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in vtraque linea BC, *AD*, [h] *quæ ob alternos angulos æquales* A, B, *parallelæ inter se sunt,* [i] *sumantur quatuor partes inter se omnino æquales, tot nimirũ, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt B E, E F*, F G, G C, A H, H I, I K, K D, *junganturque rectæ* CH, G I, FK, E D, [k] *quæ inter se erunt parallelæ, cum coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam* A B, *in quinque partes*



æquales sectam esse. [l] Ductis *enim per* E, F, *ipsi* AB, *parallelis E P, F Q*, [m] *quæ inter se quoque parallelæ erunt,* [n] *& ipsis NO, MN, æquales in parallelogrammis EN, FM: (Sũt enim & G I, F K, inter se parallelæ, cum coniungant extrema*

h 27. primi.
i 3. primi.
k 33. primi.
l 31. primi.
m 30. primi.
n 34. primi.

[a] 29. primi.



æqualium FG, *KI*,)[a] *erunt tam anguli* EFP, FGQ, *externus, & internus in parallelis* FK, GI, *quàm anguli* GFQ, FEP, *externus, & internus in parallelis* QF, *PE, inter se æquales. Itaque quoniam duo anguli* G, F, *trianguli* FGQ, *duobus angulis* F, E, *trianguli* EFP, *æquales sunt, vterque vtrique, lateraq; illis adiacentia* FG, EF, *æqualia, per constructionem*, [b] *erunt quoque latera* FQ, *EP, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eademq; ratione æquales inter se erunt* OB, *NO, MN, LM, AL, proptereaq; recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.*

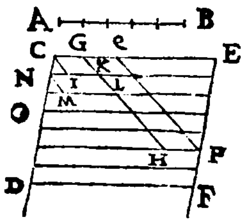
[b] 26. primi.

[c] 33. primi.

PRAXIS hæc breuius ita demonstrabitur. [c] *Quoniam rectæ* ED, FK, GI, CH, *parallelæ sunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt.*

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, [d] *sumantur in vtraq; partes omnino inter se æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctaq; respondentia lineis rectis iungantur,* [e] *quæ parallelæ inter se erũt, cum coniungant extrema parallelarũ æqualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque diuidenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G, vsq; ad punctum H, ita vt quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta GH, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus si in data AB,* [f] *sumantur partes æquales, diuisa quoque erit AB, in quinq; æquales*

[d] 3. primi.



[e] 33. primi.

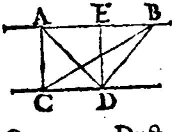
[f] 3. primi.

æquales partes. Sectam autem esse GH, *in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex* C, N, *ipsi* GH, *parallelis* C I, N M, [a] *quæ inter se quoque parallelæ erunt;* [b] *& ipsis* G K, K L, *æquales in parallelogrammis* G I, K M; [c] *erunt tam anguli* C N I, N O M, *externus & internus in parallelis* N K, O L, *quàm anguli* O N M, N C I, *externus & internus in parallelis* N M, C I, *æquales inter se. Igitur cũ duo anguli* N, C, *trianguli* C N I, *duobus angulis* O, N, *trianguli* N O M, *æquales sint, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia* C N, N O, *æqualia, ex constructione,* [d] *erunt quoque latera* C I, N M, *inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis* G K, K L, *erunt quoque* G K, K L, *inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ* G H, *ostendentur æquales; ac proinde recta* G H, *in quinque partes æquales erit diuisa.* [a] 30. primi. [b] 34. primi. [c] 29. primi. [d] 26. primi.

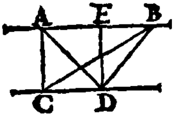
PRAXIS etiam hæc breuius demonstrabitur hoc modo. Sumptis quinque interuallis rectæ E F, *ab* E, *vsque ad* P, *transferatur recta* A B, *beneficio circini ex* P, *ad aliquod punctum rectæ* C E, *vt ad* Q. *Erit enim hac ratione ducta recta* P Q, *diuisa à parallelis in quinque partes æquales, vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ* P Q, *quæ datæ rectæ* A B, *æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam* A B, *diuisa quoque erit* A B, *in quinque partes æquales. Quod est propositum.*

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.



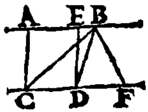
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum A C D E, & triangulum B C D. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli B C D.



[a] 37. primi. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo,[a] erũt triangula ACD, B C D, æqualia; At parallelogrammum A C D E, duplum est trianguli A C D; [b] quòd triangula A C D, A D E, æqualia quoque inter se sint.
[b] 34. primi.
[c] 6. pron. Igitur & trianguli B C D, [c] duplum erit idem parallelogrammum A C D E. Quamobrem, si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

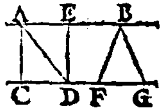
SCHOLIVM.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis C D, *producatur ad* F, *ut sit* D F, *æqualis ipsi* C D, *ducaturque recta* F B, *erit triangulum* B C F, *duplum trianguli* B C D, [d] *quòd triangula* BCD, B D F, *æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE,* [e] *duplum eiusdem trianguli BCD.* [f] *Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum* A C D E.



[d] 38. primi.
[e] 41. primi.
[f] 6. pron.

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo A C D E, *& triangulo* B F G, *quorum bases* C D, F G, *æquales sunt. Ducta enim diametro* AD, *in parallelogrammo,* [g] *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD;* [h] *quòd diameter* A D, *secet parallelogrammum* A C D E, *bifariam;* [i] *erit quoque idem trianguli* B F G, *duplum. Eadem ratione si basis* F G, *duplicaretur, & recta ad* B, *duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc* [k] *esset duplum etiam trianguli* B F G, *&c.*

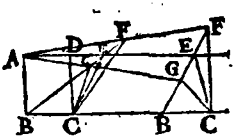


[g] 38. primi.
[h] 34. primi.
[i] 6. pron.
[k] 38. primi.

CON-

CONVERSUM huius theorematis duplex est, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.



SIT parallelogrammum ABCD, *duplum triãguli* EBC, *siue eandem habeant basin, siue æquales. Dico rectam ductam* A E, *parallelam esse rectæ* B C. *Nam alias ducta parallela ex* A, *cadet aut supra* AE, *aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat.* [a] *Nam erit quoque parallelogrammum* A B C D, *trianguli* B F C, *vel* B G C, *duplum.* [b] *Quare triangula* E B C, F B C, *vel triangula* E B C, G B C, *æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum.* [a] 41. primi. [b] 6. pron.

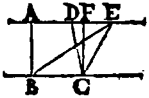
SIT deinde parallelogrammum A B C D, *duplum trianguli* E F G, *in eisdemque parallelis. Dico bases* B C, F G, *esse æquales. Nam si altera, nempe* BC, *sit maior, abscissa æquali* C H, *&* [c] *ducta* H I, *parallela ipsi* A B, *demonstrabimus parallelogramma* A B C D, I H C D, *esse æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli* E F G; *illud quidem per hypothesin, hoc vero per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis* F G, *maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi* B C, *æqualis* F H, *ducaturque recta* H E, *erunt triangula* E F H, E F G, *æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimi-* [c] 31. primi.

 dium

dium est parallelogrammi A B C D; Illud quidem per propos. 41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.

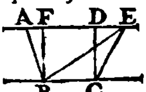
EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas A E, B C, sint constituta trapezium A B C D, & triangulum E B C, super basim B C, eandem, quæ sit tamen maior, quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam BC, sumatur A F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta C F, [a] *quæ erit parallela ipsi A B; atque adeo parallelogrammum erit* A B C F, [b] *quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium* A B C D, *cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*

[a] 33. primi.
[b] 41. primi.



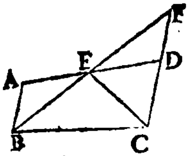
SINT rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis B C, *sit minor, quam reliqua linea parallela* A D, *in trapezio dato. Dico trapezium* A B C D, *maius esse duplo trianguli* E B C. *Cum enim A D, maior sit, quam* B C, *abscindatur* D F, *æqualis ipsi* B C, *& ducatur recta* B F, [c] *quæ erit parallela ipsi* C D; *atque adeo parallelogrammum erit* B C D F: [d] *quod duplum est trianguli* EBC. *Quare totum trapezium* ABCD, *quod superat parallelogrammum* B C D F, *maius erit duplo eiusdem trianguli* E B C. *quod est propositum.*

[c] 33. primi.
[d] 41. primi.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamẽ vt nũc quidẽ basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRA-

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



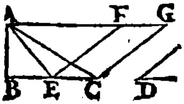
SIT trapezium ABCD, *cuius duo latera opposita* AB, *DC, sint parallela, & super basin* BC, *constituatur triangulum* EBC, *verticem* E, *habẽs in medio puncto* E, *lateris* AD. *Dico trapezium* ABCD, *duplum esse trianguli* EBC. *Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe* BE, *donec coeat cum* CD, *protracto in* F. *Et quia parallela sunt* AB, CF, [a] *erunt anguli alterni,* BAE, FDE, *aequales:* [b] *Sunt autem & anguli* AEB, DEF, *aequales, quippe qui ad verticem* E; *& latus* AE, *trianguli* ABE, *lateri* DE, *trianguli* DEF, *aequale, per hypotesin.* [c] *Igitur & reliqua latera* AB, BE, *reliquis lateribus,* DF, FE, *aequalia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli* ABE, DFE, *aequales: atque idcirco triangula* ABE, DFE, *ex coroll. propos. 26. huius lib. aequalia erũt. Quare addito communi triangulo* CDE, [d] *erunt triangulo* CEF, *aequalia triangula simul* ABE, CDE. [e] *Est autem & triangulum* BCE, *eidem triangulo* CEF, *aequale, quòd bases* BE, EF, *ostensa sint aequales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per* C, *duceretur parallela ipsi* BF. [f] *Igitur triangulum* CBE, *aequale erit triangulis* ABE; CDE; *& propterea* CBE, *triangulum dimidium erit trapezij* ABCD, *quod est propositum.*

[a] 29. primi.
[b] 15. primi.
[c] 26. primi.
[d] 2. pron.
[e] 38. primi.
[f] 1. pron.

PROBL. 11. PROPOS. 42. 42.

DATO triangulo aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DATVM



DATVM triangulum ſit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur cõſtruere parallelogrammũ æquale triãgulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc eſt, ſiue angulus C E F, vergat ad partes C, ſiue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta A F, parallela ipſi B C, quæ ſecet E F, in F. Rurſus per C, vel B, ducatur ipſi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum C E F G, quod dico eſſe æquale triangulo A B C. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, [d] duplũ eſt trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiuſdem trianguli A E C, [e] quod triangula A E C, A B E, ſuper æquales baſes E C, B E, & in eiſdem parallelis, ſint æqualia: Erunt parallelogrammum C E F G, & triangulum A B C, [f] æqualia inter ſe. Cum igitur angulus C E F, factus ſit æqualis angulo D, conſtat propoſitum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.
[b] 23 primi.
[c] 31. primi.
[d] 41. primi.
[e] 38. primi.
[f] 6. pron.

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis facillima eſt ex ipſa conſtructione.

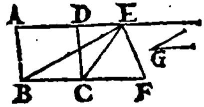
SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius ſubſequens problema, quod huius propoſ. conuerſum eſt.

DATO parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datũ parallelogrãmum ABCD, *& datus angulus* G. *Fiat angulus* CBE, *angulo* G, *æqualis, ſecetq́ue recta* BE, *rectã* AD, *productã in* E: *Extendatur quoq́ue* BC, *ad* F, *ſitq́ue* CF, *æqualis rectæ* BC, *& iũgatur* EF. *Dico triangulum* BEF,

habens

habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, [a] *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E: Item triangulũ B E F, eiusdem trianguli B C E, duplum;* [b] *quòd æqualia sint triangula E B C, E C F. Quare* [c] *æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod est propositum.* [a] 41. primi. [b] 38. primi. [c] 6. pron.



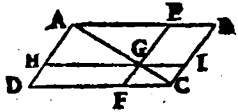
PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

43.

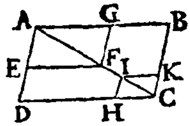
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

IN parallelogrãmo AB-CD, sint circa diametrum A C, parallelogramma AE-GH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum enim [d] triangula A B C, C D A, æqualia sint; Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, [e] remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [f] Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, [g] remanebunt æqualia complementa D F-G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat. [d] 34. primi [e] 3. pron. [f] 34. primi. [g] 3. pron.

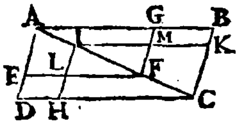


SCHOLIVM.

EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo, etiam



etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non coniungantur in puncto G, *sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distãs, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo* A B C D, *circa diametrum* A C, *consistant parallelogramma A E F G*, C H I K. *Dico complementa* D E F I H, *B K I F G, esse æqualia.*
a 34. primi. *Cum enim* [a] *triangula* A B C, *C D A, æqualia inter se sint;*
Item triangula A E F, C H I, *æqualia triangulis* A G F,
b 3. pron. C *K I*; [b] *erunt reliqua complementa* D E F I H, B K I F G, *æqualia. Quod est propositum.*

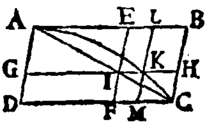


SECENT se iam mutuo parallelogramma A E F G, C H I K, *circa diametrum consistentia, ita vt communem partem habeant I L F M. Dico adhuc complementa* D E L H, *BGMK,*
c 32. primi. *esse æqualia. Cum enim* [c] *æqualia sint triangula* A B C,
d 3. pron. C D A; *Item triangula* A F G, *A F E*; [d] *erunt reliqua qua-*
e 34. primi. *drilatera B C F G*, D C F E, *æqualia: Sunt* [e] *autem rursus æqualia triangula I F M, I F L. Igitur si hæc addantur di-*
f 2. pron. *ctis quadrilateris*, [f] *erunt figuræ B C I M G*, D C I L E,
g 34. primi. *æquales. Cum igitur &* [g] *æqualia sint triangula* C I K,
h 3. pron. *C I H*; [h] *erunt reliqua complementa B G M K*, D E L H, *etiam æqualia. Quod est propositum.*

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis E F, G H, *quæ sint parallelæ rectis B C*, C D, *seq; secent in I, diuisum sit parallelogrammum* A B C D, *in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo* *sa duo B E I H, D F I G, sint æqualia. Dico reliqua duo A E I G, C F I H, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim nõ transit, secet diameter C K A, rectam G H, in K, si fieri potest, & per K,*[a] *ducatur L M, parallela ipsi B C.*[b] *Erunt igitur complementa B H K L, D G K M, æqualia: Est*[c] *autem D G K M, maius quam D G I F. Quare & maius erit B H K L, quam D G I F. Cum ergo D G I F, æquale ponatur ipsi B E I H;*[d] *erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter A C, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.*



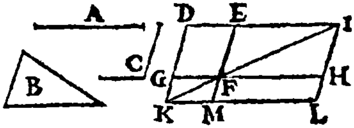
[a] 31. primi.
[b] 43. primi.
[c] 9. pron.
[d] 1. pron.

THEOR. 12. PROPOS. 44.

44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habẽs æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B,[e] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque G F ad H, vt F H, sit æqualis rectæ A, & per H,[f] ducatur H I, parallela ipsi F E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; &[g] per K, ducatur K L, parallela ipsi G H, secans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum L M-



[e] 42. primi.
[f] 31. primi.
[g] 31. primi.

L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqualem, [a] cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, [b] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo *B*. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

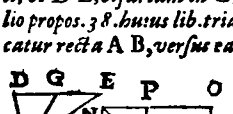
[a] 15. primi.

[b] 43. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, *datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum* F M L H, *ad rectam* A, *ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M* F H, *& sumatur recta* N O, *æqualis rectæ* F M, *compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.*

SED fortassis magis ex sententia Euclidis *problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta* F H, *&c. Sit ergo rursus data recta* A B, *datum triangulum* C D *E, & datus angulus F, oporteatq; super rectam* A *B, constituere parallelogrammum æquale triangulo* C D E, *in dato angulo F; quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt* D E, *bifariam in* G, *ductaq; recta* C G, *secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum* C D E, *bifariam, producatur recta* A B, *versus eam partem, vbi parallelogrammum construendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatq;* A H, *æqualis ipsi* E G, *dimidio lateris* D E. Deinde in A, [c] *constituatur angulus* H *A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, seorsum verò, si versus inferiorem. Posita autem recta* A *I, æquali ipsi*



[c] 23. primi.

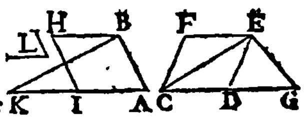
li ipsi E C, *iungatur recta* H I. *Et quia duo latera* H A, A I, *duobus lateribus* G E, E C, *aequalia sunt, vtrumque vtrique, angulosq́ continent aequales;* [a] *erunt triangula* A H I, E G C, *aequalia, Post haec,* [b] *ducta per* I, *ipsi* H B, *parallela* I K, [c] *constituatur in* A, *versus hanc parallelam angulus* H A L, *angulo dato* F, *aequalis, seceťq́* A L, *rectam* I K, *in* L. [d] *Ducta quoque per* H, *ipsi* A L, *parallela* H M, *secante* I K, *in* M; [e] *erit parallelogrammum* A H M L, *trianguli* A H I, *duplum: Est autem & triangulum* C D E, *trianguli* E G C, *duplum, quod aequalia ostensa sint triangula* E G C, D G C. *Igitur cum aequalia sint demonstrata triangula* A H I, E G C, [f] *erũt aequalia parallelogrammum* A H M L, *& triangulum* C D E. *Iam vero, sumpta recta* L K, *datae rectae* A B, *aequali, ducatur recta* K A, *producaturq́, donec cum* M H, *producta coeat in* N, *& per* N, *agatur ipsi* H B, *parallela* N O, *donec in* O, *coeat cum* K B, *protracta, ac tandem* L A, *producatur vsque ad* P, *in recta* N O. *Dico parallelogrammum* A B O P, *esse id, quod quaeritur. Est enim constitutum super datam rectam* A B, *habetq́ angulum* B A P, *dato angulo* F, *aequalem,* [g] *cum aequalis sit angulo* H A L, *qui angulo* F, *factus est aequalis. Denique aequale est dato triangulo* C D E, [h] *cum aequale sit parallelogrammo* A H M L, *quod triangulo* C D E, *ostensum fuit aequale.*

[a] 4. primi.
[b] 31. primi.
[c] 23. primi.
[d] 31. primi.
[e] 41. primi.
[f] 7. pron.
[g] 15. primi.
[h] 43. primi.

PRAXIS vero huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quod recta H I, *duci non debet, neque recta* C G. *Hae enim propter demonstrationem tantum ducta sunt.*

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere aequale triangulum, in dato angulo rectilineo.



SIT data recta A B; *datum parallelogrãmum* C D E F, *& datus angulus* L. *Producatur* C D, *ad* G, *vt* D G, *aequalis sit ipsi* C D, *& iungatur* G E, *recta: Eritq́ triangulum* C E G, *parallelo-*

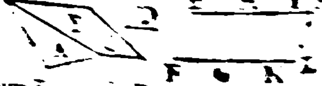
[illegible] CDEF [illegible] AB, parallelogrammum ABGL [illegible] CDEF [illegible] parallelogrammum CDEF [illegible] AB [illegible] parallelogrammo CDEF [illegible]

[illegible] ABHL [illegible] AB [illegible]

THEOR. 13. PROPOS. 45.

AD [illegible] rectilineo [illegible] parallelogrammum consti[illegible] [illegible] in dato angulo rectilineo.

QVANVIS Euclides [illegible] hoc problema [illegible] [illegible] ABCD [illegible] D [illegible] ABC [illegible] angulum [illegible] angulo D [illegible] A [illegible]



[illegible] E [illegible] GH [illegible] EF [illegible] D [illegible] G [illegible] rallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, [a] inter se sunt æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, [b] qui duobus rectis æquiualent, [c] æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duo duobus etiam rectis æquales erunt. [d] Quare F G, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sunt, ([e] cum sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) & duo anguli H I K, I H G, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint parallelæ; [g] Itemque E F, I K, quod vtraque parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

[a] 1. pron.
[b] 29. primi.
[c] 2. pron.
[d] 14. primi.
[e] 34. primi.
[f] 29. primi.
[g] 30. primi.

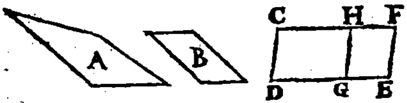
SCHOLIVM.

PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atque A B, *resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma* EG, GI, *IL, super rectas* EF, HG, *I K, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum* E F L M, *æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.*

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus, in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. a *Fiat parallelogrammum* C D E F, *in quocunq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam* C D, *parallelogrammum* C D G H, *in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum* C D E F, *superat parallelogrammum* CDGH, *parallelogrammo* E F H G; *superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo* EFHG. *Quod est propositum.*

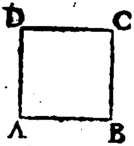
a 45. primi.

45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta A B, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, b educantur A D, B C, perpendiculares ad A B, sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim

b 11. primi.



enim anguli A,& B,sint recti, [a] erũt A D, B C, patallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur [b] & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [c] æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratũ igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

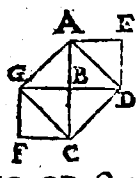
[a] 28. primi.
[b] 33. primi.
[c] 34. primi.

EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

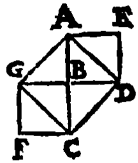
SINT primum rectæ A B, CD, æquales. Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, *æqualia quoque esse. Ductis enim diametris* B F, D H, *erunt duo latera BA, AF, trianguli* B A F, *duobus lateribus D C, C H, trianguli* D C H, *æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ* A F, C H, *æquales sint rectis* A B, C D: *Sunt autem, & anguli* A, *&* C, *æquales, nempe recti.* [d] *Igitur triangula* BAF, D C H, *æqualia erunt. Quæ* [e] *cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.*

[d] 4. primi.
[e] 34. primi.



SINT deinde quadrata AB DE, BCFG, *æqualia. Dico lineas quoque ipsorum A B, B C, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt recta A B, BC, in directum constituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti,* [f] *erunt & rectæ G B, B D, in directum constituta. Ducantur diametri AD, CG, iunganturque rectæ AG, CD. Quoniam*

[f] 14. primi.



niam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo BCD, fiet totũ triangulum ACD, toti triangulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandẽ habeant basin CD, ad easdemq; sint

[a] 39. primi. partes, [a] in eisdẽ sunt parallelis: ideoque parallelæ sunt AG, CD. Et quoniã, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoque æquales. Quamob-

[b] 27. primi. rem, [b] & parallelæ sunt AD, CG. Igitur parallelogrammũ

[c] 34. primi. est ADCG; ac propterea [c] rectæ AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, vt in scholio propos. 34.

[d] 26. primi. ostensum fuit; [d] erunt reliqua latera æqualia, nempe AB, ipsi BC, &c. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur; congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius esset.

PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem AB, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iunganturque rectæ BC, DC, constructũ erit quadratũ. Nã ABCD, cũ ex cõstructione sit figura æqualia laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initiũ scho-

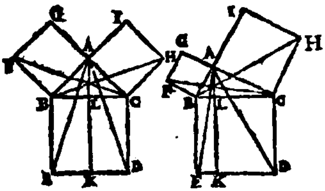
[e] 29. primi. lij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, re-

[f] 34. primi. cto, [e] erunt & B, D, recti, necnon [f] & oppositus angulus C, &c.

THEOR.

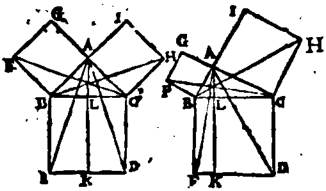
THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectangulis triangulis, quadratũ, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



IN triãgulo ABC, angulus B A C, sit rectus, [a] describanturque super A B, A C, B C, quadrata A B F G, ACHI, BCDE. Dico quadratum B C D E, descriptum super latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta A K, [b] parallela ipsi B E, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, [c] erũt rectæ G A, A C, vna linea recta; eodemque modo I A, A B, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli A B F, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus A B C, [d] fiet totus angulus C B F, toti angulo A B E, æqualis; similiterque totus angulus B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur duo latera A B, B E, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum AB F G, [f] duplum trianguli F B C, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin B F: Et parallelogrammum B E K L, duplum trianguli

[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 14. primi.
[d] 2. pron.
[e] 4. primi.
[f] 41. primi.



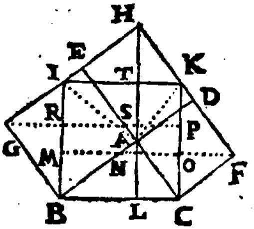
ABE, quòd ſint inter parallelas BE, AK, & ſuper candem baſin
[a] 6. pron. BE. Quare [a] æqualia erunt quadratũ A B-FG, & parallelogrã-mum BEKL. Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum A C H I, & parallelogrammum
[b] 4. primi. C D K L. [b] Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum A C H I, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale eſt duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angulus coarctaretur donec fieret rectus, manẽtibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijſdem lateribus cũ ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius ſit, & quanto hoc minus, demonſtrabit Euclides lib. 2. propoſ. 12. & 13.

QVONIAM vero theorema hoc pulcherrimum eſt, vtilitatesq́; habet inſignes, operæpretiũ iudicaui tentare, nũ illud

illud alijs vijs demonstrari possit, variata aliquantulū constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. *Sit ergo rursus triāgulū ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productisq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiat AD, AE, ipsis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelæ agātur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE,* [a] *tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD,*



quàm latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, æqualia sunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt. [b] *Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, æquales sunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vterque C, D, cum recto DAC, & vterque, B, E, cum recto EAB,* [c] *æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales sunt; sunt aūt & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE.* [d] *Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Nō aliter in triāgulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales sunt, (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorū, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare rectæ BI, CK,* [e] *inter se etiā æquales erūt.* [f] *Cum ergo sint quoq; parallelæ,* [g] *erūt etiam BC, IK, æquales & parallelæ. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti,* [h] *quòd anguli I, K, oppositis rectis C, B, æquales sint. Dico*

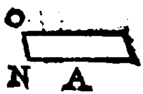
[a] *34. primi.*
[b] *34. primi.*
[c] *29. primi.*
[d] *26. primi.*
[e] *1. pron.*
[f] *28. primi.*
[g] *33. primi.*

L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqualem, [a] cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, [b] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo *B*. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

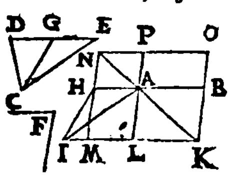
[a] 15. primi.
[b] 43. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, *datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F* M *L H, ad rectam* A, *ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M* F H, *& sumatur recta N O, æqualis recta F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.*



SED fortassis magis ex sententia Euclidis *problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F* H, *&c. Sit ergo rursus data recta* A B, *datum triangulum* C D *E, & datus angulus F, oporteatq; super rectam* A *B, constituere parallelogrammum æquale triangulo* CD*E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt* D E, *bifariam in* G, *ductaq; recta* C G, *secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum* C D E, *bifariam, producatur recta* A B, *versus eam partem, vbi parallelogrammum construendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatq;* A *H, æqualis ipsi* E G, *dimidio lateris* D E. *Deinde in* A, [c] *constituatur angulus* H *A I, angulo* E, *æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, seorsum verò, si versus inferiorem. Posita autem recta* A *I, æqualis ipsi*



[c] 23. primi.

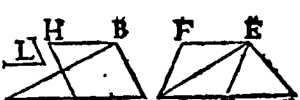
li ipsi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia sunt, utrumque utrique, anguloſq; continent æquales; [a] erunt triangula A H I, E G C, æqualia. Post hæc, [b] ducta per I, ipsi H B, parallela I K, [c] constituatur in A, versus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, æqualis, secetq; A L, rectam I K, in L. [d] Ducta quoque per H, ipsi A L, parallela H M, secante I K, in M; [e] erit parallelogrammum A H M L, trianguli A H I, duplum: Est autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quod æqualia ostensa sint triangula E G C, D G C. Igitur cum æqualia sint demonstrata triangula A H I, E G C, [f] erunt æqualia parallelogrammum A H M L, & triangulum C D E. Iam vero, sumpta recta L K, datæ rectæ A B, æquali, ducatur recta K A, producaturq; donec cum M H, producta coeat in N, & per N, agatur ipsi H B, parallela N O, donec in O, coeat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur usque ad P, in recta N O. Dico parallelogrammum A B O P, esse id, quod quæritur. Est enim constitutum super datam rectam A B, habetq; angulum B A P, dato angulo F, æqualem, [g] cum æqualis sit angulo H A L, qui angulo F, factus est æqualis. Denique æquale est dato triangulo C D E, [h] cum æquale sit parallelogrammo A H M L, quod triangulo C D E, ostensum fuit æquale.

[a] 4. primi.
[b] 31. primi.
[c] 23. primi.
[d] 31. primi.
[e] 41. primi.
[f] 7. pron.
[g] 15. primi.
[h] 43. primi.

PRAXIS vero huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quod recta H I, duci non debet, neque recta C G. Hæ enim propter demonstrationem tantum ductæ sunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.



SIT data recta A B; datum parallelogrammum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, ut D G, æqualis sit ipsi C D, & iungatur G E, recta: Eritq; triangulum C E G, parallelo-

rallelogrammo C D E F, *æquale, vt demonstrauimus scholio propos.* 41. [a] *Fiat iam super data recta* A B, *parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc est, parallelogrammo* C D E F, *habens angulum A, angulo* L, *æqualem; & producatur* A I, *ad* K, *vt sit* I K, *æqualis ipsi A I, iungaturq́; recta* B K. *Dico triangulum* A B K. *constitutum super datam rectam* A B, *habensq́; angulum A, æqualem dato angulo* L, *æquale esse dato parallelogrammo* C D E F. *Cum enim triangulum* A B K, *æquale sit parallelogrammo* A B-*H I, ex scholio propos.* 41. *quod æquale est constructum parallelogrammo* C D E, F *constat propositum.*

[a] 44. primi.

PRAXIS huiusce problematis à constructione non differt; difficilisq́; non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, *super data recta* A B, *in dato angulo* A, *construatur.*

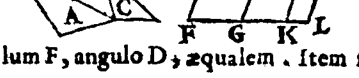
o.

THEOR. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat, tamē quia in sequentibus frequenter vsurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vnà cū data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur construere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineū in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, [b] æquale

[b] 44. primi.



parallelogrammū constituatur E F-G H, super rectā E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectam G H, paralle-

parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, [a] inter se sunt æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, [b] qui duobus rectis æquiualent, [c] æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [d] Quare F G, G K, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quòd duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sunt, ([e] cum sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) [f] & duo anguli H I K, I H G, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint parallelæ; [g] Itemque E F, I K, quod vtraque parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

[a] 1. pron.
[b] 29. primi.
[c] 2. pron.
[d] 14. primi.
[e] 34. primi.
[f] 29. primi.
[g] 30. primi.

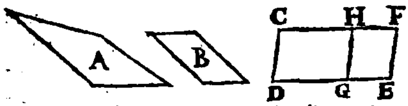
SCHOLIVM.

PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atque A B, *resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma* EG, GI, IL, *super rectas* EF, HG, IK, *iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum* EFLM, *æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.*

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus, in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



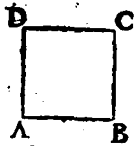
SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. a45.primi. a *Fiat parallelogrammum* CDEF, *in quocunq; angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam* CD, *parallelogrammum* CDGH, *in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum* CDEF, *superat parallelogrammum* CDGH, *parallelogrammo* EFHG; *superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo* EFHG. *Quod est propositum.*

45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta AB, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, b educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratum. Cum
b11.primi.

enim



enim anguli A,& B,sint recti, [a] erũt A D, B C, parallelæ : Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur [b] & A B, D C, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est ABCD,in quo,cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi A B,omnes quatuor lineæ æquales existunt : Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [c] æquales sint oppositis rectis A,& B. Quadratũ igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

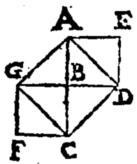
[a] 28.primi.
[b] 33.primi.
[c] 34.primi.

EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata : & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

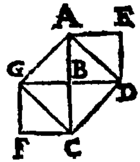
SINT primum rectæ A B, CD, æquales. Dico earũ quadrata ABEF,CDGH, *æqualia quoque esse. Ductis enim diametris* B F, D H, *erunt duo latera BA, AF, trianguli* B A F, *duobus lateribus D C,* C H, *trianguli* D C H, *æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati recta* A F, C H, *æquales sint rectis* A B, C D : *Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti.* [d] *Igitur triangula* BAF, D C H, *æqualia erunt. Quæ* [e] *cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.*

[d] 4.primi.
[e] 34.primi.



*SINT deinde quadrata ABDE,*BCFG, *æqualia. Dico lineas quoque ipsorum A B, B C, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt recta A B, BC, in directum constituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti,* [f] *erunt & rectæ G B, B D, in directum constitutæ. Ducantur diametri AD,CG, iunganturque rectæ AG, CD. Quo-*

[f] 14.primi.



niam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo BCD, fiet totũ triangulum ACD, toti triangulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandẽ habeant basin CD, ad easdemq́; sint partes, [a] in eisdẽ sunt parallelis: ideoque parallelæ sunt AG, CD. Et quoniã, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoque æquales. Quamobrem, [b] & parallelæ sunt AD, CG. Igitur parallelogrammũ est ADCG; ac propterea [c] rectæ AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, vt in scholio propos. 34. ostensum fuit; [d] erunt reliqua latera æqualia, nempe AB, ipsi BC, &c. Quod est propositum.

[a] 39. primi.
[b] 27. primi.
[c] 34. primi.
[d] 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur; congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoq́; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius esset.

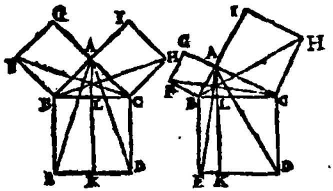
PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem AB, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iunganturque rectæ BC, DC, constructũ erit quadratũ. Nã ABCD, cũ ex cõstructione sit figura æqualium laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initiũ scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, [e] erunt & B, D, recti, necnon [f] & oppositus angulus C, &c.

[e] 29. primi.
[f] 34. primi.

THEOR.

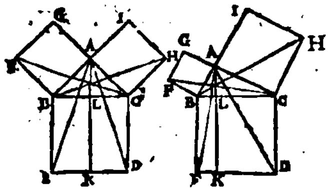
THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectangulis triangulis, quadratũ, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



IN triãgulo ABC, angulus B A C, sit rectus,[a] describanturque super A B, A C, B C, quadrata A B F G, ACHI, BCDE. Dico quadratum B C D E, descriptum super latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta A K,[b] parallela ipsi B E, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti,[c] erũt rectæ G A, A C, vna linea recta; eodemque modo I A, A B, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli A B F, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus A B C,[d] fiet totus angulus C B F, toti angulo A B E, æqualis; similiterque totus angulus B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur duo latera A B, B E, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus;[e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum AB F G,[f] duplum trianguli F B C, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin B F: Et parallelogrammum B E K L, duplum trianguli

[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 14. primi.
[d] 2. pron.
[e] 4. primi.
[f] 41. primi.



ABE, quòd sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare [a] æqualia erunt quadratũ A B-FG, & parallelogrãmum BEKL. Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum A C H I, & parallelogrammum C D K L. [b] Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum A C H I, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale est duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 6. pron.

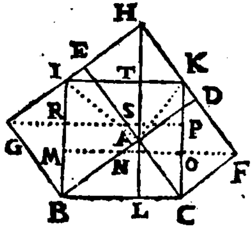
[b] 4. primi.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate isto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur donec fieret rectus, manẽtibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus cũ ambientibus, fieret latus oppositum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppositi æquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum; perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

QVONIAM vero theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæ pretiũ iudicaui tentare, nũ illud

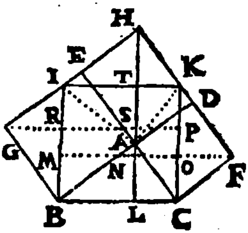
illud alijs vijs demonstrari possit, variata aliquantulũ constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rursus triãgulũ ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productisq́; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiat AD, AE, ipsis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelæ agãtur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE,[a] tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD,



[a] 34. primi.

quàm latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, æqualia sunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt. [b] Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, æquales sunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB, [c] æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales sunt; sunt aũt & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE. [d] Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Nõ aliter in triãgulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales sunt, (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorũ, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare rectæ BI, CK, [e] inter se etiã æquales erũt. [f] Cum ergo sint quoq; parallelæ, [g] erũt etiam BC, IK, æquales & parallelæ. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti, [h] quòd anguli I, K, oppositis rectis C, B, æquales sint. Dico

[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 26. primi.
[e] 1. pron.
[f] 28. primi.
[g] 33. primi.



ergo, quadratum C I, duobus quadratis BE, CD, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia [a] GE, ipsi BA, æqualis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quæ ipsi AC, siue AD, ostensa fuit æqualis, erit &, addita communi EI, tota HI, toti GE, hoc est, ipsi AB, æqualis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallelæ, [b] erunt quoque BI, AH, parallelæ & æquales. Eodemq; modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur [c] tam quadratum BE, parallelogrammo BH, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, æquale est [d] erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Sic etiam quia tam [e] quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, æquale est, [f] erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 35. primi.
[d] 1. pron.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.

ALITER. Loco rectæ HTAL, iungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo [g] tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quàm parallelogrammum BT, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est. [h] erit quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Pari ratione, quia [i] tam quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, super eandem basin CK, duplum est, [k] erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Quam ob rem, vt prius, totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat ostendendum.

[g] 41. primi.
[h] 6. pron.
[i] 41. primi.
[k] 6. pron.

ALI-

ALITER. Loco rectarum HT AL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelę FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, aequalis. Quoniam enim [a] anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, aequales, quòd vterque angulo ABC, supra ostensus sit aequalis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, aequales, vterque vtrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adiacentia aequalia, quòd vtrumque supra sit ostensum ipsi BC, aequale. [b] Igitur & latera KO, BR, aequalia erunt. Itaque quoniam [c] tam parallelogramma BCFN, BCOM, super eandem basin BC, quàm parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, aequalia sunt, estque parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, aequale, ob rectas BR, KO, ostensas aequales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumque aequalitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, composito aequalia. [d] Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, aequale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, aequalia. Quod demonstrandum erat.

[a] 29. primi.
[b] 26. primi.
[c] 35. primi.
[d] 35. primi.

ATQVE in hunc modum aliae demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, varijs demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENTIO porrò admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam praeclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetq́ue quadratum numerum maioris aequalem esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes aequales.

les, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq́ eum esse rectum; Id q́ in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebāt vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaq́ ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq́ descriptæ, vt ibidem ostendemus.

CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorū, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicūque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum,

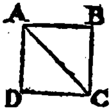
vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. H*ac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24 & 26.*

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, e quibus visum est ea dumtaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis *allatura creduntur, initium hinc sumentes.*

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato ABCD, *ducatur diameter* AC. *Dico quadratum* AC, *duplum esse quadrati* ABCD. *Cum enim in triangulo* ABC, *angulus* B, *rectus sit,* a *erit quadratum lateris* AC, *æquale duobus quadratis laterum* AB, BC. *Cum igitur quadrata linearum* AB, BC, *æqualia sint, quòd lineæ* AB, BC, *sint æquales; erit quadratum lineæ* AC, *duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ* AB, *hoc est, quadrati* ABCD. *Quod est propositum.*

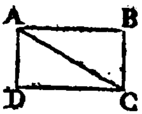


a 47. primi.

II.

QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori ABCD, *ducatur diameter* AC; *& quia in triangulo* ABC, *angulus* B, *est rectus,* b *erit quadratum lateris* AC, *æquale duobus quadratis laterum inæqualium* AB, BC. *Quod est propositum.*



b 47. primi.

SI

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, *anguli* A, *&* D, *sint recti, lateraq; opposita* BC, EF, *æqualia. Dico duo quadrata laterum* AB, AC, *simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum* DE, DF, *simul sumptis. Nam quadrata linearum* BC, EF, *æqualia inter se sunt, cum & ipsa inter se ponantur æquales: Quadrato autem lineæ* BC, [a] *æqualia sunt quadrata linearum* AB, AC; *Et quadrato lineæ* EF, *æqualia sunt quadrata linearum* DE, DF. [b] *Quadrata ergo rectarum* AB, AC, *quadratis rectarum* DE, DF, *æqualia sunt. Quod est propositum.*

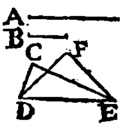
a 47. primi.

b 1. pron.

IIII.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

SINT A, *&* B, *latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus* DCE, *sitq;* DC, *recta æqualis rectæ* B, *&* *recta* CE, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* DE, *coniungente duo puncta* D, E, *constituantur super ipsam duo anguli semirecti* DEF, EDF, [c] *coeantq; rectæ* DF, EF, *in* F. *Quoniam igitur in triangulo* FDE, *anguli* FDE, FED, *æquales sunt;* [d] *erunt & latera* DF, EF, *æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum*



c 13. pron.

d 6. primi.

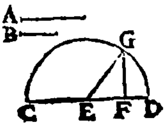
nearum D F, E F, *æqualia esse quadratis linearum* A, *&* B, *hoc est, quadratis linearum* C E, *&* C D. *Nam cum in triangulo* D E F, *anguli* F D E, F E D, *faciant vnũ rectũ; [a] erit reliquus angulus* F, *rectus.* [b] *Quamobrẽ erunt quadrata linearũ* D F, E F, *æqualia quadrato lineæ* D E: [c] *Sed eidem quadrato lineæ* D E, *æqualia sunt quoque quadrata* C D, C E. *Igitur quadrata linearum* D F, E F, [d] *æqualia sunt quadratis linearum* D C, E C. *Quod est propositum.*

[a] 32. primi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 1. pron.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.

POTENTIA lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quæuis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, *&* B, *oporteatq́; cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ* A, *quam minoris* B. *Ex quauis linea recta* C D, *sumatur* C E, *æqualis rectæ A, &* E F, *æqualis rectæ* B. *Deinde centro* E, *& interuallo* E C, *semicirculus describatur* C G D; *& ex* F, *ducatur* F G, *perpendicularis ad* C D. *Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ* C E, *sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ* B, *hoc est, rectæ* E F, *sibi æqualis, quadrato rectæ* F G. *Ducta enim recta* E G, [e] *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum* E F, F G, *hoc est, quadratum rectæ* E C, *illi aequale, superabit quadratum rectae* E F, *quadrato rectae* F G. *Quod est propositum.*



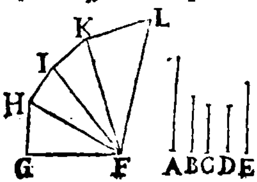
[e] 47. primi.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq́; inuenire quadratũ æquale omnibus illis quinque.



Fiat angulus rectus FGH, *sitq́; recta* FG, *aequalis recta* A, *& recta* GH, *rectae* B. *Ducta deinde recta* HF, *fiat angulus rectus* FHI, *sitq́;* HI, *aequalis rectae* C. *Ducta rursus recta* IF, *fiat angulus rectus* FIK, *sitque* IK, *aequalis rectae* D. *Ducta denique recta* KF, *fiat angulus rectus* F KL, *sitque* KL, *aequalis rectae* E, *ducaturq́; recta* FL. *Dico quadratum recta* FL, *aequale esse quinque quadratis propositis.*

[a] 47. primi. *Quadratum enim rectae* FH, [a] *aequale est quadratis rectarum* FG, GH, *hoc est, quadratis rectarum* A, *&* B. *Rursus*

[b] 47. primi. *quadratum rectae* FI, [b] *aequale est quadratis rectarum* FH, HI, *& idcirco quadratis rectarum* A, B, *&* C. *Item*

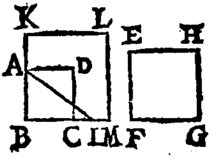
[c] 47. primi. *quadratum rectae* FK, [c] *aequale est quadratis rectarum* FI, IK, *ideoq́; quadratis rectarum* A, B, C, *&* D. *Denique qua-*

[d] 47. primi. *dratum rectae* FL, [d] *aequale est quadratis rectarum* FK, KL, *ac propterea quadratis rectarum* A, B, C, D, *&* E. *Quod est propositum.*

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata.

SINT duo quadrata ABCD, EFGH, propositumq́; sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit aequalis quadrato EFGH, &c.



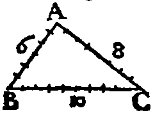
Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq́; quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctum, æqualem esse quadrato

quadrato E F G H. Quoniam enim quadratum recta A I, hoc est, quadratum B K L M, [a] aquale est quadratis rectarum A B, B I, hoc est, quadratis A B C D, E F G H: si auferatur commune quadratum A B C D, [b] remanebit figura A D C M L K, aqualis quadrato E F G H. Quod est propositum. [a] 47. primi. [b] 3. pron.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

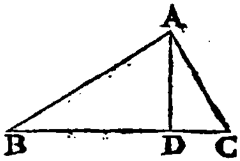
SIT angulus A, rectus in triangulo A B C, sintq; primum cognita latera A B, A C, circa angulum rectum, quorum A B, ponatur 6. palmorum, & A C, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, nempe quadrati palmi 36. & 64. [c] aqualia sunt quadrato recta B C; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorũ palmorũ 100. Latus ergo BC, cõtinebit 10. palmos. Tãtũ enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera A B, B C, sitque A B, 6. palmorum, & B C, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, [d] aqualia sunt quadrato recta B C; si quadratum recta A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato recta B C, quod est palmorum 100. remanebit quadratum recta A C, 64. palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod est propositum. Caterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sape numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam uocant: Sed de his alias. [c] 47. primi. [d] 47. primi.



IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur

bitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusq; illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.



CADAT primum in triangulo A B C, cuius latus A B, maius sit latere A C, perpendicularis A D, ad B C, demissa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterq; angulus B, C, acutus est, vt ex coroll. 3. propos. 17. constat. Dico segmentum B D, esse maius segmento C D. Quoniam enim [a] tam quadratum ex A B, quadratis ex A D, B D, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, C D, æquale est: Est autem quadratum ex A B, maius quadrato ex A C, quod latus A B, latere A C, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex A D, B D, maiora duobus quadratis ex A D, C D: Et ablato communi quadrato rectæ A D, reliquum quadratum ex B D, reliquo quadrato ex C D, maius erit. Quare & recta B D, maior erit, quam recta C D. quod est primum.

[a] 47. primi.

FACIAT deinde perpendicularis A D, segmentum B D, maius segmento C D. Dico latus A B, maius esse latere A C. Erit enim quadratum ex B D, quadrato ex C D, maius: Additoq; quadrato communi ex A D; duo quadrata ex B D, A D, duobus quadratis ex C D, A D, maiora erũt. Cum ergo [b] tam quadratum ex A B, quadratis ex B D, A D, quam quadratum ex A C, quadratis ex C D, A D, æquale sit; erit quoque quadratum ex A B, quadrato ex A C, maius; proptereaq; & latus A B, latere A C, maius erit. Quod est propositum.

[b] 47. primi.

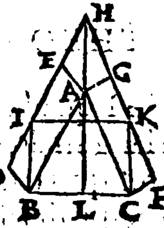
ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

THEOREMATE porrò hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni triangulo

gulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quam Pappus.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

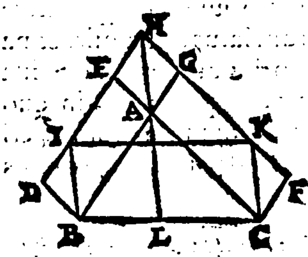
SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducaturque recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallela ipsi AH, iunganturque recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BIHA, CKHA; [a] erit vtraque BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt BI, CK; [b] quæ cum sint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ sint; [c] erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelū:



a 34. primi.
b 30. primi.
c 33. primi.

Q Cui

Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma A D,
a35.primi. *A F. [a] Quia ergo æqualia sunt parallelogramma A D, A B I H, quòd eandem habeant basin A B, in eisdemque*
b35.primi. *sint parallelis A B, H D; [b] Est autem A B I H, parallelogrammo I L, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat basin B I, in eisdemq; sit parallelis B I, L H: Erit quoque A D, eidem I L, æquale. Non aliter ostendemus, A F, ipsi K L, esse æquale. Quare parallelogramma A D, A F, parallelogrammo B K, æqualia sunt. Quod est propositum.*



PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas A C, A E; & A B, A G, in directum positas, ita vt parallelogrāma A D, A F, sint æquiangula, habentia angulos A E D, A G F, angulo B A C, [c] internos externo æquales, seu hęc eius figura indicat. Sed
c29.primi.
nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.

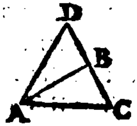
47. THEOR. 34. PROPOS. 48.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quę a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C, sitque quadratum lateris A C, æquale quadratis reliquorum laterum B A, B C. Dico angulum A B C, esse rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C,

con-

connectaturque recta A D. Quoniam igitur in triangulo A B D, angulus ABD, rectus est; [a] erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; [b] erunt quadrata rectarum A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ A D, A C, æquales. Quoniam igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A BC; & basis AD, ostensa est æqualis basi A C; [c] erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 47. primi.

[b] 1. pron.

[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem, [d] collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque basi æqualis, [e] intulit æqualitatem angu-

[d] 4. primi.

[e] 8. primi.

 lorum

lorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos conclusimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus esse æqualia.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, [a] ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem base minori angulo opposita.

[a] 24. primi.

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtriq; , at bases inæquales, [b] demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi opposito.

[b] 25. primi.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, [c] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia; & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiam, tota triangula esse æqualia.

[c] 26. primi.

SEXTO [d] demonstrauit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia.

[d] 37. primi.

SEPTIMO [e] ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse.

[e] 38. primi.

OCTAVO [f] docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas.

[f] 39. primi.

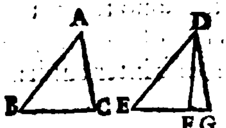
NONO

NONO denique [a] probauit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemq; partem constituta, esse inter easdem parallelas. [a] 40. primi.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis vniuersa ferè Geometria niti videtur; vt propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem à propos. 26. in scholio propos. 31. exclusimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales sunt, & vnum latus vni lateri æquale; non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quòd vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo; sed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes exclusimus, quòd ex ijs non sequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in scholio propos. 31. demonstrauimus: Ita quoque à propos. 4. excludendæ sunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri potest basium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, bases æquales esse nequeunt; nisi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppositus, vel est minor recto, vel non minor recto.

SIT enim Isosceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta base GF, vsque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG,

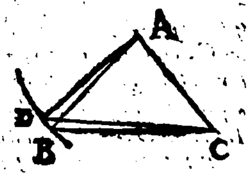


æquale triangulum construatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia sint, & basis BC, basi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, anguli que B, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppositi æquales; & tamen basis BC, maior est base EF; quòd BC, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quòd angulus C, acutus est, at DFE, obtusus. Nam cum a anguli DFG, & G, æquales sint; b & simul sumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, recto maior: quandoquidem c duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demum sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quàm EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quòd DF, idem sit, quod AC, ipsi DG, æquale; d erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque minor recto; e quòd ambo minores sint duobus rectis. Cum igitur, f duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, qui à DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor est, aut maior recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior base EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vtroque angulo

[a] 5. primi.
[b] 17. primi.
[c] 13. primi.
[d] 5. primi.
[e] 17. primi.
[f] 13. primi.

angulo C, & F, vel minore recto, vel maiore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus, quod est contra hypothesin.

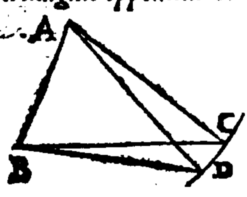
DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi potest. Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit a ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis; cadetque CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secans CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD, opposito: Et tamen bases BC, DC, æquales non sunt. Si enim æquales essent, essent tam duæ rectæ AB, AD, quàm duæ CB, CD, æquales, b quod est absurdum.



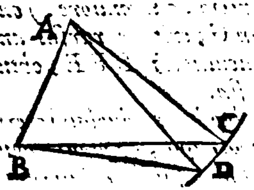
a 18. primi.

b 7. primi.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterũ, nihil etiam potest inferri. Sit namque triangulum ABC, cuius vtrumque latus AC, CB, maius sit latere AB; & BC, maius, quàm AC. Erit c ergo angulus BAC, maior



c 18. primi.



maior angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC, æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD; erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia, vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur. Et tamen bases BC, BD, æquales non sunt. Alias tam rectæ AC, AD, quam BC, BD, æquales essent. [a] quod est absurdum.

[a] 7. primi.

RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM SECVNDVM

DEFINITIONES.

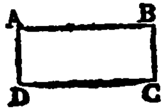
I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium auiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duò ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est.

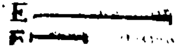
Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si unius angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint



[a] 29. primi. A D, B C, [a] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero [b] quilibet suo opposito
[b] 34. primi. est æqualis, ut angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

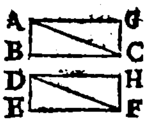
DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ unum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, D C; vel sub D C, C B, vel denique sub A B, B C: quoniam qualibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem, ut A B, vel D C, eius longitudinem, altera vero, ut A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario unius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita ut semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa unum angulum rectum æqualia sunt duabus illis tis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentū, erit idē, quod parallelogrāmū ABCD: quoniā latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.



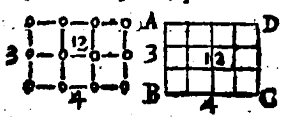
PERSPICVVM autē est ex dictis, parallelogrammū rectangulum contentū sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarū linearum æqualium, æqualis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ A B, B C, æquales rectis D E, E F, vtraque vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentum sub A B, B C, æquale esse parallelogrammo rectangulo D E F H, contento sub D E, E F. Ductis etenim diametris A C, D F, cum latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [a] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula A G C, D H F. Quare tota parallelogramma A B C G, D E F H, æqualia erunt.



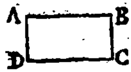
[a] 4. primi.

HABET autem comprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammū A BCD, comprehensum sub duabus rectis A B, B C, quarum illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui



quidem ex ductu lineæ A B, 3. palmorum in lineam B C, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq; a Ioan. Regiomont. lib. 2. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ A B, in lineam B C, vel (quod idem est) ex ductu lineæ B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

OBITER *quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrãmum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammũ appellant A C, vel B D.*



II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, *siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrammi,* grãmi, ita vt parallelogrãmum diuisum sit in quatuor parallelogrãma, quorũ duo EH, IF, dicũtur esse circa diametrum, alia vero duo BG, GD, cõplemẽta, vt manifestũ est ex vltima definitione primi lib. Itaq;

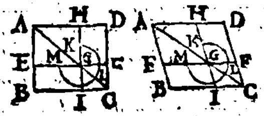


figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis est figura E B C D H G E, quam complectitur circunferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.

SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sane opera pretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quadam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex alijs deinde propositionibus huius lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, qui neque per Diuinam potentiam in numeris possunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulo minor sit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4? Et tamen summa, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior est, quam 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area, &

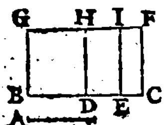
quantitas

quantitas cuiusuis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremò vltima propos. huius lib. omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verò aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, utilitates vero contineat propè infinitas.

1.
PROBL. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento cõprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duę perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturque recta F G. Nam rectæ B G, C F, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur [c] erunt quoq; G F, B C, parallelæ & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit B F, contentum sub A, siue G B, & B C, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, vel C F.

a 28. primi.
b 1. pron.
c 33. primi.

C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, [a] inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eędem, cum ex cōstructione parallelogramma sint *B* H, B I, [b] æquales erūt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B *D*. Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E. Item rectangulum E F, sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, *D* I, *E* F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis B D, D E, E C, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 30. primi.
[b] 34. primi.

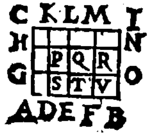
SCHOLIVM.

QVONIAM M *lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, vt lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq; vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.*

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandi*nus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.*

SI fuerint duę rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT duæ rectæ A B, A C, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes A D, D E; E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H; E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur. Compleatur rectangulum A I, ducanturq́ D K, E L, F M, parallelæ ipsi A B, vel B I: Item H N, G O, parallelæ ipsi A C, vel B I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H; & H K, sub A D, H C; (a quòd rectæ G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub D E, A G; D E, G H; D E, H C; (b quòd D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H; F B, H C; perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.



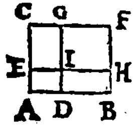
a 34. primi,

b 34. primi,

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C; vna cum rectangulo comprehenso

prehenso sub partibus AD, EC, æquale esse rectangulis contentis sub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur n. rectangulũ AF, agaturq; per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; nec non per E, recta EH, secans DG, in I,



parallela ipsi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale est rectangulis EF, DH, AI; si addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG; nempe sub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehensis æqualia. Quod est propositum.

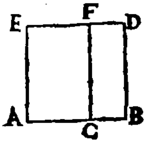
IN numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, si ijdem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoque est 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

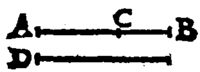
SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse



quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F, parallela rectæ
a 34. primi. A E, vel B D, quæ [a] æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B, cui æqualis est recta A E, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectę AB, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Similiter erit rectangulũ CD, cõprehẽsum sub tota A B, & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

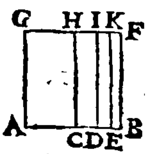
ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B.



Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta A B,
b 1. secũdi. hoc ęst, quadratum rectę AB, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehẽduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. quod est propositum.

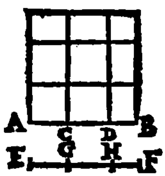
SCHOLIVM.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.



SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcunq; segmenta: Quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

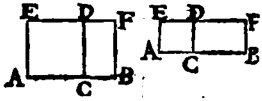


SIT recta AB, diuisa in partes quotcunq; AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD, CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, cõprehensis. Sũpta enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales; Erit ex iis, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.

IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2, 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

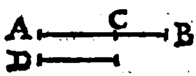
THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI recta linea secta sit vtcunq;: Rectangulum sub tota, & vno segmentorũ comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.



LINEA recta AB, diuisa sit vtcunq; in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vtrouis segmento, vt A C, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehẽso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ A C, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, cõprehensum sub tota AB, & segmento A C. Rursus, quia recta C D, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum C F, comprehensum sub segmentis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis A C, C B, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunq;, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, [a] æquale rectangulo sub D, & C B, hoc est, sub A C, C B, & rectangulo sub D, & A C, hoc est, quadrato segmenti A C. Quod est propositum.



[a] 1. secũdi.

SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum

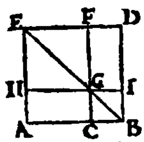
49. qua-

49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

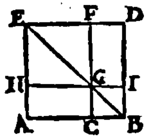
SI recta linea secta sit vtcunq;: Quadratum, quod a tota describitur, æquale est & illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.



RECTA linea AB, diuisa sit vtcũq; in C. Dico quadratũ totius rectę A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis A C, C B. Describatur .n. super A B, quadratũ AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur C F, parallela rectæ B D, secans diametrum in G puncto, per quod rursus ducatur H I, parallela rectæ AB; Eritque quadratum A D, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli A B E, duo latera A B, A E, æqualia sunt; [a] erunt duo anguli A B E, A E B, æquales: Atqui [b] tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nã, vt ibi ostensum est, diameter B E, diuidit angulos rectos A B D, A E D, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli E F G, [c] æquales sunt duobus rectis, & angulus E F G, rectus est, [d] cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non F E G, ostensus semirectus; erit & reliquus E G F, semirectus; ideoque æqualis angulo F E G.

a 5. primi.
b 32. primi.
c 32. primi.
d 29. primi.

a 6. primi.
b 34. primi.



Quare a æqualia erunt latera E F, F G: quæ cum sint b æqualia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammum F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quòd existente vno angulo recto, nempe F E H, vel F, in parallelogrammo F H, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quòd latus H G, c æquale sit rectæ A C. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quòd CG, GI, ęquales sunt rectę CB, ob quadratum C I; & F G, æqualis rectæ G H, ob quadratum F H, hoc est. d rectæ AC. Quocirca cum quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratum A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

c 34. primi.
d 34. primi.
e 2. secũdi.
f 3. secũdi.

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, e erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, A C, comprehensum,

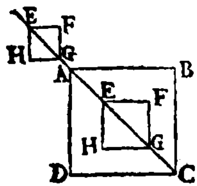
f æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti C B. Igitur quadratum rectę AB, ęquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CON-

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrum B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H. Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilominus verũ est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, cõsistat parallelogrãmum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallela sint A B, E F, [a] erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erunt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt: [b] propterea que latera E F, F G, illis opposita, æqualia, [c] & angulus F, rectus. Quare cum E F, F G, latera [d] æqualia sint oppositis lateribus G H, H E, æquilaterum erit parallelogrammum F H: Sed & rectangulum est, ex ijs, quæ ad defin. 1. huius lib. ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur F H, quadratum erit. Quod est propositum.



[a] 29. primi.
[b] 6. primi.
[c] 32. primi.
[d] 34. primi.

COROLLARIVM. II.

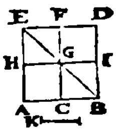
SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1. demonstrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit *numerus 10. diuisus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partiũ 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.*

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectę, quadratum ex illa descriptũ, quadruplũ est quadrati ex hac descripti. Et si quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.



SIT enim primũ linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bifariã in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. Quare cũ quadratũ AD, æquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratũ lineæ AB, quadruplũ quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi AC. Est n. vtraq; dimidiũ lineæ AB.

a 4. secũdi. *BREVIVS. a Quadratũ rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus AC, CB, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ AC; Constat quadratũ rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodq; quadrato rectæ AC, æquale est.*

SIT deinde quadratũ rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplũ esse lateris K. Nam diuisa recta AB, bifariam in C, vt AB, dupla sit ipsius AC, erit, vt iam demonstratũ est, quadratũ rectæ AB, quadruplũ quadrati rectæ AC: Ponitur autem & quadruplũ quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & AC, & ipsa propterea rectæ K, & AC, æquales: Est aũt AB, ex constructione, ipsius AC, dupla. Dupla igitur etiã erit ipsius K. Hæc *tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.*

CÆTERVM *ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quaeritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendusq́; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hac est. Quoniam quadratum A D, recta A B,*[a] *aequale est duobus quadratis F H, C I, partium A C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub A C, C B; si gnomonem H B F, qui cum quadrato F H, constituit totum quadratum A D, ponamus 15. quantus nimirum est datus numerus: quadratum autem C I, statuamus 1. atque adeo latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde segmentum A C, 7. vt nimirum ex A C, in C B, quae est 1. fiant 7. Quadratum ergo F H, erit 49. Totum autem latus A B, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam A C, latus quadrati F H. Hac ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone H B F, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidiũ statuamus latus quadrati F H, quaesiti.* [a] 4. secũdi.

VT *autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit.*

VICISSIM *reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam si ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur 1. conficietur latus quadrati quaesiti. Vt si rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidiũ 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quaesiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7: quod perpetuo est vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam*

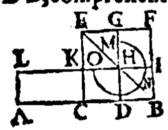
huius

huius regulæ facilis est ex eadem figura huius propos 4. Nam si gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, subtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus: Quadratum vero C I, statuamus 1. atque adeo & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & segmentum A C, 7. vt supra dictum est, & tota linea A B, 8. &c.

5. THEOR. 5 PROPOS. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoque



34. primi. D H, recta rectæ D B, æqualis:[a] Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vna cum quadrato

drato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo [a] complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: [b] Est autem & A K, eidem C I, æquale, quòd & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 43. primi.

[b] 36. primi.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 11. exclusiuè faciemus. Demonstrationes autem hus numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex C B, [c] æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, vna cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B, [d] æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, [e] æquale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.

[c] 4. secũdi.

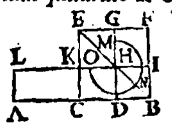
[d] 3. secũdi.

[e] 1. secũdi.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij

termedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX *hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à reliqui numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. a cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum A H, cum quadrato K G,* 15. secundi. *æquale sit quadrato C F; si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. vt nimirum ex A D, in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet*



A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

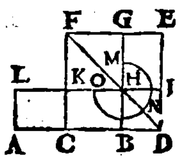
E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerũ 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7 perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadẽ figura huius propos 5. Nam si rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatum relinquit quadratum K G, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeo & D B, eius latus 1. erit tota A B, 16. & eius dimidium C B, 8. &c.

THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quę ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namque C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela A L, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4 huius lib. B I, K G, quadrata, ideoque recta D I, rectæ D B, æqualis: [a] Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehēdetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaque est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E, Quoniam ergo parallelogrammū A K, [b] æquale est parallelogrammo C H, quod bases A C, C B, æquales sint: [c] Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale.



[a] 34. primi.
[b] 36. primi.
[c] 43. primi.

Quocir-

Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quę dam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

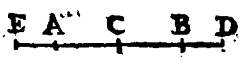
SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex C D,[a] æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub D B, C B: hoc est, quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulis sub B D, C B, & sub D B, A C: (sumpta A C, semel pro C B, quæ illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub D B, A C; D B, C B; & sub D B, D B; (quod est quadratum ex D B,)[b] æquale rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B, vna cum rectangulo sub D B, A D: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

[a] 4. secũdi.

[b] 1. secũdi.

CÆTERVM si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentẽ 5. facillimè posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit enim recta A B, secta in C, bifariam, & ei addita recta quæcunque B D. Dico rectangulum cõprehensum sub tota A D, composita, & adiecta B D, vna cũ quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato rectæ C D, ex dimidia, & adiecta composita.



Addita namque recta A D, ex altera parte recta A E, quæ adiectæ B D, æqualis sit, erit tota E D, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoq; E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A, ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis. Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus E B, B D, vnà cum quadrato

[c] 5. secũdi.

quadrato intermediæ sectionis C B, *hoc est, rectangulum sub* A D, B D, *vnà cum quadrato dimidiæ* C B, *æquale erit quadrato dimidiæ* C D, *hoc est, quadrato rectæ ex dimidia* C B, *data recta* A B, *& ex adiecta* B D, *composita. Quod est propositum.*

SECETVR *iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero cõposito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.*

EX *hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim* A D, *superet* C D, *magnitudine* A C, *hoc est,* C B; *&* C D, *superet* B D, *eadẽ magnitudine* C B: *habebunt tres lineæ* A D, CD, B D, *proportionalitatẽ Arithmeticam; quandoquidẽ prima* A D, *superat secundam* C D, *eodem excessu* A C, *siue* C B, *quo secunda* C D, *tertiam* B D, *superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis* A D, B D, *vna cum quadrato excessus* C B, *æquale esse quadrato lineæ mediæ* C D; *perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniũgi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quę nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam) cui tertia, siue minor addita sit in rectum, mediaque composita sit ex dimidio excessus inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, si tres rectæ sint datæ* A D, CD, B D. *Si namque ex prima* A D, *abscindatur* D C, *æqualis mediæ, & ex media hac* D C, *auferatur tertia* D B, *erit* A B, *(excessus inter primam et tertiam) secta bifariam in* C, *eiq; addita tertia* B D. *Cum enim* C B, *excessus sit inter mediam* C D, *& tertiam* B D, *qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi* A C, *nempe excessui inter primam* AD, *& mediam* CD; *erit necessariò* A B, *secta in* C, *bifariam. Eademq; ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus,*

bentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. una cum 9. quadrato excessus 3. aequalis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, ut ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariã secetur, erit quadratus huius dimidij is, qui quaeritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quaesitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerũ 64. cuius latus 8. una unitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta est ex hac 6. propos.

6. secũdi. *Cum enim rectangulum A I, cum quadrato* G K, [a] *aequale sit quadrato* C E; *si rectangulum A I, statuatur 15. at quadratũ* B I, *1. ideoq; & latus* B D. *1. erit tota linea A D, 15. ut nimirum multiplicata in* B D. *1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1.* B D. *remanet* A B, *14. cuius dimidium 7. dabit* C B, *latus quadrati K G, quaesiti.*

NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparẽ, ut fracti numeri vitentur, ut videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

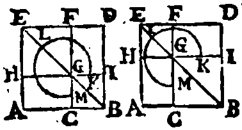
VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quaesiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quaesiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper una unitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum A I, quod ex quadrato C E, subtractum relinquit quadratum K G, *statuatur 15. at quadratum B I, ideoque & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. ut dictum est. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio* C B, *quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus* C D, *8. quod quaeritur, &c.*

THEOR

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcũque; Quod a tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehẽditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.



SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmẽti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cum quadrato reliqui segmenti C B. Describatur enim super A B, quadratum A D; & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectę AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. CI, H F, quadrata: & quia recta G H, [a] æqualis est rectæ A C, erit H F, quadratum segmenti AC. Rursus quia A E, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento A C. Eadem ratione rectangulum HD, cõprehensum erit sub eisdem rectis A B, A C, quòd rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata A D, FH. Quoniam igitur rectangulis A F, FI, vna cum quadrato C I, hoc est, gnomoni K L M, vna cum quadrato CI, æquale est quadratum A D; si apponatur commune quadratum H F, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento A C,) vna cum C I, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.

SCHOLIVM.

a 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratum ex AB, [a] æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur cõmune quadratũ ex AC, erũt quadrata ex AB, AC, æqualia quadratò ex AC, bis, & quadrato ex CB, unà cũ rectãgulo bis sub AC, CB. Sed rectãgulo*

b 3. secũdi. *sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, [b] æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.*

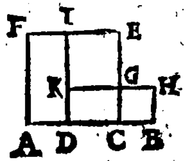
IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcumque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur. n. quadrata AE, CH, & agatur

DI,



D I, ipsi C E, *parallela, producaturque H G, ad K. Itaque quoniam A D, ipsi C B, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est, C E, toti D B, æqualis: Est autem & C G, ipsi C B, æqualis, quòd quadratum sit C H. Igitur & reliqua G E, reliquæ* D C, *æqualis erit. Ac proinde, cum & I E, ipsi* D C, *sit æqualis, erunt G E, I E, æquales; ideoq́ I G, quadratum erit ab excessu* D C, *descriptum. Quoniam vero rectangula A I, D H, continentur sub partibus* AC, CB, *(Est enim* A C, *vtrique lineæ A F, D B, &* C B, *vtrique A D, B H, æqualis) manifestum est, quadrata A E, C H, partium* A C, C B, *æqualia esse rectangulis A I, D H, quæ continentur sub partibus* A C, C B, *vna cum quadrato I G, excessus* D C. *Quod est propositum.*

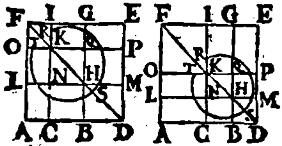
SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI recta linea secetur vtcunq;: Rectãgulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmẽto, tanquã ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum



gulum quater comprehensum ſub AB, & ſegmento ſiue maiore, ſiue minore C B, vna cum quadrato reliqui ſegmẽti A C, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto ſegmento C B, componitur. Producatur enim AB, verſus dictũ ſegmentum C B, ad D, ſitque B D, recta æqualis ſegmento C B; & ſuper tota A D, quadratum deſcribatur A E. Ducta autem diametro D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipſi D E, ſecantes diamettum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipſi A D, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. O I, N Q, B M, L G, C P, circa diametrum DF, quadrata. Et quia O K, [a] æqualis eſt rectæ A C, erit O I, quadratum ſegmenti A C. Rurſus [b] quia N H, æqualis eſt rectæ CB, erit N Q, quadratum ſegmenti CB, ideoque quadrato B M, æquale, cum rectæ C B, B D, æquales ſint. Quare rectæ B H, H Q, æquales ſunt ſegmento C B; atque adeo duo rectangula A H, L Q, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento CB, [c] cũ L H, ſit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula N G, H E; comprehenſa ſub A B, & C B, cum N H, H M, rectæ [d] æquales ſint rectis C B, B D; & rectæ G H, E M, rectæ F L, hoc eſt, rectæ L H, hoc eſt, rectę A B. Et quia quadrata N Q. B M, æqualia ſunt; ſi addatur commune K G, erunt B M, KG, ſimul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinque rectangula A H, L Q, H E, B M, & K G, gnomonem R S T, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta A B, & ſegmento C B. Cum igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia ſint quadrato A E; erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta A B, & ſegmento CB, vna cum quadrato reliqui ſegmenti A C, æquale quadrato lineæ A D, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento C B. Quamobrem, ſi recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 34. primi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD,[a] æquale est quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: At quadrata ex AB, BC,[b] æqualia sunt rectãgulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat. [a] 4. secũdi. [b] 7. secũdi.

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hac 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

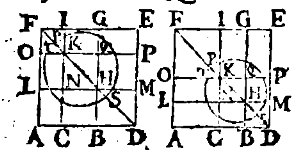
NAM recta AB, secta est in C, vtcunque, eique addita BD, segmento CB, æqualis, demonstratumque est, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, vnà cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

SI linea recta secetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, *secta est bifariam in* B, *eique addita* CA, *probatumque fuit, quadratum totius* A D, *æquale esse rectangulo quater comprehenso sub* AB, *composita ex* BC, *dimidia, & adiecta* AC, *& sub dimidia* CB, *vna cum quadrato adiectæ* AC.

IAM vero ex hac quoque propos. 8. inueniemus alia ratione, numerũ quadratũ, cũ quo datus quilibet numerus conficiat numerũ similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. *reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. Tollatur* 1. *ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratũ 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratũ* 81. *Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum A H, quater*



a 8. secũdi. *sumptum, cum quadrato* O I, a *æquale est quadrato* A E; *si rectangulum* A H, *ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum* CH, *ideoque, &* C B, *eius latus,* 1. *erit linea* A B, *8. vt ducta in* C B, 1. *faciat 8. Ablata ergo* 1. *reliquum erit* A C, *latus quadrati* O I, *7. quod quæritur.*

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerũ diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

CONTRA, inueniemus quoque numerũ quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerũ etiã quadratum. Si namque ad quartã partem numeri dati addatur 1. *conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartã eius partem 8. adijciatur* 1. *fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32.*

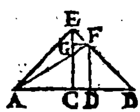
remanebit

remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semp. est una unitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum B M, ideoque & latus eius B D, 1. erit linea A B, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi aequalis, 1. quod quidem latus A C, perpetuo vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

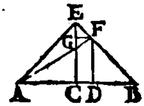
THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel CB, ducanturque rectæ E A, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans EB, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturque tandem A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; [a] erunt anguli C A E, CEA, æquales: Est autem angulus ACE, rectus: [a] 5. primi.



[a] 32. primi. Reliqui igitur [a] anguli alium rectum conficient, ideoque A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semi rectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. [b] 29. primi. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, [b] æqualis est [c] 32. primi. recto E C B, externus interno; [c] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum. Igitur & E F G, semirectus erit, propterea que anguli E F G,



[d] 6. primi. F E G, æquales erunt, [d] ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, [e] 47. primi. angulus C, rectus sit, [e] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quòd & lineæ A C, C E, æquales sint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in triangulo [f] 47. primi. E G F, angulus G, rectus est, [f] erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob ęqualitatem linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplũ erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ C D. Est [g] 34. primi. enim C D, [g] recta rectæ FG, æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, [h] 47. primi. [h] æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum AD, D F. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectę D F, æquale est quadrato rectæ D B. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inęqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidię lineę, & intermedię sectionum. Si ergo recta linea secetur in ęqualia; & non ęqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum [a] æquale est quadratis descriptis ex A C, C D, vna cũ parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; Atqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo bis sub B C, C D, [b] æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D. Quod ostendendum erat.

[a] 4. secũdi

[b] 7. secũdi.

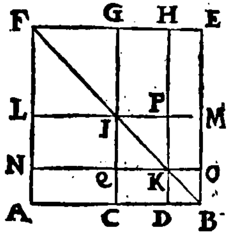
ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoque A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vna cũ quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo sub A C, C D, bis [c] est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.

[c] 4. secũdi.

IAM vero rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. et 9. partiũ inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt præcedentes, hoc modo. Descripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductaq́; diametro B F, ducantur per C, D, lateribus A F, B E, parallelæ C G, D H, secantes diametrũ B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B,

FE,



F E, parallelæ agantur L M, N O, secantes C G, D H, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. quadrata sunt L G, Q P, D O, C M, N H, [a] estq; L I, ipsi A C, & Q K, ipsi C D, & N K, ipsi A D, æqualis; erunt N H, D O, quadrata partium inæqualium A D, D B, & L G, Q P, quadrata dimidiatæ lineæ A C, & intermediæ sectionis C D. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata N H, D O, superãt quadrata L G, Q P, quadrato D O, & rectangulis N I, I H: Sunt autem quadratum D O, & rectangula N I, I H, æqualia quadratis L G, Q P, vt mox demonstrabitur; liquidò constat, quadrata N H, D O, quadratorum L G, Q P, esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quòd autem tria hæc rectangula D O, N I, I H, æqualia sint quadratis L G, Q P, ita ostendetur. Rectangulum N I, [b] æquale est rectangulo Q M; quod rectæ N Q, Q O, [c] æquales sint æqualibus A C, C B. Igitur N I, complectitur quadratum Q P; & insuper K M. Si ergo K M, D O, I H, æqualia sint quadrato L G, erunt necessario D O, N I, I H, æqualia duobus quadratis L G. Esse autem K M, D O, I H, æqualia quadrato L G, sic demonstrabimus. [d] Rectangula K M, D O, simul æqualia sunt ipsi P E, quod rectæ B M, M E, æquales sint, cum B M, æqualis sit ipsi C B, ob quadratum C M, [e] & M E, ipsi F L, hoc est, ipsi L I, ob quadratum L G, hoc est [f] ipsi A C. Addito ergo communi I H, erunt K M, D O, I H, æqualia ipsi I E, hoc est, quadrato L G; [g] quod I E, L G, æqualia sint; ob rectas L I, I M, [h] quæ æqualibus A C, C B, æquales sunt. Quod est propositum.

[a] 34. primi.
[b] 36. primi.
[c] 34. primi.
[d] 36. primi.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 36. primi.
[h] 34. primi.

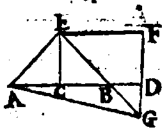
10

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea:

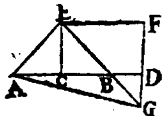
linea: Quod a tota cum adiũcta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in præcedenti propos. & C E B, semirectum;



[a] ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque. [b] Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, [d] æqualis. Quare rectæ E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G, esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum rectæ E G, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, [g] cum C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est

[a] 29. primi.
[b] 34. primi.
[c] 32. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 34. primi.



[a] 47. primi.

le est [a] quadratum rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

[b] 4. secũdi.

ALITER. Quia quadratum ex A D, [b] æquale est quadratis ex A C, C D, una cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; si commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D. [c] Sed quadrato ex B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonstrandum.

[c] 7. secũdi.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta BD; superabit quoque C D, ipsam A C, eadem recta BD. Quare, ut ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo sub A C, C D, bis, [d] æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.

[d] 4. secũdi.

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinis 3. ut totus numerus compositus sit 13.

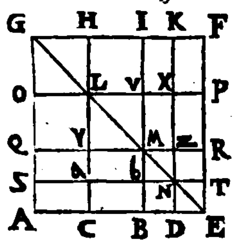
Quadrati

Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

SED & hæc propos. 10. facile ex præcedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum A C, C D, simul.

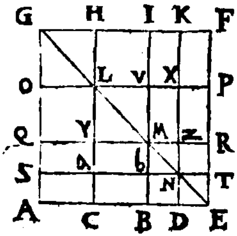
Addita namque recta A D, ad partes A, recta A E, quæ adiectæ B D, æqualis sit; erit tota E D, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoque E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A, ipsi D B, sit æqualis; & A B, vtrique communis. [a] Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc est, rectarum A D, B D. dupla erunt quadratorum rectarum E C, C B, hoc est, rectarum C D, A C quod est propositum. [a] 9. sec. li.

QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, sit adiectæ lineæ B D, æqualis, descriptoq; quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K, secantes ductam diametrũ E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agãtur O P, Q R, S T, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata sunt,



[b] estq; S N, ipsi A D, æqualis, & O L, ipsi A C, & a N, ipsi C D; erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, siue B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, simul dupla esse quadratorũ O H, a X, simul. Quoniam enim quadrata S K, D T, superant quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulis S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqualia [b] 34. primi.

æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata S K, D T, quadratorũ O H, a X, dupla



esse, cum hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum Q L, [a] *æquale est quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales sunt;* [b] *propterea quod Q O, ipsi Y L, æqualis est, & Y L, ipsi O G, ob æqualia quadrata Y V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item* [c] *S Y, ipsi a M, & L I, ipsi Y V, & V K, ipsi V Z, & D T, ipsi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S Y, L I, V K, D T, hoc est, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia sunt quinque rectangulis O H, a M, Y V, V Z, b Z, hoc est, duobus quadratis O H, a X. Quod est propositum.*

[a] 36. primi.
[b] 34. primi.
[c] 34. primi

11.

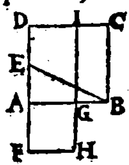
PROBL. 1. PROPOS. 11.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota A B, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex A B, quadratum A C, & diuiso latere A D, quod cum linea data A B, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur EF; & ipsi A F, abscindatur ex recta AB, data æqualis A G. Est. n. A B, maior quam AF. Nã cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; sint autem latera AE, AB, maiora

[a] 29. primi.

iora latere E B; erunt quoque rectæ E A, A B, maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B, maior erit, quam reliqua A F. Dico rectam A B, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ A G; adeo vt A G, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint æqualia, quippe cum [a] F H, G H, æqualia sint oppositis A G, A F, æqualibus; omnesq; anguli eiusdem recti, ob rectum A, vt ad defin. 1. huius lib. ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub A B, & segmento B G; quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F; [b] erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) vnà cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, [c] æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectę A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se ęqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



[a] 34. primi.

[b] 6. secũdi.

[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9.

Vbi

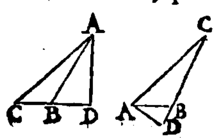
Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.

PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debeat maius segmentum lineæ datæ A B, excitata perpendiculari A D, ipsi datæ lineæ A B, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, æqualis, vt demonstratum est.

12. ## THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterũ A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, vna cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehẽso. Cũ enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunq;, erit



[a] erit quadratum rectę CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum C D, D A, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D: Eſt autem quadratis rectarum C D, DA, [b] æquale quadratum rectæ A C. Quare & quadratum rectæ A C, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, B D, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale ſit quadrarum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Quod eſt propoſitum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 4. ſecũdi.

[b] 47. primi.

[c] 47. primi.

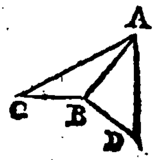
SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quanto maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium scholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM vero aſſumpſit Euclides, perpendicularẽ ductã ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtuſi protractũ, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triãgulo ABC, angulus ABC, obtuſus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiuſmodi eſt recta A D. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus B C, productum ad partes C, qualis eſt recta AF, eſſent rurſus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum.

SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.



IN triangulo A B C, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC, Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, lineæ B C, æqualis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, [a] *æquale est quadratis ex A B, B D, hoc est, ex AB,* B C: *Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & idcirco recta A D, minor quam recta A C. Itaque quia latera A B, BC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli AB D, vtrumque vtrique, & basis A C, maior est base A D;* [b] *Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus est. Igitur A B C, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*

[a] 47. primi.

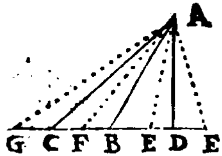
[b] 25. primi.

QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta A D, sitque quadratum lateris

lateris AC, maius quam quadrata laterũ A B, BC, rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Dico AD, ad C D, esse perpendicularem, & angulum A B C, obtusum. Si enim A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad C B, perpendicularis, quam dico cadere necessario in C B, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt A B, sit ad C B, perpendicularis. Erit igitur [a] quadratum ex A C, æquale quadratis ex A B, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in C B, demissa, in punctum B. [a]47.primi.



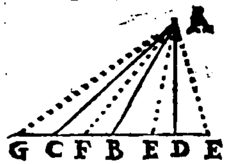
CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus B C, qualis est A F. Erit igitur [b] quadratum ex A C, æquale quadratis ex A F, F C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C. Igitur & quadrata ex A F, F C, maiora erunt quadratis ex A B, B C, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex A B, BC, maiora quadratis ex A F, F C, quòd recta A B, recto angulo A F B, opposita [c] maior sit quam A F, & B C, tota maior parte F C. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in C B. [b]47.primi. [c]19.primi.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad latus B C, demissa, in C, ita vt A C, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex A B, [d] æquale quadratis ex A C, C B, ac proinde quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, & propterea multo minus quadratis ex A B, B C, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad B C, demissa non cadit in C. [d]47.primi.

CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in B C, protractam ad partes C, qualis est A G. Quoniam igitur duo anguli, A G C, A C G, [e] minores sunt duobus rectis, estq́ AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde A C B, obtusus. Recta ergo A B, [f] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, ac proinde multo minus quadratis, ex A B, B C: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad C B, non cadat in B, neque inter C, B, neque [e]17.primi. [f]19.primi.

[a]17. primi.

in C, *neque extra* C, *cadet extra B, qualis est A D, vt demonstrabitur. Quare angulus* ABE, [a] *acutus erit, &* ABC, *obtusus. quod secundo loco proponitur demonstrandum.*



QVOD autem AD, *sit ad* CB, *perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur* AE, *ad* CB, *perpendicularis cadens vltra* B, *vt ostendimus. Quoniam igitur angulus* ABC, *ostensus est obtusus,* [b] *erit quadratum recta* A C, *maius quàm quadrata rectarum* AB, BC, *rectangulo bis comprehenso sub* CB, BE: *sed & quadratum eiusdem recta* AC, *maius ponitur quàm quadrata earundem rectarum* AB, BC, *rectangulo bis comprehenso sub* CB, BD. *Igitur quadrata ex* AB, BC, *vna cum rectangulo bis sub* CB, BD, *comprehenso aqualia erunt quadratis ex* AB, BC, *vna cum rectangulo sub* CB, BE, *bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum* AB, BC, *rectangulum bis sub* CB, BE, *comprehensum aquale erit rectangulo bis comprehenso sub* CB, BD, *ac proinde & rectangulum sub* CB, BE, *semel comprehensum aquale erit rectangulo semel sub* CB, BD, *comprehenso, & recta* BE, *recta* BD, *aqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo* AD, *ad* CD, *perpendicularis, & nulla alia. quod est propositum.*

IAM vero, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quòd posito vno latere triãguli quotlibet partium aqualium, alia latera, eorumque partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, sed sint linea illi lateri incommensurabiles: quod in pracedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita diuisa recta linea quotlibet partium aqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factũ est; prascribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesque eorum a lineis perpendicularibus facta sint linea commensurabiles: atque adeo veritas vtriusque theorematis in numeris quoque

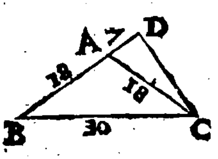
appareat

appareat: Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum est vel Isosceles, in quo tertium latus semper [a] maius est, quòd obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (æquilaterum enim esse non potest, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertiæ denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

[a] 19. primi.

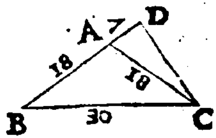
REGVLA I.

AD construendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. uel 28. &c. Deinde vtrũuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximũ autem obtuso angulo oppositum



eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo A B C, angulus A, sit obtusus, ductaque sit C D, ad B A, latus productum perpendicularis. Si igitur AD, cõstituatur partium 7, erit vtrumuis laterum AB, AC,

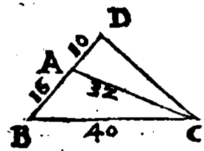
 partium



partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. addiderisque $\frac{4}{7}$. ipsius. Latus vero B C, erit partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxerisque $\frac{2}{7}$. ipsius. In hoc triangulo quadratũ lateris B C, est 900. cui æqualia sunt quadrata laterum AB, AC, nempe 324. 324. una cum rectangulo bis comprehenso sub A B, A D, hoc est, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, ut in hoc scholio ostendimus, erit ducta CD, ad BD, perpendicularis, & angulus BAC, obtusus. Quòd si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies A D, 14. & tam A B, quàm A C, 36. at B C, 60. Propositum quoque triangulum reperies, statuendo segmentum exterius A D, quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus quodcunque, à quo incipere uis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti AD, quadruplum superbipartiens septimas, utrumuis autem æqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.

REGVLA II.

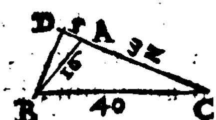
VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, ut 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{3}{5}$. habebis minimum latus. Si vero easdem partes dicti segmenti triplices, addasque $\frac{1}{5}$. vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in apposito triangulo segmentum A D, constituatur 10. erit A B. 16. A C, AC, 32. & BC, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris BC, quod est 1600. æqualia esse quadrata laterum AB, AC, nimirum 256. 1024. unà cum rectangulo bis sub AB, AD, comprehenso, id est, cum 160. 160.



Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtusum, ut supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD, statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96, BC, 120. & sic deinceps.

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, ut in præcedenti regula. Quas si triplices, addasque $\frac{1}{5}$. produces minimum latus: Si vero easdem multiplices per 6. adiungasque $\frac{2}{5}$. habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia existent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. unà cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160.



Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusque BAC, obtusus, ut in hoc scholio supra demonstrauimus.

Quòd si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius A D, partium 20. latus A B, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius A D, 50. latus A B, 160. A C, 320. & B C, 400. Atque ita in infinitum.

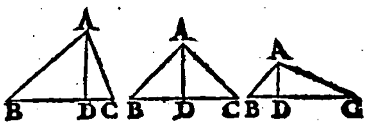
CAVE *autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vnà cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.*

13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triangulis, quadratum a latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duobus quadratis laterum A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarum B C, CD, [a] æqualia rectãgulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, [b] æquale est quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, [c] æquale sit quadratum rectę A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, CD, & quadrato rectæ A B. quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 7. secũdi.

[b] 47. primi.

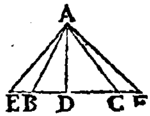
[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius,

maius, minusuè, & quanto maius sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus aut acutus.

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; Idẽ tamen verũ etiã est in triangulis rectãgulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs vero a quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione.



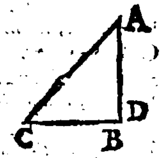
Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus.[a] *maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.*

a 16. primi.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A B, vt in rectãgulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

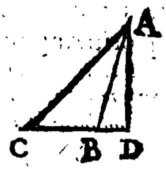
SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpẽdicularis ducatur A D, quæ eadem erit, quæ latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis

cularis cadit, & sub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C.



Cum enim quadrata ex A B, C B, [a] æqualia sint quadrato ex A C; [a] 47. primi. addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus, & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D, [b] æqualia sunt quadrato ex A C; [b] 47. primi.



addito quadrato ex C B, communi, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, [c] æquale est quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D. [c] 4. secũdi. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, vna cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, [d] æqualia quadrato ex A B. [d] 47. primi. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vna cum rectangulo sub C B, B D, [e] æquale est rectangulum sub C D, C B; [e] 3. secũdi. Ac propterea duplo quadrati ex C B, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, æquale est rectangulum bis sub C D, C B: Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D.

C D. *Quod est propositum.*

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex A C, [a] *maius est, quam quadrata ex* A B, B C, *rectangulo bis sub* C B, B D, *comprehenso, hoc est, quadratum ex* A C, *æquale est quadratis ex* A B, B D, *vnà cum rectangulo sub* C B, B D, *bis comprehenso; erit quadratum ex* A B, *minus, quam quadratum ex* A C, *quadrato ex* B C, *& rectãgulo sub* C B, B D, *bis: Ac proinde si quadrato ex* A C, *addatur quadratum ex* B C, *erit quadratum ex* A B, *minus quam quadrata ex* A C, B C, *quadrato ex* B C, *bis sumpto, & rectangulo bis sub* C B, B D, *comprehenso. Cum ergo quadrato ex* B C, *vna cum rectangulo sub* C B, B D, *contento,* [b] *æquale sit rectangulum sub* C B, C D, *contentum; erit quoque quadratum ex* A B, *minus quam quadrata ex* A C, C B, *rectangulo comprehenso bis sub* C B, C D. *Quod est propositum.*

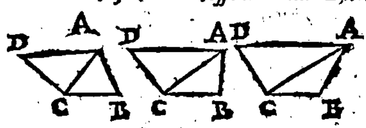
[a] 12. secũdi.

[b] 3. secũdi.

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio præcedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorũ: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo A B C, *quadratum lateris* A B, *minus sit, quam quadrata laterum* A C, C B. *Dico angulum* C, *quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex* C, *ad* A C, *perpendicularis* C D, *lineæ* C B, *æqualis; iũgaturque recta* A D.



Quoniã igitur quadratum ex A D, [c] *æquale est quadratis ex* A C, C D, *hoc est, ex* A C, C B: *Ponitur autem quadratum ex* A B, *minus quadratis ex* A C, C B; *Erit quadratum ex* A D, *maius quadrato ex* A B; *& ideo recta* A D, *maior quam recta* A B. *Itaque quia duo latera* A C, C D, *trianguli* A C D, *æqualia sunt duobus lateribus* A C, C B, *trianguli* A C B, *vtrumque vtrique; & basis* A D, *maior base* A B; [d] *Erit angulus* A C D, *maior angulo* A C B: *Sed* A C D, *rectus est, ex constructione. Ergo* A C B, *recto minor, & acutus erit.*

[c] 47. primi.

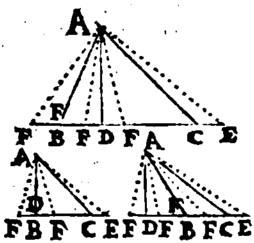
[d] 25. primi.

SED

SED & cõuersum huius propos. 13. oſtendemus, nimirũ.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.

IN triangulo A B C, ad latus B C, demittatur ex angulo oppoſito A, recta A D; ſitq́; quadratum lateris A B, minus quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo ſub B C, C D, bis comprehenſo. Dico A D, eſſe perpendicularem ad B C. & angulum A C B, acutum. Si namque A D, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad B C, perpendicularis, quam dico neceſſario cadere citra pũctum C, verſus B, hoc eſt, vel in latus B C, vel in punctum B, vel in latus B C, verſus B, productum. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in C, ita vt A C, ſit ad BC, perpendicularis. Erit igitur, quadratum ex A B, æquale quadratis ex A C, C B. quod eſt abſurdum, cum minus ponatur. Nõ cadit ergo perpẽdicularis ex A, deducta ad BC, in pũctũ C. a 47. primi.

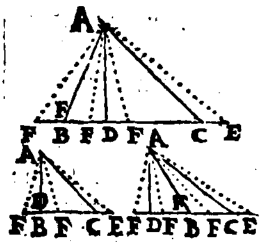


CADAT deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa vltra C, in E, qualis eſt A E. Erit igitur [b] *quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B. Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B. Igitur & quadrata ex A E, E B, minora erunt quadratis ex A C, C B. Cum ergo quadratum ex A C,* [c] *æquale ſit quadratis ex A E, E C; erunt quoque quadrata ex A E, E B, minora quadratis ex A E, E C, C B: Et ablato communi quadrato rectæ A E, erit reliquum quadratum ex E B, minus quoque quadra-*

b 47. primi.

c 47. primi.

quadratis ex E C, C B. quod est absurdum. Cum enim quadratum ex E B,[a] æquale sit quadratis ex E C, C B, unà cum rectangulo bis comprehenso sub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit ultra C: Sed neque in C, cadit, ut ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est A D, ut demonstrabitur, ac propterea[b] angulus A C B, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum.



[a] 4. secũdi.

[b] 17. primi.

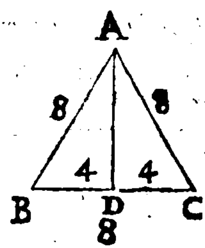
QVOD autem A D, sit ad B C, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, ut probatum est, ubicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B, siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpẽdicularem cadere in B; quia eadem esset, quæ A D. quod ille negat) Quia ergo angulus A C B, ostensus fuit acutus,[c] erit quadratũ ex A B, minus, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub B C, C F, hoc est, quadratum ex A B, unà cum rectangulo comprehenso bis sub B C, C F, æquale est quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum idem ex A B, unà cum rectangulo bis contento sub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, unà cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale erit quadrato eidem ex A B, unà cum rectangulo comprehenso bis sub B C, C F: Et ablato communi quadrato rectæ A B, rectangulum sub B C, C D, bis cõprehensum æquale erit rectangulo bis sub B C, C F, comprehenso: ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub B C, C D, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub B C, C F, ideoq; & recta C D, C F, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

[c] 12. secũdi.

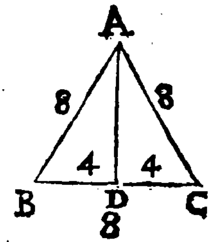
QVEMADMODVM autem in scholio superioris propo-

propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, siue maius illud sit, siue minus vtrouis æqualiũ. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisque in alterutrum æqualium laterum cadit: Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit: Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus: Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur: Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est. vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.



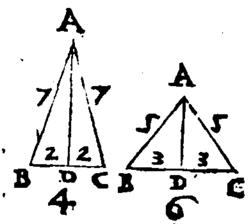
SI quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo æquilatero A B C, *diuidet perpendicularis* A D, *oppositum latus* B C, *bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus*



strauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta BD, CD, *4. 4. Vbi vides quadratum lateris* AB, *angulo acuto* C, *oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1. hoc est, 64. vnà cum rectangulo bis contento sub* BC, CD, *id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum* AC, CB, *nempe 64. 64.*

REGVLA II.

SI vtrumque laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroque simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquã latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles.

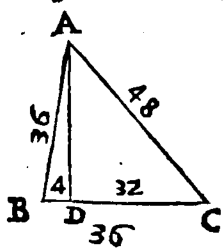


Vt si in priori horum Isoscelium vtrumuis latus AB, AC, *statuatur 7. & BC, 4. In posteriori autem vtrumlibet* AB, AC, *5. &* BC, *6. Cum ergo perpendicularis* AD, *diuidat basim* BC, *bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. erunt segmenta* BD, CD, *in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori vero 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris* AB, *angulo acuto* C, *oppositi, (vterque enim angulus* B, C, *acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenso sub* BC, CD, *æquale esse quadratis simul laterum* AC, CB. *&c.*

REGV-

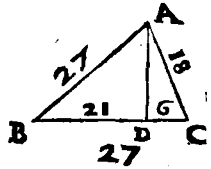
REGVLA III.

IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, easq; per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; segmenta simul addita conflabunt vtrumq; laterũ æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus vero AC, 48. & vtrumq; latus AB, BC, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cũ 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoq; quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in B D, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis vero æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.



REGVLA IIII.

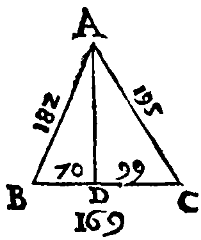
IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmẽtũ si statuas quotuis partiũ numero pariũ, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earũ



medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si vero easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique æqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9. producetur. Vt si in Isoscele ABC, minus segmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atque tam AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nimirum 729. vnà cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

IN Scaleno triangulo, in quo perpẽdicularis in minimũ latus demittitur, erit segmentũ basis iuxta mediũ latus, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstratũ est. Quod segmentũ si constituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partiũ 70. vel 140. vel 210. &c. eisq́ addantur earum $\frac{29}{70}$. confectum erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimũ latus. Si vero partes minoris segmenti duplicentur, & producto adijciantur $\frac{42}{70}$. hoc est, $\frac{3}{5}$. earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiusdem minoris segmenti duplicentur, productoq́ $\frac{55}{70}$. id est, $\frac{11}{14}$. earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est, 33124. vnà cum numero, qui bis fit ex BC, in CD id est,

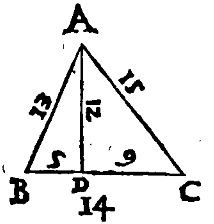


cum

cum 16731.16731.conficit numerum 66586.æqualem duobus simul quadratis 38025.28561.laterum AC, CB, &c.

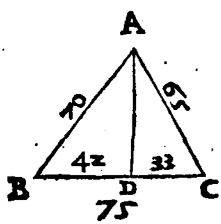
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. ostendimus, minus segmentũ minimo lateri adiacens. Quod segmẽtũ si statuatur tot æqualiũ partium, vt à 5. numerẽtur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eisque addantur $\frac{4}{5}$. confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collecta component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat 5. erit segmentum maius CD, 9. & totum latus BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.



REGVLA VII.

IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq́ addantur $\frac{9}{33}$. hoc est, $\frac{3}{11}$. fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adijciantur $\frac{4}{33}$. producetur medium latus. Si deniq; eidem numero lateris maximi apponantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur minimum

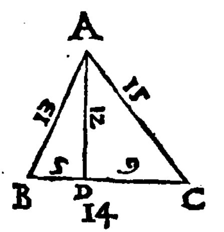


nimum latus. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum C D sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumque latus maximum BC, 75. & medium AB. 70. & minimum AC, 65. &c.

QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium, si modo proportiones seruentur, quas supradictis regulis expressimus.

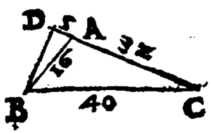
HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque uero hoc regulæ illæ docent, sed vsus earum in eo solum consistit, ut seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodentur.

IAM vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regulæ 6. si in triangulo ABD, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex



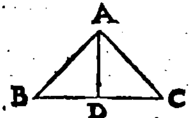
BD, in BD, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latus BD, statuatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris A D, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. una cum eo, quod fit ex BD, in BD, bis, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. vna cum eo, quod fit ex A D, in AD, bis, id est, *id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum* AB, AD, *nimirum* 100. *& 64. Denique si in alio triangulo* ACD, *minimum latus* CD, *ponas 9. reperies ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus*, AD, 40. *&* AC, 41. *Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris* AD, *angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vnà cum numero, qui fit ex* CD, *in* CD, *bis; id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum* AC, CD, *hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quòd si minimum latus* CD, *facias 7. comperies* AD, 24. *&* AC, 25. *in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris* CD, *angulo acuto* A, *subtensi, id est, 49. vna cum numero, qui bis producitur ex* AD, *in* AD, *hoc est, cum 576. 576. facere 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum* AC, AD, *hoc est, 625. 576.*

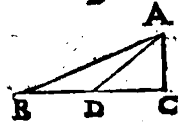
AT si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentū namque exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD, *inter angulum acutum* C, *& perpendicularem* BD, *cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est quadratum lateris* AB, *angulo* C, *acuto oppositi, hoc est, 256. vnà cum rectangulo sub* AC, CD, *comprehenso bis, id est, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum* BC, AC, *nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.*



NEQVE vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.





IN triangulo ABC, recta AD, secet latus BC, bifariam in D. Dico quadrata ex AB, AC; dupla esse quadratorum ex AD, BD. Demittatur enim ex A, ad BC, perpendicularis, quæ primũ rectæ AD, congruat, ac proinde triangulum ABC, æquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. [a] *Quoniam igitur tam quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AD, DB, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, DC; erunt duo quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AD, bis sumpto, vnà cum quadratis ex DB, DC. Cum ergo quadrata ex DB, DC, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex AD, DC, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex AD, bis sumpti, & quadratorum ex DB, DC. Quare duo quadrata ex AB, AC, dupla sunt duorum quadratorum ex AD, DB. quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur.* [b] *Quoniam quadratum ex AB, duobus quadratis ex AD, DB, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex AB, AC, quadrati ex AB, dupla, ob æqualitatem linearum AB, AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod demonstrandum erat.*

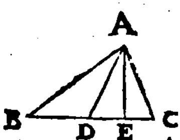
[a] *47. primi.*

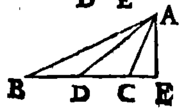
[b] *47. primi.*

CONGRVAT deinde perpendicularis AC, lateri AC. Et quia quadratum ex BC, quadruplum est tam quadrati ex BD, quam quadrati ex DC, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex BC, duplum duorum quadratorum ex DB, DC. Sunt autem duo

duo quadrata ex A C, C D, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex A D; quòd [a] quadrata ex A C, C D, semel sumpta æqualia sint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, vnà cum quadratis ex A C, C D, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cum ergo & quadratum ex C D, bis sumptum, duplum sit quadrati ex C D; [b] erit reliquum quadratum ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Sunt autem [c] quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia sunt quadrato ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis sumpto) dupla quoque sunt quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum. [a] 47. primi. [b] 20. pron. [c] 47. primi.

TERTIO cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur [d] quadrata ex B E, E C, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex A D; quòd [e] quadrata ex A E, E D, semel sumpta quadrato ex A D, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, vna cum quadratis ex A E, D E, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cum ergo & quadratum ex D E, bis sumptum, duplum sit quadrati ex D E; [f] erunt reliqua quadrata ex B E, E C, vna cum quadrato ex A E, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Quare cum quadratis ex B E, A E, [g] æquale sit quadratum ex A B; & quadratis ex E C, A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum. [d] 9. secũdi. [e] 47. primi. [f] 20 pron. [g] 47. primi.





POSTREMO cadat perpendicularis A E, in latus B C, productum. Quoniam igitur [h] quadrata ex B E, C E, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex A D; quòd [i] quadrata ex A E, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex A D; erunt quadrata ex B E, C E, vna [h] 10. secundi. [i] 47. primi.

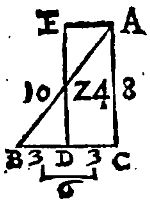
cum quadratis ex A E, DE, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. *Cum ergo & quadratum ex* DE, *bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex* DE; [a] *erunt reliqua quadrata ex* BE, CE, *unà cum quadrato ex A E, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex* BD, AD. *Quare cum quadratis ex* BE, AE, [b] *æquale ſit quadratum ex* AB; *& quadratis ex* CE, AE, *quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex* AB, *A C, dupla quadratorum ex A D,* DB. *Quod erat oſtendendum.*

[a] 20. pron.

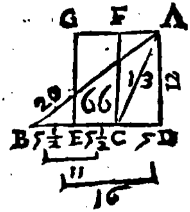
[b] 47. primi.

NON *te moueat autem, quod ad huius theorematis demonſtrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod uniuerſaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi poteſt ſine demonſtratione, ut in expoſitione eius principij diximus: Vel propoſitio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonſtrari poteſt: Vel certe theorema ipſum poſt librum 5. demonſtrari; ita ut circulus in demonſtrando nulla ratione committatur, etiamſi principium illud demonſtretur libro 5. quia propoſitio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.*

EX *his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propoſ. 47. lib* 1. *demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inueniemus, ut rectè hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonſtrat, hac ferè ratione. Sit primo triangulum rectangulum* ABC, *cuius latera nota ſint, nempe* AB, 10. *palmorum;* AC, 8. BC, 6. *Diuiſo latere* BC, *biſariam in* D, *ut ſint* CD, BD, 3. *palmorum, perficiatur rectangulum* ACDE, *quod æquale eſt triangulo* ABC, *ut in ſcholio propoſ. 41. lib.* 1. *oſtendimus. Quia vero ex ductu* CD, *trium palmorum in* CA, 8. *palmorum producitur area rectanguli* CE, 24. *palmorum quadratorum, ut ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum* ABC, *rectangulo* CE, *æquale. Quod eſt propoſitum.*



SIT



SIT deinde triãgulum obtusangulum *A* B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorũ; A C; 13. B C, 11. Primũ igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ *A D*, ex *A*, in latus B C, protractum demissa, hoc modo. Quoniã quadratum lateris A B, [a] maius est, quã quadrata laterũ *A C*, B C, rectãgulo bis cõprehenso sub B C, C D; si quadrata laterũ A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis cõprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidiũ 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorũ, ut Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratũ est in libro de mensurationibus omnium quãtitatum. Quia vero quadrata laterum *A D*, *C D*, [b] æqualia sunt quadrato lateris *A C*; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris *C D*, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris *A C*, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris *A D*. Quare latus *A D*, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam vero diuiso latere B C, bifariã in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ *A G*, quæ per *A*, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est [c] enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis &c.) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

[a] 12. secũdi.

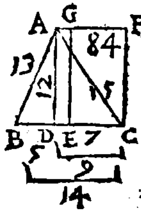
[b] 47. primi.

[c] 34. primi.

SIT postremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13. palmorum; A C, 15. B C, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis A D, ex *A*, ad B C, demissa, hac ratione. Quoniam quadratum lateris A B, [d] minus est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum

[d] 13. secũdi.

tum lateris A B, *nimirum* 169. *detrahatur ex quadratis laterum* A C, E C, *hoc est, ex* 225. 196. *quæ efficiunt* 421. *remanebunt* 252. *pro rectangulo comprehenso bis sub* B C, C D, *cuius numeri dimidium* 126. *dabit rectangulum sub* B C, C D. *Si igitur* 126. *rectangulum sub* B C, C D, *diuidatur per* B C, *latus notum, vt per* 14; *exibit reliquum eius latus* C D, *palmorum* 9. *vt constat ex Ioan. Regiom. lib.* 1. *de triangulis propos.* 17 *& à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex* A D, C D, [a] *æqualia sunt quadrato ex* A C; *si quadratum* 81 *palmorum, nempe lateris* C D, 9. *palmorum nuper inuenti, auferatur ex* 225. *quadrato lateris* A C; *remanebunt* 144. *palmi pro quadrato lateris* A D. *Quare cum radix quadrata huius numeri* 144. *sit* 12; *erit latus* A D, 12. *palmorum. Iam vero diuiso latere* B C, *bifariam in* E, *educantur ex* C, E, *ad* B C, *perpendiculares* C F, E G, *occurrentes rectæ* A F, *quæ per* A, *ipsi* B C, *parallela ducitur, in punctis* G, F. *Quibus peractis, si* C E, 7. *palmorum ducatur in* E G, 12. *palmorum; (est enim* E G, *recta ipsi* A D, *æqualis) exurget area rectanguli* E F, *palmorum* 84. *Quod cum triangulo* A B C, *sit æquale, ex scholio propos.* 41. *lib.* 1. *(sunt enim rectangulum* E F, *& triangulum* A B C, *in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli* A B C, 84. *palmorum. Quod est propositum.*



[a] 47. primi.

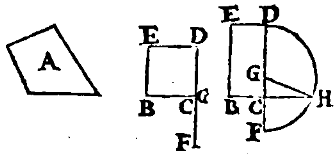
ITAQVE *in vniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.*

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, sitque C F, recta equalis recte BC. Diuidat quoque DF, bifariam in pũcto G, quod cadet aut in pũctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, [b] æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, [c] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, [d] æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vna cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus. Quod facere oportebat.

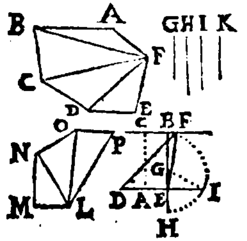


[a] 45. primi.
[b] 34. primi.
[c] 5. secũdi.
[d] 47. primi.

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiusque triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum A B C D E F, resoluemus illud in triãgula A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusque latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas LM, MN, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem N O, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusque rectam P L. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc est, datæ figuræ rectilineæ A B C D E F.



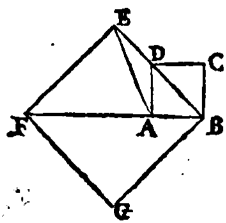
PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo D E F, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe D E, bifariam in A, producaturque quãtum libet. Ducta deinde per angulum oppo-

situm F, lateri D E, parallela F B, ducatur per E, ad D H, perpendicularis H E B, secans F B, in B, sitq; E H, ipsi A E, dimidio lateris D E, aequalis. Postremo, diuisa tota linea B H, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum G H, vel G B, arcus secans latus D E, productum in I. Dico quadratum lateris E I, aequale esse triangulo D E F. Si namque compleatur rectangulum A E C, & semicirculus B H, ducaturq; recta G I, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex E I, rectangulo A B, aequale esse. Cum ergo rectangulum A B, triangulo D E F, sit aequale, ex scholio propos. 41. lib. 1. quod basis D E, sit dupla basis A E, constat propositum.

QVONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato non iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

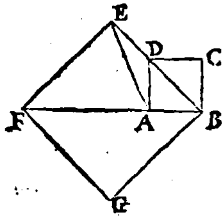
EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumq; sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum AC, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt sit D E, recta recta A D, aequalis. Dico rectam E B, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B. Ducatur enim E F, perpendicularis ad B E, quae rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus F E B, rectus est, & E B F, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4.



huius lib.[a] *erit & B F E, semirectus.*[b] *Quare recta B E, F E, aequales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratum recta B E. Quod si ducatur recta*

[a] 32. primi.
[b] 6. primi.

[a] 5.primi.



cta A E, erunt anguli A E D, E A D, [a] æqualibus lineis D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt anguli A E F, E A F, æquales; [b] ideoq́ recta E F, A F, æquales erunt. Quoniam vero, diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B, quod est propositum.

[b] 6.primi.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLI-

EVCLIDIS

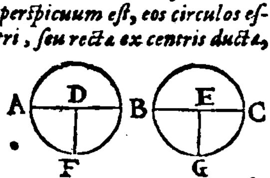
ELEMENTVM TERTIVM

DEFINITIONES.

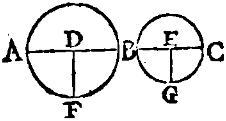
I.

AEQVALES circuli ſunt, quorũ diametri ſunt æquales; vel quorum, quę ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.

QVONIAM. Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demõſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt vſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe aquales, quorum diametri, vel ſemidiametri aquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe aquales, quorum ſemidiametri, ſeu recta ex centris ducta, ſunt aquales; vel etiam quorũ tota diametri aquales sũt. Vt ſi diametri A B, B C, vel recta D F, E G, è centris D, & E, ducta ſint aquales, aqua



les

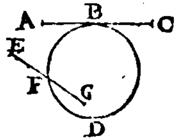


les erunt circuli A F B, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris ſunt inæquales, inæquales eſſe; atque adeo illum, cuius diameter, vel ſemidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, ſemidiametrosuè inæquales eſſe, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

II.

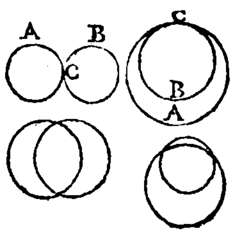
RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

VT recta A B, ſi ita circulum B F D, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum ſecet, ſed tota iaceat extra ipſum, dicetur tangere circulum. At vero recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, ſecet circulum, cadatq́; intra ipſum, non dicetur circulum tangere, ſed ſecare.



III.

CIRCVLI ſe ſe mutuo tangere dicuntur, qui ſe ſe mutuo tangentes, ſe ſe mutuo non ſecant.



EODEM modo duo circuli A C, B C, ſe mutuo dicuntur tangere in C, ſi ita ſe ſe contingant in C, vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius ſe ſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus; aut interius, quando vnus intra alterum conſti-

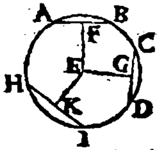
constituitur. Quòd si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

IIII.

IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recta distantia illius puncti a linea illa recta nõcipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta B C, *dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel* A F, *vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est; quia* A D, *omnibus est breuior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum* A E, A F, *maiores sunt, quam* A D, *sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim* A F, [a] *maior, quã* A E, *cum angulus* A E F, *sit obtusus, &* A F E, *acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quod enim* A F E, *acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo* A D F, *duo anguli* A D F, A F D, [b] *minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum* A D F, *rectus sit, angulum* A F D, *recto esse minorem. Eadem ratione angulus A E D, ostendetur acutus, propterea quòd in triangulo A D E,* [c] *duo anguli A D E, A E D, minores sunt duobus rectis, & A D E, rectus est.) ac proinde, cum ambo A E D, A E F,* [d] *æquales sint duobus rectis, erit A E F, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per*

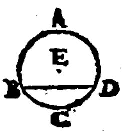
[a] 19. primi.
[b] 17. primi.
[c] 13. primi.
[d] 17. primi.



inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abesse dicetur a centro E, quam linea H I, si perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.

V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

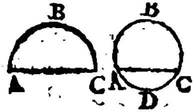


VT si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta B D; quam figura B C D, comprehensa recta B D, & circumferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum B C D. Id quod ad defin. 18. lib. 1. demonstrauimus. Vocatur a plerisque Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmenti, dicens,



cens, angulum mixtum B A C, vel B C A, contentum sub recta linea A C, & circumferentia A B C, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

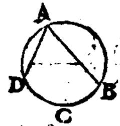
VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

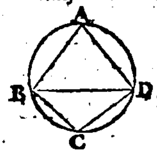
SIT segmentum circuli quodcunq; ABC, cuius basis recta AC. Ex suscepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, recta linea BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC.

VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.



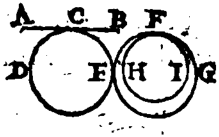
EX puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuiusque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, insistere dicitur circumferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac vero insistere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmẽtũ aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circumferentiæ B C D, insistens, erit angulus B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus existunt; vt eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circumferentiam B C D.



PRÆTER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel B C E, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus

C E D,

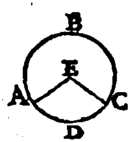
CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tã angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentia, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.



IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

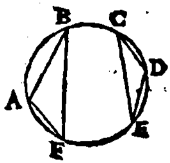
SI in circulo ABCD, cuius centrum E, rectę AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis AE, CE, assumptæ: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quã rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.



X.

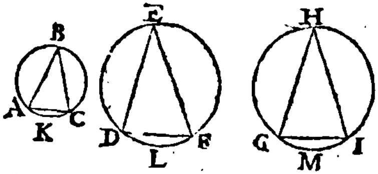
SIMILIA circuli segmenta sunt,

quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.



SEGMENTA, seu circumferentiæ ABDF, DCAE, eiusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.

EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes.



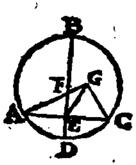
Consistit aũt hæc segmentorum, circumferentiarũue similitudo in eo, quòd qualis pars est una circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia A B C, totius circumferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars sit circumferentia D E F, totius circumferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circumferentia G H I, totius circumferentiæ G H I G. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quòd segmenta; seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, uel etiam arcus, circunferentiasue, appellari similes.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes,

similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve AKC, DLF, GMI, quibus insistunt, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, [a] quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hæc igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (a centro enim ducuntur) [b] erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.
[b] 8. primi.

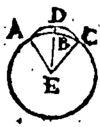
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua

qua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

2. THEOR. 1. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.



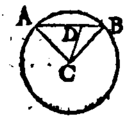
IN circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetque E D, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) [b] erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus E D A, [c] angulo E C D, maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, opposita, hoc est, recta E B, sibi æqualis. [d] maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, opposita, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur,

[a] 1. tertij.
[b] 5. primi.
[c] 16. primi.
[d] 19. primi.

tur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum A B C, ita vt eadem sit, quæ circumferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectę lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo qualibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli A B, cuius centrum C. Dico rectam A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, [a] erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem angulus C D A, [b] angulo C B A, maior, externus interno. Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A, [c] latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circumferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod est propositum.



a 5. primi.
b 16. primi.
c 19. primi.

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tãtum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, [d] caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

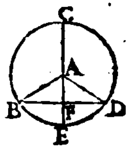
d 2. tertij.

THEOR.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli B C D, recta C E, extensa diuidat rectam B D, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam A F, esse ad angulos rectos ipsi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & bases A B, A D, æquales. [a] Igitur anguli A F B, A F D, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.



[a] 8. primi.

SIT iam A F, ad angulos rectos ipsi B D. Dico rectam B D, bifariam secari in F, à recta C E. Ductis enim iterum rectis A B, A D; cum latera A B, A D, trianguli A B D, sint æqualia, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, æquales sunt duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F; & latera A B, A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [c] erunt latera F B, F D, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 5. primi.
[c] 26. primi.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim A F, perpendicularis est ad B D, erit tam quadratum rectæ A B, [d] æquale quadratis rectarum A F, F B, quam quadratum rectæ A D, quadratis rectarum A F, F D. Cum igitur quadratum rectæ A B, æquale sit quadrato rectæ A D; erunt & quadrata rectarum A F, F B,

[d] 47. primi.

F B, æqualia quadratis rectarum A F, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atque idcirco & rectæ F B, FD, æquales erunt.

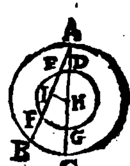
COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim: Et contra, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia sunt, ex eo, quod recta A F, secat basim B D, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basim B D, à recta A F, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

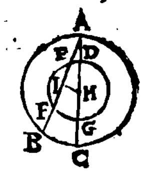
DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circunferentiæ exterioris recta ducatur interioris circunferentiam secans: erunt eius segmenta inter vtramq; circunferentiam posita, inter se æqualia.



DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta A C, secans circunferentiam interiorem in D, G. Dico rectas A D, C G, æquales esse. Nam si ex H A, H C, quæ[a] æquales sunt, demantur H D, H G, quæ eadem ratione æquales sunt,[b] erunt recta

[a] 15. def.
[b] 3. pron.

recta A D, C G, æquales.



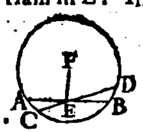
DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, non per centrum, secans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rursus, rectas A E, B F, esse æquales. [a] Ducta enim ex centro H, ad A B, perpendiculari H I, [b] secabit hæc tam rectã A B, in circulo ABC, quã rectã EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus I E, I F, ex æqualibus I A, I B, [c] remanebunt A E, B F, æquales. quod est propositum.

[a] 12. primi.
[b] 3. tertij.
[c] 3. pron.

4. THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquã bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. [d] Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab



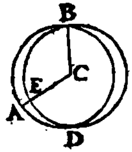
eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, [e] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 1. tertij.
[e] 3. tertij.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5. 5.

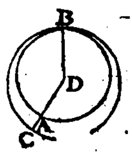
SI duo circuli ſeſe mutuo ſecent; nõ erit illorum idem centrum.



DVO circuli A B D, E B D, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem cẽtrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad ſectionem B; C A, vero ſecans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, [a] æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat. [a] 1 pron.

THEOR. 5. PROPOS. 6. 6.

SI duo circuli ſe ſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVO circuli A B, B C, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, a quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, ſecans vtramque circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, equalis. Quare rectę A D, & C D, [b] inter ſe erũt æquales, pars & totũ, quod eſt abſurdũ. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo interius tangãt, &c. Quod demonſtrandũ erat. [b] 1. pron.

SCHO-

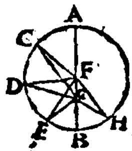
SCHOLIVM.

EVCLIDES proposuit theorema hoc de circulis se se interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius se se tangentium, tum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

7. ## THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam esse G A, in qua est cētrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam G C, quæ rectæ G A, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta G D, quæ ab eadem G A, plus distat; & eadem ratione G D, maiorem recta G E; atq; ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineę GB, vel maximæ GA, duci posse tantūmodo duas lineas inter se æquales. Ducantur



cantur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, [a] maiora sunt latere GC; Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, maior quam GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt. [a] 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, [b] minus est duobus lateribus FG, GE; Est autem EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt. [b] 20. primi.

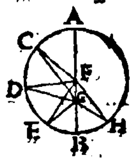
RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior est angulo GFD; [c] erit basis GC, maior base GD. Eadem ratione maior erit GC, quam GE: Item maior erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior. [c] 24. primi.

FIAT iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æqualis; [d] erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 4. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVAMQVAM autem Euclides solum demonstrauerit, lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si ambæ lineæ ex eadem parte diametri A B, existant: idem tamen verum etiã est, si ad diuersas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam G D, propinquiorem esse rectæ G A, quam rectam G H; dico G D, maiorem esse, quam G H. Si namque ipsi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum est, nempe si fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, distent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur magis distare, quam G H, ac proinde magis, quam G E. Cum ergo G D, maior sit, quam G E, maior quoque erit eadem G D, quam G H.



7. tertij.

HANC porrò propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ, vel minimæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.

IN circulo A B C, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima vero D C; ipsarum vero D E, D F, maior sit D E; denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, quæ maior ponitur quam D F, propinquiorem esse maximæ D A, quam D F.

D F. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abesse. Primum enim si D A, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, [a] erit ea omnium ex D, cadentium maxima Quod est absurdum; cum D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum. [a] 7. tertij.

DEINDE si D C, non est in directum ipsi DA; protracta A D, in directum, [b] erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum D C, minima ponatur. Est ergo D C, reliqua pars diametri. [b] 7. tertij.

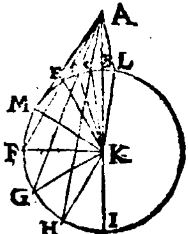
RVRSVS si DE, non est vicinior maxima DA, quam DF; aut æqualiter distabunt ab ea, aut D E, longius ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à D A, dicantur distare, [c] ipsæ erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim D E, maior. Si uero æqualiter ex eadem parte à DA, distare dicantur, erunt DE, DF, vna eademq; linea; atque adeo D E, maior non erit, quàm DF, quod est contra hypothesim. Quod si DF, dicatur esse propinquior maximæ D A, [d] ipsa erit maior, quam D E. Quod magis est absurdum. [c] 7. tertij. [d] 7. tertij.

POSTREMO si D E, D B, non æqualiter distant à D A, vel D C, [e] erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB. [e] 7. tertij.

THEOR. 7. PROPOS. 8. — 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimę, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ rectæ A I, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione A G, maiorem quam A F.



E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, minorem, quam A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ A I, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, [a] maiora ſunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc eſt, toti rectæ A I; erit & A I, maior

[a] 20. primi.

ior, quam A H. Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quam A F. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; [a] erit basis A H, base A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F: Item A G, maior, quam A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore. [a] 24. primi.

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, [b] minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est. [b] 20. primi.

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; [c] erunt A C, C K, minores, quam A D, D K. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem. [c] 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; [d] erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ A I, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam A L. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 4. primi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ A I.

FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturque recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: [a] erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.

[a] 4. primi.

HÆC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta A M, in priori figura. Nam ducta recta K M, ex centro ad contactum, erunt duo latera A K, K F, trianguli A K F, æqualia duobus lateribus A K, K M, trianguli A K M, angulus vero A K F, angulo A K M, maior. Igitur [b] basis A F, base A M, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta A M.

[b] 24. primi.

PARI ratione eadem linea tangens A M, maior erit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cum duo latera A E, E K, [c] minora sint duobus lateribus A M, M K; si auferantur æquales rectæ K E, K M, erit reliqua A E, minor quam reliqua A M. Eademque ratio est de cæteris.

[c] 21. primi.

QVAMQVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR.

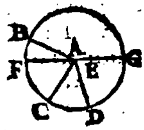
THEOR. 8. PROPOS. 9. 9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; [a] erũt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. primi.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, [b] sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; [c] erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quam recta A C, remotior ab A G. quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



[b] 1. tertij.

[c] 7. tertij.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; [a] erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quàm A B, & A C. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

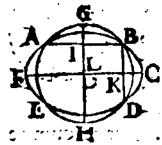
[a] 7. tertij.

10.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus A B C D E F, circulum A G B D H E, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis A B, BD: quibus [b] bifariam diuisis in I, & K, [c] educantur ex I, & K, ad A B, & B D, perpendiculares I L, K L. Quoniam igitur rectæ I L, K L, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli A B C D E F. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, [d] quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.



[b] 10. primi.
[c] 11. primi.
[d] 5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. [e] Inuentum autem sit I, centrũ circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, I B, I D, quę per defin. circuli ęquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum A B C D E F, assumptum est punctum I, a quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, [f] erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem

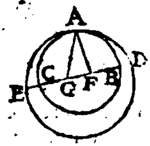
[e] 1. tertij.
[f] 9. tertij.

autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. [a] Quod est absurdum. [a] 5. tertij.

THEOR. 10. PROPOS. 11. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum cenrra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, [b] non possint idem centrũ habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, [c] maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE.) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quam FD, pars quàm totum, quod est absurdum. [b] 6. tertij. [c] 20. primi.



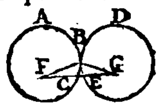
QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione: In triangulo AFG, duo latera FG, GA, [d] maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponatur esse centrum circuli ABC,) erit [d] 20. primi.

quoque G C maior, quam G E, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

11. ## THEOR. 11. PROPOS. 12.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli A B C, sit F, circuli vero D B E, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, ᵃ maiora sunt latere F G: Est autem recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



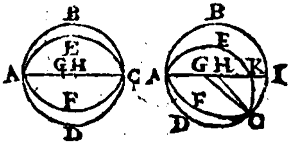
ᵃ 20. primi.

13. ## THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TAN-

TANGANT sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [a] quæ diuersa erunt; per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est [b] cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrũ, & recta AGHC, diameter, diuidet A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidiũ totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.



[a] 6. tertij.

[b] 11. tertij.

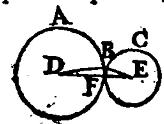
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera GH, HC, [c] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quòd HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ G I; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quàm G I, pars quàm totum. quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ H G, G C, [d] maiores sunt recta HC; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A. Quare dempta communi

[c] 20. primi.

[d] 20. primi.

communi HG, erit GC, maior, quam G A. quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis. quam vno.

TANGANT se iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, [a] quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis D B, E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi DE: [b] Sunt autem & maiores. quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.



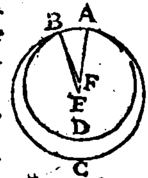
[a] 12. tertij.
[b] 20. primi.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra vnum circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SI recte consideretur Euclidis demonstratio, quæ probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potissimum concludere; circulum non posse tangi a circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo a se dissideant; non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno; ostendemus breuiter, in vno eodemq́ contactu non posse esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, [c] quæ diuersa sunt, recta ducatur E F, [d] quæ ad contactum perueniet necessario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si n. se tangant in alio etiã puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F, [e] erunt rectæ E F.

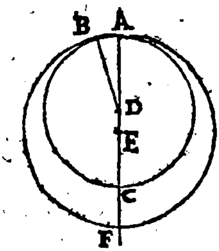
[c] 6. tertij.
[d] 11. tertij.
[e] 20. primi.



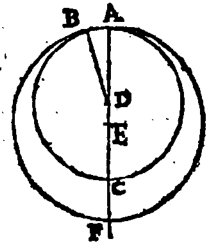
E F, F B, maiores recta E B. Est autem recta E B, aequalis recta E A, cum vtraque sit ex centro E. Igitur & recta E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quam F A. quod est absurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. aequales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli A B C, A B D, & non in alio.

NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.



SIT circulus A B C, cuius centrum D, & in semidiametro A D, producta sumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum E A, circulus describatur A F, quem dico circulum A B C, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum A B C, aut extra. Si intra, quoniam A E, maior est, quàm A D, hoc est, quàm D C, hoc est, à fortiori, quàm E C; erit quoque E F, quae ipsi A E, aequalis est, maior quàm E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, existet, circulusque A F, extra eundem circulum A B C, prope punctum F, existet. Multò magis punctum F, extra circulum A B C, cadet, si E, extra eundem circulum A B C, existet. Si igitur circulus A F, non totus extra circulum A B C, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat; secet, vel tangat circulus A F, circulum A B C, in alio puncto B, si fieri potest, duca-



ducaturq́; recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, sumptum est punctum D, præter centrum E,[a] erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo D A, quã D B. quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circumferẽtiam eiusdem circuli A B C. Non ergo circulus A F; circulum A B C, secat aut tangit in alio puncto, quàm in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.

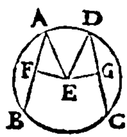
[a] 7. tertij.

QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoq; priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq́; intra eundem cadet. Vt si in semidiametro A E, circuli A F, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus describatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq́; eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proximè sit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuò in solo puncto A, contingant.

13.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distant a centro, æquales sunt inter se.



SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, ED. [b] Secabunt rectæ

[b] 3. tertij.

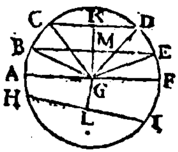
rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ E A, [a] æquale est quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum D G, G E. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoq; & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E. [a] 47. primi.

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares E F, E G; quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [b] diuidentque rectas A B, C D, bifariam. Ductis igitur rectis E A, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ E A, [c] æquale quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 3. tertij. [c] 47. primi.

THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo A B C D E F, cuius centrum G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & HI, maiorem, quam



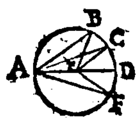
quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, a centro, quam H I, erit G K, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad G K, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, G L, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ B E, HI, a centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, [b] maiores quidem sunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E. Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, GD, trianguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo C G D; [c] erit recta B E, maior quam C D; atque adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit, quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 14. tertij.
[b] 20. primi.
[c] 24. primi.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab vno, eodemq; circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarũ AD, per centrum E, transeat. Dico A D, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, [d] maiora sint latere AC; sintque rectæ AE, EC, æquales rectis A E, E D, hoc est, recta A D; maior erit A D, quam A C. Eademque ratione maior erit, quam A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.



[d] 20. primi.

DEINDE, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C, æqualia sunt duobus lateribus A E, E B, trianguli A E B; & angulus A E C, totus maior est angulo A E B; erit a erit basis A C, maior base A B. Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est. a 24. primi.

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad vtrasque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F, æquales; b erunt bases A C, A F, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra A C, ea maior erit, vt iam demonstratum est. b 4. primi.

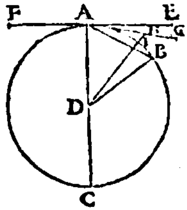
QVOD si A B, AF, ad diuersas partes diametri A D, ducta sint, & dicatur A F, propinquior centro, quàm A B, demonstrabitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. A F, maiorem esse, quàm A B. Si namque, vt proximè ostensum fuit, ducatur ipsi A F, æqualis A C, ex altera parte, nempe si fiat angulo A E F, æqualis angulus A E C, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quòd AF, AC, c æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos A E F, A E C. Hinc enim fit, cum A F, ponatur propinquior centro, quàm A B, vt & A C, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam A B, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quàm A B, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF, quàm A B. c 14. tertij.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

QVAE ab extremitate diametri cuiusq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriã comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, púcto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB; ducta DB, [a] erunt duo anguli DAB, DBA, æquales; sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo [b] minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpẽdicularis intra circulum; neq; eãdem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iã ex A, inter AE, rectã, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I. quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Qm igitur in triangulo DAH, [c] duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, [d] maior erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cũ AC, angulũ rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cũ AE, angulum rectilineũ acutũ maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demon-

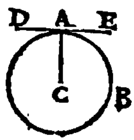


[a] 5. primi.
[b] 17. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro A C, & circumferentia A B C, cum ille huius sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea A E, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto B A E, quòd ille huius pars sit, Eademque ratio est de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quę ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

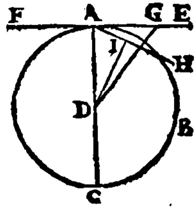
HINC manifestum est, rectam a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.



QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam A C, & ad eam excitabimus perpendicularem D A E. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triangulo



ADG, duo anguli DAG, DGA, [a] minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA, recto minor. Quare [b] maior erit recta DG, quã DA; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque est ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur cõmuni angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoque minores duobus rectis: Quare [c] coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI, [d] æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA, [e] maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propthereaque punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta AH, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.

a 17. primi.
b 19. primi.
c 13. pron.
d 32. primi.
e 19. primi.

SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

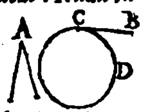
CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas

titas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

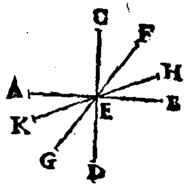
SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

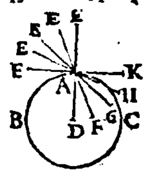
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, BCD, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus a reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuò ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non



videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstrãda, *alijsque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.*

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidē angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tū enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, prateriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea E D, facta sit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non tam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq; spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, linea recta manere in sua recto, punctumque A, peripheria in sua rotundo; neque



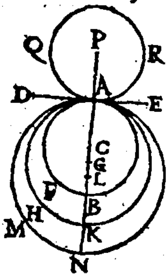


vtrumque

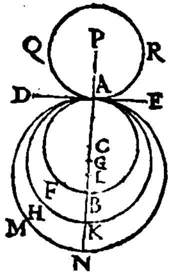
vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contraposita fiant manifestiora; Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B G, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repraesentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos haec Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimasexta, lineam DE, cõtingere ipsum A F B A, circulum: ac propterea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partẽ huiusce decimasexta. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, centrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, nõ esse quantitatem. Constat quippe circulum A H K A, trasire inter rectam D A, & curuam A F, cùm sit semidiameter



G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam DE, tangere ipsum A H K A, circulum, ex eodem huiusce decimasexta consectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertiò, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum,



quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo : ac sic omnes aequales, si modo aequalitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus DAM, erit aequalis contactui DAF: Fietque ut MAF, contactus interior circulorum neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt aequales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac aequalitate angulorum non excluduntur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, aequalis utrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa utique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante ultima parte huius decimasexta : neque per obliquam, ut per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, ut modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad punctum

punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; DAF, sit quantitas, per secundam earundẽ; neq; DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

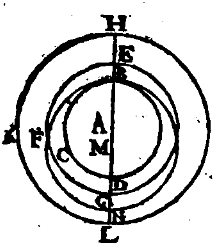
EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus est, & æqualis ipsi DAP, cum DAQ, nihil addat: quod erat probandum.

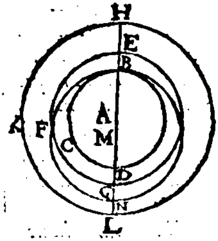
HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.



SINT enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG, & secet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neq; enim cõtra, CBD, maior vllo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento,

 angulus



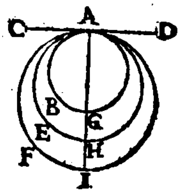
angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C BF, contactus nihil addit ad ipsum CBD, angulum. Quare C BF, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

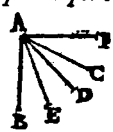
HÆC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid, non que magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto

recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo verò asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineã circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, si per A, describatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A; fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus.



Reperitur igitur inæqualitas inter angulos cõtactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multò minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.



PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus CAF maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG, describantur, tangentes rectã CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est

acutus

acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtũ, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG, maior est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus semicirculi FAI: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam AFI, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI. E contrario vero, angulo semicirculi FAI, minor est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, ut constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur;

Ea

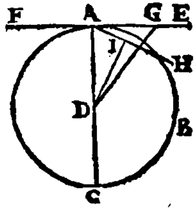
Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM *igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.*

CONSTAT *ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.*

DEINDE *non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtraius multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quater, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto*

recti-



ADG, duo anguli DAG, DGA, ᵃ minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA, recto minor. Quare ᵇ maior erit recta DG, quã DA; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque est ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur cõmuni angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoque minores duobus rectis: Quare ᶜ coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI, ᵈ æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA, ᵉ maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta AH, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.

ᵃ 17. primi.
ᵇ 19. primi.
ᶜ 13. pron.
ᵈ 32. primi.
ᵉ 19. primi.

SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

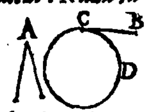
CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas

titas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

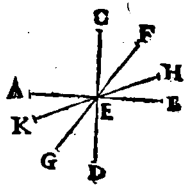
SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

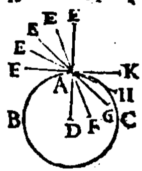
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, BCD, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus a reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuò ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non



videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstrãda, *alijsque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.*

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus, vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficimtur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidẽ angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tũ enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, prateriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea E D, facta sit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non tam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq́; spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ recta manere in suo recto, punctumque A, peripheria in suo rotundo; neque



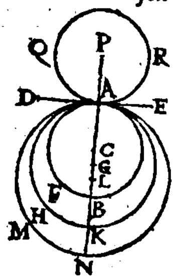


vtrumque

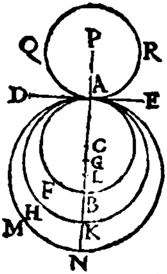
vtrumque esse idem punctum ; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto resugit ; vt contraria contrapoſita fiant manifeſtiora ; Id vero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum A B G, circulum exterius : quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe ; vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minime vrgebit ; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus ; Habebit enim vtrinque ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et conſtat, ex conſectario huius decimaſextæ, lineam D E, cõtingere ipſum A F B A, circulum : ac propterea D A F, eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia : ſcilicet per vltimam partẽ huiuſce decimaſexta. Iam vero inter puncta C, & B, ſuſcipiatur in diametro A B, centrum G, & ſpatio G A, deſcribatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, nõ eſſe quantitatem. Conſtat quippe circulum A H K A, tranſire inter rectam D A, & curuam A F, cùm ſit ſemidiameter



G A, maior ſemidiametro C A. Manifeſtum quoque eſt, lineam D E, tangere ipſum A H K A, circulum, ex eodem huiuſce decimaſexta conſectario : ac propterea D A H, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertiò, ſecundum maius ſpatium L A, circulus A M N A ; Et erit ex eodem conſectario, D A M, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum,



quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo : ac sic omnes aequales, si modo aequalitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus DAM, erit aequalis contactui DAF: Fietque ut MAF, contactus interior circulorum neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt aequales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac aequalitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, aequalis utrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineae rectae cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa utique diuideretur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante ultima parte huius decimaesexta: neque per obliquam, ut per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, ut modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad punctum

punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; D A F, sit quantitas, per secundam earundẽ; neq; D A Q, quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

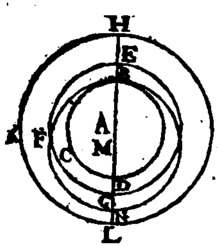
EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo B A D; cum ipsi nihil attrescat ob contactum D A F, qui quantitas non est: & ob id Q A P, rectus est, & æqualis ipsi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

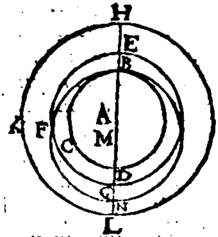
HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.



SINT enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G, & secet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neq; enim cõtra, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento,

 angulus



angulus a diametro & peripheria. verbi gratia, angulus KHL, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos: Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

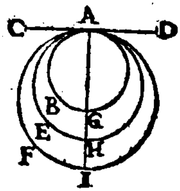
HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipsum CBD, angulum. Quare CBF, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

HÆC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, ut demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid itemque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi

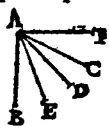
recto

recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo verò asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineã circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, si per A, describatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A; fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos cõtactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque.



Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multò minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.



PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus CAF maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG, describantur, tangentes rectã CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est

acutus

acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtũ, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, ut constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur;

Ea

Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto recti-

rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis se secātibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria, & linea recta illam tangens; vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem nō esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sit etiam omnis formica (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum

plum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsa inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit: Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, hominéque Geometra prorsus indignas.

HÆC porrò mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læsam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem

editionem, hoc eſt, anno 1579. pro ſui defenſione Apologiam in me conſcripſit: in qua tamen neq; auſus eſt ſolutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem ſuam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (ſcilicet nullas habebat) confirmare, ſed verbis duntaxat, & conuitijs ſe defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia reſpondiſſem, niſi me ab hoc conſilio grauiſſima eruditiſſimorum hominum auctoritas, qui eam reſponſo omnino indignam iudicabant, reuocaſſet. Nunc vero quoniam locus hic à me poſtulare videtur, vt in ſecunda hac editione patrocinium veritatis iterum ſuſcipiam, non alienum eſſe duxi, breuiter calumnias, atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modeſtia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam ſit anno 1586. in meis triangulis ſphæricis, vbi neceſſario de re ipſa, eiuſq; Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortaſſis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus ſum me facturum, ſi totam illam reſponſionem hic, vbi proprius eius locus eſt, interſeram, vt benignus lector intelligat, ſine cauſa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ ſe fert, contra me exarſiſſe, falſoque mihi impoſuiſſe multa: me autem è contrario nullum verbum iniurioſum in illum effudiſſe, aut conuitium, quod fruſtra in epiſtola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abſtinere, aperte teſtatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quàm quòd me Peletarius non ſyncere, ſed animoſe, atque adeo inuidioſe feciſſe inſimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ ſane vitia puſilli ſemper animi eſſe duxi, & ab homine liberaliter, Chriſtianeq; educato alieniſſima. Verum ea quàm longe abſint tum à noſtræ Societatis diſciplina, tum à mea conſuetudine, nemo omnino, qui nos ac noſtra norit, ignorat. His vero, qui noſtra minime norunt, hic ipſe liber fidé faciet, ſyncere omnia dici, nihil inuidioſe, nihil animoſe: planè vt veritatem quæſitam, non cuiuſq; auctoritatem contemptam eſſe appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etſi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, ſi quid in alienis ſcriptis falſum videatur, occaſione oblata, cur id mihi minus probetur, oſtendam;

dam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nã in scholio hoc de angulo contactus iurare liquido possem, nihil me minus cogitasse, quàm vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quòd Peletario ipso non modo inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atque Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quàm in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, næ ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferre non potest: quæ tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nã alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuitia sint) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebã: neque vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quòd cum à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum.

vsurum. Quòd si sophisma contumeliosius verbum est, quam paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atque vt plane intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnà consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in sinum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atque in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reÿcit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse a Geometriæ dignitate putat esse alienum, hac solum inductus ratione, quòd superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quòd omnes fere propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atque in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falsò criminatur; maxime in eo, quòd eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demostrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometræ superpositionem illam vsurpent. Neque enim volunt, re ipsa faciendam esse figurarum superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero non. Namque in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatemve, quæ, vt nota, ponitur, facile intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendit, vnam vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factum est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinem propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirum sit,

sit Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per superpositionem, siue translationem linearum, figurarumue posse demonstrari, si hoc modo argumentandi in Geometria uti liceret. Et certe hac in re non solum Euclidem in crimen vocat Peletarius; verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusque commentatorem grauissimum, eumque doctissimum Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æquaponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifestam videre non poterat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurimæ, eæque præcipuæ propositiones in Geometria demonstrentur ex propos. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonstrari nequeunt, quam per illam figurarum superpositionem, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quò igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sane rem magis à Geometria alienã, quam est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propositionem 4. lib. 1. esse definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeo concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem vero 8. eiusdem lib. principium esse per se quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in propositionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori specie ęqualitas figurarum dignoscitur, quam ex laterum ęqualitate.) *Idemq; quasi confirmat, & repetit in propositionem 8. eiusdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas superficies esse ęquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt ęqualia? *Hac Peletarius, vt dictæ propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentatus est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnopere mirandum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsiderate proferre. Scilicet verum est, quod philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propos. 4. & 8. lib. 1. pro principiis:*

A a quod

quod quidem falsum est, atque absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris plurium laterum æqualium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nitũtur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim noua propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipsum quidem ineptissime, cum ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod a posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quòd plerunq; secundam propos. lib. 1. inscite pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commẽtarios examinare, sed solum calumnias, quas frequentes res in sua Apologia adhibuit, a me depellere. Quæ cū ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, ruboré me, (vt eius verbis vtar) Euclidis interpretem contigisse, qui non tum Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidē sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) a calumnijs ipsius defendam, omnesque insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius a me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisque percipere. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi a me moderatio adhibebitur, vt modestia, qua hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quòd in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cum vbique eum honorifice appellem, eiq; plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quam ipse, & multo breuius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam, quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id a me parum syncere, atq; adeo inuidiose factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiose factum quispiam iudicaret. Quòd vero propos. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obijcit, animose, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam ante dixi, non cuiusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco

 odijs

odijs potius, quam ingenijs inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, vt supra dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque vt liberius id facerent, enixe rogaui non paucos, & nunc iterum eosdem, atque etiam alios amicè oratos volo. Sciò enim, quam facile possit in suis quisque inuentis hallucinari; video (quod ipse quoque Pelotarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quòd in additionibus ad propos. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non est, quod ægre ferat, cum illæ propositiones non sint ab ipso inuentæ. Quædam enim multo tempore ante ipsum demonstratæ sunt vel a Campano, vel a Proclo, aut Theone, quasdã vero demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem; quòd adeo manifestæ sint, & faciles, vt nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorum propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maxime eas ab ipso inuentas esse (quod tamen verum non est) prædicassem; cum eas quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cum sint omnium iudicio leuissimæ; adeo vt in plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem ullam, propter earum euidentiam, adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirifice (vt alia peccata taceam) abutitur propositione 9. lib. 3. cum ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sanè dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi ostensæ sunt æquales, transeat per extremitates reliquarũ duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propositum ex ipsa constructione possit concludi, & ex demonstratis, vt proxime dixi, etiamsi propositio

sitio

sitio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus describendus est. Quòd si ideo sum reprehendendus, quòd propositionem unam, multo aliter a me, & breuius demonstratam, ei non ascripserim, non video, quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cum problema hoc (Propositis duabus lineis inequalibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.) *multis saeculis ante ipsum a Theone demonstratum sibi arroget, hac solum de causa, ut arbitror, quòd illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema,* (Dato angulo rectilineo equalem angulum curuilineum constituere.) *quod in Apologia suã proprium appellat, idemq́ hactenus desideratum esse gloriatur; cum tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum saeculis floruit, in defin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonstrauerim. Nam, ut eo in loco ostendi, si recta linea datum angulum rectilineum continentes ponantur aequales, & circa ipsas duo semicirculi (qui aequales erunt) versus easdem partes describantur, illico constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo aequalis: Neque opus est tot ambagibus uti, quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet; quoniam robur demonstrationis ipsius idem sit, quod mea. Et quod magis mirandum est, fatetur Peletarius, se meã demonstrationem vidisse, & eam nihilominus sibi audet, tanquam propriam, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonstrationes parum honeste, ut mihi vendicem, sibi subducere conatum. Quis autem non videt, id enim in altero vituperare, quod ipse sibi gloriosum putat? Itaque multo verius, ac iustius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare possum; cum nusquam propositionum illarum inuentorem me appellauerim, ut ipse, sed solum eius nomen, ob rationes a me expositas, reticuerim.*

DEINDE *angulum contactus, & acutum rectilineũ eiusdem generis esse, contra me pluribus verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo aberrat, quod dicitur, a scopo. Solum enim probat, utrunque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, utrumque angulum planum esse; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare possit ex* angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neque ego, neque ullus unquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negaui hac solum de causa, quod angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, ut in scholio huius propos. 16. euidenter ostendi. Hinc enim fit, ut alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodammodo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis; nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, ut collimasse videatur: quamquam ut omnia faciat, collimabit nunquam; ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. ubi Euclides satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nũquam enim dixi (id quod mihi affinxit, ut carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocentur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, ut alterum superet: In quo, nemine reluctante, frustra sese fatigat, ut doceat, id fieri non posse; sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilineæ, & curuilineæ, siue mixtæ: Itemque lineæ rectæ, & curuæ. Hæ etenim ita differre inter se videntur, ut Aristoteles liquido affirmarit, unam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictũ sit) verũ usquequaq; non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quanam linea recta æqualis possit esse circũferẽtiæ cuiusuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostẽderimus. Non igitũ negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quãtitates a pro-

portionis

portionis definitione excludi, diuersiq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodẽ magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilinea; necnon linea circularis, & recta, ut paulo ante diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem quintæ defin. lib. 5. recipere; immo eam ut oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, ut dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem ullam; ad angulum vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. ut ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest; siue secus, ut in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certè ita illam esse intelligendam, ut exposui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim verò, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Eucl. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) ut eum unum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem; qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tũ in Algebra sua, illam definitionem explicat, ut a me est exposita: quinetiam ibidem asserit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem, ut Petrus Nonius, quẽ testem produxerat pro se

Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atqui ex hisce duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam sibi ratione, quanto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atque iterum odiose percontatur, undenam petuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atque adeo omnes philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, praterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur a me sciscitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum propos. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua a me ipso, confutatur? Qua si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometria scientissimus, idemque Peletarij approbator, minus probarit? Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) *declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profecto Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometrica enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloque modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorum iudicia contemnat, en praclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quò aquiore animo ferat, eas a me nihilo magis, quam ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.*

TERTIO, *quòd existimare dixi Peletarium, angulum contingentiae nihil esse, falsum esse, clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Ita ne vero? at in pradicamento Quantitatis, quod neque est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neq; quantitas* *titus, quo alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Præterea, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditũ apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantum haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res nõ potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille nescio quibus præstigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quacunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlcisceretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo tũ impune pugnaret: At quam palæstrice pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum venenum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur,* (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se effictum ingulasset, exclamat.* (En Clauij argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij sophismata sint, an Clauij potius figmenta, cum

ipse

ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verum ut hominem sanctum, atque adumbratum nequicquam petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego ut ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, verè esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem, ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, ut Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi aequalem recto rectilineo; quid, obsecro, tantopere desudasset, ut demonstraret, Angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo; angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum male à nobis acceptum; idque ita ulciscatur, ut meum hoc argumentum refellat: In quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & pleris que alijs in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus, quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius; euidenterque Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venustate confixit, paulisper considerabimus; ut quàm suo iure Dialectica ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipse syllogismus videtur, incudique reddendus: Etenim cũ versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (ut Dialectici loquuntur) quae est, Nihil, de minori extremitate, quae est, angulo contactus maior, in recto praedicari deberet, hoc pacto: Angulus contactus nihil est: Angulus conta-*

ctus

ctus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidem conclusio rectè sequitur ex præmissis, quarũ prior Peletarij est, nõ mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Cõclusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraque præmissa subijcitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neq; contendat Peletarius, mentionẽ factã esse anguli in minore extremitate, vbi dictũ est, angulũ cõtactus angulo cõtactus maiorẽ esse. Nã angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod vt planum fiat, vtemur ea palæstra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior rectò est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum præmissa vera sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ rectè ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acutò maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialectica, si ab Aristotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitque scire, quid aliud sit, angulum cõtactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauate, etsi è scholio huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere.

Nempe

Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, qua dicimus, angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus, sicut nec angulus contactus rectilineus est, aut acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quàm ad Geometras. Quòd etiã, ne librum meum parum spissum viderer fecisse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo a me consilio factum est, vt omnes plane viderent, syncere me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipse facere in animum induxisset. Multo enim minus spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed eo sum æquior Peletario, quòd ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil penitus ad eam pertinentes inseruit: quarum priorem immeritò suam propriam facit, vt supra dixi: posteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longè breuius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstraui, vt mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimensionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario suæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pedissequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque in primis Petrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quòd si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius crimi-

criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturus fuisset, si alienis verbis eius opinionem in medium adduxissem? Equidem facile sibi persuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

*QVARTO vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quòd me laborare ostendit, vt probem, angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea quòd scripsi, æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si alter alteri superponatur, iuxta octauum pronunciatũ. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cum tamen angulus rectilineus ostensus sit a me æqualis curuilineo, atque adeo eiusdem generis cum illo, licet non sit in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde quod putem angulos contactus ideo inter se inæquales esse, quòd sibi mutuo non congruant. Equidem si quid in eo a me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cum, tota re etiam atq; etiam considerata, nihil omnino vitij inesse videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui occasionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis uero circulari non item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (*Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisque omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atque in in vtrinque conuexis,&c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data sunt; sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorũ recta linea, & curua sibi mutuò congruunt? Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint eiusdem speciei, atque adeo æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometriæ ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib 5. dixi, non recte à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, planè rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletario quidẽ ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minus fortasse ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspiciat, neq; me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen, si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur; neque verò hoc vnquam negaui, cum alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori vero in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cum tam priora duo membra

membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cum hæc membra diuidentia latius pateant, quam Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eò magis duplex illa diuisio mihi probatur, quòd non desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quarum vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quòd si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, nemo scriptorum nullius aliquo vitio carebit, neque ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia nõ deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquàm ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquido constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemq; hanc; Anguli semicirculorum, quò a maioribus circulis fiunt, *ſiunt, eò ſunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior ſit; in qua quidem ad Cardanum ſcribit, nullum eſſe paralogiſmum. Ego ſane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiuſmodi ſatis ſuperq; in ſcholio huius propoſ. 16. a me ſunt confutata, adductis contra ipſas euidentiſſimis inſtantijs. Deinde quòd me perſtringit, quaſi parum intellexerim, qua ſit proportio rationalis, & qua irrationalis, non multum laboro. Conſtat enim, eum ſtudio mihi detrahendi id dixiſſe; cùm has proportiones vbiq; ex ſententia grauiſſimorum ſcriptorum definierim: neq; vero ipſe, vllum peccatum a me ea in re eſſe commiſſum, poterit oſtendere. Certe commentarius m us in lib. 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, nec ne. Deniq; quòd criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum eſt. Perſpicuis enim verbis docui in defi. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero, Proportionem. Neq; enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis poteſt eſſe ambiguitas.*

EX his, quæ diximus, ſatis (vt opinior) apparet, doctiſſimos illos viros, de quibus initio memini, non ſine cauſa Apologiam Peletarij inanem, ac reſponſionis indignam iudicaſſe. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem ſemper laudandum eſſe duxi, occaſione inuitatus reſpondendum amice putaui. Exiſtimet ille, angulum contactus quantitatem non eſſe, atque adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo eſſe æqualem, ego certe contrariam ſententiam tuebor, donec aliud mihi demonſtratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces ſunt, nihilque continent in ſe probabilitatis, vt in ſcholio huius propoſ. 16. oſtendi, vbi omnes diſſolui: neque meis ipſe ſolutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ ſupra ex lib. 10. adduxi) reſpondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Vt non ſine cauſa permulti exiſtimauerint, eum non veritatis ſtudio eam Apologiam ſcripſiſſe.

scripsisse, sed ne veritati cessisse videretur. Nec vero quisquam putet, me vnum existimare, angulum contactus vere esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosque grauissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atque Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, eiusque commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis praestantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero in primis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flussatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propos. hanc 16. apertissime docet, angulos contingentia verè esse angulos, ex definitione anguli plani, aliosq; alijs esse maiores, aequales, ac minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Praeter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurda multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quaedam ex eius commentarijs in lib. 1 Euclidis, quae obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij cõmento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duae namque circumferentiae se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem lib. ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namq; angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) *Quid clarius, quam Proclum hic asserere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita* *scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquàm æqualis; Et semicircularis similiter, transitusq; à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumq; propterea fieri a maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque posterius appellare paralogismum. Denique eodem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse posſit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

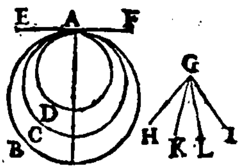
OBITER *quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit; atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sanè maior absurditas apparet, quo ad sensũ, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, et in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticẽ illius Ellipsis, & Hyperbolæ cõstituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur a circumferentia*

Ellipsis,

Ellipsis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hac alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



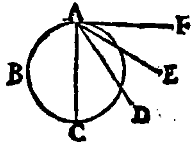
PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, alia recta cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

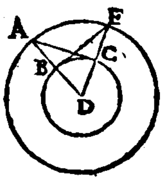
DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc



A. Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus aequalis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.

16. PROBL. 2. PROPOS. 17.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda sit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem DA, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulũ A E, in E. Ducta deniq; recta ED, secante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli B D E, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt a & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaq; CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semi diametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedẽtis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

a 4. primi.

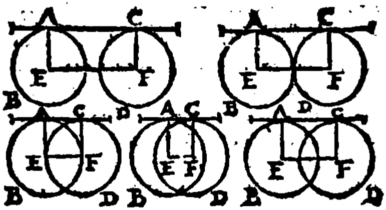
SCHO-

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facilè elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propos. 31. huius lib. inuenies.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

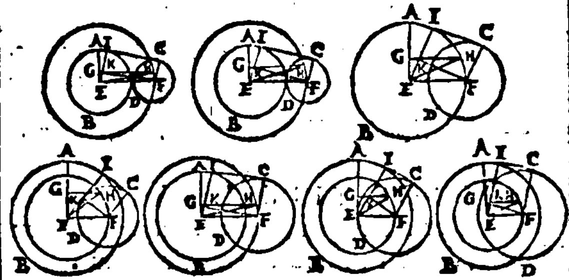
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.



SINT primum duo propositi circuli æquales A B, C D, quorum centra E, & F, recta iungantur E F, ad quam ducantur perpendiculares E A, F C, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrumque circulum tangere. Cum enim E A, F C, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, [a] & parallelæ, quòd anguli E, & F, recti sint; [b] Erunt quoque E F, A C, æquales & parallelæ; Ideoque [c] & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum. a 28. primi. b 33. primi. c 29. primi.

SINT deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum rursus centra E, & F, iungantur recta E F, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea portio A G, semidiametro minoris circuli C D, æqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsque ad circumferentiam circuli F H, proxime descripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atque per F,

 agatur

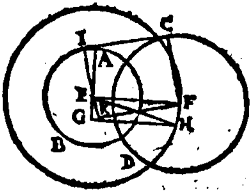


agatur ipsi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abscindatur enim ex I E, recta I K, ipsi A G, vel semidiametro FC, minoris circuli, æqualis, ut sint reliquæ E G, E K, æquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, æqualia sunt lateribus F E, E K, & anguli ipsis contenti æquales, ex constructione:
a 4. primi. [a] Erunt anguli H G E, F K E, æquales; Ac proinde, cum H G E, rectus sit, ex constructione, erit & F K E, rectus. Rursus quia C F, I K, æquales sunt, & parallelæ, ex constructione,
b 33. primi. [b] erunt quoque I C, K F, æquales & parallelæ; Atque
c 29. primi. propterea angulus E I C, [c] cum æqualis sit externo F K E, re-
d 29. primi. ctus erit; [d] Ideoque & I C F, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta I C, vtrumque circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

SATIS autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se inuicem per centra secant, aut non, ita tamen, vt vel centra consistant in communi eorum segmento, vel certe extra illud.

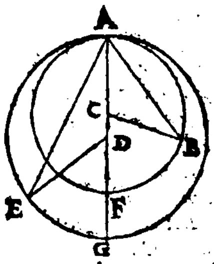
ITEM si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris extra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maio-

maiorem; vel iterum ita intra, ut circumferentia minoris per maioris centrum incedat; vel denique ita intra, ut circumferentia minoris includat centrum maioris.

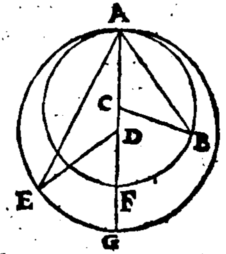


QVONIAM vero, circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper a maiori; si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstrationeq́; nisi quod rectæ AE, IE, protrahendæ sunt ad G, & K, ut AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales esse, quòd HEA, FEI, reliqui duorũ rectorum, æquales sint ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex ijs, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum vero extra circulum, ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat; dummodo alter eorum in altero non totus includatur; nõ alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit.



SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quoduis pũctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum



A B, in A, tanget; Et si quidem punctum D, fuerit vltra cetrum C, cadet circulus A E, totus extra circulum A B; intra vèro si punctum D, in semidiametro A C, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum A B, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum A B, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta G C A, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus A E, qui per datum punctum G, transibit, tangetq; circulum A B, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum A B. Ducta recta E A, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta A C; eritq; angulus E A C, acutus cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo E A C, in E, æqualis constituatur A E D: coibitque recta E D, cum A C, in D, ob duos angulos D A E, D E A, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli D A E, D E A, æquales sunt, * erunt & latera D A, D E, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetq; circulum A B, in A, ex ijs, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus. * 6. primi.

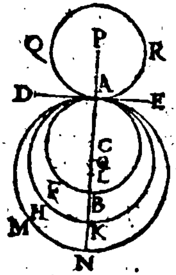
TERTIO datum sit punctum F, intra circulum A E. Ducta ex F, per centrum D, recta F A, eaq; secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus A B, qui per datum punctum F, transibit, tangetque ex dicto scholio circulum A E, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum A E, cuius centrum D. Ducta recta quæcunque A D, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta A B, faciet angulum acutum B A D, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo B A D, in B, æqualis fiat A B C: coibitq; recta B C, cum A D, in C, ob duos angulos B A C, A B C, duobus rectis

minores.

minores: Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, [a] erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetq; circulum AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt.

QVOD si per punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangetq; circulũ QAR, in A, propterea quòd vterq; circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16. huius lib.



EODEM modo, si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctũ A, describemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum AMN, ex centro L, tanget hic circulum QAR, vt dictum est, in A.

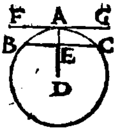
EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tãgentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta AG, eiusdem figuræ, vel in PAC, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens: Quo pacto autem circulus datos circulos tangens describendus sit, ad finem huius lib. tractemus.

[a] 6. primi.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam

neam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim A B C, cuius centrũ D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturque ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. a 28. primi. *Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetque circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.*

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, b 17. primi. b duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare c 19. primi. c maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quã totum. quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi

ECD.

E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [a] maior est omni acuto. [a] 16. tertij.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

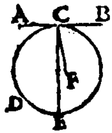
DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.

SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamq; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, [b] quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur [c] rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur [d] autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est. [b] 18. tertij. [c] 14. tertij. [d] 3. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex



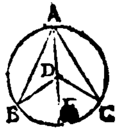
ex C. ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in C E esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta F C, [a] quæ perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti, quod est absurdum. Non igitur extra C E, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 18. tertij.

19. THEOR. 18. PROPOS. 20.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus B D C, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam.



Dico angulum B D C, duplum esse anguli B A C. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, D C; & per centrum D, recta extendatur AE Quoniam igitur rectæ D A, D B, æquales sunt, [b] erunt anguli D A B, D B A, æquales: Est autem externus angulus B D E, [c] æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare B D E, duplus erit alterius eorum, vt anguli D A B. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus B D C, duplus erit totius BAC. Quãdo.n duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

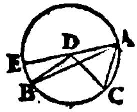
[b] 5. primi.
[c] 32. primi

DEINDE non includant rectæ A B, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus B D C, [d] æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo [e] inter se sunt

[d] 32 primi.
[e] 5. primi.

ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

TERTIO recta AB, ſecet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem baſin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. [a] Qm̃ enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.



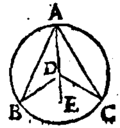
a 20. pron.

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propoſ. demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia vero partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt.* (Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide uniuerſaliter demonſtratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5 propoſ 1. & 5. Non tamen propterea demonſtratio huius propoſ. cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſunt demonſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, ut facilè à quouis ſine ulla demonſtratione concedantur, & utraque illa propoſitio lib. 5. demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo ut duo illa principia iure optimo adhiberi poſſint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neque vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propoſ. 20. huius lib. demonſtratur, hac eadem propoſitione non nitantur, aut alijs propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM.

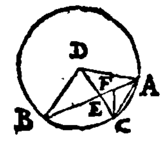
VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione.



a 5. primi. *Repetatur prima figura. Et quoniam a tam anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æqualis est iisdem tribus angulis BAC,*
b 32. primi. *B, & C; (Nam b cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis.) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.*

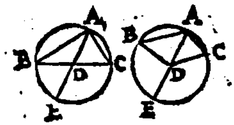
c 32. primi. *ALITER. Quoniam c sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illi sex æquales: ablatisq; com-*
d 3. pron. *munibus ADB, ADC, d reliquus BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus.*

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC. rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo,



e 5. primi *ducta recta AD, e duo anguli DAC, DCA, æquales sunt, estq; angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC,*
f 32. primi. *æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F, f angulusque EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac pro-*
g 5. primi. *inde anguli BAC, duplus. Quia vero g anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui*
h 5. primi. *DAB, ECF, æquales. Cum h ergo DAB, ipsi DBA, æqualis*
i 15. primi. *sit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem, i & anguli DEB, FEC, ad verticẽ E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erũt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cũ ergo angulus EFC. ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoq; angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositũ.*

QVOD



QVOD si recta BD, CD, in centro angulum non constituat ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, ut ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens BEC, constansque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

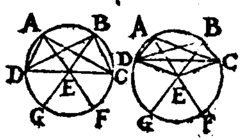
IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. [b] Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.

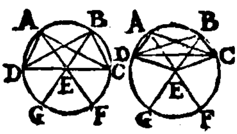
a 20. tertij.

b 7. pron.

SIT deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus est anguli DAF,



c 20. tertij.



D A F, ad peripheriam: Similiter angulus C E F, anguli C A F; & sunt anguli D E G, G E F, æquales angulo D E F: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli D B C, [a] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

[a] 7. pron.

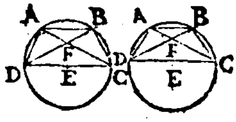
ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque angnli DAC, D B C, ad circumferentiam: [b] Erunt ipsi anguli D A C, D B C, inter se æquales.

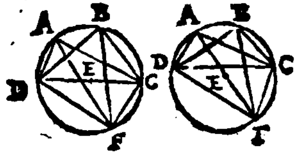
[b] 7. pron.

ALITER. Secent sese rectæ AC, B D, in F, & connectatur recta A B. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli B F C; quoniam tam illi, quam hi [c] æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, [d] qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

[c] 32. primi.

[d] 15. primi.



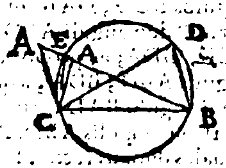


ALITER. Ductis rectis D F, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam D A B C F, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori F D A B C, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus D A C, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud demonstrabimus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

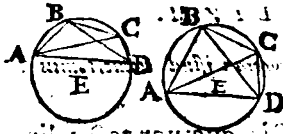


EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel ultra A, vel citra secans rectam A B, in E. Ducta ergo recta C E, [a] erũt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus; quod est absurdum, [b] Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A. quod est propositum. [a] *21. tertij.* [b] *16. primi.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. 21.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, C D A: Item B C D, D A B, æquales esse duobus rectis.



Ductis. n. diametris duabus quadrilateri AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 21. tertij. [b] 32. primi. [c] 21. tertij. [d] 32. primi.

SCHOLIVM.

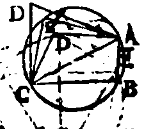
CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

12\.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur;

scribatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostē detur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita ut non secent rectas CD, AD. Quo facto, [a] erūt anguli B, & E, æquales duobus rectis; Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, [b] erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.



[a] 22. tertij.

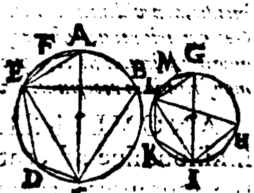
[b] 21. primi.

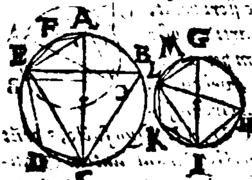
SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos æquales duobus rectis, ut theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, ut ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.

SYNT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus punctis vtcumque D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex defin. segmentorum similium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus





angulis IKL, IHL, sint æquales; quod tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis: [b] erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, similes erunt.

[a] 22. tertij.
[b] 3. pron.

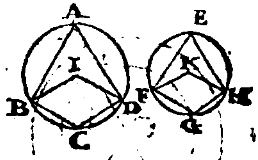
DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE, IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; [c] quod tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmẽtorum similium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; [d] quod tam illi, quàm hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

[c] 22. tertij.
[d] 22. tertij.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum



primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. a Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum b cum dupli sint anguli I, K, c erunt hi quoque æquales. Quod est propositum. a 22. tertij. b 20. tertij. c 6. pron.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint d autem tam duo anguli A, C, quàm duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, e erunt quoque eorum dimidia æqualia hoc est, anguli A, E. Quare ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum. d 22. tertij. e 7. pron.

SECUNDUM autem, quod nos etiam in sphæricis ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur; atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

DUO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AG, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens f duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC; g erunt anguli EDF, BAC, æquales: Sunt autem duo anguli EDF, f 20. tertij. g 7. pron.

a 22.tert. E I F, duobus angulis B A C, B H C, æquales; quod [a] tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis E D F, B A C, [b] reliqui E I F, B H C, æquales erunt: ac proinde segmenta E F, B C, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.

b 3.pron.

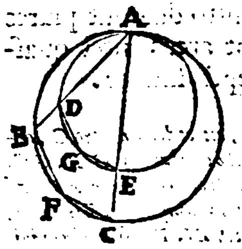
c 7.pron.

d 20.tertij.

BREVIVS sic: Quoniam [c] anguli A, D, æquales sunt, quod vtriusque [d] duplus sit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus B C, E F, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



TANGANT se mutuo interius duo circuli A B C, A D E, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur A B, A C. Dico tã arcus D E, B C, quàm A D, A B, & A E D, A C B, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ B F, C F, D G, E G. Quoniam igitur duo anguli D A E, D G E, duobus angulis B A C, B F C, æquales sunt; quod [e] tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo B A C, [f] erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac

e 22.tert.

f 3.pron.

proinde

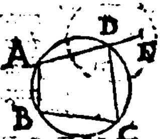
proinde arcus DE, BC, similes erunt, ex defin. segmentorum similium.

BREVIVS *sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentias insistit; erunt, ex demonstratis ante proximè antecedens theorema, arcus DE, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.*

QVIA *verò, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC, [a] hæc in contactum A, cadit, fient, eodem pacto arcus DE, BC, similes; fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoque sint: atque his ablatis ex totis circumferentiis similibus, similes quoque sint reliqui arcus ABD, ACB, vt paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum.* a 11. tertij.

HVC *etiam referri potest hoc theorema.*

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

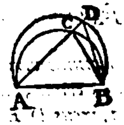


IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, [b] æquales sint duobus rectis: Item duo B, & D, in quadrilatero; [c] erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC; reliquus EDC, externus, reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum. b 13. primi. c 22. tertij.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur



ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; [a] Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo ADB, externus interno: [b] quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia. Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. tertij.
[b] 16. primi.

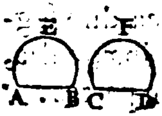
SCHOLIVM.

EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam A B, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

23.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB, segmento

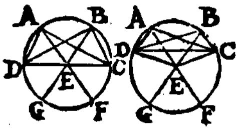
ſegmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quòd ſi extra cadat, aut intra, cõſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AEB, AFB, ſimilia, & inæqualia; quod eſt abſurdum. [a] Demon- [a] 23. tertij.
ſtratum enim eſt contrarium. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabũt ſeſe in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod eſt abſurdum. [b] Cir- [b] 10. tertij.
culi enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quàm duobus. Congruet igitur ſegmentum AEB, ſegmento CFD, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

NON ſolum in hac propoſitione oſtenditur, ſegmenta ſimilia AEB, CFD, eſſe æqualia, ſuper æquales baſes AB, CD; verum etiam ipſas peripherias, eò quod, ut demonſtratum eſt, ſibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propoſ. & præcedentis, facile demonſtrabitur. Nimirum, ſegmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, eſſe ſimilia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare ſimilia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipſis conſtituti æquales ſint. Quòd ſi quis dicat, non ſibi mutuo congruere ſegmenta, ſecabit neceſſario una circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent ſegmenta, quod eſt contra hypotheſim. Sint ergo ſegmenta AFB, AGB, æqualia ſuper eandem rectam AB, ſecentque ſe mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, ſecant ſeſe in punctis A, G, B, pluribus quàm duobus. quod eſt abſurdum. [c] Circuli enim non ſe interſecant in pluribus punctis quàm duobus. Eodem modo res demonſtrabitur, ſi æqualia ſegmenta ſuper æquales rectas ſint conſtituta: ſi nimirum altera alteri ſuperponatur, &c. [c] 10. tertij.

PROBL.



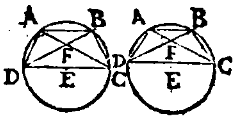
D A F, ad peripheriam: Similiter angulus C E F, anguli C A F; & sunt anguli D E G, G E F, æquales angulo D E F: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli

a 7. pron. D B C, [a] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, D B C,

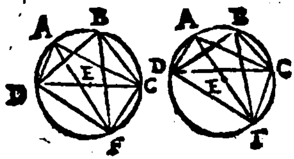
b 7. pron. ad circumferentiam: [b] Erunt ipsi anguli D A C, D B C, inter se æquales.

ALITER. Secent sese rectæ AC, B D, in F, & connectatur recta A B. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli B F C;



c 32. primi. quoniam tam illi, quam hi [c] æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC,

d 15. primi. [d] qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli A D F, B C F, æquales sunt ostensi in segmento maiori A D C B. Ergo & anguli reliqui D A C, D B C, æquales sunt.



ALITER. Ductis rectis D F, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam D A B C F, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori F D A B C, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus D A C, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

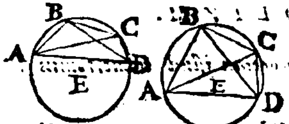
EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra secans rectam A B, in E. Ducta ergo recta C E, [a] erũt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum, [b] Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A: quod est propositum.

[a] 21. tertij.
[b] 16. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 21.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, C D A: Item B C D, D A B, æquales esse duobus rectis.



Ductis[n] diametris duabus quadrilateri AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD in eodem segmento CDAB, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus[c] duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD, erunt duo anguli BCD, BAD, æqua les tribus angulis ABD, BDA, DAB.[d] Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. tertij.

b 32. primi.

c 21. tertij.

d 32. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum. Atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur;

scribatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 21. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostẽ detur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel ultra D, vel citra. Ducantur ergo rectae CE, AE, ad circumferentiam, ita ut non secent rectas CD, AD, Quo facto, [a] erũt anguli B, & E, aequales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis aequales. Igitur duo anguli B, E, aequales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, aequales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, [b] erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.

[a] 22. tertij.

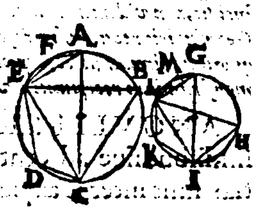
[b] 21. primi.

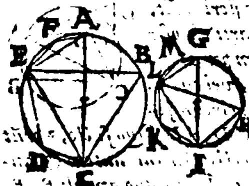
SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos aequales duobus rectis, ut theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt aequales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis aequales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis aequales, ut ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter usurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.

SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus punctis utrumque D, B, K, H, jungantur rectae DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex defin. segmẽtorum similium, anguli CDE, IKL, aequales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus





angulis IKL, IHL, sint æquales; [a] quod tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis: [b] erūt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, similes erunt.

[a] 22. tertij.
[b] 3. pron.

DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, utcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE, IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; [c] quod tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmētorum similium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; [d] quod tam illi, quàm hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales; ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

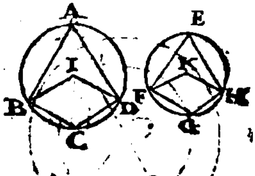
[c] 22. tertij.
[d] 22. tertij.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum

primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui



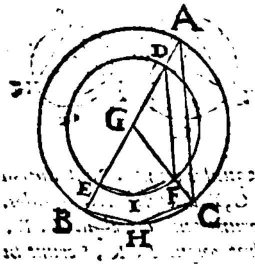
ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. a Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum b cum dupli sint anguli I, K, c erunt hi quoque æquales. Quod est propositum. a 22. tertij. b 20. tertij. c 6. pron.

DEINDE *sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint d autem tam duo anguli A, C, quàm duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, e erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare, ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.* d 22. tertij. e 7. pron.

SECVNDVM *autem, quod nos etiam in scholio ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.*

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur; atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

DVO *circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AG, DF; Item sumptis punctis H, I, utcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens f duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC; g erunt anguli EDF, BAC, æquales: Sunt autem duo anguli EDF,* f 20. tertij. g 7. pron.



E I F, duobus angulis B A C, B H C, æquales; quod [a] tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis E D F, B A C, [b] reliqui E I F, B H G, æquales erunt: ac proinde segmenta E F, B C, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.

[a] 22. tert.
[b] 3. pron.

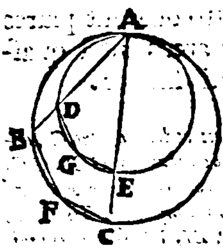
BREVIVS sic: Quoniam [c] anguli A, D, æquales sunt, quod vtriusque [d] duplus sit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus B C, E F, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.

[c] 7. pron.
[d] 20. tertij.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc est.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.

12.



TANGANT se mutuo interius duo circuli A B C, A D E, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur A B, A C. Dico tã arcus D E, B C, quàm A D, A B, & A E D, A C B, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ B F, C F, D G, E G. Quoniam igitur duo anguli D A E, D G E, duobus angulis B A C, B F C, æquales sunt; quod [e] tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo B A C, [f] erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac proinde

[e] 22. tert.
[f] 3. pron.

proinde arcus DE, BC, similes erunt, ex defin. segmentorum similium.

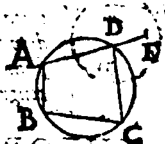
BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentiam insistit, erunt, ex demonstratis ante proximè antecedens theorema, arcus DE, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta HG, ª hæc in contactum A, cadet, fiet, eodem pacto arcus DE, BC, similes; fit, vt his similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq; sint: atque his ablatis ex totis circumferentijs similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo antè demonstrauimus. Quod est propositum. ª 11. tertij.

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SCHOLIVM.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

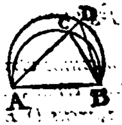


IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, ᵇ æquales sint duobus rectis: Item ᶜ duo B, & D. in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC; reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum. ᵇ 13. primi. ᶜ 22. tertij.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur



ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; [a] Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo ADB, externus interno; [b] quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia. Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. tertij.
[b] 16. primi.

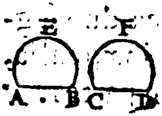
SCHOLIVM.

EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam A B, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

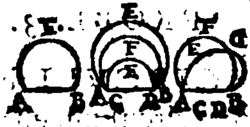
23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB, segmento



ſegmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Qd ſi extra cadat, aut intra, conſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AEB, AFB, ſimilia, & inæqualia; quod eſt abſurdum. [a] Demonſtratum enim eſt contrarium. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabũt ſeſe in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod eſt abſurdum. [b] Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quàm duobus. Congruet igitur ſegmentum AEB, ſegmento CFD, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. tertij.

[b] 10. tertij.

SCHOLIVM.

NON ſolum in hac propoſitione oſtenditur ſegmenta ſimilia AEB, CFD, eſſe æqualia, ſuper æquales baſes AB, CD; verum etiam ipſas peripherias, ita quod, vt demonſtratum eſt, ſibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propoſ. & præcedentis, facile demonſtrabitur. Nimirum, ſegmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, eſſe ſimilia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare ſimilia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipſis conſtituti æquales ſint. Quòd ſi quis dicat, non ſibi mutuo congruere ſegmenta, ſecabit neceſſario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent ſegmenta, quod eſt contra hypotheſin. Sint ergo ſegmenta AFB, AGB, æqualia ſuper eandem rectam AB, ſecentque ſe mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, ſecant ſeſe in punctis A, G, B, pluribus quàm duobus, quod eſt abſurdum. [c] Circuli enim non ſe interſecant in pluribus punctis quàm duobus. Eodem modo res demonſtrabitur, ſi æqualia ſegmenta ſuper æquales rectas ſint conſtituta: ſi nimirum altera alteri ſuperponatur, &c.

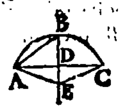
[c] 10. tertij.

PROBL.

24. ## PROBL. 13. PROPOS. 25.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo. Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior quam DB, cum DB, perficiens diametrum,



a 7. tertij. [a] sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, [b] maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. [c] Quare bases EA, EC, æquales erunt; [d] Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erūt; [e] ac propterea E, centrum erit circuli ABC, quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

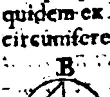
b 18. primi.

c 4. primi.

d 6. primi.

e 9. tertij.

SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis; (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum; atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare [f] & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) [g] Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quod recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres



f 5. primi.

g 6. primi.

tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circumferentiam [a], erit D, centrum.

SIT tertio angulus D B A, angulo D A B, minor, quod quidem eueniet, si segmentum A B C, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; [b] erit D B, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadũt, maxima; maior igitur erit quam D A, [c] ideoq; angulus D A B, maior angulo D B A. Fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

a 9. tertij.
b 7. tertij.
c 18. primi.

SCHOLIVM.

SED fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta A C, bifariam in D, erectaq; perpendiculari D B, & ducta A B; aut D B, minor est, quàm D A, aut æqualis, aut maior. Si minor, [d] erit angulus D B A, maior angulo B A D. Constituto igitur angulo B A E, æquali ipsi A B D; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.

SI vero D B, æqualis est ipsi D A; erunt omnes tres D A, D B, D C, æquales; [e] ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.

SI denique D B, maior est, quàm D A; [f] erit angulus D B A, minor angulo D A B. Constituto ergo angulo B A E, æquali ipsi A B E; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.

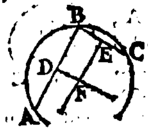
ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo D B A, æqualis angulus E A B. Et si quidem recta A E, cadit infra A C, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero A E, cadit

d 18. primi.
e 9. tertij.
f 18. primi.

supra

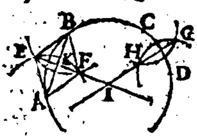
supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si deniq; recta efficiens cũ AB, in A, angulũ æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti



tria puncta vtcunq; A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quã EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, ut in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.

ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ EF, GH, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum.



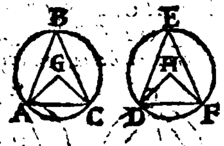
Quod autem lineæ EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF, BF, æquales: [a] Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK; & anguli AEK, BEK, ostensi quoque æquales; [b] erunt & bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, æquales, ideoq; recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per

[a] 8. primi.
[b] 4. primi.

per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, ut rectæ EF, GH, non in directum sibi occurrant, sed ut se mutuo secent. Quòd si quando contingat, rectas EF, GH, in directum esse constitutas, dividenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim divisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

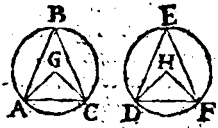


IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur [a] anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione, segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent G, H, æquales, ex hypothesi; [b] erunt bases A C, D F, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales AC, D F, [c] erunt ipsa inter se æqualia. Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, DF, inter

[a] 20. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 24. tertij.

inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod est propositum.

SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, a quod sint dupli angulorum æqualium B, & E, erũt, vt prius, rectæ AC, DF, æquales) b erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.



a 20. tertij.
b 24. tertij.

SCHOLIVM.

HÆC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, c dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrum maior angulo DHF, ad centrum; Item angulus ABC, ad circumferentiam maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheriæ CI, DF, æquales; Ac propterea AC, maior, quam DF.

PORRO propositio hac cum tribus proximè sequentibus intelligenda etiam sunt in eodem circulo. Hoc est, In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquido cõstat. Eadem. n. semper demonstratio, quæ duobus pluribusue circulis accommodatur, locum habet in vno eodemq́ circulo,

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. [a] Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales. — a 26. tertij.

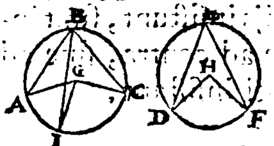
INSISTANT deinde eisdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, ut ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, [b] eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, &c. Quod demonstrandum erat. — b 26. tertij.

SCHOLIVM.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniam [c] anguli ABC, & E, dimidij sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales. — c 20. tertij.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales; insistet maiori maior an-

ior angulus, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, quã minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem esse angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ D F, ducanturq; rectæ I G, I B; erunt, ut ostensum est, tam anguli ad centrum C G I, D H F, quam anguli ad circumferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ducta namq; recta A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, [a] erunt

a 27. tertij. anguli A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint

b 27. primi. alterni, [b] erunt A D, B C, parallelæ.

SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, esse æquales. Cum enim sint parallelæ A D, B C,

c 29. primi. ducta recta A C; [c] erunt anguli alterni A C B, C A D,

d 26. tertij. æquales; Ac proinde [d] arcus A B, D C, quibus insistunt, æquales erunt.

VISUM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

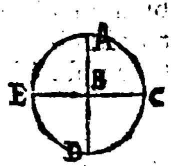
IN circulo A B C, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam esse rectæ B C, arcum B A C, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, secante rectam B C, in G, connexisq; rectis D B,

e 27. tertij. D C; [e] erunt anguli A D B, A D C, circumferentijs æqualibus

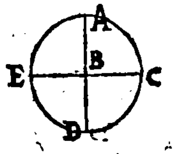
libus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, vtrumque vtrique. [a] *Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti,* [b] *quòd DA, perpendicularis sit ad EF. Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.* [a] *4. primi.* [b] *18. primi.*

EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.



RECTVS angulus ABC, insistat centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus DBE, rectus, [c] *cũ æqualis sit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, vtpote recti: ac propterea* [d] *arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquidò constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.* [c] *15. primi.* [d] *26. tertij.*

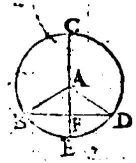


SED insistat iam quadranti AC, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis A B, C B, ad D, E; quoniam tã CAE, quàm ACD, & AED, semicirculus est, estq; AC, quadrans; erit tam AE, quàm CD, quadrans quoque, ac proinde & D E, in semicirculo A E D, quadrans erit. Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, a ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum A B, auferens minorem arcum quadrante A C, facit in centro B, cum A B, minorem angulum recto angulo A B C; recta vero cum eadem A B, auferens maiorem arcum quadrante A C, constituit in centro B, angulum recto angulo A B C, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum.

a 27. tertij.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansq; aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtẽsam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens A E, secet rectam B D, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia sunt, vtrumq; vtrique, b basisq; BF, basi DF, æqualis ponitur; b erit angulus BAF, angulo DAF, æqualis. Igitur c arcus BE, arcui DE, æqualis erit. Sectus ergo est arcus B D, in E, bifariam.

b 8. primi.
c 26. tertij.

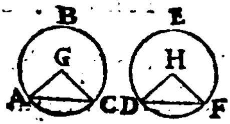
SECET iam recta A E, arcum B D, in E, bifariam. Dico rectam quoq; B D, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum

rursum rectis A B, A D; quoniam arcus B E, D E, ponuntur æquales; [a] erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq́; continent æquales, vt ostendimus; [b] erunt quoque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

[a] 27. tertij.
[b] 4. primi.

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

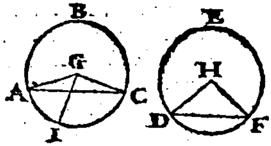


IN circulis æqualibus ABC, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem esse maiori D E F, & minorem AC, minori D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, DF, æquales. Igitur [c] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, [d] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF, In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 8. primi.
[d] 26. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis



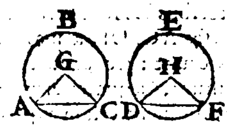
enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Ponitur autem basis AC, maior base DF. Igitur [a] *angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHE, æqualis; eritque propterea* [b] *peripheria CI, peripheria DE, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, maior, quam peripheria DF: Ideoq; reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.*

[a] 25. primi.
[b] 26. tertij.

28.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales: Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, [c] æquales, quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur [d] bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

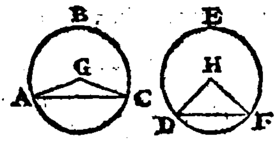
[c] 27. tertij.
[d] 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorē

maior

maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC. DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF, sitq; AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor quã DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [a] erit basis AC, maior base DF, &c. [a] 4. primi.



SVNT autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemque circulo.

ITAQVE eadem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

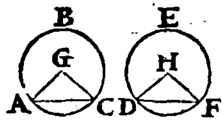
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SED & sequẽtes propositiones demõstrare, nõ fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nã si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propõs. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, [a] ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia. [b] Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum.

[a] 24. tertij.
[b] 24. tertij.

I I.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cũ hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

I I I.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IIII.

RECTAE lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.

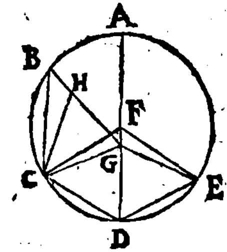
IN eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DF, dicantur æquales, [a] erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias A B C, D E F, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ AC, DF, ponantur similes, & inæquales. [a] 28. tertij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ in easdẽ partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad diametrũ angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, sumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, constituanturque primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales esse. Quoniam enim [a] *tã duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales sunt, si demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad cẽtrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulíq; FGC, FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis GC, basi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG;* [b] *ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.*

[a] 13. primi.



[b] 26. tertij.

DEINDE *sint lineæ GC, GE. æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia: Est autem & basis FC, basi FE, æqualis.* [c] *Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, basesq; æquales ponuntur GC, GE;* [d] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales,* [e] *atque idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum.*

[c] 8. primi.
[d] 8. primi.
[e] 26. tertij.

TERTIO *sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt,* [f] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq; æquales contineant;* [g] *erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli EGC, FGE,*

[f] 27. tertij.
[g] 4. primi.

FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.

VI.

SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

IN eadem figura proxima sint duo anguli æquales CGD, CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem esse. Ductis enim rectis BC, CD, [a] *quoniam recta GB, maior est, quam recta GD, abscindatur GH, ipsi GD, æqualis, iungaturq́; recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus lateribus GD, GC, æqualia sunt, angulosq́; continent æquales;* [b] *erunt & bases CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Est autem GDC, in Isoscele FCD, acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtusus erit. Cum ergo,* [c] *duo anguli CHB, CBH, sint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare* [d] *latus BC, latere CH, maius erit. Est autem CH, recta ostensa ipsi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoque erit, quàm CD; ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat ostendendum.*

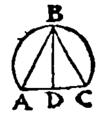
[a] 7. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur per-

perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erũt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus C D, D B, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igi-



a 4. primi. tur a & bases AB, CB, æquales erunt; Ac pro-
b 28. tertij. pterea b peripheriæ A B, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendũ.

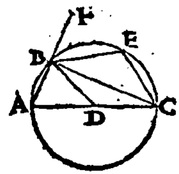
PRAXIS.

NON *differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt A B C, intelligenda semper est recta linea eum subtendens A C, etiamsi ducta non sit; atque ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuò intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta A C, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam A C, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.*

30. THEOR. 27. PROPOS. 31.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturq; in semicirculo angulus ABC, existetque angulus B A C, in maiori segmento C A B. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus B E C.



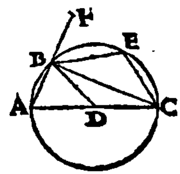
BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehẽsum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectę DA, DB, æquales sunt, [a] erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadẽ ratione erit angul⁹ DBC, angulo DCB, æqualis, ideoq; tot⁹ angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. [b] Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum. [a] 5. primi. [b] 32. primi.

QVONIAM vero in triangulo ABC, [c] duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum. [c] 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, [d] duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium. [d] 22. tertij.

SATIS autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuũ est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si deniq; in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcumq; angulum in segmento

maiore



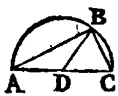
maiore B A C, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus BAC. Quare quicunq; alius ostendetur esse etiã recto minor, quia [a] *æqualis est angulo BAC, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.*

[a] *21. tertij.*

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit angulus ABC, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D, [b] erunt anguli D B A, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cum igitur angulus B D C, externus [c] æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo ABD; Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cum igitur [d] anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorũ dimidiũ, rectus: quod est primũ.



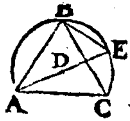
[b] *5. primi.*
[c] *32. primi.*
[d] *13. primi.*

VEL sic. Quoniam [e] angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DBC, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium angulorum A, C, & ABC, eiusdem trianguli. Quocirca [f] cum tres anguli in triangulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit ABC, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.

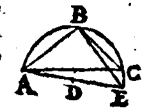
[e] *5. primi.*
[f] *32. primi.*

SIT

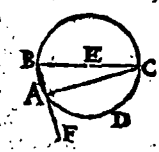
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum. Atque hęc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE, erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.



IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritque angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoq;. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC; constat vtrumque.



[a] 2. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli,

guli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum sit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit

a 32. primi. trium angulorum trianguli, a qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

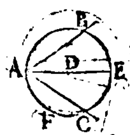
TRANSITVR a maiore ad minus; & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter

b 31. tertij. AE, ducatur recta AB. b Erit angulus ABE, segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur uersus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE,



c 31. tertij. peruenerit, c vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem.

d 13. tertij. Quod si vlterius moueatur ad AC, d faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est; vitiosas esse prædictas consequentias.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEG-

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

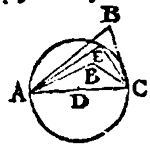
NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atque ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Praeterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, uel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit, semicirculus, aut semicirculo minus; erit maius, atque ita eius angulus recto quoque maior erit. quod hypothesi aduersatur.

QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositum

positum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum

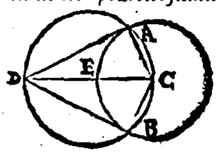


D A, vel D C, circulus describatur A E C, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis A E, C E, ita vt rectas A B, A C, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit, a angulus A E C, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, aequales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, b vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.

a 31. tertij.

b 21 primi.

EX ijs, quae in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectae ex eodem puncto per centrum circuli ductae, quae circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.



SIT enim circulus A B, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta D C, ex dato puncto ad centrum, eaque diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum E C, vel E D, circulus A C B D, secans datum circulum in punctis A, B, iunganturque rectae D A, D B. Dico vtramque circulum tangere in A D B. Ductis enim rectis A C, B C, c erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta D A, circulum A B, tanget in A; & recta D B, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri A C, quàm haec ad extremitatem semidiametri C B.

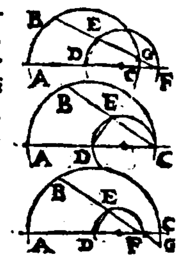
c 31. tertij.

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco; nimirum.

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto vero, vbi haec recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

SIT

SIT circulus A B C, per cuius centrũ D, describatur alius circulus D E F, & per horum circulorum centra ducatur recta A F; ac denique ex puncto F, vbi circulus D E F, rectam A F, intersecat, ducatur recta F B, secans circumferentias in B E G. Dico B E, G E, esse aequales. Ducta enim recta D E,[a] erit angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Igitur [b] recta D E, rectam B G, secat bifariam.



QVOD si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit [c] rursum angulus D E C, in semicirculo D E C, rectus; ac [d] propterea B C, in E, secabitur bifariã.

SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum [e] angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Quare [f] recta D E, rectam B G, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

[a] 31. tertij.
[b] 3. tertij.
[c] 31. tertij.
[d] 3. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 3. tertij.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & aequalia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.

IN circulo A B C D, descriptum sit quadrilaterum A B C D, cuius duo opposita latera A D, B C, parallela sint, & aequalia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectae A D, B C, parallelae sint, & aequales, [g] erunt quoque A B, D C, parallelae, & aequales. Parallelogrammum ergo est A B C D. Quia vero [h] & arcus A D, arcui B C, ob rectas aequales A D, B C, & arcus A B, arcui D C, ob aequales rectas A B, D C, aequalis est; erit totus arcus B A D, toti arcui B C D, & totus arcus A D C, toti arcui A B C, aequalis; ac proinde, ductis rectis B D, A C,

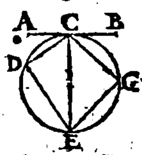
[g] 33. primi.
[h] 28. tertij.

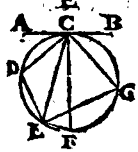
[a] 31.tertij. *semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare [a] anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.*

31. ## THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, a quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo





segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoq; segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta CE, per centrum. [b] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: [c] Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.

[b] 18.tertij.
[c] 31.tertij.

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: [d] eritque CF, perpendicularis ad AB, [e] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt anguli recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: [f] Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis

[d] 18.tertij.
[e] 31.tertij.
[f] 21.tertij.

æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero C D E G, [a] duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: [b] Sunt autem & duo anguli ACE, B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 22. tertij. [b] 13. primi.

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primum recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam [c] angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam vero C E, non transeat per centrum, construaturq; figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento maiore, [d] & hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus A C F, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quòd [e] angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, [f] æquales sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoque erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget.

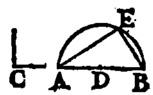
EODEM modo, si angulus B C E, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cum enim [g] anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales: [h] Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt

[c] 31. tertij. [d] 21. tertij. [e] 31. tertij. [f] 32. primi. [g] 13. primi. [h] 22. tertij.

bunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.

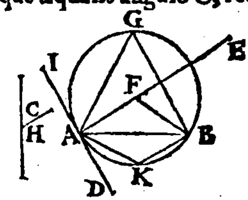
32. PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



RECTA data sit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nã [a] angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

[a] 31. tertij.



SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulus FBA, secetque B F, rectam A E, in F. [b] Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo F A, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super A B, esse æqualẽ angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G B.

[b] 6. primi.

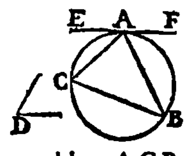
[c] 32. tertij.

SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo

angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, deſcriptumque erit ſuper AB, ſegmentum AKB, in quo angulus K, æqualis eſt angulo dato obtuſo H. Nam angulus I A B, hoc eſt, angulus datus H, [a] æqualis eſt angulo K, in alterno ſegmento A K B. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat. [a] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. 33.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



DATVS circulus ſit A B C; à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo D. [b] Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in ſegmento ablato A C B, æqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim [c] angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno ſegmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus FAB; erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum ACB, &c. Quod erat faciendũ.

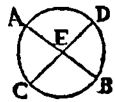
[b] 17. tertij.

[c] 32. tertij.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

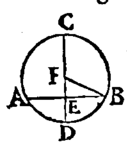
SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ A B, C D, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis A E, E B, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED.



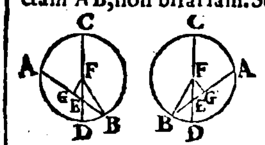
Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Transeat primum vtraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

TRANSEAT deinde CD, sola per centrum F, [a] 3. tertij. diuidatque primum rectam A B, bifariam, [a] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniá igitur C D, diuisa est per æqualia in F, & [b] 5. secundi. per inæqualia in E; [b] erit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ F D, ideoque quadrato rectæ F B, cum rectæ FD, FB, sint æquales:



[c] 47. primi. Est autem quadratum rectæ F B, [c] æquale quadratis rectarum F E, E B. Igitur rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quoque erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ E B, hoc est, rectangulo sub A E, E B; cum A E, E B, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus.

DIVIDAT iam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G,

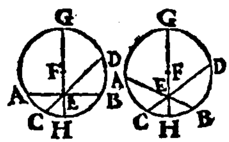


ducanturque rectæ F G, F B; [d] 3. tertij. [d] eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam vero rectangulum sub C E, E D, vna cum [e] 5. secũdi. quadrato rectæ F E, [e] æquale est quadrato rectę FD, hoc est, quadrato rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, [f] 47. primi. [f] æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ

rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ GE, [a] æquale est eidem quadrato rectæ GB. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnà cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.

[a] 5. secũdi.

TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuò secent, &c. Quod demonstrandum erat.



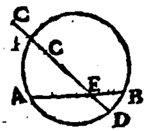
SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus

culus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.

SECENT *se mutuo rectæ A B, C D, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiã C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub F E, E D,* [a] *æquale est rectangulo sub A E, E B; & rectangulum sub* C E, E D, *ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B; Erunt rectangula sub* C E, E D, *& sub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum* C. *quod erat propositum.*



[a] 35. tertij.

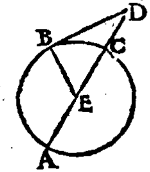
35.

THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

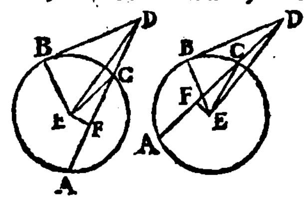
EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo

quo linea ducatur D A, secans circulum in C, [a] & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B. [a] 17. tertij.



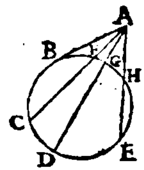
Transeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, [b] quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, [c] erit rectangulum sub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectę DE, [d] æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod est propositum. [b] 18. tertij. [c] 6. secũdi. [d] 47. primi.

NON transeat iam D A, secans per centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; [e] eritque EB, ad B D, perpendicularis; [f] & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, [g] erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, [h] æquale quadratum rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et [i] quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadratum rectæ DE, [k] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum DB, B E. Ablato ergo communi [e] 18. tertij. [f] 3. tertij. [g] 6. secũdi. [h] 47. primi. [i] 47. primi. [k] 47. primi.



muni quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

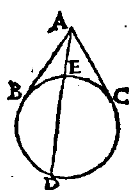
COROLLARIVM. I.



HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurima lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, a *erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.*

a 36. tertij.

COROLLARIVM. II.



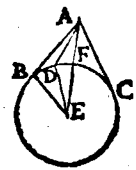
CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, b *æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.*

b 36. tertij.

COROL-

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci poſſit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, a erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi ducatur recta AE, b erit angulus ADE, maior angulo ABE.



a 18. tertij.

b 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, vt oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum ſecet in F, c erit AD, cum ſit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ a minima AF, remotior eſt. Vel ſic. Si AB, AD, ſunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipſis AD, DE, æquales. quod eſt abſurdum. d Sunt enim maiores AB, BE, quàm AD, DE. Solum igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangãt: Quod eſt propoſitum.

c 8. tertij.

d 21. primi.

COROLLARIVM. IIII.

ILLVD deniq; conſtat etiam ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt ſi duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura ſint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, (ſemper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci

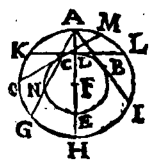
poſſunt.

possunt, ut constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntq́; ex 2. coroll. A C, A D, æquales. Cum ergo & A B, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales A B, A C, A D, quod est absurdum.
a 8. tertij. a Duæ enim tantum duci possunt.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales D B, D F, & DB, circulum tangat, in B. Dico & D F, eundem tangere in F. Ductis enim rectis E B, E F, ex centro, erunt duo latera D B, B E, duobus lateribus D F, F E,
b 8. primi. æqualia, & basis D E, communis. b Igitur anguli
c 18. tertij. B, F, æquales erunt: c Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit: atque idcirco D F, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & secans



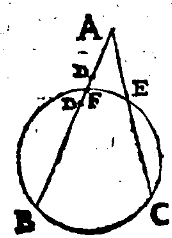
A E, quæ primum per centrum F, transeat, secetque circumferentiam in D. Dico rectangulum sub A E, A D, æquale esse quadrato ex A B. Descripto namque ex F, per A, circulo A K L, producantur A E, A B, usque ad H, I; & per D, ad AH, perpendicularis K L, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq́; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, æquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, KL, æquales erunt, secabunturq́; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, B I, & sub K D, D L, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; K D, DL. Itaque quoniam rectangulum sub H D, D A, hoc est, sub
d 35. tert. AE, (quæ ipsi H D, ostensa est æqualis) A D, d æquale est rectangulo sub K D, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB; constat propositum.

SED

SED iam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetq́; circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsque ad G, I; & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Eruntque ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, æquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, æquales erunt, secabunturq́; in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Itaq; quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, (quæ ipsi GC, ostensa est æqualis) AC, [a] æquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur. [a] 35. tertij.

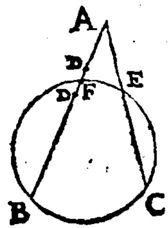
PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo fermè conuertemus.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.



EX puncto enim A, egrediātur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta

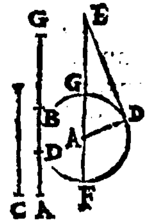
B, C, E,



B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui si dicatur non transire per quartũ punctũ D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub A B, A F, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub A C, A E; & rectangulum sub A B, A D, eidem rectangulo sub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula sub A B, A F, & sub A B, A D, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.

LICEBIT quoque ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiun cta compreheñsum, quadrato alterius sit æquale.



SINT datæ duæ rectæ A B, & C, sitq; ipsi A B, maiori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, minoris. Diuisa recta A B, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallũ A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipsi C, æqualis, ac deniq; ex E, per A, centrum recta extendatur E F, secans circumferentiam in G. Dico si rectæ A B, adijciatur B G, ipsi E G, æqualis, rectangulum sub tota A G, & G B, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub F E, E G. [a] *æquale est quadrato rectæ E D; (quòd E D, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulum sub F E, E G, æquale rectangulo sub A G, G B, (quòd rectæ F E, E G, rectis A G, G B, æquales sint. Sumpta*

[a] 36. tertij.

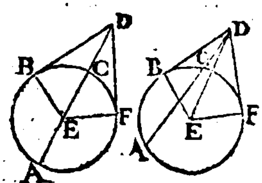
enim

enim est GB, ipsi EG, æqualis, & AB, ipsi FG, æqualis posita est,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex constructione.) æquale. Igitur & rectangulum sub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.

NON secus propositum demonstrabitur, si rectæ C, minori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum quadrato rectæ AB, maioris æquale sit.

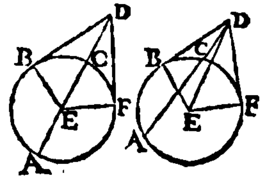
THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.



EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB: Dico DB, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA,

[a] 17. tertij.



si D A, secans non transeat per cētrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, DC, a æquale est quadratū rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, DC, ęquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E; & basis D E, communis: b erunt anguli D F E, D B E, æquales: c Atqui angulus D F E, rectus est, quòd D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

a 36. tertij.
b 8. primi.
c 18. tertij.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

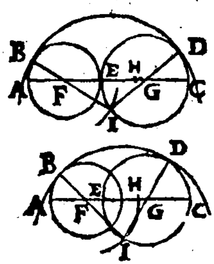
SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.

IN priori figura huius propos. duæ rectæ DB, DF, circulum ABCF, *A B C F, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quæcunque duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, sectum esse bifariam à recta D A. Cum enim iunctis rectis E B, E F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia sint, basisq́; E B, basi E F, æqualis; [a] erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.* [a] 8. primi.

DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum transire. Si enim in D A, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungaturq́; recta E D, vt in posteriori figura huius propos. Ergo, vt demonstratum est, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cum sint dimidiatæ partes anguli B D F, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.

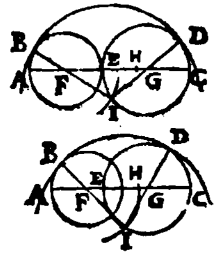
SED & sequens problema cum Ioan. Bapt. Benedicto absoluemus, quod ad propos. 17. huius lib. promisimus, debueramusque ibidem demonstrare, nisi memoriæ excidisset. Est autem eiusmodi.

DATIS duobus circulis, quorum vnus non sit totus intra alium, circulum, qui vtrumque tangat, describere.

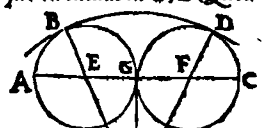


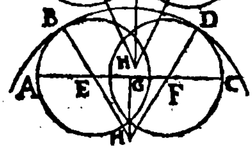
SINT primum duo circuli se mutuò tangentes, aut secantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentijs in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, [b] per contactum E, transibit. Abscissa recta E H, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, cẽtro minoris ad interuallũ recta [b] 12. tertij.

Ff HC,



HC, quæ maior est, quam semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentijs in B, D. Et quia CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, æqualis est, per constructionem; erunt tota CE, IB, æquales. Cũ ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis sit, erit quoque IB, ipsi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.

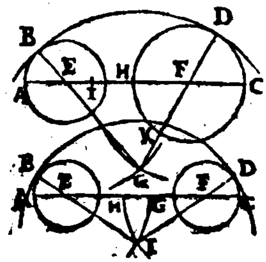




SINT deinde duo circuli se mutuò tangentes, vel secantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariã in G, (Quãdo circuli se mutuò tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales, nimirum rectos;[a] erunt & bases HE, HF, æquales: Et additis semidiametris æqualibus EB, FD, totæ lineæ HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

[a] 4. primi.

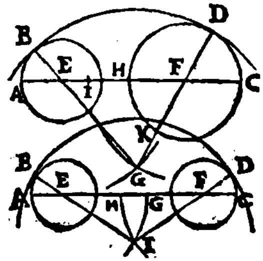
TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et si circuli sunt inæquales, descri-



describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris GH, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ FI, compositæ ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipsi FI, æqualis est: ablatis æqualibus FK, FH; reliquæ æquales erunt KG, HI. Est autem HI, sumpta æqualis semidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipsi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, sit æqualis; erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumq; circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorũ distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, sumãtur rectæ æquales AG, CH, ita vt qualibet semissem ipsius AC, superet: & ex cẽtro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex cẽtro F, per H, descriptus: ac deniq; ex I per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, posita sint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod est propositum.

IAM vero eadem arte describemus circulum data magnitu-



gnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindam⁹ A G, C H, reliqua perficiemus, vt proximè dictum est.

PORRO *manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ A C, per centra circulorum vsque ad circumferentias ducta, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum A B, & C D, in A, & C, ex coroll. propos. 13. huius lib.*

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS

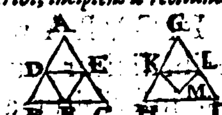
ELEMENTVM QVARTVM

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

AGENS Euclides quartò hoc libro de varijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera AB, AC, BC, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non



 tangit

tangit latus H I, trianguli G H I. non dicetur triangulum K L M, inscribi in triangulo G H I; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.

I I.

SIMILITER & figura circum figurã describi dicitur, cum singula eius, quę circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum G H I, non dicetur descriptum esse circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM proprie figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

I I I.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

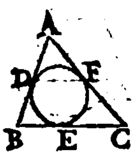
VT

VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulũ in circulo esse inscriptũ. Quod si vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero, si latera trianguli ABC singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

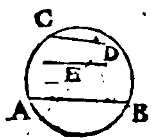
VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura descri-

 tionis

tionis 4. inscriptum esse in triangulo A B C: At vero circulus A B C, in figura definitionis 3. descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

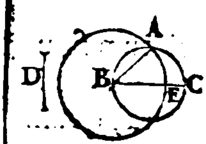
RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.



VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.



IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter [a] sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit

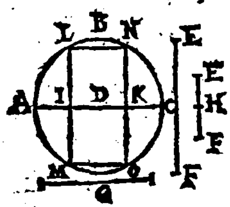
a 15. tertij.

erit B C, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, [a] abſcindatur B E, æqualis ipſi D; & centro B, interuallo autem B E, circulus deſcribatur E A, ſecans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [b] Eſt enim B A, æqualis ipſi B E; & D, æqualis eidem B E, per conſtructionem. Quare A B, & D, inter ſe æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectã lineã accommodauimus, &c. Quod faciendum erat. [a] 3. primi. [b] 15. defin. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda ſit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non ſit, & alteri rectæ G, parallela. [c] *Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G, parallela. Quod ſi recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero E F, diametro minor fuerit, ſecta ea bifariam in H, abſcindatur D I, ipſi H E, & D K, ipſi H F, æqualis, ut tota I K, toti E F, ſit æqualis.* [d] *Et per I, K, ad angulos rectos ipſi A C, ducantur L M, N O; iunganturq; L N. Dico L N, accommodatam eſſe æqualem ipſi E F, & ipſi G, parallelam. Cum enim L M, N O, æqualiter a centro diſtent,* [e] *ipſæ æquales inter ſe erunt:* [f] *quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos ſecentur a recta A C, per centrum D, tranſeunte; erũt & earum ſemiſſes L I, N K, æquales.* [g] *Quia vero L I, N K, parallelæ etiam ſunt;* [h] *erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis ſit ipſi E F, & parallela ipſi G; Erit etiam L N, æqualis ipſi E F,* [i] *& ipſi G, parallela.*

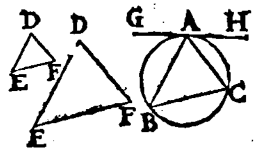


[c] 31. primi. [d] 11. primi. [e] 14. tertij. [f] 3. tertij. [g] 28. primi. [h] 33. primi. [i] 30. primi.

lela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea aequalis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

2. ## PROBL. 2. PROPOS. 2.

I N dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

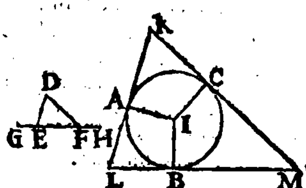


SIT in circulo ABC, dato describendum triangulũ ęquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C, angulo E, atq; extendantur rectæ A B, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta A C, in rectam AB, vel inter rectas A B, A G: propterea quòd anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, [a] minores sunt duobus rectis. [b] Essent autem duobus rectis æquales, si A C, in A B, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, [c] æqualis angulo GAB; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, [e] erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 17. primi.
[b] 13. primi.
[c] 32. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 32. primi.

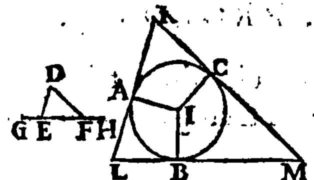
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulũ æquiangulũ dato triãgulo D E F. Producto latere E F, vtrinq; ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus A I B, æqualis angulo DEG; & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores; ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet supra rectas AI, CI, quod hę angulũ constituant in I. Cum enim spatium circa I, ęquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F; sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed [a] hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectã lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra IC. Cadit igitur necessario A I, producta infra C I; atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K. Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad

[a] 17. primi.



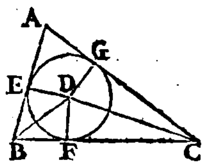
ad 31. propos. lib. 1. ostēsum fuit; & anguli IAL, IBL, sunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur [a] & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE. [b] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

[a] 13. primi.

[b] 32. primi.

4. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere.



SIT describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus anguli DBF, DFB, trianguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; [c] erunt quoq; latera DE, DF, æqualia. Eademq; ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

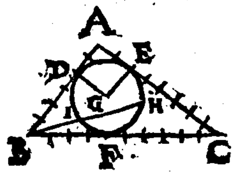
[c] 26. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

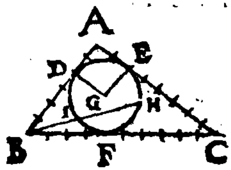
VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; [a] in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate. [a] 20 primi.

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



SIT triangulum ABC, [b] cui circulus inscribatur DEF, tãgens latera triãguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadem latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla est segmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmẽti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et [c] quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, recta, cuius [b] 4. quarti. [c] 36. tertij.

qua-



quadratum quadruplum est re ctanguli sub BH, BI. Quod est propositum.

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera A B, A C. superare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, ut ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli DEF, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta cōtactuum D, E, rectis GD, GE; [a] erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, [b] erunt tam rectæ AE, DG, quàm AD, EG, parallelæ inter se: atque idcirco A G, parallelogrammum erit. [c] Quare tam recta A D, semidiametro EG, quàm recta AE, semidiametro DG, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ AD, AE, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis A D, A E, vt ostensum est. Nam EC, ipsi F C, & DB, ipsi FB, æqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera A B, A C, superant latus B C, diametro circuli inscripti. Quod est propositum.

[a] 18. tertij.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.

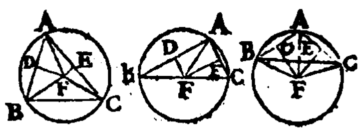
ITAQVE quāuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulū interijciuntur. Ostensum enim est, latera AB, AC, superare latus BC, rectis tangentibus A D, AE, &c.

IAM vero his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, superare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus BC, notum ex notis lateribus A B, A C, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum E C, dabit segmentum C F, vsque ad punctum tertiū F: Vel reliquū segmentū DB, dabit segmentum BF, ad idem punctū F. Si igitur ex duabus pūctis D, E, erigantur

erigantur perpendiculares DG, EG; coibunt hæ in G, centro circuli inſcribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorũ. Dempto latere BC, 10. palmorũ ex duobus lateribus A B, AC, hoc eſt, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo A D, quàm A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D B, continebit 4. palmos, totidemque ſegmentum B F, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B. 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id eſt, ex 18. palmis, reliqui ſunt 12. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D, 2. palmorum, & vtrumque BD, BF, 4. palmorum. Poſtremo dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.



SIT circulus deſcribendus circa datum triãgulum ABC. Diuidantur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtuſum angulum, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quæuis latera bifariam poſsint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia ſunt lateribus BD, *tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.*

II.

SIMILITER & figura circum figurā describi dicitur, cum singula eius, quę circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM proprie figuræ rectilineæ dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

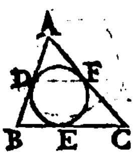
VT

VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulũ in circulo esse inscriptũ. Quod si vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero, si latera trianguli ABC, singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

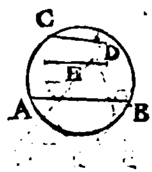
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura definitionis

tionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At vero circulus A B C, in figura definitionis 3. descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VIII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.



VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter a sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit

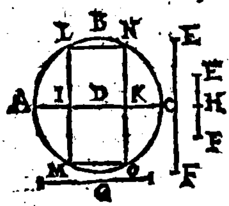
a 15. tertij.

erit B C, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro,
[a] abſcindatur B E, æqualis ipſi D; & centro B, interuallo [a] 3. primi.
autem B E, circulus deſcribatur E A, ſecans circulum
A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in
circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [b] Eſt enim B A, [b] 15. defin.
æqualis ipſi B E; & D, æqualis eidem B E, per conſtru- primi.
ctionem. Quare AB, & D, inter ſe æquales quoq; erunt.
In dato ergo circulo rectã lineã accommodauimus, &c.
Quod faciendum erat.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda ſit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non ſit, & alteri rectæ G, parallela. [c] Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G, parallela. Quod ſi recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero E F, diametro minor fuerit, ſecta ea bifariam in H, abſcindatur D I, ipſi H E, & D K, ipſi H F, æqualis, ut tota I K, toti EF, ſit æqualis. [c] 31. primi.



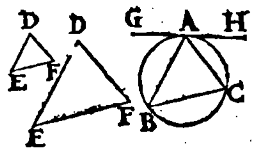
[d] Et per I, K, ad angulos rectos ipſi A C, ducantur L M, N O; iungaturq; LN. Dico LN, accommodatam eſſe æqualem ipſi EF, & ipſi G, parallelam. Cum enim LM, N O, æqualiter a centro diſtent, [e] ipſæ æquales inter ſe erunt: [f] quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos ſecentur a recta A C, per centrum D, tranſeunte; erũt & earum ſemiſſes LI, NK, æquales. [g] Quia vero LI, NK, parallelæ etiam ſunt; [h] erunt quoque L N, IK, æquales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis ſit ipſi E F, & parallela ipſi G; Erit etiam L N, æqualis ipſi EF, [i] & ipſi G, parallela.

[d] 11. primi.
[e] 14. tertij.
[f] 3. tertij.
[g] 28. primi.
[h] 33. primi.
[i] 30. primi.

lela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

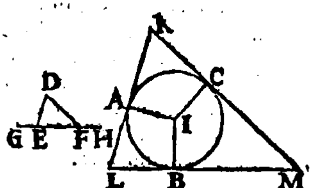


SIT in circulo ABC, dato describendum triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, atq; extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quòd [a 17. primi.] anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, [a] minores sunt duobus rectis. [b 13. primi.] [b] Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. [c 32. tertij.] Est enim angulus C, [c] æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. [d 32. tertij.] Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. [e 32. primi.] Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, [e] erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

PROBL.

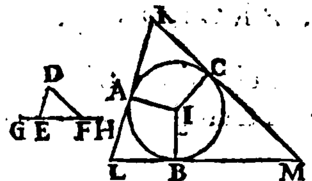
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulū æquiangulū dato triā gulo D E F. Producto latere E F, vtrinq; ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus A I B, æqualis angulo DEG; & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores; ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet supra rectas AI, CI, quòd hę angulū constituant in I. Cum enim spatium circa I, ęquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F; sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed [a] hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectā lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra IC. Cadit igitur necessario A I, producta infra C I; atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K. Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad

[a] 17. primi.

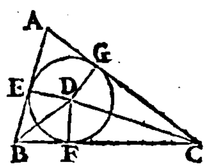


ad 32. propos. lib. 1. ostẽsum fuit; & anguli I A L, I B L, sunt duo recti; erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur [a] & anguli D E G, D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo D F E. [b] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum &c. Quod efficiendum erat.

[a] 13. primi.
[b] 32. primi.

4. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere.



SIT describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus anguli DBF, DFB, trianguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; [c] erunt quoq; latera DE, DF, æqualia. Eademq; ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

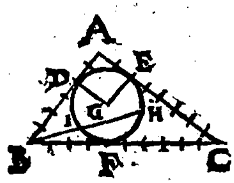
[c] 26. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; a in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate. a 20 primi.

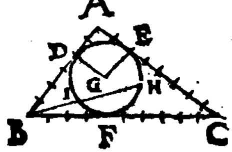
IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



SIT triangulum ABC, b cui circulus inscribatur DEF, tãgens latera triãguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadem latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla est segmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmẽti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et c quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, recta, cuius qua-

b 4. quarti.

c 36. tertij.



quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI. Quod est propositum.

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera A B, A C, superare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, ut ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli D E F, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta cõtactuum D, E, rectis GD, GE; [a] erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, [b] erunt tam rectæ AE, DG, quàm AD, EG, parallelæ inter se: atque idcirco A G, parallelogrammum erit. [c] Quare tam recta A D, semidiametro EG, quàm recta AE, semidiametro DG, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ AD, AE, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis A D, A E, vt ostensum est. Nam EC, ipsi F C, & DB, ipsi F B, æqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera A B, A C, superant latus B C, diametro circuli inscripti. Quod est propositum.

[a] 18. tertij.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.

ITAQVE quãuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulũ interijciuntur. Ostensum enim est, latera AB, AC, superare latus BC, rectis tangentibus A D, AE, &c.

IAM vero his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, superare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum E C, dabit segmentum C F, vsque ad punctum tertiũ F: Vel reliquũ segmentũ DB, dabit segmentum BF, ad idem punctũ F. Si igitur ex duobus pũctis D, E,

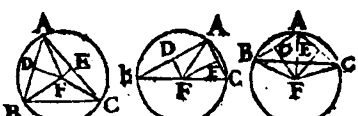
erigantur

erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorũ. Dempto latere BC, 10. palmorũ ex duobus lateribus A B, AC, hoc est, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo A D, quàm A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D B, continebit 4. palmos, totidemque segmentum B F, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id est, ex 18. palmis, reliqui sunt 12. palmi. Vtrumque ergo segmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D, 2. palmorum, & vtrumque BD, BF, 4. palmorum. Postremo dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc est, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo segmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

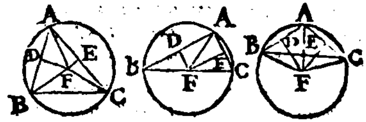
CIRCA datum triangulum circulum describere.

SIT circulus describendus circa datum triãgulum ABC. Diuidantur duo late-



ra AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia sunt lateribus

BD,



a 4. primi. BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti: a erũt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, b omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si vero sit in latere BC, c angulum BAC, esse rectum, quòd sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, d angulum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

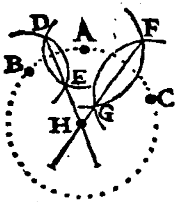
b 31. tertij.
c 31. tertij.
d 31. tertij.

CONTRA vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in vnum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus: Item si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti: si verò extra, esset angulus oppositus, obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus: si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

SCHO-

SCHOLIVM.

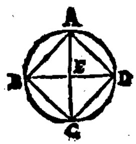
COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, vt hac propos. traditum est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur secãtes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, secans rectam DH, in H. Dico H, esse centrum circuli transeuntis per data puncta A, B, & C, Nam si ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.



PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum



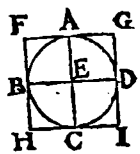
omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; [a] erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ CD, DA; Et rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; [b] erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales; [c] ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri A B C D, inter se æqualia sunt. Sunt autem, [d] & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B C D; proptereaque in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.
b 26. tertij.
c 29. tertij.
d 31. tertij.

7.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.



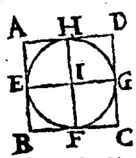
SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, BD, secantes se in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpẽdiculares FG, FH, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico F H I G, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, [e] erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. [f] Quare & F H, G I, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, [g] erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: Sed A C H, est rectus. Igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera

e 28. primi.
f 30. primi.
g 34. primi.

latera FG,FH,HI,IG, æqualia, ideoque FGIH,quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propof. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 8.

IN dato quadrato circulum describere.



SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. [a] Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID; ideoque rectæ IE, IF, IG. IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hę inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propof. 16. lib. 3. [b] quòd anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

[a] 33. primi.
[b] 29. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD.

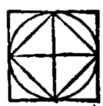
 Ducantur

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 6. primi.

Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia sunt; [a] erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. [b] Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; [c] erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

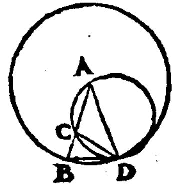


10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

[d] 11. secundi.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ [d] diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus



circulus describatur, in quo [a] accõmodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum A B D, Isosceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, [b] describatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ BD; & recta AB, secat circulum DCA: [c] tanget recta B D, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, [d] æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eidem [e] æqualis est etiam angulus externus B C D. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo A B D, [f] cum A B D, A D B, æquales sint: ac propterea [g] rectę CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi CA, æqualis erit; [h] ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.

[a] 1. quarti.
[b] 5. quarti.
[c] 37. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 32. primi.
[f] 5. primi.
[g] 6. primi.
[h] 5. primi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli A B D, [i] æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres [k] æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

[i] 32. primi.
[k] 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quòd se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam, BD, perpêdicularem est ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquũ habeat quãcunque proportionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Qua res hactenus desiderata est.

11.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [a] Construatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F: & in circulo [b] inscribatur triãgulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, [c] bifariam diuidatur rectis CE, DB; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico

[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. primi.

Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inscriptũ, esse equilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, A D C, duplus sit anguli C A D, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD,

DCE, ECA, æquales. [a] Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco, [b] & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus A B, E D, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. [c] Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.

[a] 26. tertij.
[b] 29. tertij.
[c] 27. tertij.

COROLLARIVM.

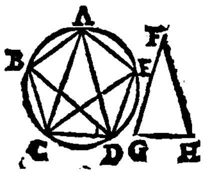
SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti. [d] *Cum enim tres anguli B A C, C A D, D A E, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus B C, C D, D E, insistant; sit autem C A D, per coroll. præcedentis propos. quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti; erit totus B A E, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.*

[d] 27. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. [e] *Fiat triangulum Isosceles FGH, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde consti-*

[e] 10. quarti.

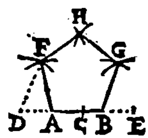


constituantur anguli ACD, ADC, æquales angulis G, H, coeantq́; rectæ CA, DA, in A, [a] quæ efficient angulum CAD, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, uterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triãgulũ ACD, circulus [b] describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulũ ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, ut prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.

[a] 32. primi.

[b] 5. quarti.

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita AB, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, ut propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad utramq; partem, sintq́; AD, BE, maiori segmento AC, æquales. Interuallo deinde data recta AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniunganturq́; rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse æquilaterum, atque æquiangulum. Quòd enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint æquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quòd autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, ut ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quòd basis AD, æqualis est maiori segmento AC; lineæ AB, utrumuis vero laterum æqualium ipsi AB, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorũ rectorũ, nimirum, BAF, reliquas tres quintas duorum rectorũ continebit. Cũ ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorũ rectorum; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademq́; ratione erit ABG, angulus



penta-

pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessariò in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non forent. quod est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum. [a] 21. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 12. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [b] Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; [c] coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL; erunt quadrato rectæ FH, [d] æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quàm rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarũ FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam constat

[b] 11. quarti.

[c] 13. primi.

[d] 47. primi.

constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3 cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt ostensum est; [a] erunt anguli A F H, B F H, æquales. Igitur [b] & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC, anguli B I F. Cum igitur [c] anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentijs AB, BC, [d] quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur AB, BC, erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis B F I, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune B F; [e] erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ H I, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus rectas I K, K L, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Aequilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

[a] 8. primi.
[b] 4 primi.
[c] 27. tertij.
[d] 28. tertij.
[e] 26. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunq; figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum

metrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur; illas perpendiculares concurrere, angulosq́; conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quę coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF, sint minores duobus rectis; (Nam quia angulus BAE, duobus rectis minor est, erit eius semissis, nimirum angulus BAF, recto minor. Eodemque modo ABF, minor erit recto,) [b] coibũt necessario rectæ AF, BF: atque adeo intra pentagonum. Nam si ducerentur rectæ AC, AD, (quas tamen ducendas non censuimus, ne multitudo linearum confusionem pareret. Quilibet si vult, poterit eas ducere, vel saltem punctis notare.) [c] essent ipsæ inter se æquales, anguli que BAC, EAD, æquales etiam, propterea quòd latera BA, BC, lateribus EA, ED, æqualia sunt, æqualesque continent angulos B, E. Hisce ergo angulis ablatis ex angulis æqualibus BAF, EAF, reliqui essent æquales anguli CAF, DAF. Quare recta AF, diuidens in Isoscele ACD, angulum CAD, bifariam, secabit producta basin CD, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. Non aliter demonstrabitur, rectam BF, productam secare

[a] 9. primi.
[b] 13. pron.
[c] 4. primi.

secare bifariam rectam D E. Quocirca necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis GD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli C B F: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF,
[a] 4. primi. CBF; [a] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli F A L; estque latus A F,
[b] 26. primi. subtensum vni æqualium angulorum, commune; [b] erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per corroll. propos. 16. lib. 3 eò quòd angulos rectos faciant cũ semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi.

PROBL.

PROBL. 14. PROPOS. 14. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describẽdus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quòd toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ F C, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

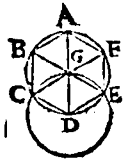
SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT



SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrū G, inſcribendum hexagonū ęquilaterū, & æquiangulū. Ducta diametro AD, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui ſecet circulū datum in pūctis C, & E, e quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F, quod dico eſſe & æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, D C, æquales inter ſe: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare [a] tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter ſe erunt: qui cum [b] æquales ſint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, [c] æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus E G F, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter ſe æquales; quibus cum etiam [d] æquales ſint ad verticē anguli FGA, AGB, BGC; erunt ſex anguli ad centrum G, æquales. [e] Quare circumferentiæ, quibus inſiſtunt, [f] ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Rurſus quia circumferentia B C, æqualis eſt circumferentiæ AF; ſi addatur communis CDEF, erunt circumferentię B C D E F, A F E D C, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtentes BAF, ABC, [g] æquales erunt. Similiterque oſtendemus, reliquos angulos BCD, CDE, D E F, E F A, æquales eſſe cuilibet iſtorum, quia nimirum quilibet inſiſtit arcui compoſito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inſcripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus inſiſtere. Quare æquiangulum quoque eſt hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

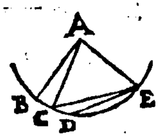
[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertij.
[f] 29. tertij.
[g] 27. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & deniq; circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, ut hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, ut hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariã. Reliqua deinde perficienda, ut propos. 12. 13. 14. traditur.



PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus utrouis æqualium maius sit; siue in quo utrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE.[a] Erit ergo subtensa D E, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hæc maior quàm D E, ex scholio propos. 29. lib. 3. hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris A C, A E, erit triangulum ACE, Isosceles, cuius tertium latus C E, utrouis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim[b] anguli ACE, AEC, æquales sunt,[c] & simul duobus rectis minores, erit uterque acutus. Ducta item recta A B, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro insistens rectus, ex scholio propos 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum A C E, habens tertium latus CE, utrolibet æqualium maius. Quod est propositum.

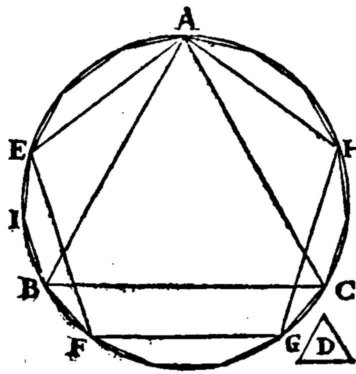
[a] 15. quarti.
[b] 5. primi.
[c] 17. primi.

PROBL.

16.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.



SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 6. lib. 1. erit etiam æquiangulũ; [a] inscribatur ei equiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propos. 6. lib. 1. [b] eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, qui tertia pars est totius circumferentiæ. [c] Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A; [d] eruntque quinque arcus A E, E F, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia A B C, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. [e] Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus

a 2. quarti.
b 26. vel 28. tertij.
c 11. quarti.
d 28. tertij.
e 30. tertij.

arcus B I, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, [a] æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod [b] & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

[a] 1. quarti.
[b] 27. tertij.

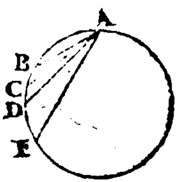
SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quòd ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quòd ea sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq́ diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumq́ æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio ſemper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circumferentia, talium 5. eſt arcus AB, ſexta pars circumferentiæ; & talium 6. eſt arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.



PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. ſuperat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

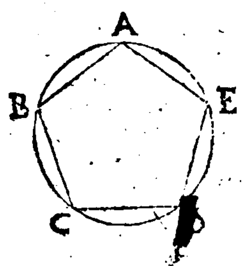
ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inueſtigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

NON

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inſcriptam, eſſe quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam neceſſario æquiangulam quoque eſſe, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo anguli proximi æquales ſunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo poſito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundum occuparet, eſſet primo proximus. quod eſt contra hypotheſim.) ſextum, octauum, decimnm, &c. Qua in re nonnulli hallucinati ſunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam, neceſſario eſſe quoque æquiangulam: inter quos eſt Campanus Euclidis non obſcuri nominis interpres.

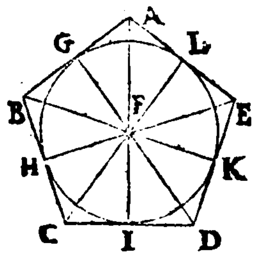


SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum ABCDE, circulo inſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoq; æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, ſint æqualia,[a] *erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca*[b] *anguli ABC, BCD, illis inſiſtentes æquales erunt: Eodemq; modo omnes anguli oſtendentur eſſe æquales, quotquot illi ſint; ac propterea figura ABCDE, æquiangula eſt, ſiue angulorum numerus ſit par, ſiue impar. Quod oſtendendum erat.*

[a] *28. tertij.*
[b] *27. tertij.*

SIT rurſus figura æquilatera ABCDE, quælibet

 angu-



angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, [a] erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo & bases FG, FL, ex centro sint æquales; [b] erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia sunt, angulique illis contenti, ostensi æquales; [c] erunt quoque bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoq; æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqualis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt; cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ

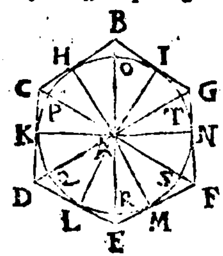
[a] 18. tertij.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.

figura proposita inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.

HÆC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solum concludetur, primum angulũ æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquàm autem probabitur, primum vltimo esse æqualem, eo quòd vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquàm autem ostendetur, secundum angulum esse primo æqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur æquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demum per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorũ dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupãtibus, secundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est.) cum primus ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & secundo angulo; erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonstrauimus, omnes anguli inter se erũt æquales.

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex eadem demonstratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorũ numerus sit par, circulo circumscriptam, esse quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo vt nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus CH. Arcui quoque OH, æquales sumatur OI, QK, QL, SM, SN,



ita vt sex arcus æquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum non proximorum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntque ad vtrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK; RL, RM; TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessario rectæ HB, AB, propterea quòd duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia sunt, [a] angulosq; continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, insistentes; [b] erunt quoque bases BH, BI, & anguli HI, æquales. Cum ergo BHA, rectus sit ex constructione; erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I: conuenietque cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio

[a] 27. tertij.
[b] 4. primi.

scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum T I, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli G A I, duobus angulis H, A, trianguli C A H, æquales sunt; (Nam I, H, recti sunt, [a] & G A I, C A H, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus T I, P H.) lateraq; A I, A H, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt quoque latera G I, G A, lateribus H C, C A, æqualia. Cum ergo & B I, ipsi B H, ostensa sit æqualis; erit tota B G, toti B C, æqualis. Eadem ratione, ducta recta G N, tanget circulum in N, coibitq; cum semidiametro A F, producta in F, eritq; ipsi G B, æqualis. Item iuncta recta F M, circulum tanget in M, & cum semidiametro A R, producta conueniet in E, ipsiq; F G, æqualis erit. Similiter ducta recta E L, tanget circulum in L, & semidiametro A Q, protracta occurret in D, ipsiq; E F, fiet æqualis. Denique iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro A P, producta concurret in C, fietq; ipsi D E, æqualis. Quòd autem D K, in eodem puncto C, occurrat semidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta C K, circulum tangeret in K, vt demonstratũ est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentẽ intercipere tur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, [c] Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumscriptum, æquilaterum. At idem esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura B C D E F G, æquilatera est, erunt quidem per ea, quæ paulò ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se æquales; omnesq; secti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, [d] tribus angulis trianguli A C H, æquales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Est autem B A H, maior quàm C A H, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus O H, maior sit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit: qui cum semisses sint totorum angulorum B, C, vt ostensum est; erit totus quoque C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum B C D E F G, æquiangulum. Quod erat ostendendum.

[a] 27. tertij.
[b] 26. primi.
[c] 16. tertij.
[d] 32. primi.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10, &c.

QVOD si figura æquilatera quotcunque angulorum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inscripta angulis, &c, vt factũ est in pentagono propos. 12. tũ necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdẽ propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parẽ quemcunq;, vt quartũ, (si enim secundũ occuparet, esset primo proximũ, quod est cõtra hypothesim.) sextum, octauũ, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.

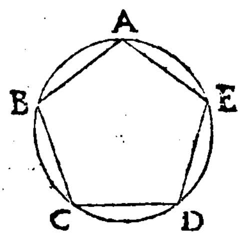
SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessariò æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FH, FI, FK, FL, [a] quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. æquales sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro æquales. [b] Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus com-

[a] 18. tertij.

[b] 8. primi.

comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse: ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Est autem latus FG, vni æqualium angulorum oppositum, commune. [a] Igitur latera quoque AG, BG, æqualia erunt; atque ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidia æquales sunt, erunt quoque tota linea AB, AE, æquales. Eademq; ratione AB, BC; & BC, CD; & CD, DE; & DE, EA, æquales erunt. Quam ob rem figura ABCDE, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum. [a] 26. primi.

SIT rursus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterũ numero imparium circulo inscripta. Dico eã necessariò esse quoq; æquilaterã. Quoniã enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; [b] erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex cõi circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dẽpto ergo cõi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus [b] 26. tertij.



BC, arcui DE, æqualis erit; ac proinde [c] & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quodq; latus ei, à quo tertiũ est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (cõstitui autẽ quoduis latus potest primũ) æquale erit tertio, tertiũ quinto, quintũ septimo, septimũ nono, &c. atq; in hunc modũ omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt; cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem [c] 29. tertij.

vltimum

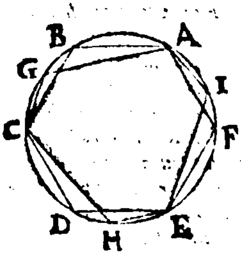
ultimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab ultimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, ut quarto, sexto, octauo, &c. usque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

HÆC etiam demonstratio in figuras æquiangulas pariũ laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquàm autem per eam demonstrabitur, primum ultimo esse æquale, propterea quòd ultimum occupat locum parem, ut in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & alijs loca paria possidentibus; at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eò quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo unum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit unum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locũ parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, ut unum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit unum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cum primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

S I

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferri non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero sit hexagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDEF, in circulo descriptũ; sumaturque in arcu BC, quoduis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus æqualis DH; Itẽ in quinto ab eo arcus æqualis FI; iunganturq́ue rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, æquiangulum esse, at non æquilaterum.



Quòd enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] æquales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus BG, DH, æquales sunt, per constructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, æquales erunt; [b] ac proinde anguli BCD, GCH, illis insistentes æquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos DEF, HEI, & FAB, IAG, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sex angulis hexagoni ABCDEF; æquales sunt, singuli singulis: ideoq́ue cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoque illud æquiangulum. Quòd autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, æqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inæqualia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper uno in medio, æqualia

a 21. tertij.

b 27. tertij.

æqualia sint, vt supra ostendimus.

IDEM prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura æquilatera, atque æquiangula.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24 laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figuræ inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulũ æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isosceles

habens

habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

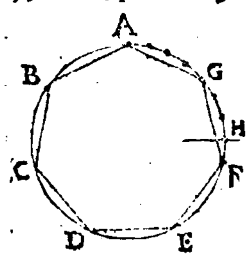
DIVISIO autem hæc angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accommodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorũ ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi cõtineant ipsum quinquies; propterea quòd quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis vtrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad verticem, &c.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula construantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribētur quoque omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometricè diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato; de absoluta figurarū rectilinearum omnium descriptione intra circulū, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometricè ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, quæ non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo describantur: verū etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

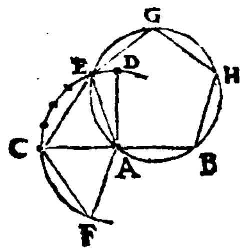
SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quæuis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosue figura inscribenda continet. Secabis autem quadrantē A H, in propositas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demon-



demonstraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum distantiam partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quòd sæpius attentando, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, si ea partem desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniã enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia qualibet pars cum alijs tribus, quarum singulæ in singulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc est, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est vna illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus A G, totius circumferentiæ. Atque ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur eiusmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc est, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaque si arcui A G, quatuor partium abscindantur arcus continuè æquales, eisdemque arcubus rectæ subtendantur, inscripta erit circulo figura proposita, vt ex demonstratis liquet.

IAM vero si supra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam A B, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad

C, vt



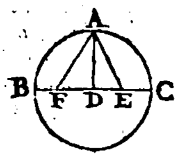
C, vt AC, ipsi AB, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaq; AD, perpendiculari ad AC, vt quadrans sit C D, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrãs CD, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit; quarum 4 sint C E, iungaturque recta AE, quæ ipsi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta subtendens 4 partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proximè demonstrauimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, æqualia sunt; & bases item æquales AE, AF; [a] erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, [b] & anguli ACE, AEC, sint æquales; erit & ACF, ipsi AEC, æqualis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Est autem [c] externus BAE, eisdem internis ACE, AEC; æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis AB, AE, [d] rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singula autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt. Si enim aliæ rectæ maiores quàm AB, AE, vel minores subtenderent quintas partes, continerent eæ angulum quoque pentagoni. quod est absur-

[a] 8. primi.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 1. quarti.

absurdum: cum minor foret, vel maior angulo pentagoni B A E. Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ex in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere B A E, in extremo datæ lineæ A B. Si namque, posita recta A E, æquali ipsi A B, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt antè diximus.

QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit; placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F. Itaque si ducatur recta A F, erit A F, latus Pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.



NON erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiãgula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

Ii CEN-

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: ita vt idem sit centrum circuli, & figuræ.

SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, M G. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subtendant angulos æquales comprehensos æqualibus

[a] 4.primi. rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium, [a] æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF, quam

[b] 13.primi. tres F L M, M L K, K L E, [b] duobus sunt rectis æquales:

[c] 8.primi. Sunt autem A M G, L M F; FLM, KLE, [c] inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli GML, MLK, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura G H I K L M.

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunganturque rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntque bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figuram [illegible]scripti, æquales: [d] Æquales erunt

[d] 8.primi. anguli A G N, B G N, ideoque recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemque modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD, &c. Quæ cum ex defin.4. lib. 3. ostendant distantias rectarum A B,

[e] 14.tertij. B C, &c. æqualium à centro N; [e] æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.

NEQVE vero & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triangulum, quadratum,

dratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, ut inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo aequilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono aequilatero, & aequiangulo, aequales sunt quatuor rectis, quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, ut ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli aequilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni aequilateri, & aequianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quòd omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis aequilateris, & aequiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono aequilatero, & aequiangulo aequales sunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor aequales sunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinq; aequiualent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcirco vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti. &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum aequales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, ut dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni aequilateri, & aequianguli aequales sunt $\frac{30}{7}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt aequales, hoc est, complectuntur $\frac{70}{7}$. vnius recti; fit, ut vnus contineat $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & praeterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori *neque quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulũ, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.*

CAETERVM, benigne Lector, ad finem lib. 6. reperies propositionem ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectantem, quæ omnino necessaria est, vt intra quamlibet figuram, & circa circulus describatur ex doctrina propos. 13. & 14. huius libri. Reiecta autem est ea propos. in lib. 6. quia per incuriam ante propos. 13. huius libri non apposita fuit.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM

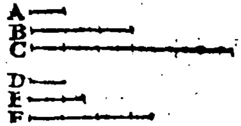
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad ullam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & alia figuræ plana. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ



maiorem quampiam magnitudinum metitur, appellari partem: Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cũ 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo

tudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc vtramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfecte metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CÆTERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod vna maior est, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quòd neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c.

quamuis amba sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVANQVAM autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appella-

appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS *Diuisionibus.*

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi.

intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas admirabilior proportionum affectionibus percipiatur, adiecimus paulo uberiorem tractationem in hac posteriori editione, quam in priori : præcipue insertis multis aliis proportionum affectionibus, quæ possent in promptu nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequimur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita ... diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20 palmorum, ad lineam 10 palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles. Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles ... [illegible] ...cuntur autem quantitates commensurabiles ... [illegible] ... vnam communem partem aliquotam ... [illegible] ...dem communis metitur ... [illegible]
rum. & linea 8 ... [illegible]
est vtriusque ... [illegible]
rum. Sic ... [illegible]
titur ... [illegible]

[illegible]

tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis rectè distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisve, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt a nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio rectè posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; si in vtraque diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrique harum subdiuisionum prætulerim, supra exposui in responsione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS *proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius subdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quando*

maior

maior quãtitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartiẽtem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularẽ, & submultiplicem superpartiẽtem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinque hæc

genera

genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. Qualis est proportio numeri 20 ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item propartio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CAETE-

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitę. Atque ita si ijdem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si ijdem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si vero millesima reperienda sit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturq; per continuam additionem eiusdem numeri, pri-

mum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei proposita. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.

Proportiones septuplæ.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decuplæ.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE Superparticulari.

PROPORTIO *superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedũ, quæ tertia pars est lineæ 9. pedũ, &c.*

HÆC

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; Si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quæcunque reperitur hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionem superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI causa. Si quærantur omnes proportiones sesquiseptimæ; quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq; oẽs cuiusq; proportionis superparticularis *quamuis amba sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.*

QVANQVAM autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel

plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appella-

appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates. (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi.

intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi possit, instituemus paulò vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quàm in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quãtitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur,

centur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam; seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus recte à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen

tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis rectè distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisve, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt a nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio rectè posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; si in vtraque diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrique harum subdiuisionum prætulerim, supra exposui in responsione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius subdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quando

maior

maior quãtitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartiẽtem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularẽ, & submultiplicem superpartiẽtem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinque hæc

genera

genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. Qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet; dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo majoris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eademque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitę. Atque ita si ijdem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si ijdem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si vero millesima reperienda sit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturq; per continuam additionem eiusdem numeri, primum

mum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, ut primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.

Proportiones septuplæ.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decuplæ.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE *Superparticulari.*

PROPORTIO *superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio* 3. *ad* 2. *Nam* 3. *continent* 2. *semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri* 2. *Ita quoque linea* 12. *pedum ad lineam* 9. *pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam* 3. *pedũ, quæ tertia pars est lineæ* 9. *pedũ, &c.*

HAEC

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; Si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quacunque reperitur hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionem superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI causa. Si quærantur omnes proportiones sesquiseptimæ; quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq; oẽs cuiusq; proportionis superparticularis cõperientur, si constituantur duo ordines numerorũ, quorũ inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, superior vero à numero proximè maiore: vterque vero per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus, sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialteræ.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.

Proportiones sesquiseptimæ.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	&c.

Proportiones sesquidecimæ.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	&c.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum qualibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, nõ est pars vna aliquota numeri

numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8 non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quòd si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus *superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiens vndecimas. Quòd si decem illæ partes sint decimætertiæ, vocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.*

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter consideranda sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter vero, quotæ partes eæ sint, aut quantæ; indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque syllaba illa [tri] quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem [octauas] expressus ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter se primi.

primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione supertripartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersextupartiens sextasdecimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarum quælibet decimasexta pars est minoris; Non, inquam, recte sic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum superpartientiũ cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt supra dictum est. VERBI gratia, si inquirenda sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in propor-

proportione supertripartiente decimas. Dupli certum, qui minimum secundam proportionem constituunt, sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: uterque denique ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, ut supra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.

Proportiones superoctupartientes nonas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	&c.

Proportiones superseptupartientes decimas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	&c.

DE PROPORTIONE multiplici superparticulari.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando *maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla.) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.*

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & preterea dimidiatã eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adijciamus vnitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem

partis

partis aliquota primam proportionem speciei proposita. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios; vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, qua in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum est. EXEMPLI *gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextupla sesquinona; ducemus 9. denominatorem partis nona in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nona expressa habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione: Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.*

EASDEM *proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquota nominata, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquota eiusdem in denominatorē proportionis multiplicis expressa: Vterq; ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis dupla sesquialtera, tripla sesquiseptima, & decupla sesquitertia.*

Proportiones duplæ ſeſquialteræ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	&c.

Proportiones triplæ ſeſquiſeptimæ.

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	&c.

Proportiones decuplæ ſeſquitertiæ.

31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	&c.

DE PROPORTIONE multiplici superpartiente.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

DISTRIBVITVR autem hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c.

DEINDE quęlibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c.

POSTREMO quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OM-

OMNES proportiones multiplices superpartientes postrema diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcumque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroq; procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij, 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem, primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior verò incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoque diximus. Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportiones duplæ superbipartientes tertias.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	&c.

Pro-

Proportiones duplæ ſuperquintupartientes ſextas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	&c.

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.

28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	&c
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	&c.

DE PROPORTIONIBVS.

rationalibus minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inęqualitatis, pręmiſſa tamen ſemper prępoſitione (ſub.) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis; quæ eiuſmodi eſt. Constructa tabula Pythagorica,

(Eſt

(*Est autem constructio facillima, cum numeri in sinistro latere constituant seriem numerorum naturalem, in infinitumque progredi possint; qualibet autem linea in transuersum procreetur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsum, & ad numerum conflatum, & sic in infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum.*) *primùm omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad vnitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub vnitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1; tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9. descendentis; & 3. in sinistro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum est.*

DEINDE *omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerus primam proportionẽ datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. alia vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.*

TERTIO *sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis*

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322

partientis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam, 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proximè insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proximè insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primam proportionem triplam sesquiquintam. Alias proportiones eiusdem speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum est.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo. In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerum multipli-

cem

cem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum fit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primum datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones eiusdem speciei reperies sub illa prima, vt de alijs diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium quintarum, qui est 5. Inueniat autem eum numerum esse 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4. & denominatoris partiũ quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde post numerum hunc 20, inuentum numeret in supremo latere tres hos numeros, 21. 22. 23. quòd tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiusdem speciei continentur sub duobus illis numeris, vt in alijs traditum est.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, si minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiusdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE vero silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ sic se habet. Inuentis minimis, siue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensq́; per ipsammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius proportionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot vnitates sunt in primo termino constitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter secundos vero, qui primorum dupli sunt, tot, quot in secundo termino eiusdem progressionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiusdem progressionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, si proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri sunt 2. & 1. constituetur progressio incipiens ab 0, (quod differentia inter 2. & 1. sit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensq́; per cõtinuam additionem

vnitatis,

vnitatis, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros dupla proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus; Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet vnus medius nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt, 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet linea habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis, inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmetica.

2.	1.									
4.	3.	2.								
6.	5.	4.	3.							
8.	7.	6.	5.	4.						
10.	9.	8.	7.	6.	5.					
12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.				
14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.			
16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.		
18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	
20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.

QVOD *si superiori proportionalitati Arithmetica superponas seriem naturalem numerorum, qua ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constituta tua Arithmetica proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis dupla. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quē locū duo numeri dupla proportionis obtinent, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.*

Ordo proportionũ duplarũ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus vna vnitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

									10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

RVRSVS detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inserment *uient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.*

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

9.	8.						
18.	17.	16.					
27.	26.	25.	24.				
36.	35.	34.	33.	32.			
45.	44.	43.	42.	41.	40.		
54.	53.	52.	51.	50.	49.	48.	
63.	62.	61.	60.	59.	58.	57.	56.

OFFERATVR quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. & 7. Differentia eorum est 4. Progressio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq́ per 4. vt hic patet, vna cum serie naturali ei superimposita.

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

Igitur inter primos numeros proportionis superquadrupartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.

11. 10. 9. 8. 7.
22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.
33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.
44. 43. 42. 41. 40. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30 29. 28.

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiet ergo progressio à 6. habebitq́; differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vnà cum serie naturali numerorum.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. medij numeri; inter secundos, 13. & inter octauos, 55, &c. veluti hic cernitur,

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.
26 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.
39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, vna cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarũ super bip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

8, 7. 6. 5. 4. 3.
16. 15 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.
24. 23. 22. 21 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.
32. 31 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20 19. 16. 17 16. 15. 14. 13. 12

MANI-

MANIFESTUM autem est, quod de proportionibus maioris inaequalitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inaequalitatis proportionibus, cum ijdem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERUM ex ijs, quae de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inaequalitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inaequalitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, ut Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quaecunque, inter quas, ut diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac praeterea unam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inaequalitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tum maioris inaequalitatis, tum minoris, in quinque genera, quae exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM rationalium Denominatoribus

QVONIAM vero non exiguus est vsus Denominatorum proportionũ rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulæ proportiones denominẽtur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quod Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer tot cõtinens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denomina-

nomina

nominata. Vt denominator proportionis subdupla, est $\frac{1}{2}$; subquintupla, $\frac{1}{5}$. subnoncupla, $\frac{1}{9}$: subcentupla, $\frac{1}{100}$: submillecupla, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuò est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea quae dicta sunt, rectè intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialtera denominator est $1\frac{1}{2}$; sesquioctaua, $1\frac{1}{8}$; sesquimillesima, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialtera, est $\frac{2}{3}$; subsesquioctaua, $\frac{8}{9}$; subsesquimillesima, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotae in proportione expressae, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator pro-

 portionis

portionis subsesquidecimæ, est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorē correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quàm denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis subsesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt supra docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator vero, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habentes proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7. si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis subsesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR *cuiusuis proportio-*

nis

nis superpartientis est unitas cum illis partibus aliquotis, non efficientibus unam, quas maior quantitas debet ultra minorem continere. Vt denominator proportionis supertripartientis septimas, est 1 $\frac{3}{7}$; supertripartientis vigesimas, 1 $\frac{3}{20}$. &c. Neque ulla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipsa proportionis denominatorem proprium exhibet, ut ex superioribus exemplis liquido constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores sunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis vigesimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partiũ aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis undecimas, est $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes undecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, ut fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis ad *ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{10}{13}$. qui ad hanc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur fortassis, si reperiatur primi vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem; vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.*

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distinctè exprimat & denominatorem

minatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtripla sesquiseptima, est $\frac{7}{22}$; subquintupla sesquinona, $\frac{9}{46}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquota, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturque vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdē fractionis. Vt denominator proportionis subquadrupla sesquisexta, est $\frac{6}{25}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq́ ductus sit in 4. denominatorem proportionis quaarupla, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuocetur ad vnā fractionē, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adharentis, & producto numero vnitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis proposita. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadrupla sesquisexta est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adharentis, numeroq́ producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis,

nis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini si inter se ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimosue numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, vt supra traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi siue minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, atque ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionẽ multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quòd apertè, & distinctè in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contenta, quàm partes aliquotæ, vt perspicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ super-

superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{29}$; subquadrupla superbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subdupla superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$; quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui si ducatur in 2. denominatorem dupla proportionis, productoque numero 26. adijciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis superpartientis, quæ proposita respondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiusdem fractionis. Nam huius fractionis termini, si inter se permutent ordinem, dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartientis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintupla supertripartientis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoque numero addendo 3, vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forsitan facilius de-

nomina-

nominatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisq; fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiẽs decimas: quoniã minimi numeri in proportione quintupla supertripartiente decimas sunt 53. & 10. constituetur ex eis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. *& sic de cæteris.*

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuò est vnitas; quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea. quod quidem vnitas significat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, siue nomine denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquidò constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. *hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distinctè, aperteque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum* $\frac{9}{31}$. *id est, nouem trigesimæprimæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum verè significet, minorem quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessarium est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequa-*

nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$. hoc est, nouem partes trigesimaprima cum nomine proportionis subtriplæ superquadripartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionem, vt dictum est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominater fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præposita tantum syllaba, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{20}{327}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem 20. fit Quotiens 16 $\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{20}{327}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones proprijs nominibus appellari possunt, (quis enim proportionẽ, verbi gratia, 37. ad 1. commode dixerit trigintaseptuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometræ plerunque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quam subtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ aliàs diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceret subsupertripartiẽs decimas, & sic de alijs.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, ut diximus; pernecessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, ut habitudinem unius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, qua est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quanam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerũ continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, ut denominator ex illis non facilè possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quosuis duos numeros, siue minimi ij sint, siuè non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multò commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita ut proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimasnonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest eã, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{19}{24}$. atq; ita de reliquis: quũ videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinẽ unius numeri ad aliũ, ut dictũ est.

DENOMINATOR porrò proportionis inter duos quosuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, ut in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 13. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quòd si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{1}{13}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorẽ diuiditur, Quotiẽs semper est

est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, ut in Arithmetica explicauimus. Et quia utraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens 1 $\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit 1 $\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inueniatur denominator siue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{10}{13}$. Praeterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis vero 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{20}{100}$. id est, in minimis numeris, $\frac{1}{5}$. Denique denominator proportionis 48. ad 10. erit 4 $\frac{4}{5}$. quòd diuisis 48. per 10. Quotiens fit 4 $\frac{8}{10}$. hoc est, in numeris minimis, 4 $\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est, in minimis numeris, $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas (quòd diuisis 24. per 5. Quotiens fiat 4 $\frac{4}{5}$.) appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inaequalitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, ut supra diximus.

INVENTO *denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, ut dictum est, eoq; reducto ad unam fractionem, ut in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & unitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est 2 $\frac{9}{10}$. si reducatur ad hanc unam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. producto q; numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est $\frac{8}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133.*

Item quia denominator proportionis 84 ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7, & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum est, isque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

IAM vero si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem vero eam, cuius denominator est minor. Quòd si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an vero æquales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorem esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facilè, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior

est,

est: Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quàm duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quàm secundus in tertium, maiorem esse primum, quàm vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, vt eundem numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, siue ij primi sint, siue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum assumptum, vel diuidemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui diuisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoq; datam proportionem quintuplam. Ita quoque si inueniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatã à $2\frac{1}{3}$. Item si numerũ 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$.

 habebit

habebit diuisus numerus 24. ad Quotientem 10 $\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam sesquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in propprtione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem 3 $\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in 3 $\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad assumptũ numerũ 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3. numerum integrum, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si vero per diuisionem agendum sit, & fractiones vitandæ, sumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In alijs autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusque sumendus à numeratore numeratus. Vt si quæratur proportio quintupla, sumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem desideretur proportio, cuius denominator sit 4 $\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. sumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiso per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quẽ acceptus numerus 62. habet proportionem à 4 $\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam supertripartientem septimas. Cæterum si duo numeri proponantur, cupiatq; quis alios duos in eadem proportione reperire, satis erit, si vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datã, vel ad quem is datam habeat proportionem, assequeris primum, si propositum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at secundum obtinebis, si eundem per denominatorem

minatorem

minatorem proportionis diuidas: Quòd si proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quispiam numerus; si quidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam proximus datus ad secundũ: si quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certe, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum, hoc est, per consequentem terminum datæ proportionis, productusque numerus per primum, siue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4.7. quorum proportionis denominator est $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quæsitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri: si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 4.7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturque quæsitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20 habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem esse maiorem, cuius denominator maior est, fit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium est minimus, maximus autem dari non potest, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominatã à $1\frac{1}{2}$, non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denomi-

natorum proportionum superparticularium maximus est, minimus autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex ijs, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera; minima vero, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima vero, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, vt subsesquialtera, non autem maxima: In alijs denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

COLLIGITVR *etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt qualibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportione æqualitatis, qualibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior est vnitate, quæ denominator est proportionis æqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm vnitas, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur, vt ex ijs, quæ supra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignum est, Proportionem*

maioris

maioris inæqualitatis decreſcendo appropinquare ſemper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inæqualitatis creſcendo ſemper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici propoſita datur minor, ac minor, vſque ad duplam, quæ omnium multiplicium eſt minima. Deinde hac datur minor, nimirum ſuperparticularis, vel ſuperpartiens quæcunque, in qua cum minima non poſſit dari, omniſq; proportio eiuſmodi maior ſit proportione æqualitatis, liquido conſtat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non poſſe peruenire, etiamſi in infinitum decreſcendo ad ipſam accedat. Rurſus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor ſit proportione æqualitatis, non poſſit autem in ea reperiri maxima, manifeſtum quoque eſt, proportionem minoris inæqualitatis attingere non poſſe proportionem æqualitatis, licet in infinitum creſcendo ad eam accedat. Sed vt vtrumq; exemplo etiam diſcatur, ſciendum eſt, ſi inter duos numeros quoſuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior ſcilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuiſam eſſe in duas minores, quarum vna eſt maioris numeri ad medium interpoſitũ, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorẽ diuiſam eſſe in duas maiores, quarum vna eſt minoris numeri ad medium interpoſitum, altera vero medij ad maiorem. Vt ſi inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla eſt, diuiſa erit in ſeſquialteram 6. ad 4. & ſeſquitertiam 4. ad 3 quarum vtraque minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ ſubdupla eſt, diuiſa erit in ſubſeſquitertiam 3. ad 4. & ſubſeſquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Idem fit, ſi inter eoſdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5, ſeſquiquinta, quàm proportio ſuperbipartiens tertias 5. ad 3. minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tam proportio ſubſuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm ſubſeſquiquinta 5. ad 6. maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum vtrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum maiorem proportionem, quàm idem maior ad medium, & quàm medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quàm idem minor ad medium, & quàm medius ad maiorem, vt manifestum est vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicabimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inaequalibus, maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionē, quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quàm ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. maiorem: Itē maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorem esse proportionē eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad maiorem 6. Itē maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3. ad eundem 6. Eademque in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quàm proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic, 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. quæ eadem est, quæ 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis.

Idemq;

Idemq́; experiri licebit in quibuſuis alijs proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio ſubſuperſeptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuiſa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica ſiue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri per eandẽ differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreſſione numerorum nulla fit interruptio, ſed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreſſione interruptio fit, ita vt bini tantum inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim propriè proportionalitas dicitur, ſiue Analogia:

gia: aliæ vero improprie, cum non sit eadem semper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2.6.18.54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantum 2.3. & 12.18. & 20.30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimū, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3.4.6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cum vtrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam, siue Harmonicam: Ipsi verò neque eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri, 42.12.7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri

30. ad

30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quę Diapason consonantiam, siuè Octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque alijs idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT trium proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3.4.6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, appareteq; in hisce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores; Contra vero in Harmonica

Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

II.

ARITHMETICA *proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.*

GEOMETRICA *è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones vero eorundem æquales.*

HARMONICA *deniq; neq; differentias, neq; proportiones terminorum æquales habet. Patet hoc ex superioribus exemplis.*

III.

IN *tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorẽ 15. quinq; vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoq; vnitatibus, quæ cõstituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.*

AT *in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturque à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic. 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.*

IN *tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat,*

superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturque à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3.7.11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4.6.9. & 3.4.6. tam summa 13. extremorum 4.9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorũ, quàm summa 9. extremorum 3.6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9.25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differẽtiam minorum, 6. superat. Itẽ in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3.7.11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4.6.9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differẽtiam maiorum. Vt hic, 42 12.7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica vero plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32 qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 4.6.9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorũ in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3.4.6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6.9.8.12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmeticè, cum eundem habeant excessum 3. vides 6.8.12. Harmonicè proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6.8.9.12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6.8.12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6.9.12. Arithmeticè esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continue proportionalibus siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiusmodi

cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, eptimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Præterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59
3		11		19		27		35		43		51		59
	7		15		23		31		39		47		55	
3			15			27			39			51		
	7			19			31			43			55	
3				19				35				51		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920
5		20		80		320		1280		5120		20480		81920
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5			4			320			2560			20480		
	10			80			640			5120			40960	
5				30				1280				20480		

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360			630			2520
	280			420			840		
252				420				1260	

QVOT-

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proportionalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica prop.			Geometrica prop.			Harmonica prop.		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti			Producti			Producti		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes			Quotientes			Quotientes		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differẽtia.n. inter 20, & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorum diuisorum habet proportionem submultiplicem à diuisore denominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosque diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80.160.320. Item numerorum 240.336.560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20.40.80. & inter numeros 60. 84.140. At vero differentias numerorum 5.10.20. & numerorum 15.21.35. esse earundem differentiarum subquadruplas.

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuſcunque, ſi eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroque dato maiorem. Et ſi eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios ſemper maiores, ſi differentiam vltimo inuento ſemper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia eſt 7. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi poteſt in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quòd ſi eandem differentiam à minori ſubtrahas, quando ſubtrahi poteſt, habebis rurſus tertium terminum in eadem proportionalitate vtroque minorem. Et ſi differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps inuenies alios minores, ſi differentiam ab vltimo inuento ſemper demas, donec ſubtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30. 34. quorum differentia eſt 4. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica vſque ad 2. quæ vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius ſubtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamſi differentia non aſſumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato ſi proximè præcedentem ſubtrahas, habebis quartum; & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. ſi à 15. duplicato, hoc eſt, à 30. ſubtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. ſi quoq; demas 15. habebis quartum terminum 37. & ſic deinceps, vt hic apparet. 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus vtroque minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, relinquas quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

I I.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, duplæ autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, *siue semissis summæ extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino æqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.*

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summæ extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summæ extremorum, siue ad medium terminum, proportionem habebit noncuplam. Eademque in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est, facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atque hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorum ab extremis

tremis

tremis æqualiter distantium æqualis sit summa extremorum, continebitur hac summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum cõtinetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summã omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cũ $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atque differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo.

Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. | 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, minorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponitur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quòd si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.   0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI duo extremi termini noti sint, unà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioq́ue proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. *vt patet in hoc exemplo.*

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, unà cum differentia, noti sint, eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè *in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.*

V I.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summã 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extre-

extremorũ summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: Si vero extremorum proportio maior sit quam dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla: Si deniq; minor sit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirũ maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14 & 8. proportionẽ habent supertripartientem quartas, quæ minor est quam dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quàm triplam.

VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summæ accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorum esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cum alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorũ est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

INTER

I X.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam si minori numero proposito adijcias, conflabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eã differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituẽdorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primo quemq; ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

I X.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam si minori numero proposito adijcias, conflabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eã differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituẽdorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq́; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. exit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primo quemq; ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. ſupremo primi ordinis, & infimo 20. ſecundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro ſecundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine ſemper deſcendendum eſt à ſupremo ad infimum vſque, in ſecundo vero ab infimo ad ſupremum vſque aſcendendum.

EST autem dignum conſideratione, differentiam Quotientum, qui ſunt minimi numeri duorum ordinum conſtitutorum, eſſe quoque differentiam proportionalitatis conſtituendæ. Ita vides differentiam in propoſito exemplo eſſe 17. quæ differentia etiam eſt inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, ſi minor à maior ſubtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic compoſito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, conſtituentur ijdem termini medij, etiamſi duo illi ordines non inſtituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propoſitum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate ſuperat, ſi fractiones euitandæ ſint: Vel certè inueniendos eſſe duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoq; vitantur, etiãſi eos numerus numero mediorũ proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, ſemper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. conſtituendi ſunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia eſt 4. numerus integer, ex cuius cõtinua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, ſi per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines inſti-

instituantur ascendentes, ut dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NUMERUM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inequales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremū ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, ut ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus. quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemq; 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (ut in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Ut hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. diuidendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. semissem terminorum: Quotientem vero 2. in duas partes inæquales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquum 1. per 9. numerum proximè minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c.

to, &c. Quæ additio, ut facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationẽ, ut ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. ultima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem est, hac ratione varijs modis datum numerũ diuidi posse in propositum numerum partium proportionaliũ, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summã omnium terminorum, nimirum datum numerum, ut in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, ut in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, ut fiat Quotiens 22, qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10, ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic

Hic etiam manifestum est, varijs modis datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atque alias partes binas sectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED longè facilius (quamquã operatio aliquanto longior sit) idẽ hoc absolues hac ratione. Cape tot numeros Arithmeticè quomodocumque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quaeris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hae 10. partes, quas quaeris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quaeris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eadem partes, quae prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptae multiplicare per datum numerum, productosq; numeros per summam omnium terminorum einsdem acceptae proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primae duae partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiae faciet quartam, & sic deinceps. Liquidò

quidò autem hic quoque constare puto, datum numerum varijs modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atque alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptæ eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITAQVE, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoque proportionem, atque ideò prima erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes coaceruentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3, 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicassesq́; primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem $9\frac{6}{11}$. quæ eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibusuis duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc

hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quòd diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quòd si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quòd diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quòd diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuidas 8. per 2. Idemque cum producto numero facias, constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoque eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, &

productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productumq́; per proximè præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus: atque ita in infinitum, vt hic vides. 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumq́; per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertiũ terminum vtroque minorem. Quem si rursum in se duxeris, productumque per proximè præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18, fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$. siue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM vero si quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partẽ, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatẽ extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet, 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias,

incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum, qui est 5. videlicet. 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab ultimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione dupla superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi tunc facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita ut alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi. 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continue sint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant vnam eandemq; inter se proportionem, hoc est, dummodo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continuè proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper æqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continua.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à sesquialtera diuersa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerusque ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum vero ex tribus inter se multiplicatis

tiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur.) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando sunt 4. numeri siue continuè, siue non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuò multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratum, cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri siue continuè, siuè non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusue est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se æquales.

III.

SI, propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur summa omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122, fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vnà cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiose tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit, ea hoc loco repetere.

IIII.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuò æqualiter

liter superantibus, id est, Arithmeticè proportionalibus, si totidem alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi, eodem ordine sumpti, superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturque alij sex cum ijsdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipsos quoque Arithmeticè esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed cave putes, hanc proprietatem posse converti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidē alij Arithmeticè quoque proportionales sumantur, etiamsi utrobique eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3. 5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam. &c.

V.

DVOBVS quibuscunque numeris datis, si eorum alterutro in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine easdem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, ut prima ad primam, secunda ad secundam, &c. unam eandemque prorsus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 385. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiant,

2. 5. 10. 40. & earum qualibet in posteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentque easdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemque factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

V I.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem propor-

proportione proportionales. Vt in apposito exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem sesquialteram.

Differentiæ.	32.	48.	72.	108.	162.	243.	
	64.	96.	144.	216.	324.	486.	729.

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedentem minorem superat ipsomet numero proximè antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

Differẽtiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine in eãdem proportione continuè proportionales. Et si Quotientum summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, treabuntur iidem prorsus Quotientes ordine conuerso: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel denique, si terminorum numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sanè incredibile videri possit. Exempli causa.

Si

Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla. 3. 6. 12. 24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso iidem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa verò summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes. 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa $180\frac{61}{81}$. producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreatur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summæ quotcumq; terminorum proportionis eiusdem continuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continuè dupli, siue magni, siuè parui, erunt perpetuò hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. At denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. $13\frac{3}{16}$. $8\frac{19}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

EX hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa æqualis sit numerò, qui fit ab extremis inter se multiplicatis; vel ex duobus medijs quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumque summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quòd si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero ter-

terminorũ impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimũ gignatur; cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summæ alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa, æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterũ procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114 per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{139}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoscunq; numeros constituemus mediũ Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus; & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterũ productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix

erit

erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quàm 8. cum huius quadratum sit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

I X.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum: secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus, ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres nu. assump	Primus. 8.		quintup. pri. 40.		Septup. pri. 56.
Quadr. Arit. p.	64		1600		3136.
Medij Geomet.		320		2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentijs mutuò superent, si pro radicibus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato; reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; secundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuenti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt si superiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272
Medij Geometr.		640		4480	

Si vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem qualibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	8		200		392
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdem semper proportiones, quas quadrati, eorumque medij inter se habent.

Quòd

Quòd si hos 8, 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundũ ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum triũ numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & sic de cæteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunq; medios continuè proportionales, iucunda sanè, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atque ita in seipsam ducta producit tertium terminũ, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq; quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus,

agimus, notandæ sunt tres infrascriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propert.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorũ, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de alijs. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum. Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. &

ex

ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus alijs, quicunque numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris colloca, quamque sub suo, & ab eisdem ascende per continuam vtriusque multiplicationẽ, (ducendo primum quamque radicem inuentam in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices instituas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos, & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsque, in altero vero ab infimo vsque ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationẽ vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt instituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, sed ipsæ radices inter se multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hic vides, 9. 36. 144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniã hi numeri radices

quadratas

quadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R.q.18. *posteriorem autem sic.* R.q. 288. *Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt* R.q.18. & R.q.288. *docebimus in Algebra.*

RVRSVS *si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint, accipiamus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda est radix, quæ quater posita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines triũ terminorum sub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.*

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV *autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarũ,* *multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicatur, atque ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medij termini ijdem, etiamsi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorẽ numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertiũ mediũ.*

PERSPICVVM *autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales, sed plerunque inuentos terminos esse irrationales: propterea quòd dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratiquadratas, hoc est, quæ quater positæ eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet.*

48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM *si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunq; datam habentes proportionem. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem*

partientem tertias, & utrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua utriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, ut hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 160. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

X I.

NVMERVM quemcunque datum distribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione siue minimos, siue non minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namque per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes datis numeri seruantes datam proportionem inter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla; si sumantur 6. termini continuè dupli, 3.6.12.24.48.96. quorum summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4. per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continuè dupli, conficientesque simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij 6. numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$ qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cæteris.

QVOD si cupias numerum, qui secari possit in quotuis partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunque, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessario fit numerus integer.

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua iubeamur in data proportione continua reperire quotuis numeros, qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcunque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales data proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, vt in $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantem 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inueniuntur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32. 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in iisdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeo & differentiæ, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac denique ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquitertiam; sumemus 3. & 4. inter quas ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum semissis eorum summa. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42.48.56. quorum extremi, atque adeo & differentia, proportionem sesquitertiam datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonicæ procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis: Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo vero extremi Harmonicæ inter se multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2.3.6. gigni hanc Arithmeticam, 6.12.18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertiũ 6. Item secundũ 3. in tertiũ 6. produces 6.12.18. siue ducas medium 3. in extremos 2.6. facies extremos 6.18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo eum eo constituentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadẽ omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, siue septimo, alij duo; & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2.3.6. Harmonicè proportionalibus, si posteriores duo, 3.6. ducantur in 3. denominatorem

propor-

proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atq; ita erunt iam quinq; termini, 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales: Et si posteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo, 9. 6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3. 2. atque ita erunt iam quinque termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3. 2. diuidãtur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$. atq; ita deinceps pgredi licebit in infinitũ.

ALIO modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, siue ad maiores numeros progrediendo, siuè ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales; Item, relicto primo, alij sequentes tres; & relictis duobus, sequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6. 12. Harmonicè proportionales sunt: sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorũ 4. 12. triplam. Item continua esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinq; terminis. 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramq; partem hoc modo continuanda sit, quãdo continuari potest, (neq; enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) atq; quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex ijs, quæ sequuntur, constabit.

II.

INTER quosuis datos duos numeros constituas medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotientemque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quaris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quaesitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, si eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando summa datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum esse necessario integrum cum fractione. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem summam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem supertripartientem septimas, quàm differentia maiorum $1\frac{13}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. subtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorũ datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuisione differentia datorum duorum numerorum per summam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum

numerum

numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato subtrahi. Semper enim vel iste conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quaritur. Vt si inter 20. & 30. sit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. sunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum summam 5. fit Quotiens 2. quem si ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus; inuenietur semper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate superat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; si eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo. 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortasse commodius, (licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non sunt impares; vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem, qui semper erit semissis summa eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quare ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter se proportionem habent, quam dati duo extremi. Quòd si fiat, vt primus inuentus ad secundum, ita primus datus ad aliud; hoc est, si per primum inuentum diuidatur numerus ex secundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius; duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par est, cuius semissis 17. est medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus

inuentus 238. ad secũdum 280. ita primus datus 7. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium vtroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quòd si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quòd si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quòd si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos vero duos, 10. 11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At vero ad 3. 6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta ex minore 3. relinquit 0. Atque eodem modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino æqualis. Multò magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis propor-

proportionalis Harmonicè, quia differentia amborũ tunc semper maior est minore termino, atque idcirco subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3.7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumque productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem deniq; maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12.16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros. Nam cum primùm ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertiũ procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertiũ numerũ, vt diximus: Constat autẽ numero per unitatẽ diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri. 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris. 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorũ duorũ sola vnitate.

EX posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adijciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c.

Vt

Vt datis eisdem numeris 6.11. si differentia 5. ducatur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cateris. Proportio autem tam extremorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per mediũ factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$, collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum minirum semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritque extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, quæ videlicet data est.

IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur. Vt si dentur duo numeri 6. 12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertiũ 4. minorem vtroq; illis proportionalem, vt hic cernis, 4. 6. 12. Hanc extẽdemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4. 6. minorẽ tertium adiungamus 3. hoc modo. 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{5}$. Atque in hunc modum decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam. Hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in

vtramque

vtramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter se comparati præcipuas perfectasq; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vero 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deindè 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmeticè proportionales, 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quẽ metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diuiso, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diuiso, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque

Atque hi numeri inuenti easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: Et si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis

Differentia	2	4	
Propor Har.	6	8	12

numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentia.

Differentiæ.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secũdum, producantque vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac denique primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia

quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis. 1. 3. 9. subtriplis hos qnq; 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicã; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2.	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducãtur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factũ est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
80.	75.	60.	48.	40.

quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

SI minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data subsesquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem. Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si subquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1.4.16. Additis simul 1.4. erit summæ dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad minimam denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinq; minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permista sunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	26.	40.	64.	160.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, vnus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris omnes *tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.*

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nã extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres propor-	84.	49.	24.	14.	*tionalitates simul.*				
Geometricè pp.	84.	49.	24.	14	*Vel*	84.	24.	49.	14.
Arithmet. pp.	84.		49.			14.			
Harmonicè p.	84.		24.			14.			

Rursus sit data proportio, qua 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorũ dupli 6. 4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6. 5. 4.

Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30.24.20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30.& 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30.25.24.20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometricè proport.	30	25	24	20	Vel	30	24	25	20
Arithmet. proport.	30.		25.					20.	
Harmon. proport.	30.		24.					20.	

EOSDEM 4. numeros maxima harmonia reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt supra diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admista sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12.& 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12.9.6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius, Quare sic stabunt 4. numeri maxima Harmonia, 12.9.8.6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20.& 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15.& Harmonicè 13 $\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20.15.13 $\frac{1}{3}$.10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides.

60. 45. 40. 30.

MINO-

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas mediū in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur iidem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros. 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quaslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumātur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, *quot quaeruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quaeruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunq; numeros Arithmeticè proportionales, 3.6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3.4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntque tres summae binorum minimorũ 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315.630.945.1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.*

Arith. proport.	315		630		945		1260	
Medij Harm.		420		756		1080		

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos datae proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quaesitos. Mediũ Harmonicũ inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si datae proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factique essent hi duo numeri 4.12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur

desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum mediũ est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40			60			90
Medij Harmo.		48			72		
Medij Arithm.			50			75	

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundum proportionalitatem Arithmeticam, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterque non est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorumque summa, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti.	42			56		84			112
Medij Harmo.		48			Vel		96		
Medij Arithm.			49					98	

vtramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA *denique & augetur, & decrescit in infinitum.*

EST *& hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter se comparati præcipuas perfectasq; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6.8.12.24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vero 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deindè 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.*

V.

DATIS *quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmeticè proportionales, 1.2.3.4.5.6. Numerus, quẽ metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diuiso, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.*

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diuiso, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque

Atque hi numeri inuenti easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: Et si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentia	2	4	
Propor Har.	6	8	12

Differentiæ.

Differentia.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secūdum, producantque vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, sin minus, nequaquam.

V I I.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac denique primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed

quia

quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad unicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. ut in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quasitos, ut in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, ut dictum est.

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis. 1. 3. 9. subtriplis hos quinque 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicã; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè, $7\frac{1}{2}$. ut in primo ordine. Reuocetur ad unicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. ut in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducãtur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factũ est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc unicam fractionem, $\frac{48}{5}$. ut in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
80.	75.	60.	48.	40.

quæsiti, ut in quinto ordine apparet.

SI minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data subsesquialtera quinque termini minimi, ut hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad unicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad unicam fractionem. Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Ut si subquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1.4.16. Additis simul 1.4. erit summæ dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducētur ad minimam denominationem, ut in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad unicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinq; minimi numeri quæsiti, ut in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permistæ sunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	26.	40.	64.	160.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, ut ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, unus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita ut in quatuor illis numeris omnes tres

tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nã extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres propor-	84.	49.	24.	14.	*tionalitates simul.*				
Geometricè pp.	84.	49.	24.	14	*Vel*	84.	24.	49.	14.
Arithmet. pp.	84.		49.		14.				
Harmonicè p.	84.		24.		14.				

Rursus sit data proportio, quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorũ dupli 6. 4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6. 5. 4.

Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30.24.20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30.& 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30.25.24.20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometricè proport.	30	25	24	20	Vel	30	24	25	20
Arithmet. proport.	30.		25.				20.		
Harmon. proport.	30.		24.				20.		

EOSDEM 4. numeros maxima harmonia reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt supra diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admista sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12.& 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12.9.6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12.& 6. in Harmonica proportionalitate medius, Quare sic stabunt 4. numeri maxima Harmonia, 12.9.8.6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20.& 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15.& Harmonicè 13$\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20.15.13$\frac{1}{3}$.10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides.

60. 45. 40. 30.

MINO-

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas mediũ in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros. 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumãtur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, *quot quaeruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quaeruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunq; numeros Arithmeticè proportionales, 3.6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3.4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntque tres summae binorum minimorũ 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315.630.945.1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.*

Arith. proport.	315		630		945		1260
Medij Harm.		420		756		1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos datae proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quaesitos. Mediũ Harmonicũ inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si datae proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factique essent hi duo numeri 4.12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot deside-

desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum mediũ est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40			60			90
Medij Harmo.		48			72		
Medij Arithm.			50			75	

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundum proportionalitatem Arithmeticam, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero uterque non est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorumq; summa, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti.	42			56		84			112
Medij Harmo.		48			Vel		96		
Medij Arithm.			49					98	

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos sit medius Geometricè, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturque ordine sic. 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares; vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt constat ex 5. regula, cum sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quàm hi, sint Quotiētes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmeticè proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quòd si non omnes sint pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quàm inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè, constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic positum esse vides.

Tres

Tres Har. pp. inuēti.	1225			49			25
Medij Arithm.		637			37		
Medij Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS si quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturq; duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summæ. 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri, 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices, 2. 50. 98. fit, vt quemadmodum inter binos horum singuli cadunt medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summæ minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè sunt proportionales) numerant minimũ numerũ 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus pduxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arit. pp. inu.	1924			48100			94276
Medij Har.		3700			63700		
Medij Geo.			9620			67340	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros propor-

proportionales siue Arithmeticè, siuè Geometricè, siuè Harmonicè, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmeticè, alter Geometricè, & reliquus Harmonicè. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arithm. propors.	1924				48100				94276
Medij Harmon.		3700				63700			
Medij Geometr.			9620				67340		
Medij Arithmet.				25012				72188	

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quã medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16.24.36.54.81. & duos minimos 4.9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208.468.1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; aliàs non essent duplicandi) nimirum 416.936, 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicè, & Arithmeticè alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricè, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geome-

Geo.prop.	416				936				2106
Med.Ha.		576				1296			
Med.Geo.			624				1404		
Med.Ar.				676				1521	

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuētis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorũ minimi duo numeri 49.25. quorum summa 26.74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quæsitos 1178450. 47138. 24050. Nã inter binos cadẽt bini medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, quemadmodũ inter eorum submultiplices 1225. 49. 25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicè, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har.prop.	1178450				47138				24050
Med. Arit.		612794				35594			
Med. Geo.			235690				33670		
Med. Har.				90650				31850	

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1. eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel

vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuẽti.	120				30
Medius Arithmet.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunq; propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erũt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonicè proportionales; si sumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. suntque Harmonicè proportionales, sicuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{13}$. $3\frac{1}{13}$. $4\frac{8}{13}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio est de pluribus partibus.

QVO

QVO PACTO EX PROPORTIONE aequalitatis omnes inaequalitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis aequalibus, siue vnitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quàm facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inaequalitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruato ordine. DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie. SESQVIALTERI inuersi exhibent superbipartientes: Sesquitertij inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijsdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: Tripli sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes: DVPLI superbipartientes triplos superbipartientes: TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoque

pariunt

pariunt duplos supertripartientes; DVPLI supertripartientes, triplos supertripartientes: TRIPLI supertripartientes, quadruplos supertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplos superquadrupartientes: DVPLI superquadrupartientes, triplos superquadrupartientes: TRIPLI superquadrupartientes, quadruplos superquadrupartientes: atque sic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est unicus, isque facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur hoc apposito typo, vbi liquido constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus constituitur, si dati termini ita sumantur.	Semel	Bis.	Semel
Secundus constituitur, si termini dati ita sumantur.		Semel	Se[illegible]
Tertius constituitur, si ita sumantur dati termini.			Semel

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Aequalitatis proportio.	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICularium.

Dupli inuerso ordine.	1	2	4	2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	9	6	4	18	12	8
Tripli ordine conuerso.	1	3	9	2	6	18
Sesqter. ex triplis inuersis.	16	12	9	32	24	18
Quadrupli ordine cōuerso.	1	4	16	2	8	32
Sesqquar. ex quad. cōuersis.	25	20	16	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTientium.

Sesquialteri inuersi.	4	6	9	8	12	18
Supb. ex sesquial. inuersis.	25	15	9	50	30	18
Sesquiter. ordine inuerso.	9	12	16	18	24	32
Super. ex sesquit. inuersis.	49	28	16	98	56	32
Sesqquar. cōuerso ordine.	16	20	25	32	40	50
Superquadru. &c. ex sesquiquart. conuersis.	81	45	25	162	90	50

GENE-

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	9	6	4	18	12	8
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	25	10	4	50	20	8
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	49	14	4	98	28	8
Quadrupl. sesqal ex tripl. sesqal	81	18	4	162	36	8

Sesquitertij ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli sesquiter. ex sesquit.	49	21	9	98	42	18
Tripli sesqt ex dup. sesqt.	100	30	9	200	60	18
Quadr. sesqt. ex trip. sesqt.	169	39	9	338	78	18

Sesquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli sesqqua ex sesqqua.	81	36	16	162	72	32
Trip. sesqq. ex dup sesqq	169	52	16	338	104	32
Quad. sesqq. ex trip. sesqq.	289	68	16	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	25	15	9	50	30	18
Dupli superbip ex supbip.	64	24	9	128	48	18
Tripli supbi ex dup supbi.	121	33	9	242	66	18
Quadr. supb. ex trip supb.	196	42	9	392	84	18

Suptripart. directo ordine.	49	28	16	98	56	32
Dupli suptrip. ex suptrip.	121	44	16	242	88	32
Trip suptrip. ex dup. suptr.	225	60	16	450	120	32
Quad. suptr. ex trip. suptr.	361	76	16	722	152	32

Supquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupli supquad ex supqua	196	70	25	392	140	50
Trip. supqua ex dup supq.	361	95	25	722	190	50
Quad. supqua. ex trip. supq	576	120	25	1152	240	50

HIC

HIC enim perspicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos esse ex præscripto triplicis præcepti superioris. Vt verbi gratia postremi hi tres. 576. 120. 25. ita producti sunt ex tribus antecedentibus. 361. 95. 25. Primus 576. concernatus est ex primo 361. semel, & ex secundo 95. bis, & ex 25. semel. Secundus autem 120. conflatus est ex secundo 95. semel, & ex tertio 25. semel. Tertius denique 25. est tertius 25. semel sumptus, vt hæc apposita formula demonstrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti sunt, initio facto à terminis æqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO PACTO VICISSIM *Omnis proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.*

PROPOSITIS rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quàm facili ratione, per variam subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus cōstituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualiū reuocabitur ad aliam proportionem, conferēdo semper *maiores numeros cum minoribus ; & hæc rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quòd si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.*

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Aequalitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio supertripartiens quartas.	49	28	16
Sesquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet

continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem, 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150.30.6. sextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, proptereaque æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6. 6. 6. Minimi enim siue primi numeri quintuplæ proportionis sunt, 25. 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris vsque ad æqualitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt supra diximus. Item sesquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta est ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE vero silentio prætereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometricæ, siuè ea æqualitatis sit, siue inæqualitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatum, quas supra explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim triũ terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur; pro secundo autem secundus, & tertius semel; pro tertio deniq; ipse tertius semel, perspicuè constat ex ijs, quæ paulò ante scripsimus de ortu omniũ proportionũ inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS Proportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus fit ex datis terminis ita coacervatis.	Bis.	Bis.	Semel
Secundus vero sic.	Semel	Semel	Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porrò interest, utrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, ut ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ Proportionalitatis ex Geometrica.

Geometr. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arithm. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1; in secundo, 8. summam scilicet ex 4.4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9.6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4.6. collectam, atque ita in aliis.

ITAQVE

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla unius termini æqualis: ut perspicuũ est in prioribus duobus exẽplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectã ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, utrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Harmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus sic ex terminis datis sic in vnũ collectis	Bis	Ter	Semel
Secundus vero sic.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento ſublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus ſemel, & medius inuentus bis in vnam ſummam collecti, & ex maximo dato ſubtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semiſsis ergo huius erit ipſum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt ſupra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propoſita oritur ex illa Geometrica, ſi ſuperius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata eſt. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA

Harmon. proport.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Aequalitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio conſtituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur ſi hic numerus reliquus duplus eſt minimi, ſecto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quàm alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas

litas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

VT si detur Arithmetica proportionalitas, 3.9.15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum demus ex dato medio 9. superer ũt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hãc. 3.3.3. ex qua oritur secundum superius præceptum.

3	9	15
3	3	3

SI vero reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34.19.4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo data Arithmetica proportionalitatis, eoq; subducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rursus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.

34	19	4
9	6	4

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo constituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propos. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalesue adsciscantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad æqualitatem, ex qua ortum duxit, si termini æquales cum differentia proposita concernentur; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20	27	34
20	20	20

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erũt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, ut efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. cõstabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. si ex ea constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeat secundum terminum 35. Quòd si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40, ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus. 55. Primus autem est 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hac prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu periucunda in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

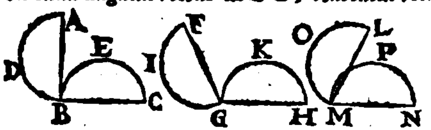
RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnã requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet; adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, [a] erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodẽ modo multa curuilinea cũ rectilineis proportionẽ habebũt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cũ & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius

[a] 20. primi.

maius

maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectã esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, ut in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualẽ. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describãtur A D B,



B E C. Quoniam igitur anguli semicircülorũ ABD, CBE, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; necnon curuilineum O M P, acuto LMN, dummodo hic ab angulis semicirculorũ LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionẽ angulus cõtactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, valuit hac definitione eas intelli-

intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodẽ quantitatis genere videãtur cõprehendi, quales sunt linea finita, & infinita; angulus rectilineus, & angulus cõtactus, &c. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionũ, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alterã excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineasq́ue, cum non sub eodẽ contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileant quoque, qui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulũ rectilineũ, & angulũ contactus, cũ in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ existant: quorũ vtrumque falsum esse, liquidò ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam ineptè, & quàm falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quãnam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionẽ duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarũ sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quã multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines

tudines eandem habere proportionem, quàm earũ æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclides.

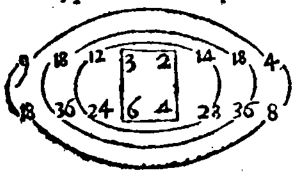
V I.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, v multi-

multiplex prima, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuò, ea ita inter se se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiã F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H: (quod est vtrumque ab vtroq; vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique vt nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æquemultiplicia quæuis accepta, perpetuo se se ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G, non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem perdiligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut *excessus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonã pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionẽ habentibus: quadã æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibusdam æquæ multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, utrumque ab utroq; una deficiant; alia vero una æqualia sint; alia denique una excedant, si ea sumantur, quę inter se respondẽt; placet unum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3.2.6.4. sumanturq; primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æque multiplices, ut septupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij a 28, multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumãtur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij ęque multiplices, ut noncupli 18. & 36.*



Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, ut dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij; superare 8, multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, unum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.

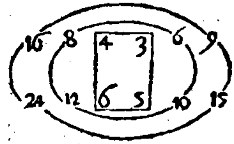
CAMPANVS vero atq; Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt, Dicunt enim Euclidẽ velle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cũ primæ, & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartę æque multiplicibus, utrumque ab utroque, vel una deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel una æqualia sunt, vel una excedũt proportionaliter, si ea sumãtur, quæ inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earum

æque

æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplex secūdæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplica eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, vt proprijs locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex primæ deficit a multiplici secundæ, vel æquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicem vero tertiæ nō deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut deniq; multiplicem primæ maiorem esse multiplice secundæ, at multiplicem tertiæ multiplice quartæ non maiorem. Propositis inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant; dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO *Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nā si de quocunque intelligeretur, essent ait, quatuor hi numeri*

4.3.6.



4 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. æque multiplices, vt dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24 secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt æque multiplicia accepta vna excedant se se quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non se se excedant proportionaliter, vt constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri æque multiplices ab eo prolati se se vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quincuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si

primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet æque multiplicia dictorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque necessario multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus

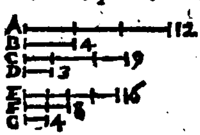
tiplicibus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius constabit ex 8. definitione.

CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, si modo secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque sumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel æqualia sunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales sunt non continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum est in 4. definitione.



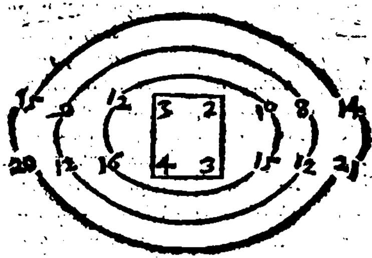
VIII.

CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicē secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem qnartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplice secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: vt perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F; secundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam.

NON est autem necesse, vt quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quã tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, vt secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam quantam, non autem eandem; vt perspicuum est in apposito exemplo.

ITAQVE ut quatuor magnitudines dicatur proportionales, necesse est, ut æquemultiplicia earũ, iuxta quasuis multiplicationes accepta, vel unà excedant,



vt in 6. defin. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, vt secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ unà excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.

QVOD si quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia prima & tertia unà deficiant ab æque multiplicibus secũdæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcunq; multiplicationem, & æquemultiplicia secundæ ac quartæ iuxta quamcunq; etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescunque multiplex primæ maius est quàm multiplex secundæ, multiplex quoque tertiæ maius sit quàm multiplex quartæ; quotiescunque vero multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex primæ minus est quàm multiplex secundæ, multiplex etiã tertiæ minus sit quàm multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ, at multiplex tertiæ maius non sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniã, inquàm, mirũ alicui videri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multipliciũ eo ordine sumptorũ nõ statim appareat similitudo proportionũ, dissimilitudoue: aperiendũ videtur hoc loco, quare ita magnitudines tũ proportionales, tũ nõ proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita se habent, vt dictum est; quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur; sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquàm ei concedẽdum sit, angulũ quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarũ æquemultiplicia

tiplicia eam conditionẽ habent. quam explicauit, ita vt nunquàm ei credẽdum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionẽ, vel non eandem; nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus cõuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione nõ videtur colligi posse, verè magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò accuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales; & non proportionales, atq; adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, verè eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio. 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandũ ad memoriã est, duplicem esse proportionẽ; Rationalẽ, quæ inter quantitates cõmensurabiles existit, atq; adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalẽ, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus dũtaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defi. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum. Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundæ, & tertia quartæ, æquemultiplex est, uel eadẽ pars, vel eadem partes; Vel certè (vt nos ad eam defi. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partẽ, vel easdẽ partes. Nõ proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines non proportionales sunt, hoc est, prima ad secundã habet maiorem proportionẽ, quàm tertia ad quartã, cũ prima secundæ magis multiplex est, vel maior pars, maioresue partes, quàm tertia quartæ: Vel certè cũ prima secundam sæpius cõtinet, quàm tertia quartã, siue eadẽ pars, aut partes vtrobiq; supersint, siue non: Vel cũ prima secũdã toties continet, quoties tertia quartã, sed prima maiorẽ insuper partẽ, maioresue partes secundæ includit, quã tertia quartæ. Potuisset, inquã, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac nõ proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinũ exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersa, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, alijsque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quòd illius est multiplex, vel pars, partesue: Vel certè secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quàm minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus; tum ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM verò Euclides non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est sese conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cum omnis proportio rationalis, siuè magnitudinum commensurabilium, sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris, siue magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam qualibet quatuor magnitudines commensurabiles eãdem habentes proportionem, vel non eandem, necessariò habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certũ sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscunque, vel magnitudignitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodũ quia quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem pars, vel eadem partes circulorũ, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quod tunc segmenta neque eadem pars, neque eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existãt. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentiũ æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabiliũ colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, quæ circulis sunt commensurabilia; ita non rectè fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiat, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hæc proportionum similitudo nõ tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoq; esse necessario multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem:

Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationẽ, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit, quàm multiplex quarti; Et si illo existente æquali, hic quoq; æqualis sit, & si illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuò verum est, quatuor illos numeros esse proportionales: Rursus quia, propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quàm tertius ad quartum, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra quia, quatuor propositis numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet in numeris, atq; adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium nunquàm inueniatur, non immeritò dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommẽsurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundæ ac quartæ secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex primæ maior est multiplice secundæ; multiplicem vero tertiæ æqualem esse multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis est multiplici secundæ; multiplicem denique tertiæ minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quòd multiplex primæ minor est multiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commensurabiles, quàm incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam, cum, sumptis æquemultiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice secundæ.

ſecundæ, multiplicem verò tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quãdoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, poſterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonſtrabimus; nullumq́; aliud indicium habere poſſumus, quo magnitudines incommenſurabiles cognoſcantur eſſe proportionales, vel non proportionales: præſertim cum magnitudines incommenſurabiles, quæ hoc modo proportionales eſſe demonſtrantur, ſæpenumero alia via oſtendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum ſit, quin omnes magnitudines, etiam incommenſurabiles, quarum æquemultiplices ita ſe habent, vt in 6. defi. dictum eſt, ſint proportionales, &c. Niſi enim hoc verum eſſet, ſequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquãdo abſurdum aliquod manifeſtum: quod tamen hactenus non accidit, ſed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo ſenſu proportionalibus demonſtrantur, veriſſima eſſe plerunque alia via, vt diximus, oſtenduntur; vt poſtea etiam demonſtrabimus. Quæ cum ita ſint, liquido conſtare exiſtimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propoſitarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti ſumus, Geometricè demonſtremus, adſcitis nonnullis propoſitionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonſtrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodiſſimè ante lib. 5. poſſint demonſtrari; atque adeo hic aſſumi, vt iam demonſtrata. Hoc autem efficiemus quatuor propoſitionibus, quæ ſequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſq; primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationẽ, item ſecũdi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiam multiplicationem; ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecũdi, erit quoq; multiplex tertij maior multiplice quarti; & ſi multiplex primi æqualis ſit multiplici ſecundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti: si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quàm G, multiplex secundi B, maiorem quoq; esse F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualẽ quoq; esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoq; esse F, quã H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D:

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.

E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.

E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

[a] 13. septimi.
[b] 17. septimi.
[c] 13. septimi.

[b] Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14, lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H; [c] Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quã G, erit quoque F, maior quàm H, vt in primo exemplo: Si vero E, æqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoque F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

11.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad mi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti: Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronun. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium; [a] erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.

K, 56.	H 7.		O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 2.
M, 54.	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.		O, 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80.		B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.		P, 24.	L, 30.

a 19. septimi.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G; fietque

idcirco

idcirco ex B, in FG, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, a erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita F G, ad E. Quoniam ergo est, vt F G, ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicuè consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

a 19. septimi.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D. Eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æquemultiplices L, MN, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proximè maior quàm I; hoc est, tales æquè multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel æqualis, vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exẽplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex constructione, quòd I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; b erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

K, 56.	H 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.	O, 60.	I, 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 30.

b 14. septimi.

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutãdo quoque D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad MN; quòd idem numerus ipsos

ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M, N, quippe cum L, MN, sumpti sint ipsorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad MN, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita MN, ad K.

QVIA ergo est, vt totus L, ad I, ita totus MN, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundẽ I, ita E, ex MN, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij propos. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, vt reliquus ex MN, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quàm I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proximè maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex MN, maior non erit quàm K; atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, ut in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt KH, multiplex est ipsius FG, vel I, ipsius C; Item P, ita multiplici ipsius B, ut MN, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniã ostensum est, ita esse FG, ad E, vt A, ad B, sumptiq; sunt ipsorum FG, & A, primi ac tertij, æquemultiplices KH, & O, itẽ ipsorum E, & B, secundi ac quarti, æquemultiplices MN, & P, sequitur ex antecedente propos. si KH, maior est quã MN, ipsum quoque O, maiorem esse quàm P. Cum ergo KH, ostensus sit maior quàm MN, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cũ O, I, sint æquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumq; sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisq; æquemultiplicibus, vt dictum est, multiplex primi nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturq; æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoq; potest,

vt

vt nunquàm multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, demonstratumq́; est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quàm L, multiplicem secundi D, at Q, multiplicem tertij A, maiorem esse quàm P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiã multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quàm multiplex quarti: & si illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuo minor sit: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices qualescunq; E, F; Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque etiam hæc sit multiplicatio. Dico, si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quàm G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores; ita esse A, primũ ad B, secundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad

C, ad D; fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus, item secuudi & quarti æquemultiplicibus; si quando cõtingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti; Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

primi A, maior quàm G, multiplex secũdi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cum illa sit proportio maioris inæqualitatis, hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoq; permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H. a Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauerit E, & F, quippe cum E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C; Eademque de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D, Quod ostendendum erat. a 17. septimi.

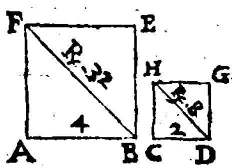
QVOD

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 3.	D, 2.	H, 20.

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secũdi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus incommensurabilibus, quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt verè proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis uerum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò ante demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, recta CD, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata ABEF, CDGH; cum diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quàm



quadratũ diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum ea maior sit quàm 5. minor autem quàm 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior sit

sit quàm 2. minor autem, quàm 3. &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quàm CD, ad DH, sit irrationalis, diameterq́; propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam; vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoq́; inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erunt triangula ABF, CDH. Quare [a] erit, vt AB, ad BF, ita CD, ad DH; Et permutando, vt AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, recta CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eò deducti simus, vt credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt CD, ad DH, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autem propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, verè duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quòd latus AB, lateris CD, duplum ponitur; etiamsi proportio tam lateris AB, ad diametrum BF, quàm lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF, quadrati AE, quàm quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atq; idcirco illud huius quadruplum

[a] 4. sexti.

eris. Quocirca ex scholio propos.4.lib.2.recta BF, recta DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubiũ non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præscribit. Porrò ex regulis quoq; numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R.32. habere duplam proportionẽ ad diametrum DH, id est, ad R.8. Nam siue R.32. diuidatur per R.8. Quotiens fit R.4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; siue R.8. multiplicetur per 2. producitur R.32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rursum est, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conuenit, verè esse proportionales, quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuò consentire comperitur, vt ijs, qui in Algebræ præceptis versati sunt, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum secetur, gignere possit integrum numerum 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuoceturque, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem est, denominatorem 7. nõ metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur

plicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusque ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quàm denominator 7. in se ducatur.) gignaturque fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt ostendimus,[a] non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonstrauimus. Atque eadem ratione demonstrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiam minor est denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem datæ fractionis numerator minor denominatore; erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaque quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est; qualis est fractio $\frac{100}{25}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

[a] 16. octaui.

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si

proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines; At vero si fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam ratione habere dicitur eius, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI

VELVTI si sint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiã, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B; magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponũtur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirũ proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionẽ A, ad B, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD si è contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eò quòd Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplã proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quãtitatem, ac tertiam reperitur *quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cũ inter primã quantitatẽ, ac tertiã interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, vt diximus. Non autem intellexit, illam duplam esse huius, ne Theorema proponeret, quod meritò quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit esse quincuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad sensum expositum, nemo inficiabitur; eò quod bis sit posita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cũ illa minor sit, hæc autem maior? Nam per propos. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatẽ 25. propterea quòd 25. maior est, quàm 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare etsi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cum tamen quadrupla duplicata, sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, qui fieri potest, vt proportio primi ad tertium dupla sit proportionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? Duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quòd hæc ordine bis posita est continuè inter primum numerum & tertium.*

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defi. requiri terminos inæquales, primamq; debere esse maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionem portionẽ reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si conferatur maior conus, vel cylindrus ad minorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdẽ lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figura aliqua demonstrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inæqualitatis essent intelligendæ. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendũ sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentiũ librorũ percipiãtur, rebusq; possint materialibus accommodari. Nõ autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. cõstat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorũ, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis tripla, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, Sphæras inter se rationem habere suarum diametrorũ tripli-

catam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt sphæræ ipsæ proportionem millecuplam, cum hæc sit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse duplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius vigecuplam decuplæ esse duplam?

CÆTERVM proposita quacunque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato: Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater posito; Quintuplicata ex eodem quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud est, quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis his quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64.

Denominatores.	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$.

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num. propert.	3	12	48	192

Nihil obstat ergo, quò minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{16}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione ne subquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadrupla: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadrupla tripla; propterea quòd denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferãtur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c, ita vt proportio decupla sit dupla quintupla, & sextupla sit tripla dupla, &c. ostendemus ad propos. 5. lib. 8. tractatumq́; est hoc argumẽtum copiose à Rodulpho Volumnio in Disputatione de Proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mẽte captus erit, qui nõ statim intelligat, si idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorẽ habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decupla, non autem proportio centupla, vt auctores contraria sententia volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decupla propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplũ proportionẽ habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiã si è contrario, Agẽs aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdẽ Patientis 10. quàm Agens 1.? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. cõflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profecto proportio subquintupla proportionis subdecupla dupla, non autẽ illa, quæ subcentupla est, vt prædicti auctores volunt.

velunt, cum hæc longè minor sit, quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionẽ duarum quantitatum, quibus nullum interponitur mediũ, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vere, cuius quantitates intercipiunt vnicũ medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniã gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodũ & quadratũ ex duabus lineis æqualibus cõficitur. Deniq; proportionẽ, cuius quãtitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturã solidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam exposuerunt.

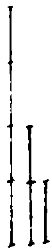
X I.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionũ esse similitudinem. Docet iam, nõ solum in proportionalitate quãuis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quamplurimis demonstrationibus, quænam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, &

quænam consequẽtia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtriq; cõsequenti, vel eodẽ modo maiorẽ, aut minorẽ:

Alias


E F G

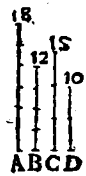
Alias non haberet vtraq; antecedẽs ad vtramq; consequentẽ proportionem eãdem. Exemplũ habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tã E, & F, homologa sunt, quam F, & G, vt constat. Atq; hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad *ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, qua est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.*

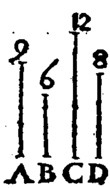


XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius, Recte namque licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus

D, ad

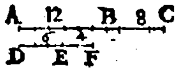


D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum cõsequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, qua DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiuscemodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores repertes in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



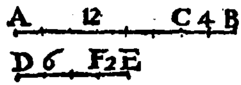
HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequẽs, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq́; Ergo vt AC, ex antecedente & consequente conflata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionẽ rationis cõuersam.

ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq́; per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totũ AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib., ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, quæ proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB, consequentem, vt D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c Hac porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.



POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimusq; per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt C B, consequens ad A C, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita F E, consequens ad D F, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autẽ hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.

ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita D F, antecedens ad F E, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad propos. 17. huius lib.

PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in corall. propos. 19. huius lib.

A 6 C 4 B

D 12 F 8 E

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

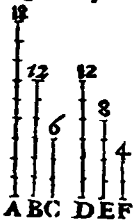
EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque bina ac bina in eadem proportione, hoc est,

A, ad

A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, prima magnitudinis ad vltimam in secũdis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis medijs, colliguntur habere vnam, eandemque inter se se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatè procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobiq; conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eã argumentat.onẽ esse bonã.

catam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter conti net tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim tripli cata dicitur tripla proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri propor tionem habent decuplam, habebunt sphæræ ipsæ proportionem millecuplam, cum hæc sit decupla triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse duplo tantummodo maiorem proportione de cupla, & non potius vigecuplam decupla esse duplam?

CÆTERVM proposita quacunque proportione ratio nali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ pro portionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio se decupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cer nitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multi plicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadru plæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, du plicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rur sus in illud productum multiplicetur, procreabitur denomina tor proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multipli catione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator pro portionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaque proportio nis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propo sitæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, pro ducitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dici tur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ pro portionis denominatore ter posito, & sic multiplicato: Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atque ita multiplicato, di cendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud est, quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis his quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{10}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quò minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{10}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicatus, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione

Denominatores.		4		4		4	
Num. propor.	192		48		12		3

Denominatores		$\frac{1}{4}$.		$\frac{1}{4}$.		$\frac{1}{4}$.	
Num. proport.	3		12		48		192

ne subquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadrupla: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadrupla tripla; propterea quòd denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferãtur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c, ita vt proportio decupla sit dupla quintupla, & sextupla sit tripla dupla, &c. ostendemus ad propos. 5. lib. 8. tractatumq́; est hoc argumẽtum copiose à Rodulpho Volumnio in Disputatione de Proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mẽte captus erit, qui nõ statim intelligat, si idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorẽ habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decupla, non autem proportio centupla, vt auctores contraria sententia volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decupla propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplũ proportionẽ habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiã si è contrario, Agẽs aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdẽ Patientis 10. quàm Agens 1.? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. cõstatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profecto proportio subquintupla proportionis subdecupla dupla, non autẽ illa, quæ subcentupla est, vt prædicti auctores volunt.

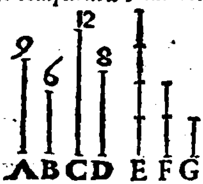
volunt, cum hac longè minor sit, quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, ut hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionẽ duarum quantitatum, quibus nullum interponitur mediũ, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt unicũ medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniã gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodũ & quadratũ ex duabus lineis æqualibus cõficitur. Deniq; proportionẽ, cuius quãtitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturã solidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam exposuerunt.

X I.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionũ esse similitudinem. Docet iam, nõ solum in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, ut intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quanam consequẽtia, ut in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem esse utriq; cõsequenti, vel eodẽ modo maiorẽ, aut minorẽ:



Alias

Alias non haberet vtraq; antecedẽs ad vtramq; consequentẽ proportionem eãdem. Exemplũ habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tã E, & F, homologa sunt, quam F, & G, vt constat. Atq; hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi aeque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia aeque multiplicia secundae, & quartae magnitudinum, nimirum consequentium. Hae enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

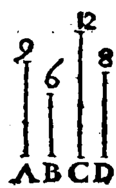
ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex aequalitate, seu aequa proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad *ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.*

XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad

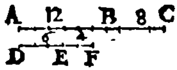


D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum cõsequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiuscemodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores repertes in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



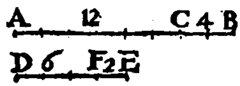
HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequẽs, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq; Ergo vt AC, ex antecedente & consequente conflata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionẽ rationis cõuersam.

ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusq; per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totã AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.

VT ſi dicatur, quæ proportio eſt totius A B, ad C B, ea eſt totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ad C B, conſequentem, vt D F, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad F E, conſequentem. In diuiſione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hac porro illatio oſtendetur propoſ. 17. huius lib.



POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuiſionem rationis conuerſam dicere poſſumus; quando nimirum conſequens ad exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, refertur. Vt ſi eſt, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimuſq; per diuiſionem rationis conuerſam; Ergo erit, vt C B, conſequens ad A C, exceſſum, quo antecedens conſequentem ſuperat, ita F E, conſequens ad D F, exceſſum, quo antecedens ſuperat conſequentem. Valere autẽ hanc argumentationem, oſtendemus ad 17. propoſ. huius lib.

PERSPICVVM autem eſt, vt vtraque harum argumentationum per Diuiſionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & noſtra, antecedentem debere eſſe maiorem conſequente. Aliàs Diuiſio fieri non poſſet.

ALTER modus appellari poteſt Diuiſio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum exceſſu, quo conſequens antecedentem ſuperat. Vt cum dicimus. Ita ſe habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quoque per diuiſionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, exceſſum, quo conſequens antecedentem ſuperat, ita D F, antecedens ad F E, exceſſum, quo antecedentem ſuperat conſequens. Qui modus argumentandi demonſtrabitur etiam à nobis ad propoſ. 17. huius lib.

PORRO manifeſtum eſt, in hac Diuiſione rationis contraria conſequentem debere eſſe maiorem antecedente, vt ſumi poſſit exceſſus, quo conſequens antecedentem ſuperat.

CON-

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

A 6 C 4 B

D 12 F 8 E

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

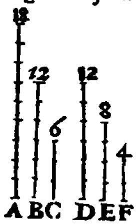
XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque bina ac bina in eadem proportione, hoc est, A, ad

A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in secũdis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis medijs, colliguntur habere vnam, eandemque inter se se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatè procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

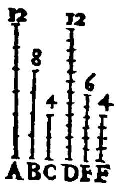
VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobiq; conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eã argumentatiõnẽ esse bonã.

V u PER-

XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem ſit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; nuncupabitur huiuſcemodi proportio, Perturbata: quòd non ſeruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Perturbata proportio, demonſtratur, eam argumentationem eſſe bonam, propoſ. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, ſemper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam ſi plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propoſ. 22. & 23. huius lib. perſpicuum fiet.

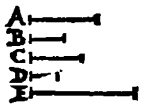


VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam,

quodam, quod vt hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiã alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictione non implicet, vt Philosophi, loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.

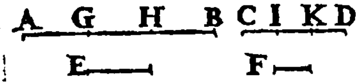


THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinũ E, F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinũ E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel C D, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si A B, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi

 E, æqua-



E,ęquales,& CD, quoq; in magnitudines CI,IK,KD, ipsi F,ęquales;(Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB,CD,sint ipsarum E,F,æque multiplices, atque ideo toties E,in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD,vt ex ijs, quæ in defin.2. huius lib. scripsimus, constat.) erunt magnitudines AG,GH,HB, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero AG,& E,ęquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales
a 2. pron. CI,& F, a erunt A G, C I, simul,æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt G H, & I K, simul, æquales ipsis E,& F,simul; Necnon H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, vel F,in C D, continetur, toties & E,F,simul,in AB, C D, simul comprehenduntur: Ideoque,quam multiplex est AB, ipsius E,tam sunt multiplices A B, C D, simul,ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs,quæ in defin.2.huius lib. scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum,&c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

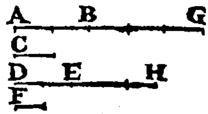
HOC idem demonstrabitur vniuerse propos. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare; quia ex eo alia proportiones demonstranda sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari. 2

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIT

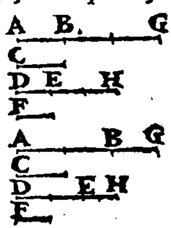
SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex DE, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta compositam, tam multiplicem esse secũdæ C, quam multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ. Cum enim A B, D E, sint æque multiplices ipsarum C, F; erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur ęqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines BG, EH; [a] erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta (ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



a 2. pron.

SCHOLIVM.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, ut perspicuum est in appositis figuris. Si vero tã prima & tertia, quam quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius est, primam



& quintam simul, atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis vniuersè propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundę ęquemultiplex, atq; tertia quartę; sumantur autem ęque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM; erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, ęquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, ęque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL; Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia

quartæ

quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt KL, ſexta eiuſdem quartæ D, [a] Erit & E H, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cum ſit EH, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt F L, tertia quartæ D, vt proximè demonſtratum eſt; ſit autem & H I, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt L M, ſexta multiplex quartæ D; [b] Erit & E I, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt F M, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

a 2. quinti.

b 2. quinti.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propoſ. 22. non ſolum in magnitudinibus æque multiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ bina ſumpta eandem habent proportionem, ſiue rationalem, ſiue irrationalem; ſed neceſſarium fuit, ipſum prius hic in proportione multiplici demonſtrare, vt inſequens propoſ. 4. demonſtrari poſſit.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta

quamuis multiplicationem: siue E, F, ita multiplices sint ipsarũ A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6 eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vnà deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicẽ primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia; & H, quarta: sumanturq; ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, á multiplicibus ipsarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt vult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta, vt diximus, vel vnà deficere, vel vna æqualia esse, vel vnà excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; ostensæque sunt I, K, æque multi-

[a] 3. quinti.

multiplices primæ & tertiæ, A, C; Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ, B, D; [a] fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat necessario ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [b] æquemultiplicia quoq; erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaq; cum L, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoq; esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [c] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *6. definit. quinti.*

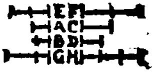
[b] *3. quinti.*

[c] *6. definit. quinti.*

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione, proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse cõuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarũ A, C, prima ac tertia; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secunda & quarta: quoniam ex eo, quòd A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [d] necessario sequitur, si E, multiplex prima minor fuerit quam G, multiplex secunda, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertia minorem

[d] *6. definit. quinti.*



minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationē sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior, quam vtraque E, F: & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quàm vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaque quoniam prima B, & tertia D, sumpta sunt æquemultiplicia G, H; Item secunda A, & quarta C, æquemultiplicia E, F, ostensumq́ est, G, H, vel vna excedere E, F, vel vnà æqualia esse, vel vnà deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur; [a] erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.

[a] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportio-

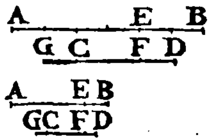
portionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim a principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarũ magnitudinũ æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reÿcienda est ergo huiuscemodi demonstratio, vna cum expositione 6. definitionis, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur, pro vt inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI magnitudo magnitudinis ęque fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex A E, ablata ablatæ C F, siue A E, C F, ablatæ sint totis A B, C D, commensurabiles, vt in prima figura, siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Item siue A E, C F, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figuræ, siue non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico

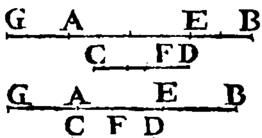
Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ F D, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius G C, vt est AE, multiplex ipsius C F, vel tota A B, totius C D. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum



CF, GC; [a] erit tota A B, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur A B, ipsius C D, quam est multiplex A E, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; [b] atque idcirco æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt A E, ipsius CF, hoc est, vt tota A B, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua E B, reliquæ F D, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.

[a] 1. quinti.
[b] 6. pron.

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius C D, vt ablata AE, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquæ



FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim G A, ita multiplici ipsius F D, vt est A E, ipsius C F, vel vt tota AB, totius C D: quoniam A E, G A, æque multiplices sunt ipsarum C F, F D; [c] erit tota G E, sic multiplex totius CD, vt AE, ipsius C F: Sed ita quoque multiplex est AB, eiusdem CD, vt A E, ipsius CF, ex hypothesi Aeque multiplices sunt igitur G E, A B, ipsius CD; [d] atque adeo inter se æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipsius FD; cum GA, sit multiplex posita ipsius FD: Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius FD, vt AB, ipsius C D. Igitur & E B, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, vt AB, tota totius C D; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 1. quinti.
[d] 6. pron.

SCHO-

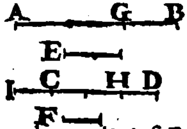
SCHOLIVM.

VNIVERSE idipsum demonstrabitur propos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic est factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

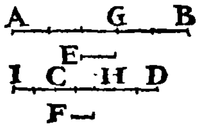
SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ A G, C H, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas G B, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cũ enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoq; AG, eiusdem E, multiplex; erit reliqua G B, vel æqualis ipsi E, vel eius multiplex; aliàs inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum G B, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Et quia prima A G, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secũdæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; [a] erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, vt H I, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoq; tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Aeque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. [b] Ideoq; æquales inter se. Quare, dempta CH, communi, remanebũt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoq; H D, eidem F, æqualis. Quod est propositum.



[a] 2. quinti.

[b] 6. pron.

SIT



SIT deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicẽ H D, ipsius F. Posita namque C I, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; [a] erit, vt prius, A B, ita multiplex ipsius E, vt H I, multiplex est ipsius F. [b] Quare iterum æquales erunt HI, C D; atq; adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed C I, est ita multiplex ipsius F, vt G B, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quinti.
[b] 5. pron.

SCHOLIVM.

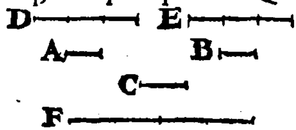
HOC quoque ostendemus vniuerse propos. 24. in omni genere proportionis.

BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, C D, sunt ipsarum E, F, æquemultiplices; erunt in A B, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in C D, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, æquemultiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus A B, C D, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, H D, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in H D: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoque H D, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex H D, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in H D, existit, vt ostensum est.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A,B, æquales inter se, & tertia quęuis C. Dico A,& B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D,E, æque multiplices ipsarum æqualium A,B; [a] eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunq; multiplex ipsius C. Quoniam igitur D,E, æquales sunt, sit vt vtraq; vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D,E, æque multiplices primæ A,& B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; [b] erit in proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



[a] 6. pron.

[b] 6. definit. quinti.

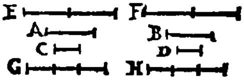
EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D,E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vna æqualis sit, vel maior; [c] Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

[c] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neque enim per demonstrationem constat, vtramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cum illa sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam

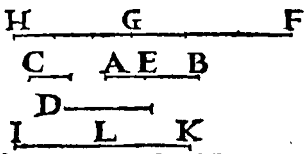


C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum A, & B, prima, & tertia. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum
[a] 6. pron. *C, & D, ſecunda, & quarta; [a] erunt tam E, & F, inter ſe æquales, quam G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex prima deficit à G, multiplice ſecunda, etiam F, multiplex tertia, ab H, multiplice quarta deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi*
[b] 6. definit. quinti. *ſuperat, ſuperabit. [b] Eadem ergo eſt proportio A, prima ad C, ſecundam, quæ B, tertia ad D, quartam. Quod eſt propoſitum.*

8

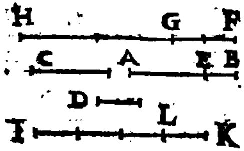
THEOR. 8. PROPOS. 8.

INAEQVALIVM magnitudinũ maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionẽ AB, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. At e conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quã D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori

minori C, vt sit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE; quia dupla ipsius AE, esset minor, quàm D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunq; aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis

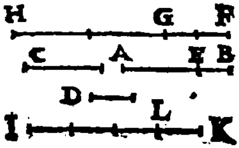


est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est, quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunq; aliæ maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarum BE, EA; [a] erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E. Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quam H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quàm H G, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est I K, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm HG, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, nõ erit I L, maior, quam H G, (aliàs I K, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quam H G; sed & I L, maior quoque esset quam H G. Quòd si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cum HG, posita sit non minor quàm D, hoc est, quàm I L,) & idcircò H G, erit vel æqualis ipsi I L, vel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K. Cum ergo H G, non minor sit quam I L, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota F H, maior quam I K. Itaque cum F H, H G, sint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque I K, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quam I K, multiplex secundæ; At H G, multiplex

[a] 1. quinti.

tertiæ non ſit maior, quam I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt I K, multiplex ipſius D, maior quam HG,) [a] erit maior proportio AB, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

[a] 8. definit. quinti.



QVONIAM vero è côtrario I K, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda, & A B, quarta) maior eſt quã H G, multiplex ſecundę C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quã FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior ſit, quam I K, vt oſtenſum eſt; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de Proportione agens, per hanc propoſ. 8. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionẽ ad quemuis alium angulum, quam angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam F G, multiplex exceſſus E B, ſuperare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui non eiuſdem naturæ eſt cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet vnum punctum, ut fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa compoſita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ;

Item

Item quemadmodum si ad figuram planam quamcunq; apponeretur linea unius palmi, non diceretur hac magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq; non habet angulus rectus propriè ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersa naturæ, vt dictum est. Itaque non solum ea magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque ea proprie dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & qua vix recte intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, qua verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsq; diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior; & B, minor. [a] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior; & B, minor; [b] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. quinti.

[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propositio 9. vtramque partem theorematis 7. vt manifestum est.

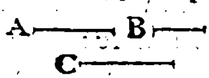
10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [c] haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, [d] haberet B, maior ad C, maiorẽ proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est cõtra hypothesin. Non est igitur A, æqua-

[c] 7. quinti.

[d] 8. quinti.



A, æqualis vel minor quam B, sed maior. Habeat secundò C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse, quam A, Non enim æqualis erit B, ipsi A; [a] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, maior erit quam A; [b] aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quã A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 7. quinti.

[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

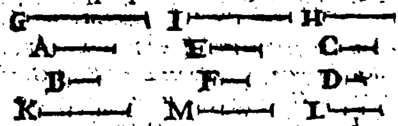
HÆC quoque propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

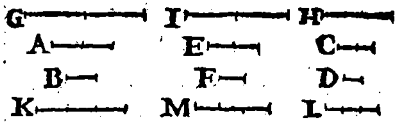
11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C; Item equemultiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquè multiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [c] fit, vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice



[c] 6. definit. quinti.



secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: a Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quam L, vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundã, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primę A, deficit a K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque multiplicibus. a Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

a 6. definit. quinti.

b 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D; sit autem E, ad F, vt A, ad B. &

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4.
E, 9. F, 6: G, 12. H, 8.

G, ad H, vt C, ad D: erit quoque E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B; c erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D. d erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

c 11. quinti.

d 11. quinti.

RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se; sit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6.
G, 12. H, 8: I, 18. K, 12: L, 30. M, 20.

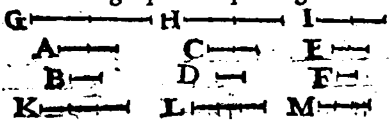
C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M; eadem inter se. Nam vt proximè in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad

I, ad K, sic L, ad M. Quare cum proportiones G, ad H, & L, ad M, eadem sint proportioni I, ad K; [a] erunt & ipsa eadem [a] *11. quinti.*
inter se; ac proinde omnes inter se eaedem erunt. Eadem ratio est de pluribus proportionibus.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 12.

SI sint magnitudines quotcunq; proportionales; quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F.



Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, aeque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, aeque multiplicibus consequentium, [b] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirũ vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [c] fit vt si G, multiplex primae deficit à K, multiplice secundae, deficiat quoq; H, multiplex tertiae ab L, multiplice quartae, & I, ab M; Et si G, aequalis est ipsi K, vel maior, aequalis quoq; sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Quare si G, minor est, vel aequalis, vel maior quã K, erũt & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores, vel equales, vel maiores. [d] Quocirca vt est

[b] *1. quinti.*

[c] *6. definit. quinti.*

[d] *6. definit. quinti.*

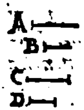
tam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoq; B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D. Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsi D. Sit primum A, maior quam C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniã igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam: [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. [c] Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

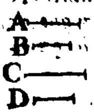
SIT deinde A, æqualis ipsi C; [d] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.



SIT tertio A, minor quam C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; [i] Ideoque B, minor erit, quam D. quod est propositum. Si prima igitur

[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.



tur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVOD si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quàm C. Cum enim B, maior sit quàm D;[a] erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertia ad D, quartam ostensa est maior, quàm C, quinta ad B, sextam;[b] erit quoque proportio A, prima ad B, secundam maior, quàm C, quinta ad B, sextam:[c] ac proinde A, maior erit, quàm C. quod est propositum. [a] 8. quinti. [b] 13. quinti. [c] 10. quinti.

DEINDE sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis;[d] erit C, ad B, vt C, ad D: Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D.[e] Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B:[f] propterea A, ipsi C, æqualis erit: quod est propositum. [d] 7. quinti. [e] 11. quinti. [f] 9. quinti.

TERTIO sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cum enim B, minor sit quàm D;[g] erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertia ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quinta ad B, sextam,[h] erit quoque proportio A, prima ad B, secundam minor, quàm C, quinta ad B, sextam.[i] Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum. [g] 8. quinti. [h] 13. quinti. [i] 10. quinti.

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis vel minor, quam secunda, tertiã quoq; maiorẽ esse, vel æqualẽ, vel minorẽ, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo pleriq; Geometrarũ tũ veterum, tum recentiorũ vtuntur) quia id perspicuũ est ob similitudinẽ proportionum. Hinc enim fit, si vtraq; est proportio maioris inæqualitatis, vtramq; antecedentẽ magnitudinem, id est, prima ac tertiã, maiorẽ esse vtraq; magnitudine consequẽte, hoc est, secũda ac quarta: Si verò vtraq; proportio est æqualitatis, vtrãq; magnitudinẽ antecedentem vtriq; consequenti æqualem esse.

Si

Si denique vtraq; proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque consequente esse minorem.

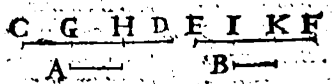
VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quo circa si A, prima maior est quã B, secunda, erit & C, tertia maior quã D, quarta: Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor.

Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 16. huius lib.

15.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.



SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B; [a] eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK; & HD, ad KF, vt A, ad B; [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quo circa vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaq; cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

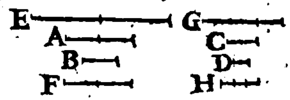
a 7. quinti.
b 11. quinti.
c 12. quinti.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur Alterna, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E, F; Item ipſarum C, D, tertiæ & quartę, ęque multiplices G, H; [a] eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; [b] erũt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; [c] erunt & ipſæ eædem inter ſe: hoc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [d] Quare ſi E, prima maior eſt quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunq; multiplicatione accepta ſint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [e] Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.



[a] 15. quinti.

[b] 11. quinti.

[c] 11. quinti.

[d] 14. quinti.

[e] 6 defini. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO demonſtratio huius propoſ. locũ ſolũ habet, quando quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Nam ſi duæ

A, B,

A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recepimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cũ Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.

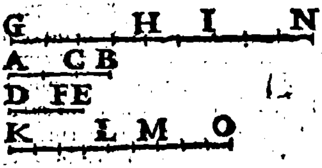
a 16. quinti. *ᵃ Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.*
b 14. quinti. *ᵇ Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*

SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14 factum est. Ita enim verũ erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



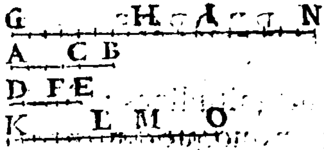
HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quã defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines A B, C B, & D E, F E, proportionales, hoc est, sit A B, ad C B, vt D E, ad F E. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad C B, ita esse D F, ad F E, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim A C, C B, D F, F E, æque multiplices capiantur eodem ordine G H, H I, K L, L M; [a] eritque G I, ita multiplex ipsius A B, vt est G H, ipsius A C, hoc est, vt K L, ipsius D F. Sed vt est multiplex K L, ipsius D F, [b] ita quoque multiplex est K M, ipsius D E. Aeque multiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum A B, D E. Capiantur rursus I N, M O, æque multiplices ipsarum C B, F E. Quoniam igitur sic est multiplex H I, primæ secundæ C B, vt L M, tertia quartæ F E: Item tam est multiplex I N, quinta secundæ C B, quam multiplex est M O, sexta quartæ F E; [c] erit & H N, sic multiplex secundæ C B, vt L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cum sit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æque multiplices G I, K M, primæ ac tertiæ, A B, D E; Item secundæ & quartæ C B, F E, æquemultiplices H N, L O, [d] sit, vt si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice secundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplice quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit,

a 1. quinti.

b 1. quinti.

c 2. quinti.

d 6. definit. quinti.

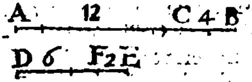


excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quā KM, ab LO; ablatis cōmunibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO; ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO; ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF; item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE; ostensumque sit, (In quacunque multiplicatione illę æquemultiplices fuerint acceptę) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ, vel vna deficere, vel vna æquales esse, vel vna excedere; [a] Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 6. *definit. quinti.*

SCHOLIVM.

EX *his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;* [b] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*



[b] 17. *quinti.*

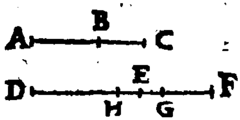
NVLLO *etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quā ad eandē defi. 15. Diuisionē rationis cōtrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus.*

ſtrauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita DF, ad DE. Dico eſſe quoque per Diuiſionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad AC, ita DE, ad D F. [a] *Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rurſus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.* [a] *17. quinti.*

THEOR. 18. PROPOS. 18. 18.

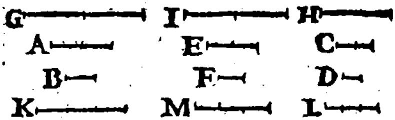
SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ propornales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint enim diuiſæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales hoc eſt, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compoſitas proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt A C, ad B C, ita eſſe D F, ad E F. Si enim non eſt, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit D F, ad aliquã magnitudinem minorem ipſa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipſa E F, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; [b] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt A B, ad BC, ita poſita quoque eſt D E, ad EF. [c] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad GF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo D G, prima maior ſit, quàm DE, tertia, [d] erit quoque GF, ſecunda maior quàm EF, quarta, pars quàm totum. Quod eſt abſurdum.



[b] *17. quinti.*
[c] *11. quinti.*
[d] *14. quinti.*

HABEAT deinde, ſi fieri poteſt, D F, ad H F, maiorem ipſa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt AC, ad BC, ita D F, ad



secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque fit I, ipsi M, vel maior: [a] Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quam L, vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundã, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primę A, deficit a K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque multiplicibus. [a] Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

[a] 6. definit. quinti.

[b] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D; sit autem E, ad F, vt A, ad B. & G, ad H, vt C, ad D: erit quoq; E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B; [c] erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D. [d] erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4.
E, 9. F, 6: G, 12. H, 8.

[c] 11. quinti.

[d] 11. quinti.

RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se; sit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam vt proximè in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6.
G, 12. H, 8: I, 18. K, 12: L, 30. M, 20.

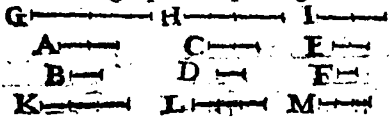
I, ad K, sic L, ad M. Quare cum proportiones G, ad H, & L, ad M, eaedem sint proportioni I, ad K; [a] erunt & ipsae eaedem inter se; ac proinde omnes inter se eaedem erunt. Eadem ratio est de pluribus proportionibus. [a] *11. quinti.*

THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

SI sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A,B; C,D; E,F,



pportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam cõsequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, aeque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, aeque multiplicibus consequentium, [b] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirũ vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [c] sit vt si G, multiplex primae deficit à K, multiplice secundae, deficiat quoq; H, multiplex tertiae ab L, multiplice quartae, & I, ab M; Et si G, aequalis est ipsi K, vel maior; aequalis quoq; sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Quare si G, minor est, vel aequalis, vel maior quã K, erũt & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores, vel equales, vel maiores. [d] Quocirca vt est

[b] *1. quinti.*

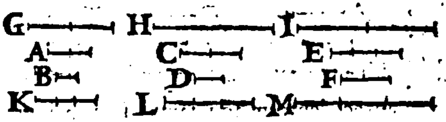
[c] *6. definit. quinti.*

[d] *6. definit. quinti.*

A, prima ad B, secundā ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.



SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad C, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, E: Item æquemultiplicibus ipsarum B, F, cōtingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam; [a] fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, [b] non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor, quod maior ponatur proportio C, primæ ad D,

[a] 6. definit. quinti.

[b] 8. definit. quinti.

ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartem. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. a Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam: Quam ob rem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat. a 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quam E, quinta ad F, sextam; erit quoque proportio A, prima ad B, secundam minor quam E, quinta ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, prima ad F, secundam maior quam C, tertia ad D, quartam; b fit vt si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L; sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. c Sed si H, deficit ab L, vel ei æqualis est; etiam G, deficiet a K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K; d atque idcirco maior erit proportio E, prima ad F, secundam, quam A, tertia ad B, quartam; hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F. Quod est propositum. b 8. definit. quinti. c 6. definit. quinti. d 8. definit. quinti.

EODEM modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

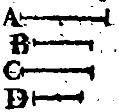
QVOD si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secũdam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam;

tam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

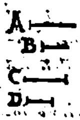
SIT enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoq; B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsi D. Sit primum
[a] 8. quinti. A, maior quam C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniã igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B,



[b] 13. quinti. sextam; [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. [c] Minor est ergo
[c] 10. quinti. D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.

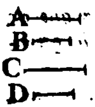
[d] 7. quinti. SIT deinde A, æqualis ipsi C; [d] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.



[g] 8. quinti. SIT tertio A, minor quam C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; [i] Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur

[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.



tur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVOD si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quàm C. Cum enim B, maior sit quàm D; [a] *erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertia ad D, quartam ostensa est maior, quàm C, quinta ad B, sextam;* [b] *erit quoque proportio A, prima ad B, secundam maior, quàm C, quinta ad B, sextam:* [c] *ac proinde A, maior erit, quàm C. quod est propositum.* [a] *8. quinti.* [b] *13. quinti.* [c] *10. quinti.*

DEINDE sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis; [d] *erit C, ad B, vt C, ad D: Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D.* [e] *Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B;* [f] *proptereaq; A, ipsi C, æqualis erit: quod est propositum.* [d] *7. quinti.* [e] *11. quinti.* [f] *9. quinti.*

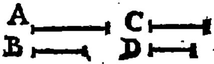
TERTIO sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cum enim B, minor sit quàm D; [g] *erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertia ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quinta ad B, sextum,* [h] *erit quoque proportio A, prima ad B, secundam minor, quàm C, quinta ad B, sextam.* [i] *Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum:* [g] *8. quinti.* [h] *13. quinti.* [i] *10. quinti.*

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis vel minor, quam secunda, tertiã quoq; maiorẽ esse, vel æqualẽ, vel minorẽ, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo pleriq; Geometrarũ tũ veterum, tum recentiorũ vtuntur) quia id perspicuũ est ob similitudinẽ proportionum. Hinc enim fit, si vtraq; est proportio maioris inæqualitatis, vtramq; antecedentẽ magnitudinem, id est, primã ac tertiã, maiorẽ esse vtraq; magnitudine cõsequẽte, hoc est, secũda ac quarta: Si verò vtraq; proportio est æqualitatis, vtrãq; magnitudinẽ antecedentem vtriq; consequenti æqualem esse.

Si

Si denique vtraq; proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.



Quo circa si A, prima maior est quã B, secunda, erit & C, tertia maior quã D, quarta: Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 16. huius lib.

15. THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B; [a] eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK; & HD, ad KF, vt A, ad B; [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quo circa vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul. quod est propositum. Partes itaq; cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

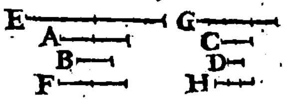
[a] 7. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 12. quinti.

THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIC demonſtratur Alterna, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E, F; Item ipſarum C, D, tertiæ & quartę, ęque multiplices G, H; [a] eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; [b] erũt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; [c] erunt & ipſæ eædem inter ſe: hoc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [d] Quare ſi E, prima maior eſt quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunq; multiplicatione accepta ſint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [e] Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.



[a] 15. quinti.

[b] 11. quinti.

[c] 11. quinti.

[d] 14. quinti.

[e] 6 defini. quinti.

SCHOLIVM.

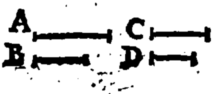
PORRO demonſtratio huius propoſ. locũ ſolũ habet, quando quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Nam ſi duæ A, B,

A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recepimusq́; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cũ Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.



a 16. quinti. *minorem. [a] Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.*
b 14. quinti. *[b] Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*

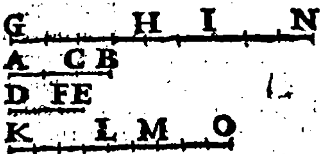
SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14 factum est. Ita enim verũ erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continua, & C, D, numeri, &c.

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quã defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines A B, C B, & D E, F E, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt D E, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad C B, ita esse D F, ad F E, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; a eritque G I, ita multiplex ipsius A B, vt est G H, ipsius A C, hoc est, vt K L, ipsius D F. Sed vt est multiplex K L, ipsius D F, b ita quoque multiplex est K M, ipsius D E. Aeque multiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum A B, D E. Capiantur rursus I N, M O, æque multiplices ipsarum C B, F E. Quoniam igitur sic est multiplex H I, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex I N, quinta secundæ C B, quam multiplex est M O, sexta quartæ F E; c erit & H N, sic multiplex secundæ C B, vt L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cum sit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ, AB, DE; Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices HN, LO, d fit, vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit,

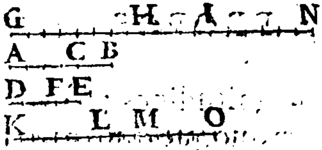
a 1. quinti.

b 1. quinti.

c 2. quinti.

d 6. definit. quinti.

excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quã KM, ab LO; ablatis cõmunibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis

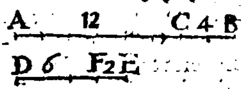


fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO; ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO; ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF; item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE; ostensumque sit, (In quacunque multiplicatione illę æquemultiplices fuerint acceptę) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ, vel vna deficere, vel vna æquales esse; vel vna excedere; [a] Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam: quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

EX his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [b] erit diuidendo; vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.



[b] 17. quinti.

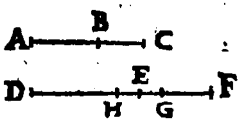
NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quã ad eandẽ defi. 15. Diuisionẽ rationis cõtrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus.

struximus. Sit enim vt A C, ad A B, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad AC, ita DE, ad D F. [a] *Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rursus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum.* [a] *17. quinti.*

THEOR. 18. PROPOS. 18. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proporꝛnales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales hoc est, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad B C, ita esse D F, ad E F. Si enim non est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit D F, ad aliquã magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipsa E F, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; [b] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad BC, ita DG, ad GF; Sed vt A B, ad BC, ita posita quoque est D E, ad EF. [c] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo D G, prima maior sit, quàm DE, tertia, [d] erit quoque GF, secunda maior quàm EF, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.



[b] *17. quinti.*
[c] *11. quinti.*
[d] *14. quinti.*

HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita D F, ad

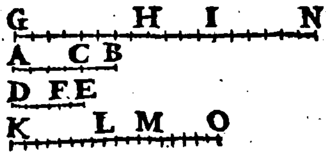
Yy H F;

[a] 17. quinti. [b] 11. quinti. [c] 14. quinti.

HF; [a] erit diuidēdo quoq; vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiā est DE, ad EF. [b] Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartā. Cum ergo DH, prima minor sit quàm DE, tertia, [c] erit quoque HE, secunda minor quàm EF, quarta, totum quàm pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC. quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidē ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF,



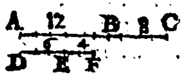
[d] 1. quinti. [e] 2. quinti. [f] 6. definit. quinti.

FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM; Item ipsarum CB, FE, alia æque multiplices IN, MO; [d] eruntque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, æque multiplices. [e] Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in præcedenti Theoremate ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam; sumptaque sunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF; Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices IN, MO, [f] fit vt si GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quàm KL, ab MO; additis cōmunibus HI, LM, deficiat quoq; GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL,

& K L, ipsi M O; additis communibus H I, L M, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O. Et denique si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O; additis communibus H I, L M, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex prima A B, deficit ab H N, multiplice secunda C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplice quarta F E; & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; [a] erit A B, prima ad C B, secundam, ut D E, tertia ad F E, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum. [a] 6. definit. quinti.

VERVM hæc demonstratio non rectè colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non sunt ita multiplices ipsarum C B, F E, ut multiplices accepta sunt I N, M O, earundem C B, F E. Vnde merito dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem æque multiplices seruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum C B, F E, quastunq; æquemultiplices, sed tales duntaxat, quales consurgunt ex H I, I N, & ex L M, M O, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obijci non potest; quippe cum I N, M O, sumpta sint ipsarum C B, F E, æquemultiplices qualescunq;, ipsæq; eædem remanent æquemultiplices earundem C B, F E, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare, ne eam studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, ut bonam: præsertim cum ostensiua sit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit enim ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis cōuersam, esse quoq; ut A C, ad A B, ita D F, ad D E.



Quoniam enim est, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo; ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. [b] Igitur & componēdo erit, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod est propositū. [b] 18. quinti.

POSTERIOREM modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: erit conuertendo, vt BC, ad
a 18. quinti. *AB, ita EF, ad DE. [a] Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVOD in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD.
b 16. quinti. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF, [b] erit & permutando AB, ad AE, vt CD,
c 17. quinti. ad CF. [c] Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF.
d 16. quinti. [d] Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD; cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.

A 6 C 4 B

D 12 F 8 E

SIT enim, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, [a] *erit quoque diuidendo,* [a] 17. quinti. *ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF:* [b] *ac* [b] 18. quinti. *propterea componendo quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

SCHOLIUM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] *erit permutando, ut tota AB, ad totam DE,* [c] 16. quinti. *ita CB, ablata ad ablatam FE.* [d] *Igitur ut tota AB, ad* [d] 19. quinti. *totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF: Et proinde permutando rursus, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea usurpetur alterna, siue permutata proportio, quae vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, ut & in defin. 12. & in propos. 16. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometrae modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quae omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duae quantitates AB, CB, sint unius generis, nimirum lineae, posteriores vero duae DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorẽ F, sexta. Cum enim
[a] 8. quinti. A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt
[b] 13. quinti. A, ad B, ita D, ad E. [b] Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit
[c] 10. quinti. D, ad E, quam F, ad E. [c] Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit
[d] 7. quinti. ipsi C, æqualis, [d] erit A, ad B, vt C, ad B.
[e] 11. quinti. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [e] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad
[f] 9. quinti. E. [f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

SIT

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [a] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. [b] Minor ergo quoq; proportio est D, ad E, quã C, ad B. Est autẽ conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, [c] propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum.

a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

THEOR. 21. PROPOS. 21. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recepimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cũ Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.

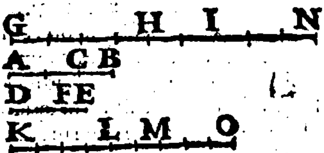
[a] 16. quinti. *minorem. [a] Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.*
[b] 14. quinti. *[b] Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*

SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14 factum est. Ita enim verũ erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continua, & C, D, numeri, &c.

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



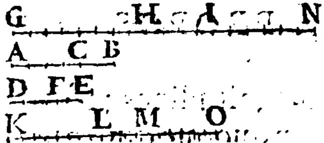
HOC loco demonſtrat Euclides Diuiſionem rationis, quã defin. 15. explicauit. Sint enim compoſitæ magnitudines A B, C B, & D E, F E, proportionales, hoc eſt, ſit AB, ad C B, vt D E, ad FE. Dico & diuiſas eaſdem proportionales eſſe, hoc eſt, vt eſt AC, ad C B, ita eſſe D F, ad F E, in eo ſenſu, quem definitione 6. expoſuimus. Ipſarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; [a] eritque G I, ita multiplex ipſius A B, vt eſt G H, ipſius A C, hoc eſt, vt K L, ipſius D F. Sed vt eſt multiplex K L, ipſius D F, [b] ita quoque multiplex eſt K M, ipſius D E. Aeque multiplices ergo ſunt G I, K M, ipſarum A B, D E. Capiantur rurſus I N, M O, æque multiplices ipſarum C B, F E. Quoniam igitur ſic eſt multiplex H I, prima ſecundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam eſt multiplex I N, quinta ſecundæ C B, quam multiplex eſt M O, ſexta quartæ F E; [c] erit & H N, ſic multiplex ſecundæ C B, vt L O, multiplex eſt quartæ F E. Itaque cum ſit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ, AB, DE; Item ſecundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, [d] ſit, vt ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice ſecundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit,

a 1. quinti.

b 1. quinti.

c 2. quinti.

d 6. definit. quinti.

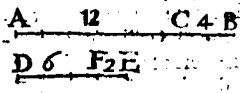


excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quã KM, ab LO; ablatis cõmunibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO; ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO; ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF; item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE; ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illę æquemultiplices fuerint acceptę) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ, vel vna deficere, vel vna æquales esse, vel vna excedere; [a] Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] *6. definit. quinti.*

SCHOLIVM.

EX his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [b] erit diuidendo; vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.



[b] *17. quinti.*

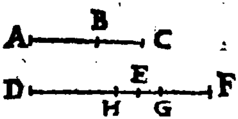
NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quẽ ad eandẽ defi. 15. Diuisionẽ rationis cõtrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus.

firmamus. Sit enim vt A C, ad A B, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad AC, ita DE, ad D F. [a] Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rursus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum. [a] 17. quinti.

THEOR. 18. PROPOS. 18. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales hoc est, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad B C, ita esse D F, ad E F. Si enim non est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit D F, ad aliquã magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipsa E F, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; [b] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad BC, ita DG, ad GF; Sed vt A B, ad BC, ita posita quoque est D E, ad EF. [c] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo D G, prima maior sit, quàm DE, tertia, [d] erit quoque GF, secunda maior quàm EF, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.



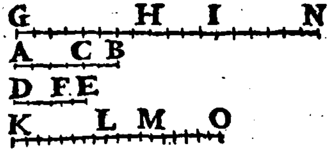
[b] 17. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 14. quinti.

HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad

[a] 17. quinti. HF; [a] erit diuidẽdo quoq; vt AB, ad BC, ita DH, ad HE.
[b] 11. quinti. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiã est DE, ad EF. [b] Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartã. Cum ergo DH, prima minor sit quàm
[c] 14. quinti. DE, tertia, [c] erit quoque HE, secunda minor quàm EF, quarta, totum quàm pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC. quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidẽ ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM; Item ipsarum CB, FE, alia æque multiplices IN, MO;



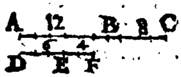
[d] 1. quinti. [e] 2. quinti. *[d] eruntque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, æque multiplices. [e] Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in præcedenti Theoremate ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam; sumpta que sunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF; Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices IN, MO,*
[f] 6. definit. quinti. *[f] fit vt si GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quàm KL, ab MO; additis cõmunibus HI, LM, deficiet quoq; GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL,*

& K L, ipsi M O; additis communibus H I, L M, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O. Et denique si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O; additis communibus H I, L M, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex prima A B, deficit ab H N, multiplice secunda C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplice quarta F E; & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; [a] erit A B, prima ad C B, secundam, ut D E, tertia ad F E, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 6. definit. quinti.

VERUM hæc demonstratio non recte colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non sunt ita multiplices ipsarum C B, F E, ut multiplices accepta sunt I N, M O, earundem C B, F E. Unde merito dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem æque multiplices seruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum C B, F E, quastunq; æquemultiplices, sed tales duntaxat, quales consurgunt ex H I, I N, & ex L M, M O, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obijci non potest; quippe cum I N, M O, sumpta sint ipsarum C B, F E, æquemultiplices qualescunq;, ipsæq; eædem remanent æquemultiplices earundem C B, F E, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare, ne eam studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, ut bonam: præsertim cum ostensiua sit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit



enim ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis cõuersam, esse quoq; ut A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim est, ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo, ut B C, ad A B, ita E F, ad D E. [b] Igitur & componẽdo erit, ut A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod est propositũ.

[b] 18. quinti.

POSTERIOREM modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: erit conuertendo, vt BC, ad
a 18. quinti. *AB, ita EF, ad DE.* [a] *Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVOD in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD.
b 16. quinti. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. [b] erit & permutando AB, ad AE, vt CD,

c 17. quinti. ad CF. [c] Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF.
d 16. quinti. [d] Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD; cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [a] erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: [b] ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

[a] 17. quinti. [b] 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. [d] Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF: Et proinde permutando rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

[c] 16. quinti. [d] 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 13. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quòd in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

20.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorẽ F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [b] Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. [c] Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, [d] erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [e] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E. [f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [a] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. [b] Minor ergo quoq; proportio est D, ad E, quã C, ad B. Est autẽ conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, [c] propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

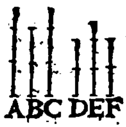
THEOR. 21. PROPOS. 21. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A. prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. [b] Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B. ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D: [c] Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, [d] erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. [e] Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem, ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; [f] atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.



d 7. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cũ enim A, sit minor quam C, [g] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. [h] Minor est ergo proportio E. ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; [i] ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis equales numero, &c. Quod ostendendum erat.

g 8. quinti.
h 13. quinti.
i 10. quinti.

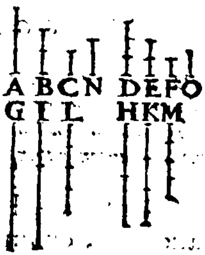
SCHOLIVM.

CÆTERVM propos. 23. ostendit Euclides duas magnitudines A, & D. non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C; & F, sed etiam illas ad has *hæc eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, vt ex propos. illa 23. patebit.*

THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicē quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secūdam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; [c] fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vnà ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vnà



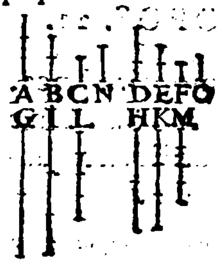
a 4. quinti.

b 4. quinti.

c 20. quinti.

vnà æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumptâ sint ea multiplicia; [a] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

[a] 6. definit. quinti.



DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiã C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur autem C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem: Item æque multiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ &

tertiæ

tertiæ: Item prima ac tertia ad æque multiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.

SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq́; E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum vtrobique sit eadem proportio multiplex; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D; quod vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.) [b] erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C. [a] 22. quinti. [b] 22. quinti.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt, A ad E, ita C, ad F; quod ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [c] erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex; [d] erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum. [c] 22. quinti. [d] 22. quinti.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissimè vtuntur Geometræ; maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij: Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoque erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D: Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

THEOR.

23. THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M;

a 11. quinti. [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F.
b 11. quinti. [b] Igitur vt G, ad H, ita quoque est E, ad F;
c 15. quinti. [c] Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices.
d 11. quinti. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, [illegible]tia ad E, quartam;
e [illegible] [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binę in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata; cũ ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L;
f 21. quinti. [f] fiet vt si G, prima superat tertiã K, superet quoq; quarta I, sextã M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cũ G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel

vna

vna æquales ſint, vel vna excedant; [a] erit vt A, prima ad C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 6. defini. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum ſi fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata, apud Geometras in vſu non ſit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. quæ cauſa fuit, cur Euclides antecedentem propoſitionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat propoſuerit, quamuis vera etiam ſit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem eſſe ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quæ binæ in eadem ſumuntur proportione, & earum proportio eſt perturbata. Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, ſicut id in quatuor fuit demonſtratum, per tres; Et ſic de pluribus. Quod eſt propoſitum.

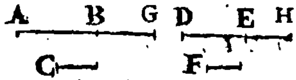
THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

QVOD

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam.



Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; a erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. b Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH; & BG, ad C, vt EH, ad F; c erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. quinti.
b 18. quinti.
c 22. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

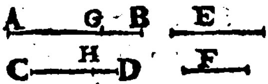
HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detractæ AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionẽ;

ita

ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F; erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F; & C, ad AB, vt F, ad DE; [a] erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. [a] 22. quinti. *[b] Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH, ad DE.* [b] 17. quinti. *Itaque cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE; & AB, ad C, vt DE, ad F; [c] erit ex æquali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.* [c] 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitq; AB, omniũ maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH; [d] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quã E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

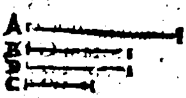
[d] 19. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, prima maior quam tertia E; [a] 14. quinti. *erit quoque C D, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est A B, quam C D, erit quoque E, maior quam F, ob eandem proportionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si e contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis; alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile; videlicet.*

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, [b] 25. quinti. *vt proxime demonstratum est; hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum.*

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre.

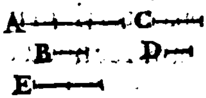
ferre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus impro- rtionalibus, quarum prima hæc est.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

26.

SI prima ad secundam habuerit ma- orem proportionem, quam tertia ad uartam: habebit conuertendo secunda d primam minorem proportionem, uam quarta ad tertiam.

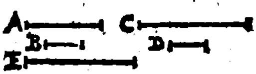
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, uam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem es- proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, t C, ad D; eritque proportio A, d B, maior quoque quam E, ad ; [a] ac propterea A, maior erit uam E. [b] Quare minor erit pro- ortio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed t est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur pro- ortio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod l propositum.



[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo emonstrabimus, si prima d secundam habuerit mi- orem proportionem, quam rtia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem cundæ ad primam, quam quarta ad tertiam; dummodo vo- m maioris mutemus in vocem minoris, & contra.



SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico nuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam , ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque oportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] ac propterea

[c] 10. quinti.

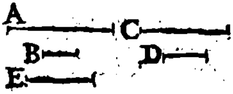
 A, minor

[a] 8. quinti. A, minor erit, quã E. [a] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

ALITER. Quoniã minor est proportio A, ad B, quàm
[b] 26. quinti. C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [b] Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quàm B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod est propositum.

27. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionẽ A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B,
[c] 10. quinti. vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam quã
[d] 8. quinti. E, ad B: [c] Ideoque A, maior erit quam E. [d] Quare maior
[e] 16. quinti. erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [e] Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorẽ habuerit proportionẽ, quam tertia ad quartã, vicissim prima ad tertiam minorẽ esse proportionẽ, quam secunda ad quartã.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad

C, quam

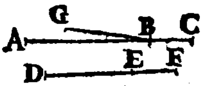
C, quam B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, minor quoq; quam E, ad B; [a] Ac propterea A, minor erit, quam E. [b] Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. [c] Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositũ. [a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 16. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quã C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] Ergo componendo, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B: [e] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod est propositum. [d] 27. quinti. [e] 26. quinti.

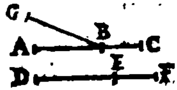
THEOR. 28. PROPOS. 28. 28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quã tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secũdam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; [f] Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; [g] maiorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [h] vt est GC, ad BC; ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum. [f] 10. quinti. [g] 8. quinti. [h] 18. quinti.



SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem prima & secunda simul, ad secundam, quam tertia & quarta simul, ad quartam.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC; [a] *ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC;* [b] *minorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.*

[a] 10. quinti.

[b] 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. [c] *Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod est propositum.*

[c] 28. quinti.

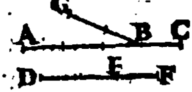
29.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam

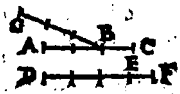
BC, quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, vt D F, ad EF; eritque proportio A C, ad B C, maior quoque proportione G C, ad B C: [a] ideoque maior erit A C, quam G C. Ablata ergo communi B C; maior erit AB, quam G B: [b] Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quam GB, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est D E, ad E F. (Posita namque est GC, ad BC, vt D F, ad E F.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad E F. Quod est propositum. [a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 17. quinti.



SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F, Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem AB, ad B C, quàm D E, ad E F. Intelligatur enim esse GC, ad B C, vt DF, ad E F; eritque proportio AC, ad B C, minor quoque, quam GC, ad B C: [d] ideoque minor erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; minor erit AB, quàm G B: [e] Ac propterea minor erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C: [f] Sed diuidendo est, vt G B, ad B C, ita D E, ad E F. (Posita namque est GC, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur minor quoque proportio erit A B, ad BC, quàm DE, ad E F. Quod est propositum. [d] 10. quinti. [e] 8. quinti. [f] 17. quinti.



ALITER. Quoniam minor proportio est A C, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad BC. [g] Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad E F, quàm AB, ad B C: atque idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam D E, ad E F. Quod est propositum. [g] 29. quinti.

30. **THEOR. 30. PROPOS. 30.**

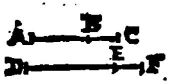
SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem A C, ad AB, quã DF, ad DE. Cum enim sit A C, ad B C, maior proportio, quam DF, ad E F; [a] erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quam D E, ad E F. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad A B, quam E F, ad D E; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

[a] 29. quinti.
[b] 26. quinti.
[c] 28. quinti.

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secunda ad primam, quam tertia & quarta ad tertiam.



SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor sit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [d] *erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare con-*

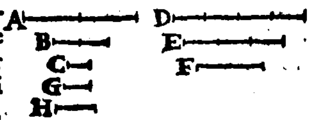
[d] 29. quinti.

a conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE: b Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum. a 26. quinti. b 28. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. c Ergo diuidendo quoque, maior erit proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. d Igitur conuertendo, minor erit proportio EF, ad DE, quàm BC, ad AB. e Componendo ergo minor quoque erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum. c 29. quinti. d 26. quinti. e 28. quinti.

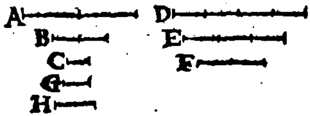
THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quã secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.



SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quã D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritq; ꝓpterea proportio B, ad C, maior quã G, ad C; f Ideoq; B, maior erit quã G. Quare g maior erit ꝓportio A, ad G, minorẽ, quã A, ad B, maiorẽ: Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quã D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quã D, ad E. f 10. quinti. g 8. quinti.

 Intelli-

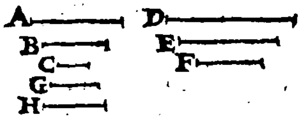


Intelligatur rursus esse H,ad G,vt D,ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G;

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 22. quinti.

[a] Ideoque A,maior erit,quam H. [b] Quare maior quantitas A,ad C,habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H,ad eandem C: [c] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate,D,ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H,ad G;& vt E, ad F,ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A,ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A,ad B, quæ D, ad E; At B,ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, si proportio A,ad B,fuerit maior quam D, ad E; At B,ad C,eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A,ad C, quam D, ad F.

SIT enim primum A,ad B, vt D,ad E, sed maior proportio B,ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G,ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C:

[d] 10. quinti. [e] 8. quinti.

[d] Ideoque B, maior erit, quàm G. [e] Quare maior erit proportio A,ad G, quàm A,ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D,ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H,ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G:

[f] 10. quinti. [g] 8. quinti. [h] 22. quinti.

[f] Ideoque A, maior erit, quàm H. [g] Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C. [h] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea etiam B, ad C, vt G, ad C:

[i] 9. quinti.

[i] ideoque B,

ipsi

ipsi G, aequalis erit. [a] Quare erit A, ad G, ut A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [b] Ideoque A, maior erit, quã H. [c] Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C: [d] Atqui ut H, ad C, ita est, ex aequalitate, D, ad F. (quoniam ut D, ad E, ita est H, ad G; & ut E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum. — [a] 7. quinti. [b] 10. quinti. [c] 8. quinti. [d] 22. quinti.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, ut D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C, sit, ut E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, ubique permutes in vocem, minoris, ut patet.

QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in uno ordine magnitudinum sint maiores, uel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinũ; siue una tantum maior, quàm una, vel duae, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primae priorum ad ultimam, quam prima posteriorum ad ultimam; ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines unius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis: Item usurpando hoc scholium, quando una tantum proportio in tribus magnitudinibus aequalis est uni tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H: [e] erit ex aequo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; [f] erit quoque ex aequo, maior proportio A, ad D, quàm E, ad H. — [e] 31. quinti. [f] 31. quinti.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

QVOD si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, propor-

proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quàm G, ad H; a *erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.*

a 22. quinti.

SI vero maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H; erit ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: Et rursus maior A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

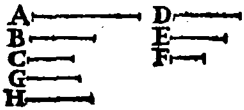
SI autē maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F; sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quā E, ad H. &c.

IDEM concludes, si omnes proportiones vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna, vel duæ. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.

32. ## THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secūdæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

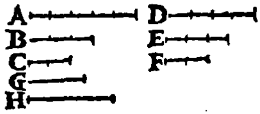
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoq; maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio



portio B, ad C, maior, quam G, ad C: [a] Ideoq; maior erit B, quã G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, minorẽ, quam eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] ideoq; maior erit A, quam H. [d] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C: [e] At vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 10. quinti. [d] 8. quinti. [e] 23. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F; At B, ad C, eadem, quæ D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.

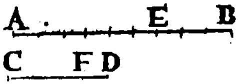
HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremarum proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoq; vel minorem esse proportionem primæ priorũ ad vltimã, quam primæ posteriorũ ad vltimã, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligẽter demonstrationes scholij præcedẽtis propos. considerẽtur.

THEOR. 33. PROPOS. 33. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius A B. ad totam CD, quã ablatæ A E, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem esse, quam totius AB, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B, ad CD, quam A E, ad C F; [a] erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; [b] ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam C D, ad F D. [c] Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. Quod est propositum.



[a] 27. quinti.
[b] 30. quinti.
[c] 27. quinti.

SCHOLIVM.

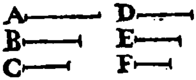
QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce, maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

34.
THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores,

ſteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam poſteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam poſteriorum.

SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres, D, E, F; Sit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E; Itē maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionē ipſarum A, B, C,



ſimul, ad ipſas D, E, F, ſimul maiorem eſſe proportione ipſarum B, C, ſimul ad ipſas E, F, ſimul; minorem vero, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B, ad E; [a] erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E. [b] Igitur componendo, maior erit proportio ipſarum A, B, ſimul ad B, quam ipſarum D, E, ſimul ad E. [c] Permutando ergo rurſus, maior erit proportio A, B, ſimul ad D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; [d] habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F. Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. [e] Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; [f] & componendo ergo maior eſt proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. [g] Et rurſus permutando, maior proportio omnium A, B, C, ſimul ad omnes D, E, F, ſimul, quam B, C, ad E, F. quod eſt primum.

a 27. quinti.
b 28. quinti.
c 27. quinti.
d 33. quinti.
e 27. quinti.
f 28. quinti.
g 27. quinti.

ITAQVE cum ſit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quā ablatæ B, C, ad ablatam E, F; [h] erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F. quod eſt ſecundum.

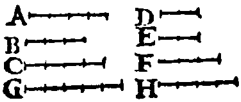
h 33. quinti.

QVO-

QVONIAM vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; [a] erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; [b] & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F; [c] & rursus permutando, maior B C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F; quod est tertium.

a 27. quinti.
b 28. quinti.
c 27. quinti.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. [d] Permutando ergo, maior erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H; [e] & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H; [f] & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.



d 27. quinti.
e 28. quinti.
f 27. quinti.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H; [g] erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H; quod est secundum.

g 33. quinti.

QVONIAM vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quã B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinq; magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinq;, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEXTVM.

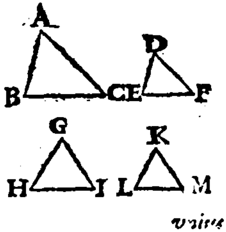
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

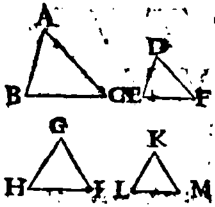
VT triangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

QVOD si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera



vnius

vnius lateribus alterius proportionalia non sunt; quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionē æqualitatis; latera uero figuræ altera parte longioris circa quemuis angulū rectū, proportionem inæqualitatis.

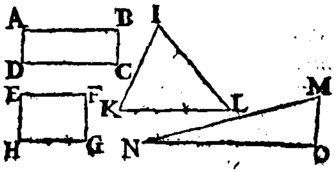


Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM; Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI, ut KL, ad KM; Item GH, ad HI, ut KL, ad LM; & GI, ad IH, ut KM, ad ML, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt utrobique sit & antecedens, & consequens diuersarum proportionum, hoc est, vt sit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC; seu eadē AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroque enim modo AB, est antecedens vnius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD; quemadmodum & primo modo EF, est consequens vnius, & FG, ante-

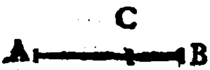


antecedens alterius; vel secundo modo F G, consequens, & E F, antecedens in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula I K L, M N O; reciproca, si fuerit vt I K, ad M N, ita M O, ad I L; vel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L. Neque memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI linea recta quæuis A B, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt sit, quemadmodum tota A B, ad maius segmentum A C, ita A C, maius segmentum ad C B, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamque sub alijs verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque vtilitates lineæ hoc modo diuisæ, vt ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. vt non immerito à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.



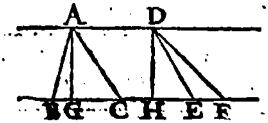
IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a vertice ad basin deducta.

SI a vertice A, trianguli A B C, ad basin B C, perpendi-

 cularis

cularis ducatur AG; dicatur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem



triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaque si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; [a] erunt rectæ AG, DH, parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eò quòd ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG; [b] ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quòd si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin DE, protractam æqualis nō est perpendiculari ex C, ad basin AB, deducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.

[a] 28. primi.

[b] 34. primi.

RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataq́; longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminatæque. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

RATIO

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedẽtem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionẽ, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio dupla dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ, gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio dupla componetur ex sesquiseptima, & supertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem dupla *proportio componi dicetur ex subsesquiquarta, & dupla sesquialtera; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, ut paulò post patebit.*

PORRO *quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad ultimam componi dicitur ex proportione primæ ad secũdam, & secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ut quinto libro defi. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur cõponi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad ultimã duplicata proportionis primæ ad secũdã; si tres, triplicata, etc. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad ultimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad ultimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis, Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11. Altera autem a Vitellione lib. 1. propos. 13. suæ perspectiuæ, comprobabimus.*

THEON *igitur rem propositam ita conatur absoluere.*

Habeat A B, ad C D, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & C D, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constat ex A B, ad C D; & ex CD, ad E F; vel quod ipsius AB, ad C D, rationis quantitas multiplicata in ipsius C D, ad EF, rationis quantitatem, efficit ipsius A B, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quam CD, maior; & CD, quam EF: & sit quidem A B, ipsius CD, dupla, & C D, ipsius E F, tripla. Quoniam igitur

C D.

CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB; erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, diuidatur AB, in ipsis CD, æqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; æqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Idpropterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitē, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla; At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est; Ipsius autem CD, tripla est AB; erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est; & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipsi CD, trium, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

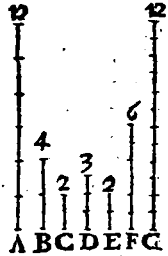
SED iam rursus sit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, maior; & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor; qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quæuis vna compositarum auferatur, vno simplicium eiecto, reliqua compositarum assumetur.

Hæc ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII verò demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem

A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4 ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, æqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B; si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.

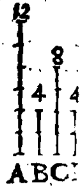


A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

[a] 18. septimi.

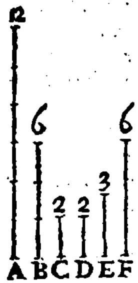
[b] 17. septimi.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad secũdam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5.6.7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiuscemodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) [a] erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio. a 19. septimi.



A, 160. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F, 20.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, *componatur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nã*

A.	B.	C.	D.	E.	F.
12.	6.	3.	2.	1.	4.

vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F: Hęc autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hæc tãdem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

EX his liquidò constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primã quantitatem, & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur; triplicata vero, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E, & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, non tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorum multiplicatio nō vsurpetur. Nam quemadmodum, propositis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quàm prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primam verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundã habet, hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continuè proportionalibus, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quòd illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. quæ lib. 5. explicata est, quàm quòd in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales, in compositione verò proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quænam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur

dicitur duplicata proportionis decupla, ponemus 10. denominatorẽ decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & unum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10. 10. 10. & primum in secũdum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minoris inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla est, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentupla est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quænam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundã, tertius ad *ad quartum tertium, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1$\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram; & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.*

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio unius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quàm si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secũdus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compositione proportionum

tionum, extremorum proportionẽ, quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, utpote conflatam ex additione omnium intermediarum proportionũ inter se, ac proindè omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammũ eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multò minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad propos. 5. lib. 8.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, statuẽdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem cõpositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quòd si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam; continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hę enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem

portionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplã; & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{16}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione $\frac{3}{16}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplã; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{16}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, quâ quispiã postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos statuantur tot numeri quicunq;, minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonstratum est, hoc est, numerum datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignãtur 100. statuemus inter duos numeros 500, 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunque, hoc modo, 500. 250. 50. 5. eruntque tres quæsiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quòd si quis postulet vnum numerum, qui vnà cũ quotlibet alijs datis, si inter se multiplicentur, producat datũ quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2, 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denomi-

nominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2.3. $1\frac{1}{2}$.$5\frac{1}{3}$.denominatas, hoc modo, 9.$4\frac{1}{2}$. 1.$\frac{1}{2}$. 1.$\frac{3}{16}$.6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{32}$. Nam quinque hi numeri, 2.3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{32}$. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{32}$. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6 hoc modo, 6.12.36,54.288.9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. est $\frac{1}{32}$. vt prius. Sit etiam si quærendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1.3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$. sunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri verbi gratia. 4. 5.6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. quo produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5.6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcumq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum concernatur ex omnibus differentijs inter mediorum numerorum. Vt hic. 3.7.12.20.30.100.713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ, 4. 5.8.10.70.613. conficiunt

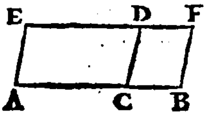
conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quã applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

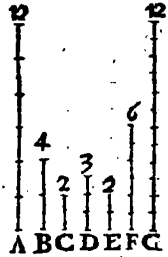
SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totũ parallelogrammũ ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB.

maius:

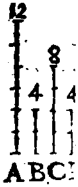
A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4 ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, aequalem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B; si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoque aequales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea que F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

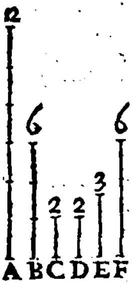
[a] 18. septimi.
[b] 17. septimi.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componetur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad *ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.*



VITELLIO *denique huiusce modi affert demonstrationem.*

SINT *tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,)* [a] *erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.*



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F, 20.

[a] *19. septimi.*

IDEM *ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F,*

 compone-

componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nã

A.	*B.*	*C.*	*D.*	*E.*	*F.*
12.	*6.*	*3.*	*2.*	*1.*	*4.*

vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F: Hęc autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hac proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hęc tãdem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

EX his liquidò constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primã quantitatem, & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur; triplicata vero, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E, & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt

quoque

quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, non tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorum multiplicatio nõ vsurpetur. Nam quemadmodum, propositis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quàm prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primam vero ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundã habet, hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continuè proportionalibus, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quòd illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. quæ lib. 5. explicata est, quàm quòd in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quænam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur

dicitur duplicata proportionis decupla, ponemus 10. denominatorē decupla proportionis bis hoc modo, 10. 10. & unum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decupla est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decupla triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10. 10. 10. & primum in secūdum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decupla triplicatam. Quod de alijs quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, ut in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minoris inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decupla proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla est, dicetur decupla duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentupla est, dicitur duplicata proportionis subdecupla 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione ut cognoscamus, quænam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur; ita ut proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita ut primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundā, tertius

ad

ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram; & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio unius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quàm si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secũdus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24, ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compositione proportionum

tionum, extremorum proportionē, quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarum proportionū inter se, ac proindè omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammū eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multò minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad propos. 5. lib. 8.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, statuēdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem cōpositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quòd si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hę enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datę proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem

portionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplã; & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{16}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione $\frac{3}{16}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplã; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{16}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, quâ quispiã postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos statuantur tot numeri quicunq;, minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonstratum est, hoc est, numerum datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignãtur 100. statuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunque, hoc modo, 500. 250. 50. 5. eruntque tres quæsiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quòd si quis postulet vnum numerum, qui vnà cũ quotlibet alijs datis, si inter se multiplicentur, producat datũ quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2, 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denominominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2.3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{32}$. Nam quinque hi numeri, 2.3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{32}$. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{32}$. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6.12.36.54.288.9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. est $\frac{1}{32}$. vt prius. Sic etiam si quærendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$. sunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri verbi gratia. 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. quod produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO nequæ hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum concernatur ex omnibus differentijs inter mediorum numerorum. Vt hic. 3.7.12.20.30.100.713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ, 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt

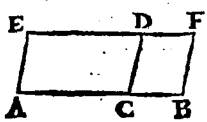
conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hac dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

VI.

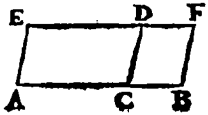
PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero; quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quã applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem, cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totũ parallelogrammũ ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB.

maius:

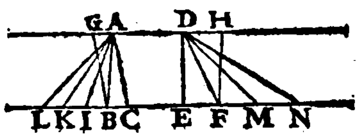


maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita vt D B, vocetur excessus.

HIC autem defectus DB, vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perspicuum est.

1\.
THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.



SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammũ CG, ad parallelogrammũ EH, vt est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda; At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartę vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quã parallelogrãma inter easdem parallelas GH, LN. (Nã vt in defin. 4. dictum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares liculares a verticibus ad bases demissæ æquales erũt,) & ex BL, sumantur quotcunq; rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindãtur quotcunq; rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducãtur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. [a] Erũt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas cõstituta, inter se æqualia. Eadẽ ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoq; multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, [b] necessario triangulum ACL, æquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, maior fuerit quã EN, necessario ACL, maius est quã DEN, & si minor, minus; deficient propterea vnà CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta, & triangulo DEN, æquemultiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel vnà æqualia erunt, vel vnà excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. [c] Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundã EF, basis ab basin, ea est tertiæ ABC, ad quartã DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum.

[a] *38. primi.*
[b] *38. primi.*
[c] *6. defin. quinti.*

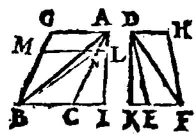
QVONIAM autem [d] vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammũ CG ([e] quod duplum est trianguli ABC.) ad parallelogrammũ EH; ([f] quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, [g] ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento cõfirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum.

[d] *15. quinti.*
[e] *34. primi.*
[f] *34. primi.*
[g] *11. quinti.*

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammũ AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaq́ LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, coniunctaq́ recta BN; [a] erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. [b] Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; [c] Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.

[a] 1. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.

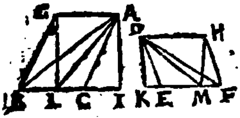
ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuiter demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF.

Dico

Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; [a] erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. [b] Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM: [c] Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.



[a] 38. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. sexti.

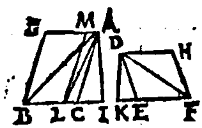
QVONIAM vero est, [d] vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC, [e] quod trianguli ABC, duplum est, ad parallelogrammum DEFH, [f] quod trianguli DEF, est duplum: [g] Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

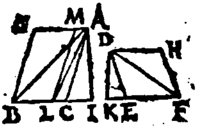
[d] 15. quinti.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 11. quinti.

HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum bases BC, EF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit BC, si fieri potest, maior, quam EF. Abscissa igitur BL, ipsi EF, æquali, ductaq; recta LA; erit, vt proxime demonstrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed





[a] 11. quinti. vt A I, ad D K, ita ponitur esse A B C, ad D E F. [a] Igitur A B L, A B C, ad D E F, eandem habent proportionem [b] Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Eademq́; est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta L M, ipsi G B, parallela, ostendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia esse, si bases B C, E F, dicantur inæquales, & B L, E F, æquales.

[b] 9. quinti.

I N omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

2.

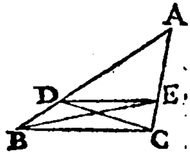
THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

I N triangulo A B C, ducatur primùm recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E [c] erũt triangula D E B, D E C, super eandẽ basin D E, & inter easdem parallelas D E, B C, constituta, inter se æqualia. [d] Quare vt triãgulum A D E, ad triangulum D E B, ita est trian-

[c] 37. primi.
[d] 7. quinti.

triangulum idem A D E, ad triangulum D E C: [a] Atqui vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita est basis A D, ad basin D B; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi A B.) & eadem ratione, vt triangulum A D E, ad triangulũ D E C, ita est basis A E, ad basin E C. [b] Vt igitur A D, ad D B, ita est AE, ad EC (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) quod est propositum.



[a] 1. sex. i.

[b] 11. quinti.

SECET deinde recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursum rectis C D, B E, [c] erit vt basis A D, ad basin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autẽ vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. [d] Igitur erit vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E, ad E C: Sed rursus [e] vt basis A E, ad basin E C, ita est triangulum A D E, ad triangulum D E C, cum sint altitudinis eiusdem. [f] Igitur vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita est triangulum idem A D E, ad triangulum D E C. [g] Aequalia ergo sunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea, cum eandem habeant basin D E, [h] inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E, ipsi B C. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 1. sexti.

[d] 11. quinti.

[e] 1. sexti.

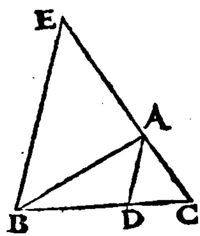
[f] 11. quinti.

[g] 9. quinti.

[h] 39. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



IN triãgulo A B C, recta AD, secet primò angulum B A C, bifariam. Dico esse vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A. producta conueniat in E; (coibunt autem omninò B E, C A, propterea quod anguli C, & CBE, minores sũt duobus rectis. Cum enim C, & CDA,

a 17. primi. [a] minores duobus rectis sint; [b] sit autem angulus CDA',
b 29. primi. angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoq;
c 29. primi. C, & C B E, duobus rectis minores.) [c] eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æqua-
d 6. primi. les; [d] Ideoque & rectæ B A, E A, inter se æquales. [e] Vt
e 7. quinti. igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C: [f] Atqui vt
f 2. sexti. E A, ad A C, ita est B D, ad D C; cũ in triangulo BCE,
g 11. quinti. recta AD, sit parallela lateri B E. [g] Igitur vt BA ad AC, ita est B D, ad D C. quod est propositum.

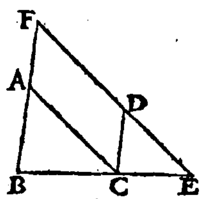
SIT deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad C D. Dico rectam A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt B A, ad
h 2. sexti. A C, ita ponitur B D, ad D C. [h] Vt autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta
i 11. quinti. A D, sit lateri B E, parallela.) [i] Erit vt B A, ad A C,
k 9. quinti. ita E A, ad eandem A C. [k] Aequales igitur sunt B A, & E A,

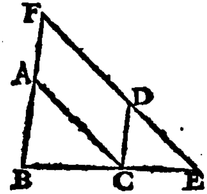
E A, inter se,[a] ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt.[b] Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum. a 5. primi. b 29. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quę circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

SINT æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli ABC, DCE; & A C B, D E C; & B A C, C DE. Dico esse AB, ad BC, vt D C, ad C E; & BC, ad C A, vt C E, ad E D; & A B, denique ad A C, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita vt angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B,[c] minores sunt duobus rectis: est autem angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores.[d] Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C; c 17. primi. d 13. pron.





[a] parallelæ erunt CD, & B F. Eadem ratione, parallelæ erũt C A, & E F; quòd angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur A C D F; [b] propterea que recta A F, æqualis rectæ C D; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F, [c] erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) vt BC, ad CE. Permutando [d] igitur erit A B, ad B C, vt D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri BF, [e] erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt C A, (quæ æqualis est ipsi F D,) ad E D. Permutando [f] igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE; & BC, ad CA, vt C E, ad E D: [g] erit & ex æquali AB, ad C A, vt D C, ad E D. Quod est propositum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 28. primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. sexti.
[d] 16. quinti.
[e] 2. sexti.
[f] 16. quinti.
[g] 22. quinti.

COROLLARIVM.

HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Aequiangula namque sunt, [h] cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est, [i] habẽt latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

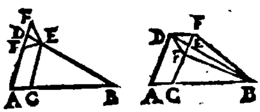
[h] 29. primi.
[i] 4. sexti.

SCHOLIVM.

NON alienum a nostro instituto esse puto, si hic demonstremus

stremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.



SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F, pũcto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; [a] erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, [b] vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE. [c] Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: [d] Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.

[a] 4. sexti.
[b] 16. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

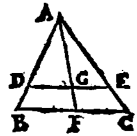
RVRSVS si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propos. triangula BAD, BCF, similia sunt; [e] erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; [f] & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad

[e] 4. sexti.
[f] 16. quinti.

a 11. quinti. *ad BC, ita quoque erat A D, ad C E. a Igitur erit, vt A D,*
b 9. quinti. *ad CF, ita A D, ad C E: b Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum.*

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.



IN triangulo A B C, ducta sit D E, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur F A, secans D E, in G. Dico esse, vt BF, ad F C, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius
c 4. sexti. *Propos. similia sunt; c erit vt A F, ad B F, ita AG, ad DG;*
d 16. quinti. *d & permutando, vt AF, ad AG, ita B F, ad D G. Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad A G, ita FC,*
e 11. quinti. *ad GE. e Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando, vt B F, ad FC, ita D G, ad G E. Quod est propositum.*

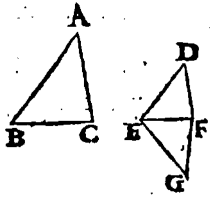
ALITER. Quoniam triangula A B F, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per coroll. huius
f 4. sexti. *propos. f erit, vt B F, ad F A, ita DG, ad G A: Item vt F A,*
g 22. quinti. *ad FC, ita G A, ad G E. g Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF; & BC, ad CA, vt EF, ad FD; & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C; conueniantque rectæ EG, FG, in G: [a] eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare [b] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [c] Igitur vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: [d] proptereaque æquales erunt GE, DE. Rursus, [e] quoniam vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG; Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; [f] erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; [g] ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & basis communis EF; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis anguli DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendũ erat.



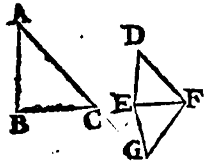
a 32. primi.
b 4. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. sexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 8. primi.
i 4. primi.

THEOR. 6. PROPOS. 6. — 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habe-

habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli DEF, ſintque latera A B, B C, proportionalia lateribus DE, EF, hoc eſt, ſit AB, ad BC, vt DE, ad EF.



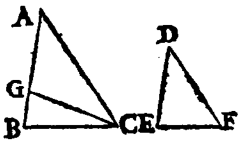
Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulum ſcilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera reſpiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [a] vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [b] Igitur vt DE, ad E F, ita eſt G E, ad eandem E F; [c] atque idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, E F, æqualia ſint lateribus G E, E F, & anguli ipſis contenti æquales quoque; (Nam angulo B, cui factus eſt æqualis angulus FEG, æqualis eſt poſitus angulus D E F, proptereaque æquales ad inuicem erunt anguli DEF, G E F,) [d] erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales anguli D, EFD; & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF. quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demouſtrandum.

[a] *4. ſexti.*
[b] *11. quinti.*
[c] *9. quinti.*
[d] *4. primi.*

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquoliquorum vero ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.



SIT angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF; & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc eſt, ſit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, ſit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet ACB, & F, circa quos ſunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales eſſe. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo poſito, ſi anguli ACB, & F, non ſunt æquales, ſit ACB, maior, quam F; fiatque ipſi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [a] erit & reliquus AGC, reliquo E, ęqualis; ideoque triangula AGC, DEF. æquiangula erunt. Quare [b] vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. [c] Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB; [d] ac propterea æquales erunt CG, CB; [e] & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; [f] cum AGC, CGB, ſint duobus rectis æquales: Eſt autem oſtenſus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto eſt quoque angulus E: Sed poſitus eſt etiam recto minor. Quod eſt abſurdum.

[a] 32. primi.
[b] 4. ſexti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.
[e] 5. primi.
[f] 13. primi.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis; ideoq; & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, ſed vel maiores, vel ęquales duobus rectis.

quod

[a] 17. primi. quod est absurdum. [a] Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, [b] atque idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 32. primi.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim [c] erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus describatur, secabit is rectam A B, priusquam rectam A C, quæ longior est, quàm C B, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam A B, propterea quòd ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum C B, vt patet ex propos. 10. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, [d] vt A C, ad C B, ita erit eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula A B C, A G C, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, vel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor; A G C, vero recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint, [e] & ideo anguli C B G, C G B, æquales; [f] erit vterque eorum recto minor, [g] ac propterea A G C, recto maior.

[c] 19. primi.

[d] 7. quinti.

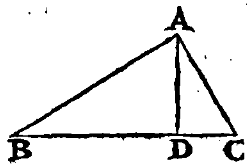
[e] 5. primi.
[f] 17. vel 32. primi.
[g] 13. primi.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit:

sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



IN triangulo A B C, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triãgula ADB, ADC, similia esse & toti triãgulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis A B C, DBA, anguli B A C, & ADB, sint recti, & angulus B, communis;[a] erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Aequiangulum est igitur triangulum D B A, triangulo ABC;[b] ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt C B, ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita B D, ad D A; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis;[c] ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare[d] vt BC, ad CA, ita est C A, ad C D; & vt C A, ad A B, ita C D, ad D A, & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. Sic enim opponuntur quoq; homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cum anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales, nec non anguli BAD, ACD; Atque idcirco sit[e] vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt AB, ad BD, ita CA, ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.
[c] 32. primi.
[d] 4. sexti.
[e] 4. sexti.

COR-

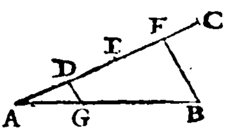
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcirco BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9.

9. A DATA recta linea imperatam partem auferre.



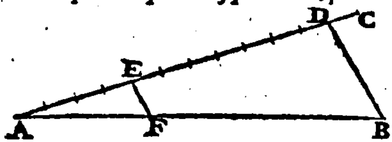
IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunq; faciens angulũ CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur

[a] 2. sexti.
[b] 18. quinti.

Igitur & B A, ipsis A G, erit tripla, ideoque A G, tertia pars erit ipsius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD si ex A B, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipsius A B, sumenda erunt ex A C, vndecim partes æquales vsque ad D, punctū, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partium.

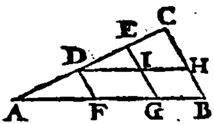


Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rursus vt D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & conuertendo vt A E, ad A D, ita A F, ad A B: Est autem A E, pars continens quatuor vndecimas ipsius A D, ex constructione. Igitur & A F, eadem pars erit rectæ A B. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes vnam.

PROBL. 2. PROPOS. 10. 12.

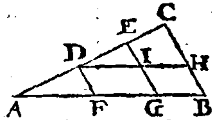
DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

SIT recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, E C, proportionales. Coniungãtur datæ duæ



lineæ ad A, facientes angulum quemcunq; BAC, & con-

 nectatur

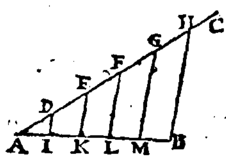


nectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelę ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta A C, in D, & E. Nam [a] vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; [b] erit rursus, vt D E, ad E C, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quòd FG, ipsi DI, & G B, ipsi I H, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus D E, E C. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

[a] 2. sexti.
[b] 2. sexti.
[c] 34. primi.

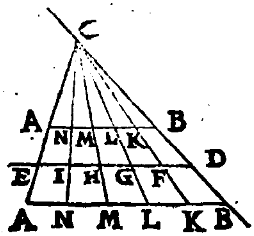
SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta A B, diuidenda in quinque partes æquales.

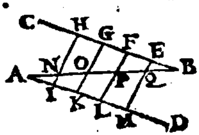


Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunq; angulum C A B, sumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, E K, F L, G M; erit A B, similiter diuisa, vt A H, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur A H, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.

HVIC rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt aliæ non iniucundæ. vt propos. 10. lib. 1 sumus polliciti, atq; ad propos. 40. lib. 1. demõstrauimus. Sit



Sit enim rursus data linea recta AB, diuidenda in quinque partes aequales. Ducatur ex B, recta BC, vtcunque faciens angulum cum AB; Deinde ex assumpto pũcto D, siue supra B, siue infra, agatur DE, parallela ipsi AB, ex qua abscindantur quinque aequales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt, si D, est supra B, recta DE, ex quinque partibus aequalibus constans, minor sit, quàm AB, maior verò, si D, existit infra B. Postremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipsi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, recta ducantur CK, CL, CM, CN, quas dico diuidere rectam AB, in quinque partes aequales. Cum enim DE, sit parallela ipsi AB, diuidentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex scholio propos. 4. huius lib. Cum ergo EH, secta sit bifariam in I, secta quoque erit AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi ML; & ML, ipsi LK; & LK, ipsi KB, aequalis; ac proinde AB, secta erit in quinque partes aequales. Quod est propositum.

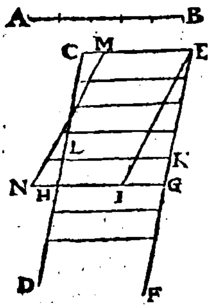


ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duae rectae BC, AD, inter se parallelae; hoc est, constituentes angulos A, B, aequales: Et ex BC, abscindantur quatuor partes aequales BE, EF, FG, GH, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex AD, totidem aequales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI, secantibus rectã AB, in N, O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes aequales. Cum enim aequales sint, & parallelae GH, IK, [a] erunt & HI, GK, parallelae; Eademque ratione parallelae erunt GK, FL, EM. Quare cum AM, secta sit in quatuor aequales partes, erit & AQ, similiter in quatuor partes aequales diuisa, vt constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit

[a] 33. primi.

& B N, in quatuor partes æquales, eò quòd BH, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cum tam AN, quam B Q, æqualis sit singulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter se æquales. Quod est propositum.

ALITER. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se



parallelis vtcunque CD, EF; ex vtraque abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ CE, vt ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ transuersæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exẽplo est recta GH; ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur EI, quam dico diuisam esse in quinque æquales partes. Cum enim GK, HL, æquales sint, & parallelæ; a erunt quoque GH, KL, parallelæ. Eodemq́ modo omnes lineæ inter rectas CD, EF, inter se parallelæ ostendentur. Quare, vt ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quemadmodum EG, diuisa est in quinq; partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit EI. Nam si punctum E, sumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda est IE, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim vt in hac 10. propos. probatum est, erunt rectæ EI, EG, similiter diuisæ. Quòd si fortè IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed vtrique sit parallela, b erunt singulæ partes rectæ EI, singulis partibus rectæ EG, æquales, ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cum ergo omnes partes rectæ EG, sint æquales; erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ partes lineæ EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem diuisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

a 33. primi.

b 34. primi.

EST

EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab M, vsque ad N, punctum lineæ GH, protractæ, erit quoque MN, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi EG, parallela, vsque ad rectam GH: Vel si NM, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum CD, EF, minores, &c. Si vero linea sit longiuscula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt vnam partem. Vt si diuidenda sit in tres partes, transferaturque in sex spatia, dabunt duo spatia vnam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnam partem, propterea quòd quinque spatia conficiunt tertiam partem quindecim spatiorum. Sic si linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt nouē spatia vnam partem; quippe cum nouem spatia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

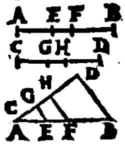
EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare. quod est eiusmodi.

DATAM rectam secare in duas partes, quę habeant proportionem quamcunq; datam.

SIT secanda recta AB, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea AE, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, æqualis: Ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, [a] cum sit, vt AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB. [a] 2. sexti.

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddā ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.



SECENTVR rectæ AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita ut sit A E, ad E B, sicut CG, ad GD; Item AF, ad FB, ut C H, ad H D. Dico sectiones inter medias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cum duobus A E, CG, hoc est, esse FB, ad EF, ut HD, ad GH. Item AE, ad E F, ut C G, ad G H. Cum enim sit, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; erit componendo, ut AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad H D; erit componendo, ut AB, ad F B, ita C D, ad HD; & conuertendo, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaq; cum sit, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et ut AB, ad EB, ita CD, ad GD; [a] *Erit ex æquo, ut FB, ad EB, ita HD, ad GD; Et conuertendo, ut EB, ad FB, ita G D, ad H D; Et per conuersionem rationis, ut E B, ad EF; ita G D, ad GH; Et diuidendo, ut F B, ad E F, ita H D, ad G H. Quod est primum.*

[a] 22. quinti.

RVRSVS, quia est, ut A E, ad EB, ita CG, ad GD; Et ut EB, ad EF, ita GD, ad GH, ut ostensum est; Erit ex æquo, ut A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod est secundum.

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniãt duo puncta A, & C, in vnum, ut fiat angulus B C D, vel BAD; iunganturq; rectæ DB, HF, GE. Quia igitur ponitur, ut AE, ad EB, ita C G, ad G D; [b] *Parallela erit G E, ipsi DB. Rursus, cum ponatur, ut AF, ad FB, ita C H, ad H D;* [c] *Parallela erit quoque H F, ipsi D B.* [d] *Quare & GE, HF, inter se parallelæ erunt: Ac propterea* [e] *erit, ut AE, ad E F, ita CG, ad G H. Quod est secundum.*

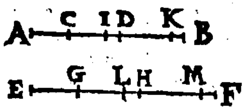
[b] 2. sexti.
[c] 2. sexti.
[d] 30. primi.
[e] 2. sexti.

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, ut BF, ad EF, ita H D, ad G H; & conuertendo, ut E F, ad F B, ita GH, ad HD. Quod est primum.

SED

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.

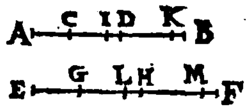
SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illæ, proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineę Arithmeticè proportionales.



RECTA linea AB, secta sit in partes AC, CD, DB, Arithmeticè proportionales, hoc est, habentes eundem excessum. [a] Secetur autem recta EF, in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq: habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales. Sit enim CI, ipsi AC; & DK, ipsi CD, æqualis: vt ID, sit excessus inter CD, AC; & KB, excessus inter DB, CD, atque adeo ipsi ID, æqualis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, æqualis: vt LH, excessus sit inter GH, EG; & MF, excessus inter HF, & GH. Probandum est, excessus LH, MF, æquales esse. Quoniã igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH; erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF; erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eundem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cum sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL; [b] erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM; [c] erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH. [d] Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, æqualis: [e] Igitur & LH, ipsi MF, æqualis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè

[a] 10. sexti.
[b] 19. sexti.
[c] 19. sexti.
[d] 11. quinti.
[e] 14. quinti.

proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.



HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ sectæ sint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere easdẽ proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ EF, secunda pars statuatur GM, ita vt excessus inter EG, GM, sit LM: Deinde ipsi GM, post M, sumatur portio ipsi GM, æqualis, eique adijciatur idem excessus LM; fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea EF, & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: [a] *quippe cum minor sit proportio EG, ad GM, quàm EG, ad GH; hoc est, quàm AC, ad CD.*

[a] 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc est, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; ostensum est ita quoque esse excessum ID, ad excessum LH, vt CD, ad GH. Itaque si AC, CD, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, vel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

SIT enim recta EF, secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, [b] *secetur similiter in G, H,*

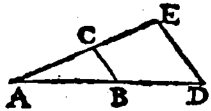
[b] 10. sexti.

G, H, vt AB, in C, D, secta est; erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.

HÆC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibusuis alijs magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmetica postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmetica: cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum ad datũ numerũ, ita singuli numeri assumpti ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.



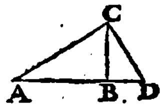
SINT duę rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequẽs esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cũ enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

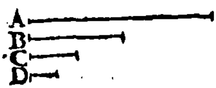
[a] 4. sexti.
[b] 7. quinti.

SCHO-

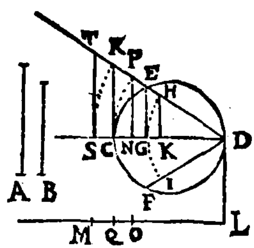
SCHOLIVM.

ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ A B, BC, constituantur ad angulum rectum A B C, & coniungatur recta A C. Producta autem A B, antecedente, ducatur ex C, ad A C, perpẽdicularis C D, occurrens ipsi A B, productæ in D. Dico B D, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo A C D, angulus A C D, sit rectus, & ab eo ad basin A D, deducta perpendicularis C B; erit per coroll. propos. 8. huius lib. B C, media proportionalis inter A B, & B D, hoc est, vt A B, ad B C, ita erit B C, ad B D. Quod est propositũ.





INVENTA autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octaua, & sic in infinitũ.



EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam C D, ipsi A, æqualem describatur circulus C E D F, in quo applicentur D E, D F, ipsi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F, ducatur recta E G, quæ ad C D, perpendicularis erit. Cum enim recta D C, per centrum transiens secet arcum E C F, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus D E, D F, ex semicirculis æqualibus D E C, D F C, reliqui arcus C E, C F, æquales erunt.) secabit eadem & rectam ductam E F, bifariam, per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus.ᵃ Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si duceretur recta E C,ᵇ angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex

a 3. tertij.
b 31. tertij.

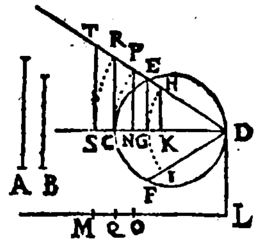
ex coroll. propos. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicataq; regula ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui [a] ob æquales arcus EC, FC, æquales sunt) [b] arcus HG, IG, æquales erunt; ac propterea, ex scholio propos. 27. lib. 3. recta ducta HI, bifariam secabitur in K; [c] ideoq; & ad angulos rectos. [d] Parallelæ ergo sunt E G, H K. [e] Vt igitur recta E D, ad D G, ita erit D H, hoc est, DG, ad D K. Sunt ergo quatuor lineæ CD, DE, DG, D K, continuè proportionales. Quòd si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

[a] 27. tertij.
[b] 26. tertij.
[c] 3. tertij.
[d] 28. primi.
[e] 2. vel 4. sexti.

DEINDE sit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus, abscindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales; applicataq; regula ad puncta O, N; ducatur recta NP, [f] quæ ad DC, perpendicularis erit, [g] cum sit parallela ipsi DL. Sumpta deinde recta DC, æquali ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectam NP, in P, extendaturq; ex D, per P, recta D P T, eritq; DP, ipsi D C, hoc est, ipsi A, æqualis. Abscissa quoque L Q, ipsi D C, æquali, applicataque ad puncta Q, C, regula, ducatur recta C R, quæ eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi N P, parallela. [h] Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod N D, DP, ipsi B, A, accepta sint æquales) ita C D, ad D R, hoc est, ita DP, ad DR; erunt tres rectæ ND, DP, DR, continuè proportionales; ideoq; DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & rectæ DS, æqualis auferatur LM; applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nã eadem ratione erit S T, ipsi CR, parallela, & ad DC, perpẽdicularis. [i] Quare erit, vt CD, ad DR, hoc est, vt A, ad D R, ita S D, id est, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor lineæ N D, D P, DR, DT, continuè proportionales. Quòd si ex D, per T, alius arcus describatur secãs rectã DC, protractã, inuenietur eadẽ arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitũ.

[f] 29. primi.
[g] 33. primi.
[h] 2. vel 4. sexti.
[i] 2. vel 4. sexti.

EX



EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, nō quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsam iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Vt si inter CD, DK, inuenienda sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusq; DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propos. 8. huius lib.[a] Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continuè proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quòd si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.

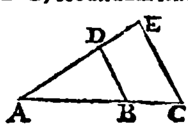
[a] 2. vel 4. sexti.

10.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero



AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrēs rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico

Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit parallela B D; [a] erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat. [a] 2. sexti.

SCHOLIVM.

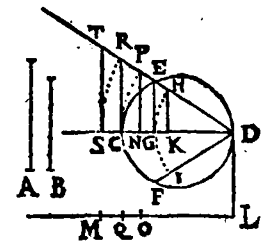
HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema, Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteatque inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, vt A B, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam A C: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est, [b] cum A C, E C, proportionaliter secentur in B. & D, punctis. [b] 2. sexti.

ALI-



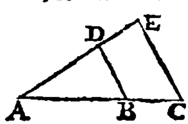
EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, nõ quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsam iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Vt si inter CD, DK, inuenienda sint duæ media proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusq; DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propos. 8. huius lib.[a] Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continuè proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quòd si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.

[a] *3. vel 4. sexti.*

10. PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrẽs rectæ AD, productæ, in E, puncto.



Dico

Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit parallela B D;[a] erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

[a] 2. sexti.

SCHOLIVM.

HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema, Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, oporteatq́; inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, vt A B, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam A C: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est, cum A C, E C, proportionaliter secentur in B. & D, punctis.

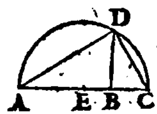
[b] 2. sexti.

ALI-

ALITER. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat secunda, a atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam. [a 12. sexti.]

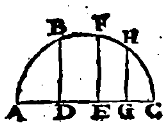
9. PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur ADC; Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; b erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cũ igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus, Quod erat faciendum. [b 31. tertij.]

SCHOLIVM.

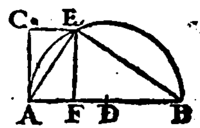


PERSPICVVM hinc fit, lineã rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri

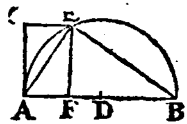
diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalem mediam inter AD, & DC; Id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; a fiet angulus A B C, rectus. Quare per coroll. propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur. a 31. tertij.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit quam dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget.) a quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem



lem inter segmenta A F, F B. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [a] *Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, eò quod parallelogrammum sit ACEF; Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem;* [b] *& AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA;) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.*

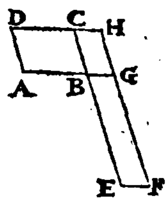
a 34. primi

b 28. primi

13.

THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habētium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habētium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF; [c] erit vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed vt DB, ad BH, [d] ita est AB, basis ad basin BG,

c 7. quinti.

d 1. sexti.

B G, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad B H, ita est basis E B, ad basin BC. Igitur vt A B, ad B G, ita est E B, ad B C. Quod est propositum.

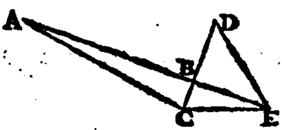
E CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, vt A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cum sit, vt AB, ad B G, ita E B, ad B C: [a] Vt autem AB, ad B G, ita D B, ad B H; & vt E B, ad B C, ita B F, ad idem BH; erit quoque vt D B, ad B H, ita B F, ad idem BH; [b] Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. sexti.

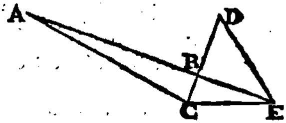
[b] 9. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 15. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habẽtium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentiũ reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo triangula æqualia A B C, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt A B, B E, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, sint æquales; erunt & D B, B C, vna recta linea, ut demonstratum est ad propos. 15.



lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE; quoniam æqualia sunt triangula ABC, DBE; [a] erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, [b] ita est basis AB, ad basin BE, quòd hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, ad BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita est DB, ad BC. Quod est propositum.

[a] 7. quinti.
[b] 1. sexti.

IAM vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autem AB, ad BE, [c] ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE: Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE; [d] proptereaque æqualia erunt triangula ABC, DBE. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 1. sexti.
[d] 9. quinti.

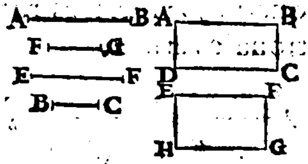
THEOR. 11. PROPOS. 16.

15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt

BC, vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectangulum A B C D, comprehensum sub extremis, A B, BC; rectangulum vero E F G H, comprehensum sub medijs EF, FG. Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. [a] Quare parallelogramma A C, E G, æqualia erunt. Quod est propositum.



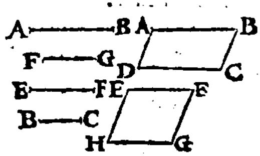
[a] *14. sexti.*

CONTRA vero, sint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F; [b] erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[b] *14. sexti.*

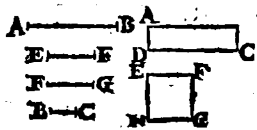
SCHOLIVM.

IDEM verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.



THEOR. 12. PROPOS. 17. 16.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ A B, EF, & BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitq; rectangulum ABCD, contentum sub extremis A B, BC; & quadratum mediæ EF, sit E F G H. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, B C, proportionales; vt quidem A B, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub medijs E F, FG, propter æqualitatem rectarum EF, F G. [a] Quare rectangulum A C, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub medijs E F, F G, comprehenso: Quod est propositum.

[a] 16. sexti.

SED sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico esse vt A B, ad EF, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; [b] erit vt A B, ad EF, ita FG, ad BC: [c] Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi F G, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est E F, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

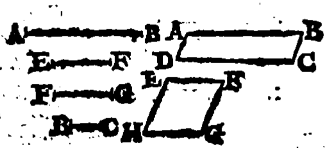
[b] 16. sexti.
[c] 7. quinti.

COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale

æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

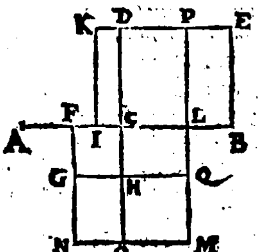
SCHOLIVM.



EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt EG, sit Rhombus, & AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.

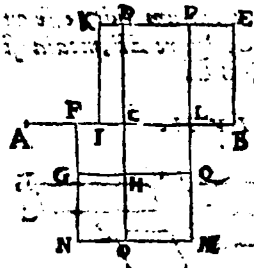
LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.



SIT recta AB, diuisa in C, vtcunque, oporteatque partem CB, ita secare in duas alias partes, ut omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F; & FC, iterum bifariam in I; vt CI, quarta pars sit primæ partis AC: & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturq; recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, prima parte, & recta IB, composita ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB; [a] erit [a] 6. secundi.

 rectan-



rectangulum sub A B, BC, unà cum quadrato ex C F, æquale quadrato ex B F: Est autem rectangulum I E, minus rectangulo sub A B, B C, unà cum quadrato ex C F. (Ducta enim CD, ad A B, perpendiculari, erit rectangulum C E, contentum sub A C, C B, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum C K, quadrato ex
a 1. sexti. CF, æquale, cum utrumque quarta pars sit quadrati ex A C; rectangulum quidem CK, [a] quia sic est rectangulum C K, ad quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub A C, C D, ut CI, ad C A; ac proinde cum C I, sit quarta pars rectæ AC, erit & C K, quarta pars quadrati ex AC; At uero quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati ex AC, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato
b 14. secũdi. ex BF. Si igitur [b] fiat quadratum rectangulo IE, æquale, erit eius latus minus recta FB. Sit ergo illud F L. Dico partem CB, ita sectam esse in L, ut tres partes AC, CL, LB, sint continuè proportionales. Describatur enim ex F L, quadratum FM, rectaque DC, extendatur ad O, & latus M L, ad P: sumptisq; duabus F G, LQ, ipsi CF, æqualibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Eritq; CG, quadratum rectæ C F, ob æqualitatem rectarum CF, F G. Et quia ablatis æqualibus FC, F G, ex æqualibus FL, FN, reliquæ CL, GN, æquales
c 34. primi. sunt; [c] & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, æqualis; æquales quoque erunt HQ, HO; ideoq; H M, quadratum erit rectæ C L. Rursus quia tam rectangulum C Q, comprehenditur sub CL, & C H, siue CF, semisse ipsius A C, quàm rectangulum GO, sub GN, siue CL, & GH, siue CF, semisse eiusdem
d 1. secũdi. AC, siue CD; [d] erunt duo rectangula C Q, GO, simul æqualia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL, & CD, quæ ipsis CH, GH, simul æqualis est. Itaq; cũ rectangulũ IE, quadrato FM, æquale sit; & rectangulum C K, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum L E, comprehensum sub B E, siue AC, & BL, reliquo quadrato H M, æquale. Quocirca, cum datis

tis

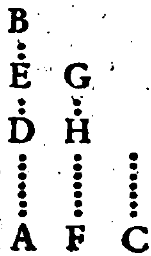
tis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis comprehensum aequale sit quadrato HM, mediae CL; [a] erunt ipsae tres lineae AC, CL, LB, continuè proportionales. Quod est propositum. — [a] 17. sexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adijciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam si ex radice inventa dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adijciemus CI, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet IB, in priorem partem 36. siue in lineam AC, ducemus, atque ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua si detrahemus CF, semissem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars CL, 24. Haec ablata ex tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. hae tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atq; hinc intelliguntur ea, quae lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricae ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienum erit a nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunq; Medietatis, siue Arithmeticae, siue Geometricae, siue Harmonicae, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima haec sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT data duæ rectæ AB, & C, (quæ per vnitates in longum dispositas hic repræsentantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB. abscindatur alia æqualis AD: Diuiso autē segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmeticè proportionalē inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquidò constat rectas A B, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, mediam lineam F G, esse semissem summæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, sit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. [a] *Igitur & summa ex A B, & C, totius F G, dupla erit; ac proinde F G, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum.*

[a] 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi F H, ponatur æqualis C.

Dico

Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, aquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura, data dua recta C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, aqualis, eiq; addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, aqualis. Dico AB, esse tertiã proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cũ ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint aquales, patet propositum.

ITAQVE datis duobus numeris inaqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

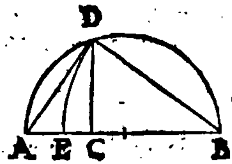
SI verò ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adijciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT



SINT data recta AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis C D; & ex B, per D, arcus describatur secans AB. in E. Dico B E, mediam proportionalem esse inter A B, BC, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim

a 31. tertij. *rectis A D, B D; [a] erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta B D, hoc est, ipsi aequalis B E, media proportionalis erit inter A B, B C. Quod est propositum.*

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura, data recta AB, B E, eundem possidentes terminum B; quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam A D B, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur D C. Dico B C, tertiam proportionalem esse

b 31. tertij. *ipsis AB, B E. Ductis enim rectis A D, B D; [b] erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit B D, hoc est, ipsi aequalis B E, media proportionalis inter A B, BC: Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.*

VI.

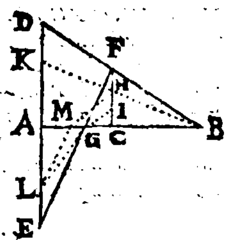
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, data recta C B, B E, eundem termi-

terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, secans BE, productam in A. Dico AB, terciam proportionalem esse ipsis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BD, hoc est, BE, ipsi aequalis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod est propositum.

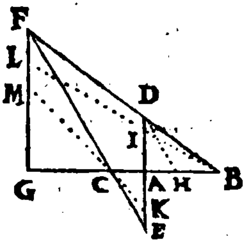
VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



SINT datae rectae AB, BC, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad AB, perpendiculari DE, ponantur aequales AD, AE, quantaecunq; Excitetur quoque ex C, ad AB, perpendicularis CF, secans ductam rectam BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse mediam Harmonicè proportionalem inter AB, BC: Hoc est, esse AE, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primã AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quoniam enim [a] CF, parallela est ipsi DE, ob rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius lib. trian- [a] 28. primi.
gulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinẽ triangulorum AEG, CFG, [b] erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; [b] 4. sexti.
& permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem

vt



Ducta per D, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales A D, A E, *quantæcunque, ducaturque recta* B D, *quam productam secet* EC, *producta in F, puncto, (quòd autem conueniant* BD, EC, *mox demonstrabimus) ex quo ad* BC, *productam demittatur perpendicularis* F G. Dico G B, *ipsis* CB, BA, H*armonicè proportionalem esse: Hoc est, esse G B, primam ad B A, tertiam, vt* G C, *excessum inter primam* GB, *&* *mediam* BC, *ad* C A, *excessum inter mediam* C B, *&* *tertiam* BA. [a] *Quoniam enim G F, ipsi* AD, *parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum* BAD, *triangulo BGF, simile: id est, erit vt G B, ad GF, ita* BA, *ad* AD; *& permutando, ut GB, ad BA, ita GF, ad* AD, *hoc est, ad A E. Rursus ob similitudinem triangulorum* FGC, EAC; [b] *erit ut* FG, *ad* GC, *ita* EA, *ad* CA; *& permutando vt FG, ad AE, ita* GC, *ad* CA. *Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt G B, prima, ad BA, tertiam, ita* GC, *excessus inter primam G B, & mediam* BC, *ad* C A, *excessum inter mediam* B C, *& tertiam* B A. *Quod est propositum.*

a 28. primi.
b 4. sexti.

QVOD *autem* BD, E C, *conueniant, sic probabitur. Quoniam* BC, *ponitur media, &* BA, *tertia, siue minima, maior erit* BA, *tertia, quàm* CA, *excessus, quo media* BC, *minimam* BA, *superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quàm* AC, *non posset reperiri tertia maior. Cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia* A B, *maior excessu* A C, *quo media tertiam superat. Abscindatur ergo* AH, *ipsi* AC, *æqualis, connectaturq́ recta* HD. *Quoniam igitur latera* AE, AC, *lateribus* AD, AH, *æqualia sunt, angulosq́ comprehendunt æquales, vtpote rectos, siue ad verticem A;* [c] *erunt & anguli* ACE, AHD, *æquales: qui cum alterni sint;* [d] *erunt rectæ* EC, HD, *parallelæ;* [e] *ac proinde anguli interni* DHC, HCF, *duobus rectis æquales erũt. Cum ergo* [f] *angulus* DHC, *maior sit interno angulo B; erunt duo anguli* B C F, C B F, *duobus rectis minores.* [g] *Quocirca* B D,

c 4. primi.
d 27. primi.
e 29. primi.
f 16. primi.
g 13. pron.

BD, EC, *coibunt. Quod est propositum.*

NON *determinantur quoq; hic magnitudines rectarum* AD, AE: *quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BG, reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur* KC, *quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M; ostendemus eodem modo, esse vt GB, ad BA, ita GL, ad AI, id est, ad AK. Vt autem GB, ad BA, ita erat* GC, *ad* CA. *Erit igitur, vt GB, ad BA, ita GL, ad AK. Et quia, si recta linea est* KCM, *ob similitudinem triangulorum* GMC, *AKC,* [a] *est vt GM, ad* GC, *ita KA, ad* AC: *erit permutando, vt GM, ad KA, ita* GC, *ad* CA. *Cum ergo ostensum sit, esse vt GB, ad BA, ita* GC, *ad* CA; *erit quoque GM, ad AK, vt GL, ad AK.* [b] *Æquales sunt igitur GM, GL, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo cadet* KC, *infra L: eademque ratione neque supra cadet.* Cadit *ergo in L, vbi BI, producta perpendicularem FC, secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis LG, ad* GB, *cadet in* G, *exhibebitque eandem tertiam* GB, *maiorem,* Harmonicè *proportionalem.*

a 4. sexti.

b 9. quinti.

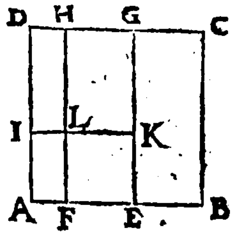
EX *hic perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate* Harmonica, *vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis* Harmonicæ *diximus. Quia enim ostendimus, BA, minimam lineam esse maiorem excessu* AC, *quo media* BC, *minimam AB, superat; erit AB, maior semisse ipsius* BC; *ac proinde* BC, *ad AB, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quàm duplam. Quòd si* BC, *ad AB, esset dupla, vel maior quàm dupla, esset AB, vel æqualis ipsi* AC, *vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in* Harmonica *proportionalitate.*

SED *demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis* Harmonicæ *in numeris reperiantur.* Hinc *enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint.* Hinc *igitur exordium sumemus.*

EX

X.

EX datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.



EX qualibet recta A B, describatur quadratũ ABCD. Sumptisque duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipsis AD, BC, parallelæ. Item sumpta recta AI, æquali ipsi BE, vel EF, agatur IK, ipsis AB, DC, parallela secans FH, in L. Erit rectangulum AG, contentum sub AB, (id est, sub summa rectarum AE, EB: [a] cum EG, sit ipsi BC, ideoque ipsi AB, æqualis) & AE, (maiore scilicet parte summæ AB.) Rectangulum vero EC, continebitur sub AB, (hoc est, sub eadem summa rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiusdem summæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quàm GL, sub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quòd AI, sumpta est ipsi EB, æqualis; & HL, LK, ipsis AE, EB, æquales. [b] Cum enim FH, ipsi AD, hoc est, ipsi AB; & FL, ipsi AI, hoc est, ipsi EB, sit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, æqualis: [c] At KL, ipsi EF, siue ipsi EB, æqualis est. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, simul continere duplum eius, quod sub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & summã duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, constituere proportionalitatem Harmonicã: hoc est, vt est AG, primum, ad EC, tertium, ita esse IH, excessum inter primum AG, & secundum HLIAEG, ad AL, excessum inter secundum HLIAEG, & tertium EC, siue FG, [d] quod ipsi EC, æquale est. Nam cum HL, ipsi AE; & LF, ipsi EB, æqualis sit, vt ostendimus; [e] erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, [f] ita est AG, ad EC: Et

a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 36. primi.
e 7. quinti
f 1. sexti.

Et ut HL, ad LF, ita est HI, ad AL. Igitur erit quoq; AG, primum ad EC, tertium, ut HI, excessus inter primum ac medium, ad AL, excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.

ITAQVE *si AE, ponatur 6. & EB, 4. erit summa AB, 10. quam si ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autem eius, quod fit ex AE in EB, hoc est, HLIAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans utrumq; 6. 4. produxerit extremos 60. 40.*[a] *erit 60. ad 40. ut 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura.*[b] *Est enim AG, id est, 60. ad EC, id est, ad 40. ut AE, id est, 6. ad EB, id est, ad 4.*

[a] 17. septimi.
[b] 1. sexti.

HAC *arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in utrumq; seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati dicti numeri; Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.*

ALITER.

INTER *datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inventorum, quod hi producti sunt ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, ut perspicuum est; erit quoq; tam excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quam excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. ut ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonicè*

60. 48. 40.
30. 24. 20.

Eee propor-

ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensq́ ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT *rursum dati duo numeri* A B, 15. & A C, 12. *quibus inueniendus sit minor in* Harmonica *Medietate. Maiori* AB, *addatur* BD, *aequalis differentiae* B C, 3. *datorum*

A . . . . E . . C . . . B . . . D

numerorum: Et per summam A D, 18. *diuidatur numerus* 180. *ex multiplicatione datorum numerorum* A B, AC, *hoc est*, 15. 12. *inter se procreatus, sitq́ Quotiens* A E, 10. *Dico* AE, *minorem extremum esse in Medietate* Harmonica. *Quoniam enim numero, qui ex* A B, *in* A C, *gignitur, diuiso per* A D, *Quotiens fit* A E; *producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem A D, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex A D, primo in AE, quartum, qui ex AB, secundo in* AC, *tertium*; [a] *erit A D, primus ad* AB, *secundum, vt* AC, *tertius ad AE, quartum; ac proinde cum A D, maior sit, quàm* A B, *erit quoque* AC, *maior quàm AE. Quare erit & diuidendo* BD, *id est*, BC, *ad* AB, *vt* CE, *ad* AE: *Et conuertendo* A B, *ad* BC, *vt* AE, *ad* CE: *Et permutando* AB, *primus ad AE, tertium inuentum, vt* BC, *excessus inter primum* A B, *& medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* A C, *& tertium AE. Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *hoc est*, 15. 12. 10. Harmonicè *proportionales. Quod est propositum.*

[a] *19. septimi vel 16. sexti.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicae *Medietatis.*

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT

SINT dati duo numeri AB, *10. &* AC, *12: quibus inueniendus sit tertius in Medietate Harmonica. Ex minore*

A . . . . D . . B . . C . . . E

AB, *detrahatur* BD, *æqualis differentiæ* BC, *2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum* AD, *8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero* AC, *12, in differentiam datorum numerorum* BC, *2. vel* BD. *Quotiens autem* CE, *3. maiori numero* AC, *12. adijciatur. Dico summam* AE, *15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros* AE, AC, AB, *nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BD, *fit, diuiso per* AD, *Quotiens fit* CE; *producetur idem numerus diuiso ex* CE, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex* AC, *primo in* BD, *quartum, qui ex* CE, *secundo in* AD, *tertium; erit* AC, *primus ad* CE, *secundum, vt* AD, *tertius ad* BD, *quartum: Et componendo* AE, *ad* CE, *vt* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC: *Et permutando* AE, *primus ad* AB, *tertium, vt* CE, *excessus inter primum* AE, *& medium* AC; *ad excessum* BC, *inter medium* AC, *& tertium* AB. *Sunt ergo tres numeri* AE, AC, AB; *nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.* a 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensque maiori numero adijciatur, cõflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, *10. &* AC, *12, quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore* AB, *dematur* BD, *æqualis excessui* BC, *datorum numerorum: Et per reliquum numerum* AD, *8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum* AB, *10. &* AC, *12. procreatus, Quotiensque sit* AE, *15. Dico* AE, *esse terminum maiorem in proportionalitate Harmonica.*

A .... D .. B ... C ... E

monica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, *in* AC, *diuiso per* AD, *Quotiens est* AE; *producetur idem numerus diuisus ex* AE, *Quotiente in diuisorem* AD, *ex defin. Diuisionis. Quia igitur idē numerus gignitur ex* AB, *primo in* AC, *quartum, qui ex* AD, *secundo in* AE, *tertium;* [a] *erit* AB, *primus ad* AD, *secundum, vt* AE, *tertius ad* AC, *quartum; ac proinde cum* AB, *maior sit quàm* AD, *erit &* AE, *maior quā* AC. *Et cū sit, vt* AE, *ad* AC, *ita* AB, *ad* AD; *erit per conuersionē rationis* AE, *ad* CE, *vt* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC: *Et permutādo* AE, *primus inuentus ad* AB, *tertium, vt* CE, *excessus inter primum* AE, *& medium* AC, *ad* BC, *excessum inter medium* AC, *& tertium* AB. *Igitur tres numeri* AE, *15.* AC, *12.* AB, *10.* Harmonicè *proportionales sunt. Quod est propositum.*

a 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQUE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonica.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionū ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica *&* Geometricam, *& Arithmeticam, &* Harmonicam, *oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate* Geometrica *tam æqualium terminorum, quàm inæqualium, gignitur proportionalitas alia* Geometrica *inæqualium terminorum.*

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

SINT

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitque D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.	D, 27.	E, 9.	F, 3.

F, ipsi C, aequalis. Dico D, E, F, Geometricè quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, simul ad B, vt BC, simul ad C.ᵃ Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, aequalis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum. ᵃ12. quinti.

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint aequales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quod E, ipsis BC; & F, ipsi C, sit aequalis. Cum ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini aequales A, B, C, sint vnitates, generabitur duplae proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quod F, aequalis est ipsi C, hoc est, vnitati.

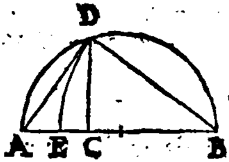
A.	B.	C.
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

SI vero A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitum.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

AT si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo, si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B,

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.



SINT data recta AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secans AB in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis AD, BD; [a] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta BD, hoc est, ipsi aequalis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.

[a] 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura, datae rectae AB, BE, eundem possidentes terminum B; quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; [b] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit BD, hoc est, ipsi aequalis BE, media proportionalis inter AB, BC: id est, erit AB, ad BE, ut BE, ad BC. Quod est propositum.

[b] 31. tertij.

VI.

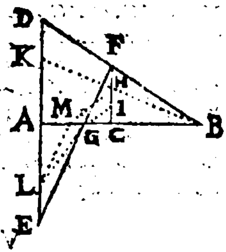
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datae rectae CB, BE, eundem termi-

terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD; quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, secans BE, productam in A. Dico AB, tertiam proportionalem esse ipsis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BD, hoc est, BE, ipsi aequalis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, ut BE, ad AB. Quod est propositum.

VII.

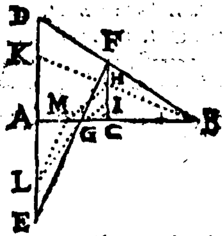
DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



SINT datae rectae AB, BC, eundem terminum B, possidêtes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad AB, perpendiculari DE, ponantur aequales AD, AE, quantaecunque. Excitetur quoque ex C, ad AB, perpendicularis CF, secans ductam rectam BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse mediam Harmonicè proportionalem inter AB, BC: Hoc est, esse AE, primam ad tertiam BC, ut AG, excessum inter primã AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quoniam enim [a] *CF, parallela est ipsi DE, ob rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit ut AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, ut AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinẽ triangulorum AEG, CFG,* [b] *erit ut AE, ad AG, ita CF, ad CG; & permutando ut AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem ut*

[a] 28. primi.
[b] 4. sexti.

vt AE, ad CF, ita AB, ad BC. Igitur erit quoque AB, ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.



NON *determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadē media BG, inuenietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triā gula æquiāgula ALM, MHC, si recta est HML. Est autem vt AB, ad BC, ita AG, ad GC, vt ostensum est. Igitur erit quoq; AM, ad MC, vt AG, ad AC. quod est absurdum. Nam [a] minor est proportio AM, ad GC, quàm AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, quàm ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quàm AG, ad GC. Non ergo ita est AM, ad MC, vt AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transit igitur per G: atque idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK, AL, æquales.*

[a] 8. quinti.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT *in eadem figura, datæ rectæ AB, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur æquales AD, AE, quantæcunque: iuncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico*

BC,

BC, ipsis AB, BG, esse Harmonicè proportionalem: Hoc est, esse AB, primam ad BG, secundam, vt AG, excessus inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.

NON *determinantur etiam hic magnitudines rectarum* AD, AE: *quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LG; quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I; ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AK, ad CH, hoc est, ita AL, ad CH. Vt autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoq; vt AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia, si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum ALG, CIG,* [a] *est vt AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, vt AL, ad CI, ita AG, ad GC. Cum ergo ostensum sit, esse vt AG, ad GC, ita AL, ad CH; erit AL, ad CH, vt ad CI.* [b] *Æquales sunt igitur CH, CI, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonicè.*

[a] 4. sexti.

[b] 9. quinti.

HINC *sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC; sit autem AB, prima maior quàm AG, excessus inter primam AB, & mediam BG;* [c] *erit quoque BC, tertia maior quàm GC, excessus inter mediam BG, & minimam BC.*

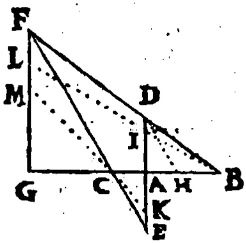
[c] 14. quinti.

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT *datæ rectæ AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis.*

Ducta



Ducta per D, *ad* BC, *perpendiculari* DE, *ponantur aquales* A D, A E, *quantacunque, ducaturque recta* B D, *quam productam secet* EC, *producta in F, puncto, (quòd autem conueniant* BD, EC, *mox demonstrabimus) ex quo ad* BC, *productam demittatur perpendicularis* F G. Dico G B, *ipsis* CB, BA, H*armonicè proportionalem esse: Hoc est, esse G B, primam ad B A, tertiam, vt* G C, *excessum inter primam* GB, *& mediam* BC, *ad* C A, *excessum inter mediam* C B, *& tertiam* BA.[a] *Quoniam enim GF, ipsi* AD, *parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum* BAD, *triangulo BGF, simile: id est, erit vt G B, ad GF, ita* BA, *ad* AD; *& permutando, ut GB, ad BA, ita GF, ad* AD, *hoc est, ad A E. Rursus ob similitudinem triangulorum* FGC, EAC; [b] *erit ut* FG, *ad* GC, *ita* EA, *ad* CA; *& permutando vt FG, ad A E, ita* GC, *ad* GA. *Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt G B, prima, ad BA, tertiam, ita* GC, *excessus inter primam G B, & mediam* BC, *ad* C A, *excessum inter mediam* B C, *& tertiam* B A. *Quod est propositum.*

[a] 28. primi.
[b] 4. sexti.

QVOD autem BD, E C, *conueniant, sic probabitur. Quoniam* BC, *ponitur media, &* BA, *tertia, siue minima, maior erit* BA, *tertia, quàm* CA, *excessus, quo media* BC, *minimam* BA, *superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quàm* AC, *non posset reperiri tertia maior. Cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia* A B, *maior excessu* A C, *quo media tertiam superat. Abscindatur ergo* AH, *ipsi* AC, *aqualis, connectaturq́; recta* HD. *Quoniam igitur latera* AE, AC, *lateribus* AD, A H, *aqualia sunt, angulosq́; comprehendunt aquales, vtpote rectos, siue ad verticem A;* [c] *erunt & anguli* ACE, AHD, *aquales: qui cum alterni sint;* [d] *erunt recta* EC, HD, *parallela;* [e] *ac proinde anguli interni* DHC, HCF, *duobus rectis aquales erũt. Cum ergo* [f] *angulus* DHC, *maior sit interno angulo B; erunt duo anguli* B C F, C B F, *duobus rectis minores.* [g] *Quocirca* B D,

[c] 4. primi.
[d] 27. primi.
[e] 29. primi.
[f] 16. primi.
[g] 13. pron.

BD, EC, coibunt. Quod est propositum.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BG, reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur KC, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M; ostendemus eodem modo, esse vt GB, ad BA, ita GL, ad AI, id est, ad AK. Vt autem GB, ad BA, ita erat GC, ad CA. Erit igitur, vt GB, ad BA, ita GL, ad AK. Et quia, si recta linea est KCM, ob similitudinem triangulorum GMC, AKC, [a] est vt GM, ad GC, ita KA, ad AC: erit permutando, vt GM, ad KA, ita GC, ad CA. Cum ergo ostensum sit, esse vt GB, ad BA, ita GC, ad CA; erit quoque GM, ad AK, vt GL, ad AK. [b] Æquales sunt igitur GM, GL, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo cadet KC, infra L: eademque ratione neque supra cadet. Cadit ergo in L, vbi BI, producta perpendicularem FC, secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis LG, ad GB, cadet in G, exhibebitque eandem tertiam GB, maiorem, Harmonicè proportionalem.

[a] 4. sexti.

[b] 9. quinti.

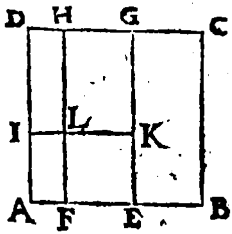
EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim ostendimus, BA, minimam lineam esse maiorem excessu AC, quo media BC, minimam AB, superat; erit AB, maior semisse ipsius BC; ac proinde BC, ad AB, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quàm duplam. Quòd si BC, ad AB, esset dupla, vel maior quàm dupla, esset AB, vel æqualis ipsi AC, vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate.

SED demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

EX

X.

EX datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.



EX qualibet recta AB, describatur quadratũ ABCD. Sumptisque duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipsis AD, BC, parallelæ. Item sumpta recta AI, æquali ipsi BE, vel EF, agatur IK, ipsis AB, DC, parallela secans FH, in L. Erit rectangulum AG, conten-
a 34. primi. *tum sub AB, (id est, sub summa rectarum AE, EB: a cum*
EG, sit ipsi BC, ideoque ipsi AB, æqualis) & AE, (maiore
scilicet parte summæ AB.) Rectangulum vero EC, continebitur sub AB, (hoc est, sub eadem summa rectarum AE,
EB,) & EB, (minore videlicet parte eiusdem summæ
AB.) Tam denique rectangulum AK, quàm GL, sub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quòd AI, sumpta est ipsi EB, æqualis; & HL, LK, ipsis AE, EB, æqua-
b 34. primi. *les. b Cum enim FH, ipsi AD, hoc est, ipsi AB; & FL, ipsi*
AI, hoc est, ipsi EB, sit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ
c 34. primi. *AE, æqualis: c At KL, ipsi EF, siue ipsi EB, æqualis est. Ex*
quo fit, duo rectangula AK, KH, simul continere duplum eius, quod sub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & summã duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, constituere proportionalitatem Harmonicã: hoc est, vt est AG, primum, ad EC, tertium, ita esse IH, excessum inter primum AG, & secundum HLIAEG, ad AL, excessum inter secundum HLIAEG, & tertium EC,
d 36. primi. *siue FG, d quod ipsi EC, æquale est. Nam cum HL, ipsi AE;*
e 7. quinti. *& LF, ipsi EB, æqualis sit, vt ostendimus; e erit AE, ad EB,*
f 1. sexti. *vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, f ita est AG, ad EC:*
Et

Et ut HL, ad LF, ita est HI, ad AL. Igitur erit quoq; AG, primum ad EC, tertium, ut HI, excessus inter primum ac medium, ad AL, excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.

ITAQUE si AE, ponatur 6. & EB, 4. erit summa AB, 10. quam si ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autem eius; quod fit ex AE. in EB, hoc est, HLIAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans utrūq; 6. 4. pduxerit extremos 60. 40.[a] erit 60. ad 40. ut 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura.[b] Est. enim AG, id est, 60. ad EC, id est, ad 40. ut AE, id est, 6. ad EB, id est, ad 4.

[a] 17. septimi.

[b] 1. sexti.

HAC arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in utrumq; seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati dicti numeri; Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignet 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quē extremi inter se multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inventorum, quòd hi producti sunt ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, ut perspicuum est; erit quoq; tā excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quàm excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. ut ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonicè

60. 48. 40.
30. 24. 20.

 propor-a 15. quinti. *proportionales, vt in præcedenti problemate demonstrauimus; erunt quoque eorum semisses, 30. 24. 20. [a] easdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorũ 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est.*

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, *15. &* BC, *10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis* H*armonicè. Demitur ex maiore* AB, *15. numerus* BD, *minori* BC, *10. æqualis, &*

A . . . E . . D . . . . B C

reliquus numerus A D, *5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem* B C, *10. productusq́; numerus 50. diuisus per* A C, *25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem* DE, *2. qui additus minori* BD, *10. faciat* B E, *12. Dico* BE, *esse medium proportionalem* Harmonicè *inter* AB, BC, *hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex* AD, *in* BC, *fit, diuiso per* A C, *Quotiens est* D E; *producetur idem numerus diuisus ex* D E, *Quotiente in diuisorem* A C, *vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex* A C, *primo, in* DE, *quartum, qui ex* B C, *vel* BD, *secundo, in* AD, *tertium; [b] erit* A C, *primus ad* BC, *secundum, vt* AD, *tertius ad* D E, *quartum: Et diuidendo,* AB, *ad* BC, *primus datus ad tertium datum, vt* AE, *excessus inter primũ* A B, *& mediũ inuentũ,* BE, *ad* DE, *excessum inter medium* BE, *&* BD, *siue tertium* B C. *Sunt ergo* AB, BE, BC, *nimirum 15. 12. 10.* Harmonicè *proportionales. Quod est propositum.*

b 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si differentia datorum numerorũ ducatur in minorem, numerusq́; productus diuidatur per datorum numerorum

rorum summam, ac denique Quotiens minori adijciatur, constabitur medius terminus Harmonicæ *proportionalitatis.*

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, *15.* & AC, *12. quibus inueniendus est minor* Harmonicè *proportionalis. Addatur* BD,

A . . . . E . . C . . . B . . . D

æqualis ipsi BC, *excessui inter datos numeros. Per hanc summam* AD, *18, collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato* AC, *in* BC, *differentiam datorum numerorum; & Quotiens* CE, *ex minore dato* AC, *detrahatur. Dico reliquum* AE, *10. esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BC, *fit, diuiso per* AD, *Quotiens est* CE; *producetur idem numerus diuisus ex* CE, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato, vt ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex* AD, *primo, in* CE, *quartum, qui ex*

A . . . . E . . C . . . B . . . D

BC, *secundo in* AC, *tertium; erit* AD, *primus ad* BC, *secundum, hoc est, ad* BD, *vt* AC, *tertius ad* CE, *quartum.* [a] *19. septimi vel 16. sexti.* *Et diuidendo,* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC, *vt* AE, *ad* CE. *Et permutando,* AB, *primus datus ad* AE, *tertium inuentum, vt* BC, *excessus inter primum* AB, & *medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* AC, & *tertium* AE. *Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *id est, 15. 12. 10.* Harmonicè *proportionales. Quod est propositum.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectA diuidatur numerus *ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensq́; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate* Harmonica.

A L I T E R.

SINT rursum dati duo numeri AB, *15. &* AC, *12. quibus inueniendus sit minor in Harmonica Medietate. Maiori* AB, *addatur* BD, *aequalis differentiae* BC, *3. datorum*

A . . . . E . . C . . . B . . . D

numerorum: Et per summam AD, *18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum* AB, AC, *hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitq́; Quotiens* AE, *10. Dico* AE, *minorem extremum esse in Medietate* Harmonica. *Quoniam enim numero, qui ex* AB, *in* AC, *gignitur, diuiso per* AD, *Quotiens fit* AE; *producetur idem numerus diuisus ex* AE, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato, ut ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex* AD, *primo in* AE, *quartum, qui ex* AB, *secundo in* AC, *tertium;*
a 19. septimi vel 16. sexti. [a] *erit* AD, *primus ad* AB, *secundum, ut* AC, *tertius ad* AE, *quartum; ac proinde cum* AD, *maior sit, quam* AB, *erit quoque* AC, *maior quàm* AE. *Quare erit & diuidendo* BD, *id est,* BC, *ad* AB, *ut* CE, *ad* AE: *Et conuertendo* AB, *ad* BC, *ut* AE, *ad* CE: *Et permutando* AB, *primus ad* AE, *tertium inuentum, ut* BC, *excessus inter primum* AB, *& medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* AC, *& tertium* AE. *Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE; *hoc est, 15. 12. 10.* Harmonice *proportionales. Quod est propositum.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicae *Medietatis.*

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT

SINT dati duo numeri AB, 10. & AC, 12: quibus inueniendus sit tertius in Medietate Harmonica. Ex minore

A .... D .. B .. C ... E

AB, detrahatur BD, æqualis differentiæ BC, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero AC, 12. in differentiam datorum numerorum BC, 2. vel BD. Quotiens autem CE, 3. maiori numero AC, 12. adjiciatur. Dico summam AE, 15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BD, fit, diuiso per AD, Quotiens fit CE; producetur idem numerus diuisis ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, secundo in AD, tertium; erit AC, primus ad CE, secundum, vt AD, tertius ad BD, quartum: Et componendo AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC: Et permutando AE, primus ad AB, tertium, vt CE, excessus inter primum AE, & medium AC; ad excessum BC, inter medium AC, & tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum. 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensque maiori numero adjiciatur, cōflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, 10. & AC, 12, quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, dematur BD, æqualis excessui BC, datorum numerorum: Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB, 10. & AC, 12. procreatus, Quotiensque sit AE, 15. Dico AE, esse terminum maiorem in proportionalitate Harmonica.

 monica.

A .... D .. B .. C ... E

monica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, *in* AC, *diuiso per* AD, *Quotiens est* AE; *producetur idem numerus diuisus ex* AE, *Quotiente in diuisorem* AD, *ex defin. Diuisionis. Quia igitur idē numerus gignitur ex* AB, *primo in* AC, *quartum, qui ex* AD, *secundo in* AE, *tertium;* [a] *erit* AB, *primus ad* AD, *secundum, vt* AE, *tertius ad* AC, *quartum; ac proinde cum* AB, *maior sit quàm* AD, *erit & AE, maior quā* AC. *Et cū sit, vt* AE, *ad* AC, *ita* AB, *ad* AD; *erit per conuersionē rationis* AE, *ad* CE, *vt* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC: *Et permutādo* AE, *primus inuentus ad* AB, *tertium, vt* CE, *excessus inter primum* AE, *& medium* AC, *ad* BC, *excessum inter medium* AC, *& tertium* AB. *Igitur tres numeri* AE, 15. AC, 12. AB, 10. Harmonicè *proportionales sunt. Quod est propositum.*

[a] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionū ex æqualitatis proportione omnes pportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica *&* Geometricam, *& Arithmeticam, &* Harmonicam, *oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate* Geometrica *tam æqualium terminorum, quàm inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.*

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel; sunt Geometricè proportionales.

SINT

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitque D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, Geometricè quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, ut B, ad C; erit quoque componendo A, B, simul ad B, ut BC, simul ad C.[a] Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, ut una antecedens, hoc est, B, C, ad unam consequentem C. Est autem D, æqualis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, ut E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum. [a] 12. quinti.

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.	D, 27.	E, 9.	F, 3.

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint æquales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F; quod E, ipsis BC; & F, ipsi C, sit æqualis. Cum ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini æquales A, B, C, sint unitates, generabitur duplæ proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quod F, æqualis est ipsi C, hoc est, unitati.

A.	B.	C.
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

SI vero A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitum.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

AT si termini A, B, C, sint dupli inverso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, sive ipsius F, sesquialtera. Eodem modo si A, B, C, sint converso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B,

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.

A.	B.	C.
1.	3.	9.
D.	E.	F.
16.	12.	9.

erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siuè inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E,

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 5.	E, 3.	F, 1.	D, 39.	E, 21.	F, 3.

summa conflata ex A, B, C, semel: Ac deniq; F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmeticè proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto: Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E,

qui

qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent: Quod est propositum.

A.	E.	C.
3.	20.	1.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.

D.	E.	F.
47.	24.	1.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonicè proportionales sunt.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, consti-

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 6.	E, 3.	F, 2.	D, 45.	E, 15.	F, 9.

tuere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C. ª Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum a 12. quinti.

termi-

terminum, & medium E: At B, excessus, quo B. bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquidò constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis pro-

A, 9.B, 6.C, 4. | A, 1.B, 4.C, 16. | A, 9.B, 12.C, 16.

D, 40.E, 16.F, 10. | D, 30.E, 24.F, 20. | D, 70.E, 40.F, 28.

portionis sesquialteræ, & in secundo ex minimis terminis subquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonstrant.

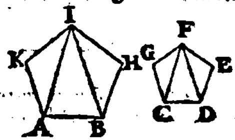
A, 4.B, 6.C, 9. | A, 16.B, 4.C, 1. | A, 16.B, 12.C, 9.

D, 35.E, 21.F, 15. | D, 45.E, 9.F, 5. | D, 77.E, 33.F, 21.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

19. A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos, rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cũ equales sint duobus angulis FCD, FDC, [a] qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus DIH: Et [c] qa duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: [d] Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis; erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoq; AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt cõstat ex constructione; cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineũ ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero [e] ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF; & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE; [f] erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, [g] quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula



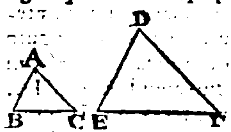
[a] 17. primi.
[b] 32. primi.
[c] 17. primi.
[d] 17. primi.
[e] 4. sexti.
[f] 22. quinti.
[g] 4. sexti.

BHI,

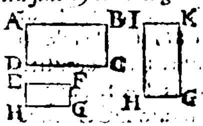
4 sexti. BHI, DEF. Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD; & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC; & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. 22 quinti. Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG; & ideo latera quoque circa angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quamquam similia sint) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E.



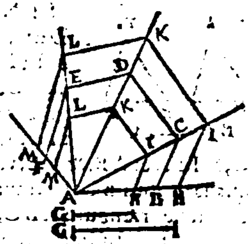
Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam ut AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At verò rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.



CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super quælibet earum latera.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus

conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur



AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, ulterius producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF; factumque erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterque posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB, constitutæ. Cum enim angulus HAM, sit communis; & angulis ABC, AFE, [a] æquales sint anguli AHI, AML; Item angulis ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemque modo angulis CDE, DEF, æquales sint anguli IKL, KLM: Aequiãgula erũt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, [b] ut AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, ut BC, ad CA, ita HI, ad IA; Et ut CA, ad CD, ita IA, ad IK: Ac proinde, ex æquo, ut BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea, quæ proxime hoc scholio scripsimus.

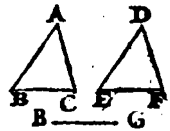
[a] 29. primi.

[b] 4. sexti.

THEOR. 13. PROPOS. 19. 17.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorũ.

SINT



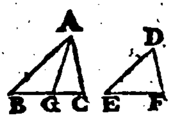
SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationẽ habere duplicatã eius, quã habent latera homologa BC, & EF; vel AB, & DE; vel AC, & DF. Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG; ita esse triangulũ ABC, ad triangulũ DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defi. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF; proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas, habere proportionem duorũ laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorũ laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continuè proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, *quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: Proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus

*26. primi.

magni-

magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus EF. Quod est propositum.

SIT deinde BC, latus latere E F, maius; & ex B C, a abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturque recta AG. Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem B C, ad EF, ita est per constructionem EF, ad B G. Vt ergo AB, ad DE; b ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproce, c ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum D E F, d ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G: Vt autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis, e ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum DEF, ita est BC, ad B G. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint cõtinuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiã BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secũdam. Igitur & triangulũ ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.



a 11. sexti.
b 11. quinti.
c 15. sexti.
d 9. quinti.
e 1. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. a Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B, erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

a 19. sexti.

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. b Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

b 19. sexti.

SCHOLIUM.

ITAQUE si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum ut 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, ut 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, ut hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulum, ut 36. ad 25. Eandem proportionem

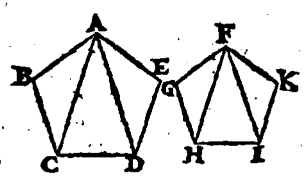
trian-

triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$. in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id est, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quàm 100. ad 1. cùm hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata est.

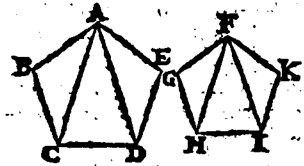
THEOR. 14. PROPOS. 20. 18.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia [a] 6. sexti.

 angulos



angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, FHG, lateribus homologis oppositos: [a] Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt: Eadē ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde [b] quia est vt AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: [c] erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. [d] Quare triangula ACD, FHI, æquiangula erunt, ideoq; similia. Eademq; ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint.

[a] 4. sexti.
[b] 4. sexti.
[c] 22. quinti.
[d] 6. sexti.

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH; [e] erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum F H I, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triāgula. Sunt igitur proportionalia triāgula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius cōsequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, [f] ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia,

[e] 19. sexti.
[f] 12. quinti.

quentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

DICO postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa: hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiã inuentã: ac proinde, cum proportio AB, ad illã tertiã, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG; dici quoq; proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, [a] habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG. hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiã inuentã; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quã habet AB, ad illã tertiã inuentam. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 19. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si fuerint tres recta linea proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.

HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quã ostensum fuit corollarium pracedentis theorematis ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

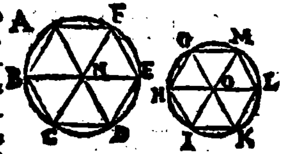
QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figu ra, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, similia esse. Quoniã anguli ACB, FHG, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademque ratione æquales ostendentur anguli ADC, FIH: ac propterea, [a] & reliqui CAD, HFI, æquales erunt. Igitur cum æquiangula sint triangula ACD, FHI, [b] habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt.

[a] 32. primi. [b] 4. sexti.

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prop præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest æqualis angulo FIH; quòd tunc alia adhuc triangula supersint vsque ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, n quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; a proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoq cum anguli ACD, FHI, sint æquales, similia esse triangul ACD, FHI. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cu omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK, non essent v tima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob sim litudinem polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, i FI, ad IK. Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angu HIK: Est autem & ablatus ADC, ostensus ablato FI æqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. [c] Qu re triangula ADE, FIK, similia erunt. Atque ita deince si fuerint plura triangula.

[c] 6. sexti.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æq angul angula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circumscribuntur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis.



Quoniam enim anguli CND, IOK, æquales sunt; (quòd æquè submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus,[a] ipsi inter se æquales erũt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vtrobique sit proportio æqualitatis;[b] Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; est ratio de cæteris. At verò hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æquè multiplicia, vt patet;[c] habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem.

[a] 27. tertij.
[b] 6 sexti.
[c] 15. quinti.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius libri erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum inter se propor-

tionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est dupla proportionis, vt hic apparet. 1. 2. 4.

SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, vt dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in exemplo adducto superius apparet.

ITAQVE si proportio lateris AB, ad latus FG, nota sit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonstratumq́; est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{25}{16}$. id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cum hæc sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam; cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR.

THEOR. 15. PROPOS. 21. 20.

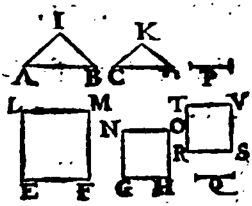
QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinẽ, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdem rectilinei GHI; [a] erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

[a] 1. pron.
[b] 11. quinti.

THEOR. 16. PROPOS. 22. 21.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidē AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta, EFML, GHON. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. [b] eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. [c] Igitur vt ABI, ad CDK ita erit EM, ad GO. Quod est propositū.

[a] 11. sexti.
[b] 22. quinti.
[c] 11. quinti.

DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; positum; [e] & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. [f] Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO, [g] Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, cōsistent necessario, vt mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. [i] Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 12. sexti.
[e] 21. sexti.
[f] 11. quinti.
[g] 9. quinti.
[h] 7. quinti.
[i] 11. quinti.

LEMMA

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam RS; a erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. Quod est propositum. a 14. quinti.

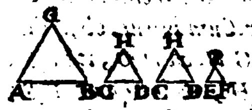
ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita.

Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G; Est autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior sit, quam G; erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta, quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus

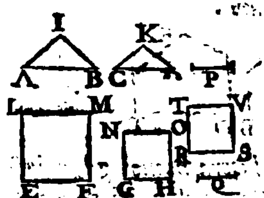
minus

minus ostenderetur rectilineo DEF; quod est contra hypothesim. Quare aquales sunt recta AB, DE.

SCHOLIVM.



EODEM modo, si fuerint tres recta proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor recta proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, aquale sit ei, quod a tertia, immo idem, manifestum est, quod propositum.



BREVIVS tota hac propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque ut ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Cum enim sit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD, item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH; erunt proportiones ABI, ad CDK; & EM, ad GO, aquales; quandoquidem duplicata sunt proportionum aqualium AB, ad CD; & EF, ad GH. Quod est primum.

[a] 19. vel 20. sexti.

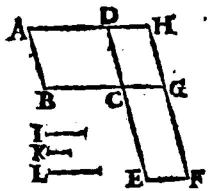
PONATVR deinde esse, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. [b] Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD; & EF, ad GH, aquales; quandoquidem earum proportiones duplicata, ABI, ad CDK; & EM, ad GO, aquales ponuntur. Quod est secundum.

[b] 19. vel 20. sexti.

THEOR.

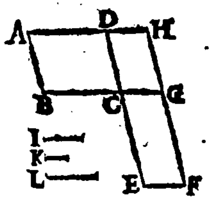
THEOR. 17. PROPOS. 23. 24.

AEQVIANGVLA parallelogrā-ma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



SINT parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum esse compositā ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedētia proportionum sint in vno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG; & K, ad L, vt latus D C, ad latus C E; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum C F, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cum anguli B C D, ECG, sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producā tur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaq; vt diximus, recta I, quacunq; , a inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, a 12 sexti.

quarta



a 1. sexti. | b 11. quinti. | c 1. sexti. | d 22. quinti.

quarta proportionalis L. Quoniã igitur est,[a] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K; [b] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [c] ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L. [d] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammũ CF. Eademq; ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

e 1. sexti.

EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [e] Cum sit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG: & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE, Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad CH; & CH, ad CF; componetur quoque eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.

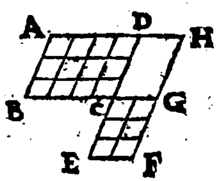
HANC porrò propos. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ sint in numeris, veniemus quoque ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad

CE,

C E, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterũ, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammũ CF; [a] quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum; hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{22}{55}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certè hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quòd si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator, 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus. [a] 23. sexti.

SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod



ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG. in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem habeat duplam, at DC, ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallela, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF, solum 6. atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

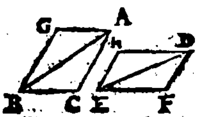
PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius deno-

minator sit $1 \frac{22}{33}$. *In posteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, ut nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione; quod ijdem interpretes negant. In exemplo namque priori proportio lateris DC, ad CE, est minoris inæqualitatis, in posteriori vero, æqualitatis. Sed hac de re plura scribemus in propos. 5. lib. 8.*

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.



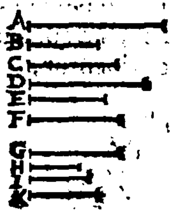
SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis GG, FH, erunt ea æquiangula; [a] *atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis,* [b] *quorum sunt dimidia,* [c] *eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF.*

a 23. sexti.
b 34. primi.
c 15. quinti.

PRO-

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

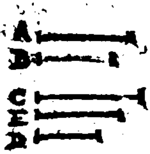


HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipsis unam proportionem componere. a *Fiat ut A, ad B, ita G, ad H; & ut C, ad D, ita H, ad I; & ut E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quòd his illæ sumptæ sint æquales.*

a 12. sexti.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.



SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. b *Fiat, ut A, ad B, ita C, ad E; statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

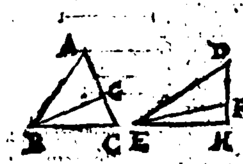
b 12. sexti.

VERVM hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio propriè, quia alias totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio possit detrahi ex minore, ut ad propos. 5. lib. 8. ostendemus.

TRIAN-

IIII.

TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent; eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendẽtibu continentur.



SINT triangula ABC DEF, angulum A, angul D, habentia æqualem. Di esse triangulum ABC, a triangulum DEF, vt recta gulum sub AB, AC, ad re ctangulum sub DE, DF. Du ctis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH; erunt tri gula ABG, DEH, æquiangula, vt constat ex coroll. 1. propo, 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE sint æquales. [a] 4 sexti. *[a] Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED* [b] 1. sexti. *Vt autem GB, ad BA, [b] ita est rectangulum sub BG, AC ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GB BA, erit eorum eadem altitudo AC) Et eadem ratione, HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangu lum sub DE, DF.* [c] 11. quinti. *[c] Rectangulum igitur sub BG, AC, ad re ctangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectan gulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF,* [d] 15. quinti. *[d] ita e triangulum ABC, ad triangulum DEF, [e] quòd hæc trian gula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim ea dem cum illis bases AC, DF, altitudinesque easdem BG EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt consti tuta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum su DE, DF. Quod est propositum.*

PARAL

V.

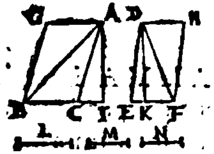
PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. [a] Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG, [b] quòd hæc ipsorum sint dimidia; [c] Erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum. a 15. quinti. b 34. primi. c 11. quinti.

VI.

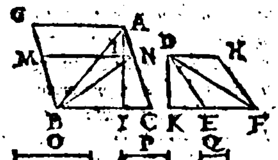
TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, FH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales; bases vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M;



Vt autem A I, ad DK, ita M,
N. Quo facto erit M, ipsi N, aequ
lis, quòd & A I, ipsi D K, aequa
ponatur; [a] Ac proinde erit K,
N, vt L, ad M, hoc est, vt B C,
E F. [b] At vero, vt BC, ad E F,
est triangulum ABC, ad triang
lum DEF, & parallelogramm
CG, ad parallelogrammum EH. [c] Igitur quoque erit, vt
ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum D E F, & p
rallelogrammum CG, ad parallelogrammum E H: Sed p
portio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est,
proportione basis BC, ad basin E F, & ex proportione M,
N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio
go trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogra
mi C G, ad parallelogrammum E H, ex eisdem proportio
bus est composita. Quod est propositum.

[a] 7. quinti.
[b] 1. sexti.
[c] 11. quinti.



SINT iam altitudi
AI, DK inaequales, & A
maior; bases vero BC, E
vel aequales, vel etiam in
quales. Fiat, vt A I,
DK, ita O, ad P; & vt B
ad EF, ita P, ad Q. A
scissa deinde IL, aequali
D K; ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in
iungaturque recta BN. Quoniam igitur est triangulum A B
ad triangulum NBC; & parallelogrammum C G, ad par
lelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem I L,
ad DK; ipsi IL aequalem, hoc est, vt O, ad P, per ea, quae ad
propos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quod tria
gulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et
triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogra
mum CM, ad parallelogrammum EH, [d] ita est, basis BC,
basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q: [e] e
ex aequo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Qu
cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P,
est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem D K; &
proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis B C, ad ba

[d] 1. sexti.
[e] 22. quinti.

E

EF: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod est propositum.

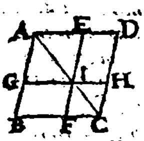
EODEM pacto ostendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor est, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, composita esse ex proportione basis EF, ad basin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiant, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; [a] erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, ad BC, hoc est, vt Q, ad P. Item triangulum NBC; ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammũ CG, vt LI, seu DK, ad AI, hoc est, vt P, ad O; ex ijs, quæ ad propos. 1. huius lib. ex Commandino demonstrauimus. [b] Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin BC; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eisdem proportionibus. Quod est propositum.

[a] 1. sexti.

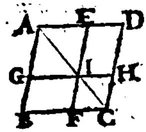
[b] 22. quinti.

PROBL. 18. PROPOS. 24. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.



ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter sese. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui



a 29. primi. angulus B A D; a & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus A G I, externus interno ABC; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est E G, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC; & triangulum A E I, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. b erit vt A B, ad B C, ita A G, ad GI; atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus c erit vt BC, ad C A, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. d Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad I E; ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo B D, e atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

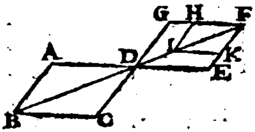
b 4. sexti.
c 4. sexti.
d 22. quinti.
e 21. sexti.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo eius latera rectas duas compleant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, iisdem fere modis ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim A B C D diameter B D, sit producta ad E, circa quam consistat parallelogra-

lelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrãmi AC. Dico parallelogrammum GE, simile esse parallelogrammo AC. Quòd enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur. [a] Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno ADG; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. a 29.primi.



Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. [c] Rursus quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt æquales, [d] erunt his quoque oppositi ABC, GFE, æquales. Igitur æquiangula sunt GE, AC, parallelogramma. Quòd autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum BAD, æquiangulum sit triangulo DGF; & triangulum BCD, triangulo DEF, vt constat ex propos. 29. lib. 1. [e] Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rursus vt AD, ad DB, ita GF, ad FD; & vt DB, ad DC, ita FD, ad FE, [f] ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis æquales sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma AC, GE.

b 34.primi. c 15.primi. d 34.primi. e 4.sexti. f 22.quinti.

QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & G; erit HK, simile ipsi GE, [g] vt Euclides demonstrauit: Atqui eidem GE, simile est quoque AC, vt nunc ostendimus. [h] Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum.

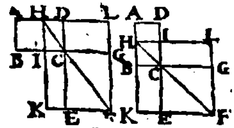
g 24.sexti. h 21.sexti.

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

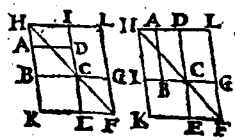
DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint

 ABCD,

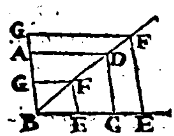


ABCD, CEFG; & ex ABCD, abscindendum sit parallelogrammum ipsi CEFG, *simile. Coniungantur ambo ad angulos aequales* BCD, ECG, *ita vt sit vna linea recta* BCG, *& propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratum est*, ECD, *quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter* FC, *producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus AB; (Neque enim in punctum A, cadet: quia* AC, *esset simile ipsi* CF, *vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammum abscissum* HC, *simile esse ipsi* CF. *Si enim totum parallelogrammum KL, compleatur, erunt* HC, CF, *circa diametrum. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.*

EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, *vt fiat ipsi CEFG, simile. Coniungantur vti prius, & diameter* FC, *extendatur, donec in H, secet vel latus B A, protractum, vel latus DA, protractum. Neq; enim in punctum A, cadet: quia* AC, *esset ipsi* CF, *simile, vt demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi A D, vel ipsi A B, donec secet vel latus* C D, *protractũ, vel* CB, *protractũ in I. Dico parallelogrammũ auctum* HC, *simile esse parallelogrãmo* CF. *Nam si cõpleatur totum parallelogrammũ KL, consistent* HC, CF, *circa diametrũ.* [a] *Quare similia inter se erũt.*



[a] 24. sexti.

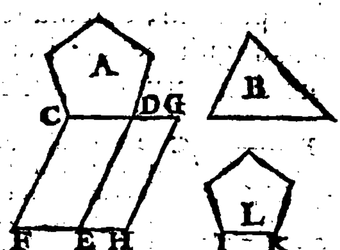


PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, *si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe* BC; *Atque ex E, quolibet puncto vltra* C, *ipsi* CD, *parallela EF, ducenda, secans*

secans diametrum BD, productam in F; & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. Erit enim parallelogrammum GE, simile similiterque positum ipsi AC, & circa eandem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, ut figura indicat. a 24. sexti.

PROBL. 7. PROPOS. 25. 25.

DATO rectilineo simile, similiterq; positum; & alteri dato æquale idem constituere.



SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendũ aliud rectilineũ, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, [b] cõstituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B; eritq; tam CDG, quàm FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. [c] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; [d] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propos. 19 vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterq; descriptum: [e] Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammũ CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis.

b 44. vel 45. primi.

c 13. sexti.

d 18. sexti.

e 1. sexti.

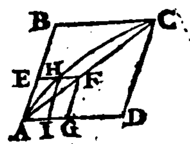
[a] 11. quinti. [a] Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. [b] Vt autem C E, ad DH, ita est A, ad B: propterea quòd parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. [c] Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; [d] proptereaque æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

[b] 7. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

THEOR. 19. PROPOS. 26.

23.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

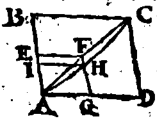


EX parallelogrammo B D, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF; quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & A C, diameter ipsius B D, parallelogrammum EG, consistere circa diametrũ AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H. puncto, per quod ipsi EG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum A H C; [e] ipsa erunt similia, similiterque posita. [f] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad A I. Sed vt BA, ad A D, ita quoque est EA, ad A G; quod parallelogramma B D, E G, ponantur etiam similia, similiterque posita. [g] Igitur erit vt EA, ad A I, ita E A, ad A G. [h] Ac propterea æquales erunt

[e] 24. sexti.
[f] 1. definit. sexti.
[g] 11. quinti.
[h] 9. quinti.

erunt rectæ AI, AG; pars, & totum: quod est absurdum.

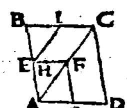
QVOD si dicatur recta AHC, secare alterū latus FG; Tunc ducta HI, parallela ipsi EF; [a] erunt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterq; posita. [b] Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA, ad AE, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG. [c] Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE; [d] ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaq; si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

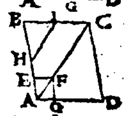


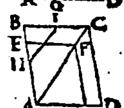
[a] 24. sexti.
[b] 1. definit. sexti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiuè, hoc modo. Diuisis lateribus AB, BC, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra; ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autē tota AB, ad totam BC; [e] ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; [f] Erit vt HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, ([g] qui æquales sunt, internus, & externus.) latera proportionalia, [h] erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. [i] Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam vero rectæ, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, [k] parallela quoque est recta HI; propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta AC, eadem sit, quæ AF, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum vna linea



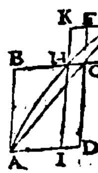




[e] 15. quinti.
[f] 11. quinti.
[g] 29. primi.
[h] 6. sexti.
[i] 28. primi.
[k] 2. sexti.

nea parallela recta H I, possit duci, vt manifestum est. Consistunt ergo B D, E G, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum A F C. Quod est propositum.

QVOD si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem fere modiis, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungantur, vt linea BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ D C, C E, vnam quoque lineam rectam componant.



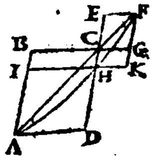
Dico parallelogramma B D, E G, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum A C, cum diametro F C, vnam rectam lineã conficere. Si enim A C, F C, non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipsi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, producta consistunt, efficiuntq; duæ rectæ BH, HI, cum duabus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit vt H B, ad B A, ita F K, ad K H. [a] Habet autem C B, maior ad B A, maiorem proportionem, quam H B, minor ad eandem B A; & est vt C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quamobrem si F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H; [b] erit E F, maior quam F K; pars quã totum: Quod est absurdum.

[a] 8. quinti.

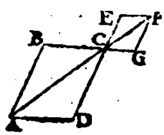
[b] 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat recta

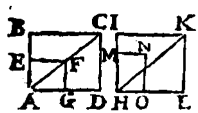
& a FG, protracta in K; erunt rursus similia similiterq; posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut HD, ad DA, ita FK, ad KH. [a] Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et est ut CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterq; posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam FK, ad KH; [b] ideoque FG, maior erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum. — a 8. quinti. b 10. quinti.



OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli B, E, sunt æquales, estque ut AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; [c] atq; idcirco æquiangula erunt; habebuntq; angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, æquales: [d] Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales; [e] Ac propterea AC, FC, unam component rectam lineam. Quod est propositum. — c 6. sexti. d 29. primi. e 14. primi.

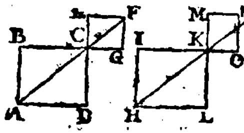


RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a tota ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, ut ostendatur circa eandem cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum consistens, [f] erit EG, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo IL, quod sit æquilaterum & æquiangulum ipsi BD, sumatur HM, æqualis ipsi EF, & MN, æqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum MO, æquale & simile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo IL; — f 24. sexti.



lo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto I L, diametrum.

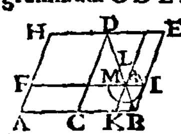
IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum unum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, ut duo latera unius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus EG, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At vero MO, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit aquale ipsi EG. Nam KM, aequalis est ipsi EF, & MN, ipsi F C, &c.



26. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrãmis similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur; maximũ id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundum A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens



existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, [a] quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. [b] Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E; [c] Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales AC, CB. Igitur & C F, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum CE, maius sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc D G,) erit quoque A D, [d] æquale existens ipsi C E, propter bases æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

[a] 24. sexti.

[b] 43. primi.

[c] 36. primi.

[d] 36. primi.

ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. [e] Parallelogramma F D, DI, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, ([f] quod ipsi G E, æquale est,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atque idcirco addito communi CF, maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

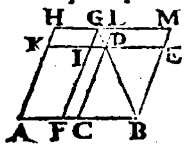
[e] 36. primi.

[f] 43. primi.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta H M, quæ sit parallela ipsi A B, occurratq; rectis AK, B E, protractis in H, & M; Item ducta G F, parallela

rallela ipsi A H; erit parallelogrammum A G, applicatum secundum rectam A B, deficiens parallelogrammo FM, [a] quod ipsi CE, est simile similiterq; positũ, cum sit circa eandem diametrum cum C E.

[a] 4 sexti.



Dico adhuc maius esse A D, ipso A G. Protracta enim C D, ad L, [b] erunt æquales rectæ H L, L M, [c] ideoque æqualia parallelogramma H D, D M. [d] Cum igitur D M, sit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipsi D F. Est autem H D, maius quam H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit quam H I, eodem parallelogrammo I L; Ac propterea communi addito A I, maius erit A D, quam A G, eodem parallelogrammo I L. Iisdem argumentis concludes A D, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam A B, vt punctum G, sit vltra D, in diametro B D, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse A C, habetque maiorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similis existat parallelogrãmo C E. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandẽ rectã lineam applicatorũ, &c. Quod erat demonstrandũ.

[b] 34. primi.
[c] 36. primi.
[d] 43. primi.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata A C; qualis est A K, in priori figura; vel minorem; cuiusmodi est A F, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.

27.

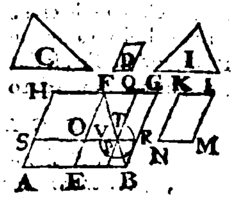
PROBL. 8 PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiẽs figura parallelogrãma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato.

Oportet

Oportet autem datũ rectilineũ, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cũ similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiã applicatur, & ei⁹, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super medietatem E B, [a] describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C; cum sit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) [b] & constituatur parallelogrammum K L M N, simile quidem similiterq; positum ipsi D, seu ipsi E G, æquale vero excessui inuẽto I; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul; & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, vel minus, quod non constat. Quare abscissis rectis F O, F Q,



[a] 18. sexti.

[b] 25. sexti.

quæ

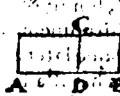
quæ sint æquales ipsis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO, erit hoc ipsi LN, æquale, & eidem simile similiterque positum; & propterea ipsi EG; [a] atque adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, quia & BH. Productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, [b] quod simile est ipsi EG, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse ipsi C, rectilineo. [c] Nam cum PG, æquale sit complemento PE; si addatur commune PB, erit & BQ, æquale ipsi ER, hoc est, ipsi ES, [d] quod æquale est ipsi ER, propter bases æquales EA, EB. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo C; (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum LN; si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

[a] 26. sexti.
[b] 24. sexti.
[c] 43. primi.
[d] 36. primi.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super EB, constituerimus EG, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Qua de re, si placet, consule eorum commentaria.

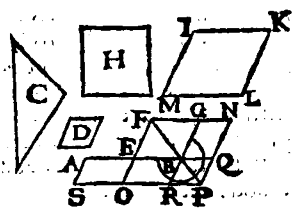
PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad AB, applicetur AC, deficiens quadrato CB,



CB, erit AC, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & DC. Cum ergo DC, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque AC, sub segmentis A D, DB, per applicationem factis.

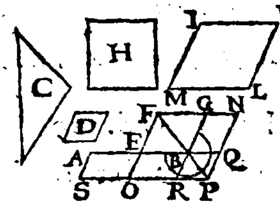
PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; a super dimidiam EB, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterq; positum. b Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; c cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile vero ipsi E G, similiterque positum; eritque propterea I K L M, maius quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cũ parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque M K, vel æquale ipsi E G, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo ON; erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cum sit æquale ipsi M K, & simile. d Quare O N, E G, circa eandem

a 18. sexti.
b 14. secũdi.
c 25. sexti.
d 26. sexti.



diametrum consistent, quæ sit FP. Productis iam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi EO, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, [a] quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. [b] Nam cum AO, ER, sint æqualia, [c] & ER, æquale complemento BN; erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

[a] 24. sexti.
[b] 36. primi.
[c] 43. primi.

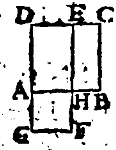
29.

PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

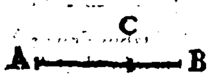
SIT recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; [d] ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC; si dematur commune

[d] 29. sexti.



mune AE, remanebunt æqualia GH, HC; quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos; [a] erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, vt segmentum AH, ad segmentum HB; secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum. [a] 14. sexti.

ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; [b] erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione. [b] 17. sexti.



ALITER totum problema conficiemus. [c] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. [d] Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum. [c] 11. secũdi. [d] 17. sexti.

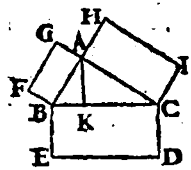
SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates, proprietatesque, vt in libris Stereometriæ manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

31. THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quęuis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulũ BAC, rectum; describaturque super B C; quæcunq; figura rectilinea BCDE,
a 18. sexti. [a] cui similes similiterq; positę super A B, A C, constituantur A B F G, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, A I. Demissa enim ex A, ad B C, perpendiculari AK; erit per corollarium propos. 8 huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad C K. Quare vt B C, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primã, ad figuram CH, super secundam, similem similiterq; positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Nõ secus ostendetur, esse quoque vt BK, ad B C, ita figuram BG, ad figuram B D; cum tres lineæ B C, BA, BK, sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita GH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundã,
b 24. quinti. ita BG, sexta ad BD, quartam; [b] erit vt prima C K, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia C H, cum sexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima C K, & quinta BK, simul æquales secundæ BC Igitur tertia CH, & sexta B G, simul æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

c 8. sexti. ALITER. Cum triangulo ABC, simile sit triangulum KAC, sintq; homologa latera ipsorum BC, CA;

(Nam

(Nam est vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) a habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. b Habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. c Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum KBA, ad triangulũ ABC, ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergò rursus est, vt KAC, prima quantitas ad ABC, secũdam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; d erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, ita composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod est propositum.

a 19. sexti.
b 19. vel 20. sexti.
c 11. quinti.
d 24. quinti.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; e cum vtraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundã quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem. f Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: g Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quævis; &c. quod erat ostendendum.

e 19. vel 20. sexti.
f 24. quinti.
g 47. primi.

SCHOLIVM.

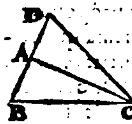
VIDES igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus.

 Videtur

Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisq; similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum ABC, sitque figura quæuis super latus BC, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ sit ipsi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, [a] erit figura super CD, (quæ similis sit ei, quæ super BC, similiterque posita) descripta æqualis figuris super AD, AC, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque positæ. Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super CD, æqualis erit figuris super AB, AC. Cum igitur figura super BC, eisdem figuris super AB, AC, æqualis ponatur, erunt figuræ super CD, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis DC, ostensa est quoque æqualis basi BC; [b] erunt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cum DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC. Quod est propositum.

[a] 31. sexti.

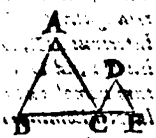
[b] 8. primi.

THEOR.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

30.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secūdum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.



HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ sint AB, DC, [a] erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa [b] erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: [c] Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

a 29. primi.

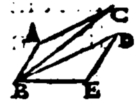
b 6. sexti.

c 32. primi.

d 14. primi.

S C H O L I V M.

DEBENT *autem prædicta duo triangula ita secundū* *unum angulum esse composita, ut uterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quẽ triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum uterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse aequales, & propterea triangula esse aequiangula; atque adeo ex BC, CE, unam rectam lineam componi, ut ex demonstratione liquet.*



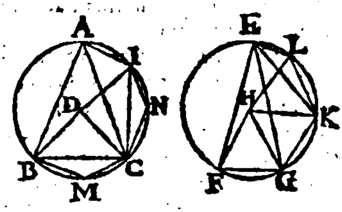
QVOD si uterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquae hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaque sunt ad angulum CBD, ita ut tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt unam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus uterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, ut perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

32\. ## THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN aequalibus circulis, anguli eandẽ habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli aequales ABC, EFG, quorum centra D,H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC,

BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcũ FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG; & angulum



BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehẽdunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, [a] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC; At vero GK, KL; ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, [b] erunt quoque æquales arcus BC, CI; [c] ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione ęquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, [d] necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est; Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [e] Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC,

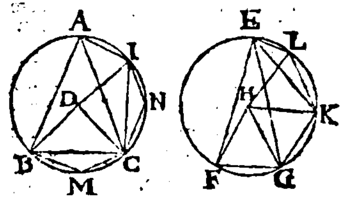
[a] 1. quarti.
[b] 28. tertij.
[c] 27. tertij.
[d] 27. tertij.
[e] 6. defin. quinti.

BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

QVONIAM vero, vt angulus BDC, ad angulum FHG, [a] ita est angulus BAC, ad angulum FEG; [b] cum illi horum sint dupli; perspicuum est, [c] ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

a 15. quinti.
b 20. tertij.
c 11. quinti.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, [d] qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, [e] atque adeo inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI. æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, [f] quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [g] Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent



d 27. tertij.
e 24. tertij.
f 4. primi.
g 6. diffin. 5. quinti.

bent rationem cum periphærijs, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. [a] Quare & inter se eadem erunt. [a] 11. quinti.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, ut est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, ut sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

NAM ut est angulus in centro ad angulum rectum in centro, [b] ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit ut angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiã, per ea, quæ ad 22 propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est ut angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. [c] Cum sit, ut angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, ut quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.

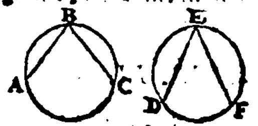
[b] 33. sexti.

[c] 33. sexti.

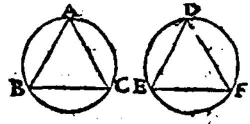
SCHO-

SCHOLIVM.

CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum, qui circumferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint .n. circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam cõstituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

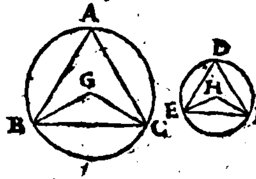


NON obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similiũ, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoq; sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ; veluti in expositione prædicta definitionis docuimus. Sint enim primũ duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF. Quo posito, segmẽta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere



habere eãdem proportionem ad integras circulorum circumferẽtias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, [a] arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, [b] eandem proportionem habebunt. Atqui idcirco, quæ pars est arcus BAC, totius circũferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.

[a] 26. tertii.
[b] 7. quinti.



SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales, [c] cum hi illorum dupli existant. [d] Quare quatuor recti ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum H. Atqui ut quatuor recti ad angulum G, ita est tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BC: Et ut quatuor recti ad angulum H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. [e] Igitur ut tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conversionem ergo rationis erit quoq; ut tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcũ EDF. Et convertendo, ut arcus BAC, ad totã circũferẽtiã ABCA, ita arcus EDF, ad totã circumferentiã DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD. Quod est propositum.

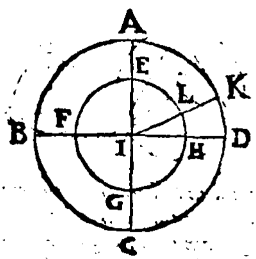
[c] 20. tertii.
[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in sphaeram, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I, descripti. Si igitur egrediantur e centro I, duæ rectæ IB, ID, efficientes vnam lineam rectam BD, manifestum est, arcus BAD, FEH, similes esse, cum sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ IA, ID, constituentes angulum rectum AID, perspicuum quoque est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

EMITTANTVR iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunque angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt est arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. 2. huius propos. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; [a] *erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH: ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum.*

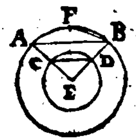
[a] 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HL, insistunt in centro I, anguli æquales, immo idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

SED

SED placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosij proposuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris.



SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, descripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunque EA, EB, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntque arcus AB, CD, similes, vt proximè demonstrauimus. Et quoniam rectæ EA, EB, sectæ sunt in C, D, proportionaliter, quòd tam EA, EB, quàm EC, ED, inter se æquales sint; [a] erunt ductæ rectæ AB, CD, parallelæ; atque ideo triangula EAB, ECD, ex Coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. [b] Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quàm EC. [c] Igitur & AB, maior erit quàm CD. Accommodetur ergò ipsi CD, in circulo AB, æqualis BF; eritque ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quàm vt similis sit ipsi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorque est arcus CD, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.

[a] 2. sexti.
[b] 4. sexti.
[c] 14. quinti.

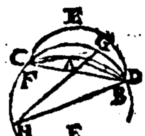
HINC perspicuum est, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quàm vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipsi BF, auferat arcum CD, maiorem, quàm vt similis sit arcui FB; multò magis linea maior quã CD, auferet maiorem arcum, quàm vt similis sit arcui FB; cum illa maiorem arcum abscindat, quàm CD, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HÆC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt

BF,

BF, CD, ut ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm ut similis sit arcum semicirculo minori circuli maioris, multo maiorem esse arcum semicirculo maiorē circuli minoris, quàm ut similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quòd si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, ut quando est diameter circuli; liquidò constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quàm ut similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neque opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, & absolutè inæquales, ita ut arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quàm ut similis sit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatq; CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim rectæ CD, recta FB, cadet necessario arcus CED, extra arcū FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra se contineat, sintq; ambo arcus in eandem partem caui, atq; eadem extrema puncta habeant, ut vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neq; vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferētia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atque adeo æquales erunt circuli. quod est absurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcū FGB, cuiusmodi est arcus CAD; quoniam ut paulò ante ostēdimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm ut similis sit arcui FGB; sumatur arcus BFH, arcui CAD, similis, atque ideo maior arcu FGB: Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, utcunque, ducantur rectæ AF, AB, productaq; recta FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. Itaque quoniam arcus



CAD,

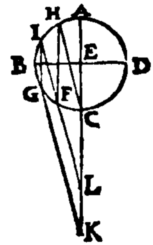
CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes aequales.[a] *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multò maior angulus CAD, angulo HGB. quod est absurdum. Ostensus enim est aequalis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: sed neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo extra; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum est. Quod est propositum.* [a] 16. primi.

EX quo liquidò constat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

NEQVE verò omittenda videtur eximia quaedam proprietas circuli, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat, & quam lib. 3. demonstrare debueramus, nisi memoria excidisset. Ea est eiusmodi.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelae agantur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes aequales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximae parallelae recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quae producta est, simul sumptis, aequalis.

IN circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante BC, in quotuis partes aequales CF, FG, GB, & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectae FH, GI, quae ex scholio propos. 27. lib. 3. ipsi AC, parallelae erunt, cum arcus aequales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur



recta BG, occurrens AC, producta in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis AC, HF, IG, simul sumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum AK, conueniant; a quoniam anguli CHF, HFI, arcubus æqualibus CF, HI, insistẽtes, sunt æquales; b erunt rectæ HC, IL, parallelæ: Est autẽ & FH, ipsi CL, parallela. Parallelogrammum ergo est CHFL; c ac proinde rectæ CL, recta FH, æqualis erit. Eadem ratione erit KL, ipsi GI, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.

a 27. tertij.

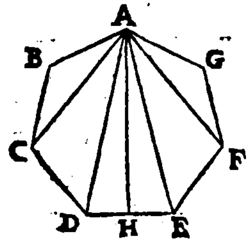
b 27. primi.

c 34. primi.

HVC quoque referenda est propositio sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quæ per incuriam in lib. 4. demonstrata non est, vt ad finem eiusdem lib. 4. diximus. Nimirum.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam; Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes



omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt, anguloſq; continēt æquales, ex hypotheſi; [a] erūt & baſes AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quā BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rurſus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia ſunt, continentq; angulos æquales, vt oſtenſum eſt; [b] erunt & baſes AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppoſitum peruentum ſit. Vbi quia rurſus toti anguli CDE, FED, æquales ſunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia ſint, anguloſque æquales contineant, [c] erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, ſint æquales, ſinguli ſingulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, ſectus erit bifariam. Quod eſt propoſitum.

[a] 4. primi.

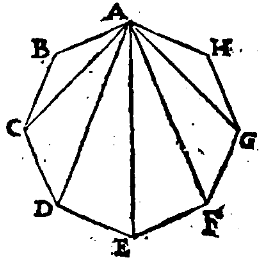
[b] 4. primi.

[c] 4. primi.

SED iam recta AH, ſecat angulum BAG, bifariam. Dico eam ſecare quoque latus oppoſitum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non ſecari bifariam, ſi ex A, ducatur alia recta ſecans DE, bifariam, ſecabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, ſecabunt bifariam. quod eſt abſurdum, cum vna medietas maior eſſet quàm altera. Recta ergo AH, ſecans angulum BAG, bifariam, ſecat quoque latus DE, bifariam. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde figura æquilatera & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppoſitum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, ſecare angulum BAH, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonſtrabimus, vt in antecedente

 figura,



figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE; esse æquales, singulos singulis; ideoque totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod est propositum.

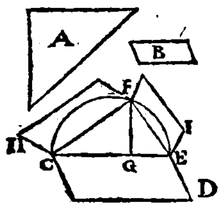
SED recta iam AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumq; diuidens bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt: quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatque propterea, vt demonstratum est proximè, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

HOC demonstrato, perspicuum est, rectas lineas, quæ duos angulos proximos figuræ æquilateræ & æquiangulæ secent bifariam, se mutuò secare intra figuram, antequam ad opposita latera, vel angulos oppositos perueniant: ac proinde rectè demonstrari posse, punctum illud sectionis esse centrum circuli intra, vel circa figuram describendi, vt factum est propos. 13. & 14. lib. 4.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur; Hinc autem exordium capiemus.

I.

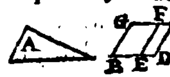
A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positum. [a] *Constituatur rectilineum CD, æquale quidem ipsi A, simile vero, & similiter positum ipsi B; superq; vnum eius latus CE, semicirculus describatur CFE.* [b] *Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, EF,* [c] *super quas construantur rectilinea FH, FI, similia similiterque posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod iubetur:* [d] *Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat;* [e] *erit rectilineum CD, æquale rectilineis HF, FI, atque adeo, si auferatur rectilineum FI, simile similiterq; positum ipsi B, ex rectilineo CD, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineum HF, simile quoque ipsi B, similiterq; positum. Quod autem rectilineum ablatum FI, sit tertia pars rectilinei CD, ita ostendetur.* [f] *Quoniam est vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE;* [g] *quod triangula CGF, CFE, sint similia: Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales sunt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. huius lib.* [h] *Itẽ rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineũ FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI simul, hoc est, rectilineum CD, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE,*

[a] 25. sexti.
[b] 9. sexti.
[c] 18. sexti.
[d] 31. tertij.
[e] 31. sexti.
[f] 4. sexti.
[g] 8. sexti.
[h] 19. vel 20. sexti.

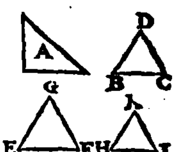
ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.



QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. [a] 45. primi. [a] *Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata; & per E, agatur ipsi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam esse partem ipsius DG, hoc est rectilinei dati A. Cum enim sit* [b] *ut DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autem per constructionẽ DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.* [b] 1. sexti.

II.

DVOBVS datis rectilineis, tertiam proportionalem inuenire.



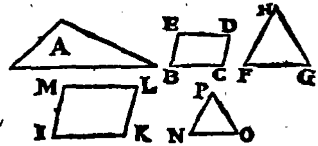
SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum sit tertium proportionale. [c] 25. sexti. [c] *Constituatur ipsi A, rectilineum æquale EFG, simile vero similiterque positum ipsi BCD. Deinde lateribus homologis EF, BC,* [d] 11. sexti. [d] *inueniatur tertia linea proportionalis HI;* [e] 18. sexti. [e] *super quam constituatur rectilineum HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectæ EF, BC, HI;* [f] 22. sexti. [f] *erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.*

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

TRIA

TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale. [a] Construatur rectilineũ IKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterq; positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, [b] inuenta quarta proportionali NO; [c] constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterque positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales; [d] erunt & rectilinea similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.

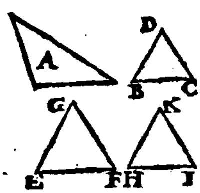


[a] 25. sexti.
[b] 12. sexti.
[c] 18. sexti.
[d] 22. sexti.

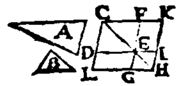
IIII.

DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniẽdum est proportionale. [e] Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC, [f] inuenta media proportionali HI; [g] construatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, mediũ esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI, BC; [h] erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HIK, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod est propositum.



[e] 25. sexti.
[f] 13. sexti.
[g] 18. sexti.
[h] 22. sexti.



ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. [a] Constituatur ipsi A, aequale parallelogrammũ quodcunq; CDEF; [b] Ipsi vero B, aequale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positum ipsi CDEF. Connectanturq; haec parallelogramma ad angulos aequales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quae ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, vna quoque linea recta componatur ex FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammũ KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc est, ita EI, ad EG; [c] quòd rectae EI, EG, rectis GH, HI, aequales sint. Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG: [d] Vt autẽ DE, ad EI, ita est DF, ad EK; & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.

a 45. primi.
b 25. sexti.
c 34. primi.
d 1. sexti.

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DF, GI, similia sint, similiterque posita, [e] consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, aequalia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI, [f] quòd vtraque proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod est propositum.

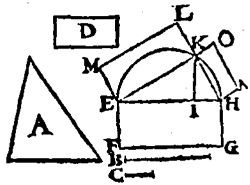
e 26. sexti.
f 1. sexti.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea aequalia constituere, quae similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio rectae B, ad C, oporteatque constituere duo rectilinea, quae ipsi A, aequalia sint, habeantque proportionem, quam B, & C; ac similia similiterque posita sint rectilineo cuius D. [g] Constituatur rectilineum EFGH, aequale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi

g 25. sexti.



ipsi D. Diuiso deinde latere eius EH, in I, secundum proportionẽ B, ad C, ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus: describatur circa EH, semicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ EK, HK.[a] Describantur iam super EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipsi EG, vel ipsi D, similia similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG, seu ipsi A, habereq; proportionem datam B, ad C.[b] Cum enim angulus EKH, in semicirculo existens rectus sit; [c] erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum sint similia inter se, similiterq; descripta. [d] Quoniam vero est, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, cum triangula EIK, EKH, similia sint; Est autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK; quòd tres EI, IK, IH, sint, ex corollario propos. 8. huius lib. proportionales: [e] Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologum KH; erit vt EI, ad IH; hoc est, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia EL, HO, quæ similia sunt, similiterq; posita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.

[a] 18. sexti.
[b] 31. tertij.
[c] 31. sexti.
[d] 4. sexti.
[e] 19. vel 20. sexti.

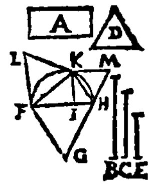
VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. [f] Inuenta ipsis B, C, tertia proportionali E; [g] fiat rectilineum FGH, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuisoque latere

[f] 11. sexti.
[g] 25. sexti.

FH,

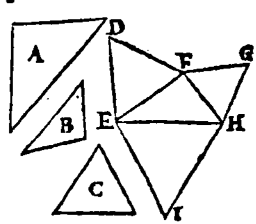


FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; describatur circa FH, semicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ FK, HK. [a] *Describantur iam super FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterq; posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumq; latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C.* [b] *Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit;* [c] *erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque & rectilineo A, æqualia.* [d] *Quoniam vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicata proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.*

[a] 18. sexti.
[b] 31. tertij.
[c] 31. sexti.
[d] 4. sexti.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.



DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterque positum ipsi C. [e] *Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterque positum ipsi C. Item ipsi B, æquale cõstituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positũ. Deinde rectilinea DEF, GFH,*

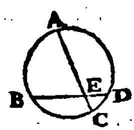
[e] 25. sexti.

GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta EH, [a] *super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C.* [b] *Perspicuum autem est EHI, aquale esse duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.* [a] 18. sexti. [b] 31. sexti.

BREVIUS. Constituatur parallelogrammum aquale duobus rectilineis A, & B, per ea, qua ad propos. 45. lib. 1. docuimus. [c] *Si enim huic parallelogrammo cōstruxerimus aquale rectilineum EHI, quod simile sit, similiterq́ positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum EHI, aquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq́ positum rectilineo C. Quod erat faciendum.* [c] 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: Erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

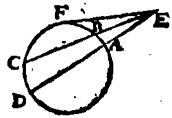


IN circulo ABCD, se mutuo secent recta AC, BD, in E. Dico segmenta AE, EC, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. [d] *Cum enim rectangulum sub AE, EC, comprehensum aquale sit rectangulo sub BE, ED, contento;* [e] *erunt latera circa aquales angulos reciproca. Quod est propositum.* [d] 35. tertij. [e] 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

EXTRA

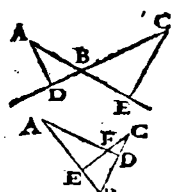


EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB. esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB: Vel vt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F; [a] erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt: [b] Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. [c] Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tam rectangulũ sub EC, EB, quàm rectangulum sub ED, EA; [d] erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quàm tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo EF, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

[a] 36. tertij.
[b] 14. sexti.
[c] 36. tertij.
[d] 17. sexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & prioris lineę assumptę perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



DVÆ rectæ AB, CB, se mutuo secẽt in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidem ad CB, at vero CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsas vero introrsum, si idem angulus acutus fuerit, vt figuræ indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior vero inter sectionem

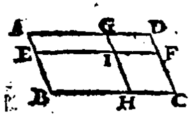
B, &

B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cũ enim anguli ABD, ADB, trianguli A B D, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti sunt; a & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. b Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt A B, ad B C, ita BD, ad BE. Quod est propositum. a 15. primi. b 4. sexti.

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula; c erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum. c 4. sexti.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

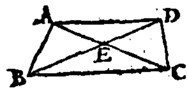


IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. d Cum enim sit, vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; e Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum. d 1. sexti. e 11. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVI-



DIVIDANT diametri A C, BD, *se mutuo secantes in* E, *quadrilaterum* ABCD. *Dico quatuor triangula* AED, C E D, A E B, C E B, *esse*

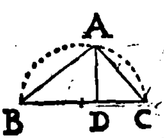
[a] 1. sexti. *proportionalia*. [a] *Erit enim vt* AE, *ad* E C, *ita triangulum* AED. *ad triangulum* CED; *& triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB.

[b] 11. quinti. [b] *Quare vt triangulum* AED, *ad triangulum* CED, *ita triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB. *Eademque ratione ostendes esse, vt* B E A, *ad* D E A, *ita* BEC, *ad*

[c] 1. sexti. DEC; [c] *cum vtraque proportio eadem sit proportioni* BE, *ad* ED. *Constat ergo propositum*.

XIIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



IN rectangulo triangulo A B C, *ex angulo recto* A, *demissa perpendicularis* A D, *secet basim* BC, *in* D, *extrema ac media ratione, sitque maius segmentum* B D; *ac propterea ex theoremate* 9. *ad propos.* 47. *lib.* 1. *latus* AB, *latere* A C, *maius*. *Dico tria latera* BC, BA, AC, *esse continuè proportionalia*. *Quoniam enim*

[d] 17. sexti. *per hypothesin est vt* BC, *ad* BD, *ita* BD, *ad* DC; [d] *erit quadratum ex* BD, *rectangulo sub* BC, CD, *aequale*. *Rursus quia ex coroll. propos.* 8. *huius lib.* AC, *media proportionalis est inter*

[e] 17. sexti. BC, CD; [e] *erit quoque quadratum ex* AC, *eidem rectangulo sub* BC, CD, *aequale*. *Quare quadrata ex* BD, AC, *aequalia inter se erunt, ac proinde & rectae ipsae aequales erunt*. *Est autem, ex coroll. propos.* 8. *huius lib.* AB, *inter* BC, BD, *media propor-*

proportionalis. Igitur eadem A B, *media proportionalis erit inter* BC, AC: *hoc est, erit vt* BC, *ad* AB, *ita* A B, *ad* A C. *Quod est propositum.*

SINT deinde tria latera B C, A B, A C, *in triangulo rectangulo* ABC, *continuè proportionalia, hoc est, sit* B C, *ad* AB, *vt* AB, *ad* AC, *demittaturque perpendicularis* AD, *ad basim* BC. Dico BC, *sectam esse in* D, *extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC: *Est autem vt* BC, *ad* AB, *ita quoque* AB, *ad* BD; *quòd* AB, *media proportionalis sit inter* BC, BD, *ex coroll. propos. 8. huius lib.* [a] *erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AB, *ad* BD: [b] *ac proinde æquales erunt* AC, & BD. [c] *Vt igitur* AC, *ad* CD, *ita erit* BD, *ad* CD. *Sed vt* AC, *ad* CD, *ita est* B C, *ad* AC, *quod ex coroll. propos. 8. huius lib.* A C, *sit media proportionalis inter* BC, & CD. [d] *Igitur erit quoque* BC, *ad* AC, *hoc est, ad* BD, *vt* AC, *hoc est, vt* BD, *ad* CD: *ac propterea* B C, *in* C, *secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

[a] 11. quinti. [b] 9. quinti. [c] 7. quinti. [d] 11. quinti.

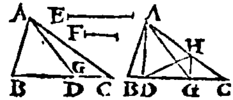
ITAQVE si super datam rectam BC, *construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta* B C, *extrema ac media ratione in* D. *Descripto deinde semicirculo* B A C, *circa eandem datam* B C, *erigenda erit ad* B C, *perpendicularis* DA, *iungendaq; rectæ* B A, C A. *Triangulum enim* ABC, *rectangulum erit,* [e] *cum angulus* B A C, *in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicularis* AD, *secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est.*

[e] 31. tertij.

XIIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineã rectam ducere, quę triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum ABC, *oporteatque à dato puncto* D, *in eius latere* BC, *lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam* E, *ad* F. *Diuidatur* BC, *in* G, *secundum proportionem* E, *ad* F, *cadatque primo*



primò punctum G, *in datum punctum* D, *vt in prima figura, ducaturque recta* DA. [a] *Quoniam igi-*
a 1. sexti. *tur est vt* BD, *ad* DC, *ita triangulum* BDA, *ad triangulum* CDA, *secabit recta* DA, *triangulum datum secundum proportionem datam* B G, *ad* GC, *hoc est*, E, *ad* F. *Quod erat faciendum.*

CADAT deinde punctum G, *inter* C, *&* D, *vt in secunda figura. Ducatur ergo recta* D A, *cui per* G, *parallela agatur* G H, *coniungaturq́; recta* D H. *Dico rectam* D H, *secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* E,
b 37. primi. *ad* F, *seu vt* BG, *ad* GC. *Ducta enim recta* GA; [b] *erũt triãgula* H G A, G H D, *æqualia, cum sint super eandem basin* GH, *& inter easdem parallelas* GH, DA. *Addito igitur communi triangulo* CGH, *fient æqualia triãgula* CGA, CDH:
c 7. quinti. [c] *Ac proinde triangulum* ABC, *eandem habebit proportionẽ*
d 17. quinti. *ad* CGA, *& ad* CDH. [d] *Diuidendo igitur, erit vt triangulum* BGA, *ad triangulum* CGA, *ita trapezium* B D H A,
e 1. sexti. *ad triangulum* CDH. [e] *Est autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur erit & trapezium* B D H A, *ad triangulum* CDH, *vt* BG, *ad* GE, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositũ.*

CADAT tertio punctum G, *inter* B, *&* D, *ducaturq́; recta* DA, *cui rursus per* G, *agatur parallela* GH. *Dico igitur rursus, rectam ductam* D H, *secare triangulum* A B C, *secundum proportionem datam* E, *ad* F, *hoc est, esse triangulum* BDH, *ad trapezium* CDHA, *vt* E, *ad* F. *Ducta enim recta*
f 37. primi. G A; [f] *erunt, vt prius, triangula* HGA, GHD, *æqualia; additoque communi* B G H, *æqualia fient* B G A, B D H.
g 7. quinti. [g] *Quare erit* ABC, *ad* BGA, *vt ad* BDH. [h] *Diuidendo er-*
h 17. quinti. *go erit* CGA, *ad* BGA, *ita trapezium* CDHA, *ad triangulum* BDH; *& conuertendo, vt* BGA, *ad* CGA, *ita* BDH,
i 1. sexti. *ad trapezium* CDHA. [i] *Est autem* B G A, *ad* C G A, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur &* B D H, *ad trapezium* CDHA, *erit vt* BG, *ad* GC, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositum.*

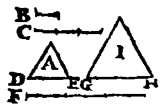
HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato

puncto

puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ addatur vnitas, quæ ante deerat.

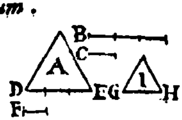
XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineũ A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterq; positum. Quod erat faciendum.

a 12. sexti.
b 13. sexti.
c 18. sexti.

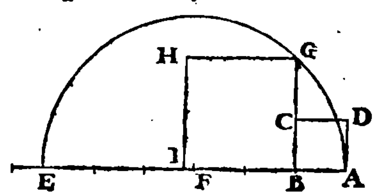


NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterq; positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus,

bimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur ut 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim construemus quoque rectilineum simile, similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à praecedenti differt, vt mox ostendemus.

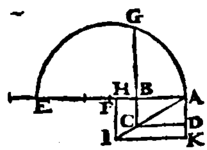


SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandū. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi AB, aequales, a puncto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circumferentiam vsque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplū esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiā, ita BH, quadratum secundae, ad AC, quadratum tertiae, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD

QVOD si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum recta BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulũ ABCD, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producto sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protracta in I, perficiaturque parallelogrammum HK; ᵃerit HK, ipsi BD, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secundæ æqualis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum. Quod est propositum. ᵃ 24. sexti.

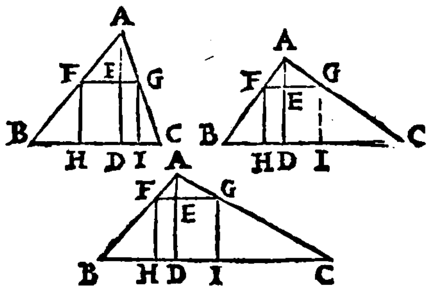


EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod hæc simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob caussam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.



SIT datũ triangulum ABC, acutãgulũ. Ex angulo quocunq; A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptum, esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. &

[a] 4. sexti. *componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. [a] Sed vt DC, ad AD, ita est EG, ad AE; quòd per coroll. propos. 4. huius*

[b] 22. quinti. *lib. triangula ADC, AEG, sint similia. [b] Igitur erit ex æquo, vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia vero per constructio-*

[c] 22. quinti. *nem est, vt AD, ad BC, ita AE, ad ED; [c] erit rursus ex æquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis, immo eadem. Aequalis igitur est & FG, ipsi*

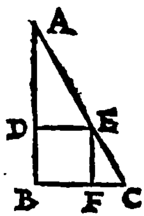
[d] 34. primi. *ED. [d] Quare cum FG, ipsi HI; & ED, ipsis FH, GI, æqualis existat; Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia*

[e] 29. primi. *inter se. [e] Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in paralle-*

parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelã ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. [a] Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD; quòd triãgula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autem per constructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, [b] erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.



a 4. sexti.

b 22. quinti.

VERVM hoc problemate Commandini multò ingeniosius est id, quod sequitur.

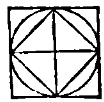
XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

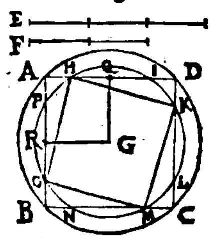
SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem, quam recta E, ad rectam F, quæcunque ea sit, dummodo maior non sit, quàm dupla. Nã si latera quadrati

 secentur

secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem eum eo centrum habens. Et quia



circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est; erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum A B C D, describi nequeat, quàm illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquidò constat, quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inueniatur ex propos. 15. huius scholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Eritque eius semidiameter maior, quàm semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, subduplũ est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, MO, OH, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, esse quadratũ in circulo HIKLMNOP, descriptũ, atque adeo æquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionẽ E, ad F. Descripto .n. circulo circa datũ quadratũ ABCD, ex cẽtro G, ductisq́; ex G, ad latera AD, AB, perpẽdicularibus GQ, GR, [a] secta erunt tam rectæ AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales sunt, [b] æqualiter distabunt à cẽtro G, proptereaq́; & HI, OP, æqualiter ab eodem centro distabunt: [c] Quare æquales erunt HI, OP, ideoq́; & earum semisses QH, QI, RO, RP, inter se erunt æquales.



[a] 3. tertij.
[b] 14. tertij.
[c] 14. tertij.

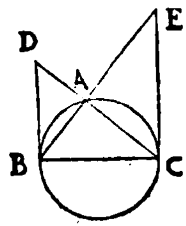
æquales. Sunt autem & semisses QA, QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, DI, PA, OB. Eademq; ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, ostendetur æquales NB, MC, LC, KD, & inter se, & illis quatuor HA, DI, PA, OB. Item quia æquales sunt HI, OP, si addantur æquales ID, PA, fient tota æquales HD, AO: Atq; eadem de causa æquales erunt BM, KC, & inter se, & illis duabus HD, AO. Itaq; quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, nimirum rectos; [a] erunt & bases HK, HO, æquales. Eodemq; modo demonstrabūtur KM, MO, æquales & inter se, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo est figura HKMO. Dico & rectangulam esse. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia sint, [b] erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt OHK, HKM, KMO, MOH, [c] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum est, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumque circumscribat. Circulus enim HKMO, descriptus est ad interuallum semidiametri circuli inuento quadrato circumscripti. Quod est propositum.

a 4. primi.
b 28. tertij.
c 31. tertij.

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmēto interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. sicut &, quæ sequitur. Vtramq; autē demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC,



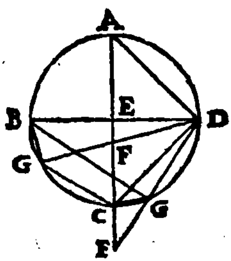
ad quam in B,C, excitētur duæ perpendiculares BD, C E, ac per assumptum quoduis punctū A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, educta recta B A, C A, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub E B, B A, quàm sub DC, C A, quadrato diametri B C, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demissa est C A, ad basin B E, perpendicularis; [a] 31. tertij. *quod angulus BAC, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare* [b] 17. sexti. *rectangulum sub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ B C. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub DC, CA: propterea quod B C, media quoque proportionalis est inter D C, C A, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.*

XIX.

SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam; erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circūferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos duæ diametri AC, B D, ducaturq; ex puncto D, recta vtcunque D F, secans diametrum A C, in F, & circumferentiam

cumferentiam in G. Dico rectangulum sub FD, DG, quadrato intra circulum descripto esse aequale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, aequiangula inter se. Nam angulus CDF, cõmunis est, & angulus DCF, angulo DGC, aequalis; [a] ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, aequalis. Quòd autem anguli DCF, DGC, aequales sint, ita ostendemus. Si punctum quidem F, est intra circulum; [b] erunt anguli DCF, DGC, insistentes quadrantibus aequalibus AD, DC, aequales: Si vero punctum F, est extra circulum, ducta recta AD, [c] erunt anguli DAC, DCA, insistentes quadrantibus aequales: [d] Sed tam DAC, DGC, [e] quàm DCA, DCF, aequales sunt duobus rectis. Igitur ablatis aequalibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, aequales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, aequiangula sint; [f] erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc est, tres lineae DF, DC, DG, continuè proportionales erunt. [g] Igitur rectangulum sub extremis DF, DG, aequale est quadrato mediae DC, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum DC, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.



a 32. primi.
b 27. tertij.
c 27. tertij.
d 22. tertij.
e 13. primi.
f 4. sexti.
g 17. sexti.

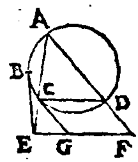
ALITER. Ducta recta BG; [h] erit angulus BGD, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, [i] aequiangula erunt. [k] Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG [l] Rectangulum ergo sub DF, DG, aequale erit rectangulo sub DB, DE. [m] Sed rectangulo sub DB, DE, aequale est quadratum rectae AD, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quòd ex coroll. propos. 8. huius lib. AD, media proportionalis est inter DB, DE, vt patet, si ducatur recta AB. [n] Fiet enim triangulum rectangulũ BAD, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit AE. Igitur & rectangulum sub DF, DG, eidem quadrato rectae AD, aequale erit. Quod est propositum.

h 31. tertij.
i 32. primi.
k 4. sexti.
l 16. sexti.
m 17. sexti.
n 31. tertij.

DATO

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.



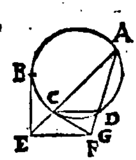
HOC problema non minus acutum quàm curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multò clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior est, quàm EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturq́; recta AF, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt;

[a] 17. sexti. *[a] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: [b] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangu-*
[b] 36. tertij. *lum sub EA, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit.*
[c] 22. tertij. *[c] Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G,*
[d] 13. primi. *[d] qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis:*
[e] 32. tertij. *[e] Est autẽ & angulus DCG, angulo A, in alterno segmẽto æqualis.*

Igitur

Igitur anguli DCG, CGE, inter se æquales erunt, atque ideo, cum sint alterni, [a] rectæ CD, EF, parallelæ erunt. Quod est propositum. [a] 27.primi.

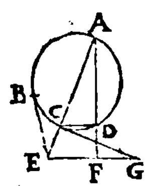
CADAT deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando EF, ipsi EB, æqualis est. Ducta igitur rursus recta GC, circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturq́; recta AF, secans circumferentiam in D.



Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt EB, EF; [b] estque rectangulum sub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub EF, æquale. Quare [c] si circa triangulum ACF, circulus describatur, cum eum secet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur, [d] tanget recta EF, eum circulum. [e] Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: [f] Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni, [g] erunt rectæ CD, EF, parallelæ. Quod est propositum.

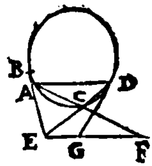
[b] 36.tertij. [c] 5.quarti. [d] 37.tertij. [e] 32.tertij. [f] 32.tertij. [g] 27.primi.

CADAT tertio punctum G, vltra F. quod contingit, quando EF, minor est quàm EB. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt, [h] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: [i] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub AE, EC.



Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. [k] Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CF, inter se æquales erũt: [l] Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, [m] parallelæ erunt CD, EF. Quod est propositum.

[h] 17.sexti. [i] 36.tertij. [k] 21.tertij. [l] 32.tertij. [m] 27.primi.



SI vero ex eisdem punctis datis E, F, *ducenda sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferentiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ puncta* E, F, *connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta* EB, *circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis* EF, EB, *tertia proportionalis* EG, *cadatque primum* G, *punctum inter* E, F. *Ducta igitur ex* G, *recta* GD, *tangente circulum in* D, *non tamen versus priorem tangentem* EB, *ducatur* ED, *secans circumferentiam in* C, *puncto, per quod recta eijciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam* AD, *ductam esse rectæ* EF, *parallelam. Quoniam enim tres rectæ* EF, EB, EG, *continuè sunt proportionales,*

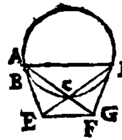
a 17. sexti. [a] *erit rectangulum sub* EF, EG, *quadrato ex* EB, *æquale:*

b 36. tertij. [b] *Est autem & rectangulum sub* ED, EC, *eidem quadrato ex* EB, *æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub* EF, EG, *& sub* ED, EC: *ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta* C, D, F, G, *circulus describi potest.*

c 21. tertij. [c] *Duo ergo anguli* CDG, *&* F, *in eodem segmento* CDFG, *illius circuli, cuius chorda esset ducta recta* CG, *inter se erunt æquales.*

d 32. tertij. [d] *Est autem angulus* CDG, *angulo A, in alterno segmento dati circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* F, *angulo A, alterno æqualis erit,*

e 27. primi. [e] *ideoque parallelæ erunt* AD, EF. *Quod est propositum.*



CADAT deinde punctum G, *in* F. *Ducta igitur rursus recta* GD, *tangente circulum in* D, *non tamen versus priorem tangentem* EB, *ducatur recta* ED, *secans circumferentiam in* C, *puncto, per quod recta ducta ex* F, *secet circumferentiam in A. Dico ductam rectã* AD, *rectæ* EF, *parallelã esse. Cũ enim æquales sint* EB, EF, *(quòd sit* EF, *ad* EB, *ut* EB, *ad* EF.) *erũt earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub* ED, EC, *quadrato ex* EB, *æquale. Igitur & quadrato ex* EF.

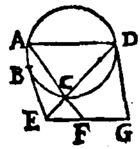
f 5. quarti. *Quia ergo,* [f] *si circa triangulum* CDF, *circulus describatur,*

g 37. tertij. *recta* ED, *eum secat, &* EF, *applicata est,* [g] *tanget* EF, *eum*

h 32. tertij. *circulum.* [h] *Angulus ergo* EFC, *angulo* FDE, *in alterno segmento*

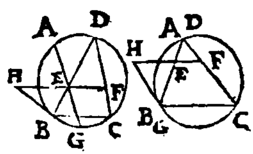
segmento eius circuli æqualis erit:[a] *Est autem angulus* FDE, *angulo A, in alterno segmento circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* EFC, *eidem angulo A, alterno æqualis erit.* [b] *Quare parallelæ erunt* AD, EF. *Quod est propositum.* [a] 32. tertij. [b] 27. primi.

CADAT *tertio punctum* G, *vltra* F. *Facta ergo eadem cõstructione, cum tres rectæ* EF, EB, EG, *sint continuè proportionales,* [c] *erit rectangulum sub* EF, EG, *siue sub* EG, EF, *æquale quadrato ex* EB: [d] *Est autem eidem quadrato æquale rectangulũ sub* ED, EC. *Igitur rectãgulum sub* EG, EF, [c] 17. sexti. [d] 36. tertij.



rectangulo sub ED, EC, *æquale erit; proptereaq; ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta* C, D, G, F, *circulus potest describi.* [e] *Duo ergo anguli* EDG, CFG, *oppositi in quadrilatero* CDGF, *intra eum circulum descripto æquales erũt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad* F, [f] *qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi* CFG, *reliquus* CDG, *reliquo* CFE, *æqualis erit:* [g] *Est autem angulus* GDC, *angulo A, in alterno segmento dati circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* CFE, *eidem angulo* CAD, *alterno æqualis erit:* [h] *atque idcirco parallelæ erunt* AD, EF. *Quod est propositum.* [e] 22. tertij. [f] 13. primi. [g] 32. tertij. [h] 27. primi.

SED *sint iam data puncta* E, F, *intra circulum* ABCD. *Ducta recta* AG, *per* E, *vtcunque, inueniatur tribus rectis* EF, EA, EG, *quarta proportionalis, cui æqualis sit* EH, *ducaturque* HB, *circulum tangens in* B. *Ducta enim recta ex* B, *per* E,



secante circumferentiam in D, *& ex* D, *per* F, *recta secante circumferentiam in* C; *dico ductam rectam* BC, *parallelam esse rectæ* EF. *Quia enim ita est* EF, *ad* EA, *vt* EG, *ad* EH; [i] *erit rectangulum sub* EF, EH, *æquale rectangulo sub* EA, EG: [k] *Est autem rectangulum sub* EA, EG, *æquale rectangulo sub* ED, EB. *Igitur & rectangulum sub* EF, EH, *eidem rectangulo sub* ED, EB, *æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta* B, H, D, F, *circulus poterit describi.* [l] *Quare duo anguli* HBD, *&* DFH, *in eodem* [i] 16. sexti. [k] 37. tertij. [l] 21. tertij.

segmen-

segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erunt. a Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. b Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod est propositũ.

a 32. tertij.

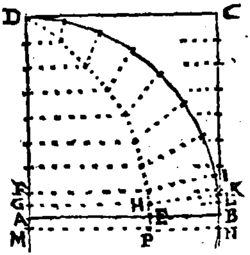
b 28. primi.

QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

DE MIRABILI NATVRA lineæ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nõnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquàm autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reijciatur, tanquàm inutilis, & quæ describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse cẽsuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus. Etsi autem ibidem Quadraturam circuli diximus à nobis differri in librum de mensurationibus magnitudinũ, visum tamen est, eam breuiter hic attingere, reijciendo pleniorem eiusdem Quadraturæ tractationem in eum, quem diximus, librum. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.

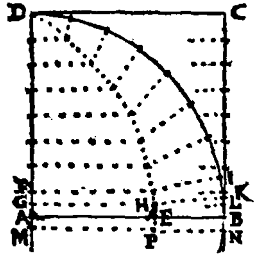
IN



IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa cẽtrum A, quàm latus supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoq;, ita vt quo tempore punctum D, circumferẽtiam DB, uniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, uniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus uniformes, quorum unus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus DB, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & utrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, & singulæ rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex cẽtro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendãtur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primã, secunda secundã, &c.

per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed aequabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, *secans semidiametrum* A B, *in* E.



SED quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, *si satis exigua non sit, secabimus bifariã continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus* D B, *bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte* A F, *factæ sunt, vt particula BK, talis pars sit totius arcus* DB, *qualis pars est A G, totius lateris* A D. *Particulæ deinde A G, aequales abscindemus BL, BN, AM, ducemusq́; rectas occultas GL, MN.* Ducta *vero ex A, centro recta occulta A K, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, aequalem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus aequabili atque uniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in* E, *puncto, quod quaeritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint aequales, licet Geometricè loquendo, recta* A E, *semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Recta namque* G L, *A B, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino aequales iudicabuntur, quamuis verè AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.*

RECTAM porrò AD, *vocabimus latus Quadratricis, & rectam*

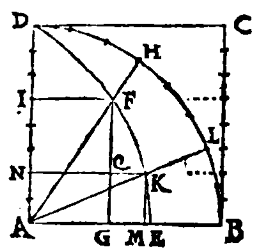
& rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrũ A, per arcum DB, eodem tempore moueatur uniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque uniformi; fit ut, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tũc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent uniformes, aut nõ eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quàm latus DC, perueniret. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus DB, emissa, & linea parallela per partes laterum DA, CB, ducta, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, ut ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxiæ, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, ut propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola usus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac deniq; eiusmodi sectiones insignem usum habent in re Gnomonica, ut ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, ut Geometricam. Adde quòd linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas pro-

portionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittãtur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittãturq; ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus; cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius recta DA, recta DI, cõtinet, propterea quòd recta AH, IF, se intersecãt in puncto F, Quadratricis:

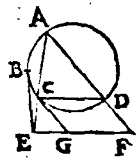
dratricis: Neque hac similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quàm recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB; si cogitetur talis pars minor quàm DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdũ, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH totius arcus DB, qua pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, qua pars est reliqua recta IA, totius lateris DA. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quàm conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c. [a] 34. primi.

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG; erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo, vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG. [b] 34. primi.

RVRSVS quia est, vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.



HOC problema non minus acutum quàm curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multò clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior est, quàm EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturque recta AF, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt;

[a] 17. sexti. *[a] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: [b] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangu-*

[b] 36. tertij. *lum sub EA, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus de-*

[c] 22. tertij. *scribi poterit. [c] Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G, [d] qui*

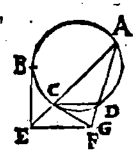
[d] 13. primi. *duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis: [e] Est*

[e] 32. tertij. *autẽ & angulus DCG, angulo A, in alterno segmẽto æqualis.*

Igitur

Igitur anguli DCG, CGE, inter se æquales erunt, atque ideo, cum sint alterni, [a] rectæ CD, EF, parallelæ erunt. Quod est propositum. [a] 27. primi.

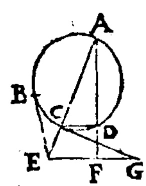
CADAT deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando EF, ipsi EB, æqualis est. Ducta igitur rursus recta GC, circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturque recta AF, secans circumferentiam in D.



Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt EB, EF; [b] estque rectangulum sub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub EF, æquale. Quare [c] si circa triangulum ACF, circulus describatur, cum eum secet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur, [d] tanget recta EF, eum circulum. [e] Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: [f] Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni, [g] erunt rectæ CD, EF, parallelæ. Quod est propositum.

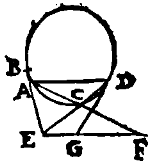
[b] 36. tertij.
[c] 5. quarti.
[d] 37. tertij.
[e] 32. tertij.
[f] 32. tertij.
[g] 27. primi.

CADAT tertio punctum G, vltra F. quod contingit, quando EF, minor est quam EB. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt, [h] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: [i] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub AE, EC.



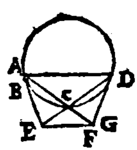
Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. [k] Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CF, inter se æquales erũt: [l] Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, [m] parallelæ erunt CD, EF. Quod est propositum.

[h] 17. sexti.
[i] 36. tertij.
[k] 21. tertij.
[l] 32. tertij.
[m] 27. primi.



SI vero ex eisdem punctis datis E, F, *ducenda sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferentiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ puncta* E, F, *connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta* EB, *circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis* EF, EB, *tertia proportionalis* EG, *cadatque primum G, punctum inter* E, F. *Ducta igitur ex G, recta* GD, *tangente circulum in* D, *non tamen versus priorem tangentem* EB, *ducatur* ED, *secans circumferentiam in* C, *puncto, per quod recta eijciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam* AD, *ductam esse rectæ* EF, *parallelam. Quoniam enim tres rectæ* EF, EB, EG, *continuè sunt proportionales,* [a] *erit rectangulum sub* EF, EG, *quadrato ex* EB, *æquale:* [b] *Est autem & rectangulum sub* ED, EC, *eidem quadrato ex* EB, *æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub* EF, EG, *& sub* ED, EC: *ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta* C, D, F, G, *circulus describi potest.* [c] Duo *ergo anguli* CDG, *&* F, *in eodem segmento* C D F G, *illius circuli, cuius chorda esset ducta recta* CG, *inter se erunt æquales.* [d] *Est autem angulus* C D G, *angulo A, in alterno segmento dati circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* F, *angulo A, alterno æqualis erit,* [e] *ideoque parallelæ erunt* AD, E F. *Quod est propositum.*

[a] *17. sexti.*
[b] *36. tertij.*
[c] *21. tertij.*
[d] *32. tertij.*
[e] *27. primi.*

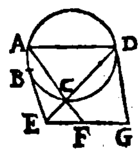


CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta G D, *tangente circulum in* D, *non tamen versus priorem tangentem* EB, *ducatur recta* ED, *secans circumferentiam in* C, *puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A.* Dico *ductam rectam* AD, *rectæ* EF, *parallelam esse.* Cum *enim æquales sint* EB, EF, (*quòd sit* EF, *ad* EB, *ut* EB, *ad* EF.) *erunt earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub* ED, EC, *quadrato ex* E B, *æquale. Igitur & quadrato ex* E F. *Quia ergo,* [f] *si circa triangulum* CDF, *circulus describatur, recta* ED, *eum secat, &* EF, *applicata est,* [g] *tanget* EF, *eum circulum.* [h] *Angulus ergo* E F C, *angulo* F D E, *in alterno segmento*

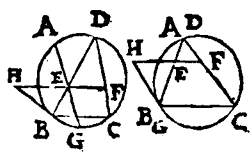
[f] *5. quarti.*
[g] *37. tertij.*
[h] *32. tertij.*

segmento eius circuli æqualis erit:[a] Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. [b] Quare parallela erunt AD, EF. Quod est propositum. [a] 32. tertij. [b] 27. primi.

CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem cõstructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continuè proportionales, [c] erit rectangulum sub EF, EG, siue sub EG, EF, æquale quadrato ex EB:[d] Est autem eidem quadrato æquale rectangulũ sub ED, EC. Igitur rectãgulum sub EG, EF, rectangulo sub ED, EC, æquale erit; proptereaq́; ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. [e] Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erũt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, [f] qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi CFG, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: [g] Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno æqualis erit: [h] atque idcirco parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum. [c] 17. sexti. [d] 36. tertij. [e] 22. tertij. [f] 13. primi. [g] 32. tertij. [h] 27. primi.



SED sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta AG, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui æqualis sit EH, ducaturque HB, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ductam rectam BC, parallelam esse rectæ EF. Quia enim ita est EF, ad EA, vt EG, ad EH; [i] erit rectangulum sub EF, EH, æquale rectangulo sub EA, EG: [k] Est autem rectangulum sub EA, EG, æquale rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem rectangulo sub ED, EB, æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. [l] Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmen- [i] 16. sexti. [k] 37. tertij. [l] 21. tertij.



segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erunt. [a] *Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno.* [b] *Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod est propositũ.*

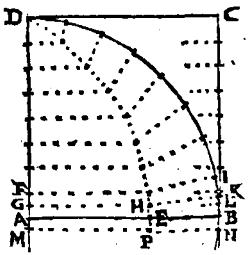
[a] 32. tertij.
[b] 28. primi.

QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, ut perspicuum est in secunda figura.

DE MIRABILI NATVRA lineæ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nõnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα *ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquàm autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reijciatur, tanquàm inutilis, & quæ describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse cẽsuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus. Etsi autem ibidem Quadraturam circuli diximus à nobis differri in librum de mensurationibus magnitudinũ, visum tamen est, eam breuiter hic attingere, reijciendo pleniorem eiusdem Quadraturæ tractationem in eum, quem diximus, librum. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.*

IN

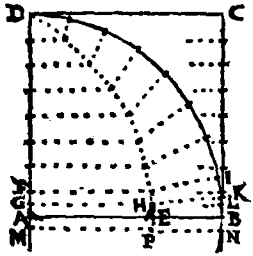


IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa cẽtrum A, quàm latus supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoq;, ita vt quo tempore punctum D, circumferẽtiam DB, uniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, uniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus uniformes, quorum vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus DB, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & utrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, & singulæ rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex cẽtro A, alia recta occulta ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendãtur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primã, secunda secundã, &c.

per

per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed aequabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, *secans semidiametrum* A B, *in* E.



SED quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, *si satis exigua non sit, secabimus bifariã continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI, arcus* D B, *bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte* A F, *facta sunt, vt particula BK, talis pars sit totius arcus* DB, *qualis pars est A G, totius lateris* A D. *Particula deinde A G, aequales abscindemus BL, BN, AM, ducemusq; rectas occultas GL, MN.* Duct*a vero ex A, centro recta occulta A K, quae secet GL, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, aequalem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus aequabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in* E, *puncto, quod quaeritur. Nam propter paruam rectarum GH, AE, MP, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint aequales, licet Geometricè loquendo, recta* A E, *semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eae rectae inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectae namque GL, A B, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino aequales iudicabuntur, quamuis verè AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illae rectae GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.*

RECTAM porrò AD, *vocabimus latus Quadratricis, & rectam*

& rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

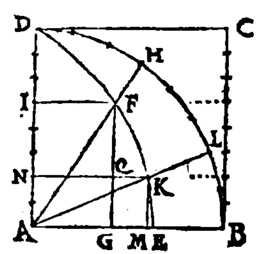
ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrũ A, per arcum DB, eodem tempore moueatur uniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque uniformi; fit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tũc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent uniformes, aut nõ eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quàm latus DC, perueniret. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus DB, emissa, & lineæ parallela per partes laterum DA, CB, ducta, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxiæ, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac deniq; eiusmodi sectiones insignem usum habent in re Gnomonica, ut ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, vt Geometricam. Adde quòd linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas pro-

LII portionales

portionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittãtur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittãturq; ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus; cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius recta DA, recta DI, cõtinet, propterea quòd rectæ AH, IF, se interscecat in puncto F, Quadratricis:

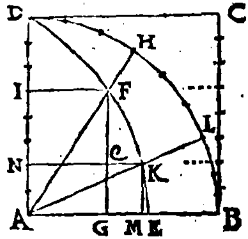
dratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH toti arcui DB, quàm recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB; si cogitetur talis pars minor quàm DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdū, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars est reliqua recta IA, totius lateris DA. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quàm conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c. [a] 34. primi.

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG; erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo, vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG. [b] 34. primi.

RVRSVS quia est, vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

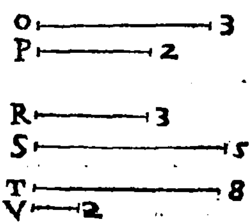
DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



SIT primùm arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam recta O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta H A, secante Quadratricem in F, ducatur F I, basi A F, parallela. Deinde recta I A, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ut sit I N, ad N A, quemadmodum O, ad P; ductaque N K, basi A E, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum H B, in L. Dico arcum H B, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniã enim ut propos. 1. ostendimus, ut H L, ad L B, ita est I N, ad N A: Est autem I N, ad N A, ex constructione, ut O, ad P; a erit quoque H L, ad L B, ut O, ad P.

a 11. quinti.

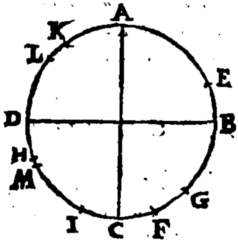
DEINDE totus Quadrans D B, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro D A, in I, ut sit D I, ad I A, sicuti R, ad S, ducatur I F, ipsi A E, parallela secans Quadraticẽ in F. Ducta igitur recta A F H; erit ex propos. 1. D H, ad H B, ut D I, ad I A, hoc est, ut R, ad S.



TERTIO sit idem Quadrans D B, secandus in duos arcus, ita ut totus Quadrans ad unũ eorũ habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, D A, inueniatur quarta proportionalis, cui aequalis abscindatur A N. Ducta autẽ N K, ipsi A E, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta A K L. Dico Quadrantem in L, sectum esse, ut proponitur. Est enim ex propos. 1. D B, ad L B, ut D A, ad N A, hoc est, ut T, ad V.

QVARTO

QVARTO semicirculus ABG, diuidendus sit in datam proportionem, videlicet in triplã. Secetur vterq; Quadrans AB, BC, secũdum datam proportionem triplam in E, F, & arcui AE, vel BF, aequalis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, aequalia demantur, nimirũ duo arcus AE, BF, simul, & arcus AG; reliqua aequalia fient, nimirum duo arcus EB, FC, simul, & arcus GC. Et quoniam est, vt AE, ad EB, ita BF, ad FC; [a] erunt AE, BF, simul ad EB, FC, simul, hoc est, arcus AG, ad arcum GC, vt AE, ad EB: Habet autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit. [a] 12. quinti.



QVINTO in eandem proportionem secandus sit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E, F, H, sumatur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI, ipsi CH, aequalis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur aequalia, nimirum tres arcus AE, BF, CH, simul, & arcus ABI; reliqua fient aequalia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, simul, & arcus ID. Et quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandem habent proportionem; [b] habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnum arcum EB, videlicet datam. [b] 12. quinti.

POSTREMO sit eodem modo diuidendus arcus ACK. Diuisis rursus tribus quadrantibus, & arcu DK, vt proponitur, in E, F, H, L, sumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, aequalis. Si igitur ex communi arcu ACK, aequalia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, simul, & arcus ABM; reliqua aequalia fient, quatuor scilicet arcus EB, FC, HD, LK, simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK, eandem proportionem habent; [c] habebunt omnes [c] 12. quinti.

quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur.

COROLLARIVM.

EX his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: [a] cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.

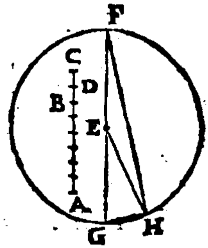
[a] 33. sexti.

QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna unitate minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G, in proportionem quadruplam. Nam GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque



totumq; FGH, ductaq; in eo diametro FG; secetur ita semicircumferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB, ad rectam BD: iunganturq; rectæ HE, HG. Dico Isoscelis trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datã AB, ad BC. Cum enim sit, vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG: Et vt arcus FH, ad arcum HG, [a] ita angulus FGH, ad angulum GFH; [b] erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, eius duplam, ita est angulus GFH, ad angulum GEH, [c] qui illius duplus est. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod est propositum.

a 33. sexti.
b 11. quinti.
c 20. tertij.

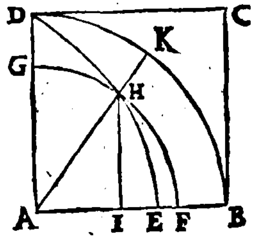
COROLLARIVM.

ITAQVE si construantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ æquilateræ parium laterum, per posteriora vero laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera angulosuè figura inscribenda habere debet, &c.

IIII.

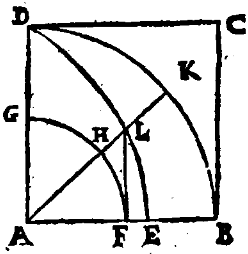
SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erũt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.



SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, ut supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continuè esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, ut DA, ad AE. Sin minus, sit ut BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipsa AE, minoremve, sitque primum AF, maior quàm AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturq; perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, ut DA, hoc est, ut AB, ad AF: estq; ut AB, semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, ut & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, ut circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; [a] erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, ut eadem circumferentia ad eandem circumferentiam; [b] ac proinde etiam ut quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, ut arcus BD, ad arcum FG.) [c] Erit quoque arcus BD, ad rectam DA, ut idem arcus BD, ad arcum FG: [d] ac propterea æquales erunt recta DA, & arcus FG. Quia vero ex theor. 1. est, ut arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & ut arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcũ FH, quòd arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint, ut supra in hoc scholio ostensum est: [e] Erit quoque recta DA, ad rectam HI, ut arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, æqualis; [f] erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis, quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF, [g] secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcũ; ex scholio propos. 27. lib. 3.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum DA, ut DA, ad rectam maiorem base AE, Quadratricis.

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Descripto

[a] 15. quinti.
[b] 15. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 14. quinti.
[g] 3. tertij.



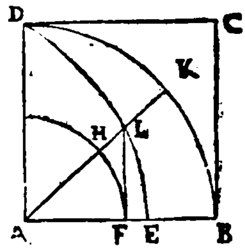
Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendemus ergo, ut prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH, ut est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex scholio propos. 36. lib. 3. arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam divideretur, [a] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur; [b] ideoque & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, ut DA, ad rectam minorem base AE, Quadratricis: Sed neque ut DA, ad maiorem, ut ostensum est. Igitur ut DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

[a] 4. vel 8. primi.
[b] 26. tertij.

COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius Quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem:

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, ut DA, ad AE; erit convertendo quoq; AE, ad DA, ut DA, ad arcũ Quadrãtis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inveniatur tertia propor-



a 11. quinti. proportionalis; a erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraque proportio sit eadē, quæ AE, ad AD. b 9. quinti. b Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcui BK, qui minor est Quadrāte, inueniēda sit recta æqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ex L, ad AB, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaque erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum sit, ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK; c 11. quinti. c erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis DB. d 14. quinti. d Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

COROLLARIVM. II.

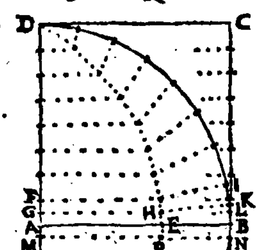
SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc est, vt tertia illa

illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem semidiametri A E: sit autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti B D, vt ostensum est: [a] erit & recta [a] 14. quinti.
DA, Quadranti semidiametri A E, æqualis. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter A E; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

EADEM ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, quàm DA, AE, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis Quadranti illius circuli, &c.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, [b] cum sit vt circum- [b] 15. quinti.
ferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus D A, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta ferme æqualis basi A E,



ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis A E, cum in ea figura parallela quoque G H, auferens A G, particulam sextamdecimam, quæ $\frac{1}{16}$. multò maior est quàm $\frac{1}{5400}$. vix à basi A E, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro basi accipere possimus. Quia vero vltima illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit sinus anguli G A H, grad. 89. Min. 59. ac proinde A G, sinus anguli AHG, Min 1. posito sinu toto AH, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus A H, statuatur 10000000.

(Ita

(Ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quàm si sinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus DA, *earundem partium erit 15708600. vt constat, si 5400. particulæ lateris* DA, *ducantur in vnam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris* DA, *erit 31417200. Et quoniam ex corll. 2. huius propos. 4. duplum lateris* DA, *æquale est semicircumferentiæ, cuius semidiameter A E; erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum A E, eadem ferè, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à* $3\frac{1417203}{9999999}$. *hoc est, in minimis terminis, à* $3\frac{157467}{1111111}$. *quæ proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.*

ITAQVE vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta: Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

V.

DATO circulo quadratũ æquale cõstituere.

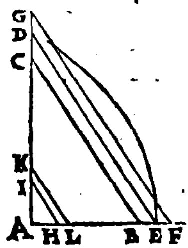
QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa
a 14. secũdi. *recta, & semidiametro* [a] *construatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.*

INVENIETVR autem recta æqualis semicircum-
b 12. sexti. *ferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ,* [b] *si fiat vt basis Quadratricis descripta ad eiusdem latus, ita semidia-*

meter

meter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem; quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.

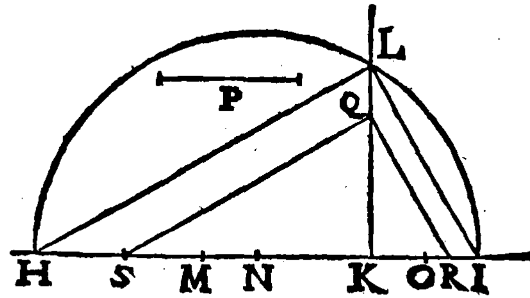
VERVM *vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construenda erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus* DAE, *sitque* AD, *æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & AE, basi eiusdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur* DE, *cuius latus* AD, *& basis AE. Ducta autem recta* DE, *constructum erit unum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit recta AE, erit recta* AD, *circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quàm AE, abscindemus ei æqualem AB, parallelamque ipsi* DE, *agemus* BC. *Si denique semidiameter sit maior, quàm AE, abscindemus ei æqualem AF, ex AE, producta, & per F, ipsi* DE, *parallelam agemus* FG. *Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius semidiameter AF: [a] propterea quòd est, vt AE, ad* AD, *ita tam AB, ad AC, quàm AF, ad AG.* [a] 2. vel 4. sexti.



DEINDE *ducta recta* HI, *cuiuscunque longitudinis, excitetur ad eã perpendicularis quantacunque* KL; *paratũque erit alterũ instrumentũ quadrandis circulis accommodatũ.*

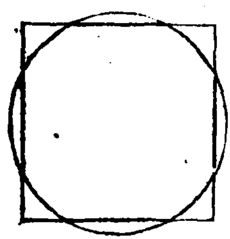
PER *duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunque circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius semidiametro in priori instrumento æqualis sit recta AB, & per B, ipsi* DE, *parallela agatur* BC. *In posteriori vero instrumento sumantur duæ* KM, MH, *ipsi AC, æquales, & recta KI, semidiametro AB, æqualis. Diuisa autem tota recta* HI, *bifariam in* N, *describatur ex* N, *ad*

inter-



interuallum N H, vel N I, semicirculus secans perpendicularem K L, in L. Dico quadratum ex K L, circulo dato, cuius semidiameter A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim K L, media proportionalis est inter K H, K I, ex scholio propos. 13. huius lib. [a] erit quadratum ex K L, rectangulo sub K H, K I, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initium huius propos. diximus, quòd K H, sit æqualis semicircumferentiæ, & K I, semidiametro; erit quoque idem quadratum ex K L, dato circulo, cuius semidiameter A B, vel K I, æquale. Si igitur quadratum rectæ K L, describatur, & ex eius centro ad interuallum A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in apposita figura apparet.

[a] 17. sexti.



CÆTERVM diuisio rectæ H I, in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet. Diuisa semidiametro K I, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quàm H I, facile bifariam secabitur.) accipiatur recta K O, æqualis M N. Nam N, punctum erit medium in recta H I. Cum enim æquales sint M N, O I; addita communi N O, erit N I, ipsi M O, æqualis: Est autem M O, ipsi H N, æqualis. (quia enim æquales sunt H M, M K; additis æqualibus N M, K O, tota æquales

æquales fiunt H N, M O.) Igitur & N I, ipsi H N, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur æqualis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, æqualem esse quadrato dato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem recta K H, quæ semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, sit æqualis, ductaque recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L; ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S R, ad K R. Cum ergo H K, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. S K, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K R. Quia vero K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R; [a] 29. primi. *quòd angulus R Q S, rectus sit,* [a] *quippe cum eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales sint:* [b] 31. tertij. *(Nam* [b] *angulus H L I, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur:)* [c] *erit* [c] 17. sexti. *quadratum ex K Q, æquale rectangulo sub S K, K R; hoc est, circulo, cuius semidiameter K R: hoc est, circulus semidiametri K R, æqualis est quadrato lateris K Q, vel P. Quod est propositum.*

∴

COROL-

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ a *describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.*

a 14. secũdi.

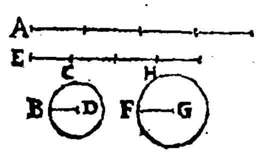
RVRSVS si, per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato b *constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.*

b 25. sexti.

VII.

DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentiæ dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nunc autem, vt vicissim recta data lineæ circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facile ita fiet. In priori instrumento propos. 5. sumatur AH, *æqualis semidiametro* BD, *descripti circuli, & per* H, *agatur ipsi* DE, *parallela* HI. *Nam* AI, *quadruplicata dabit rectam* E, *circumferentiæ circuli* BC, *æqualem, vt propos. 5. diximus. Deinde*



tribus

tribus rectis E, A, B D, inueniatur quarta proportionalis F G, atque ex G, ad interuallum G F, circulus describatur F H. Dico eius circumferentiam data recta A, aequalem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita B D, ad F G; hoc est, [a] *ita tota diameter circuli B C, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H, vt Pappus demonstrauit;* [b] *erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H. Cum ergo E, facta sit aequalis circumferentia B C;* [c] *erit & recta A, circumferentia F H, aequalis, hoc est, circumferentia circuli F H, inuenta est data recta A, aequalis. Quod est propositum.*

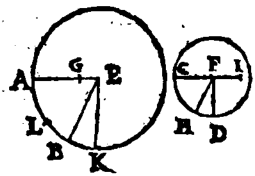
[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 14. quinti.

ALITER, & facilius. Quartae parti rectae datae A, accipiatur aequalis A K, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius diameter A L, aequalis erit datae rectae A; propterea quòd eius circumferentiae quadrans aequalis est rectae A K, quartae parti datae rectae A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inaequalibus, datoq; arcu in vno eorum, ex altero arcum aequalem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inaequales A B, C D, quorum centra E, F, & semidiametri A E, C F; sitq; A B, maior, & C D, minor. Datus autem primum sit in minori circulo arcus C D, cui aequalis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus A B, circulo C D, maior est, erit & semidiameter A E; semidiametro C F, maior. Abscindatur ergo A G, ipsi C F, aequalis, seceturq; arcus C D, ita in H, ex propos. 2. ut eadem sit proportio arcus C H, ad arcum H D, quae rectae A G, ad rectam G E: arcuiq; C H, similis auferatur arcus A B. quod facile fiet, si ducta recta F H, angulo C F H, aequalis fiat angulus



AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et cõuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, æqualem, vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, vt AE, semidiameter ad semidiametrum CF, [a] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. [b] Igitur erit quoq; vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcũ CH; ac proinde arcus CD, AB, [c] æquales inter se erunt. Quod est propositum.

[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quàm circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergò CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit æqualis; secetur per propos. 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; arcuiq; BL, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD. quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualem esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, [d] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. [e] Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea q; arcus AB, CD, [f] æquales erunt inter sese. Quod est propositum.

[d] 15. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

COROL-

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis data recta abscindi posse ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non sit, quàm recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum supra ostensum est in coroll. 1. propos. 4. data cuilibet circumferentia inueniri posse rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulò ante in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quàm data recta linea; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum sit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis, erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis. *14. quinti.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quàm recta linea data; sumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quã data linea recta, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt semicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam. quod quidem facile fiet, si data recta ex dupla illa linea recta abscinda-

tur æqualis, & semicircumferentia secetur, per propos. 2. vt secta est recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datam rectam, ita tota semicircumferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim sit, dupla illa recta ad rectam datam, ita semicircumferentia ad eum arcum; sit autem recta illa dupla æqualis semicircumferentiæ;
[a] 14. quinti
[a] erit quoque data recta illi arcui æqualis.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quàm data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli est æqualis, vt tota recta composita æqualis sit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam si hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quàm recta linea data, secetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam. quod facile etiam fiet, si datæ rectæ ex tripla illa linea recta abscindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. vt recta illa tripla secta est. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim est, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; estq; tripla illa recta circumferentiæ trium
[b] 14. quinti.
quadrantum æqualis; [b] erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abscisso.

DENIQVE si tripla illa linea recta fuerit minor, quã data recta linea, addatur ei rursus prior

linea

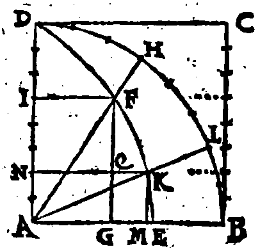
linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compo sita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero si illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quàm circumferentia dati circuli. quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnũ eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; [a] *erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis.* [a] 14. quinti.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, [b] *erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum.* [b] 14. quinti.

COROLLARIVM II.

EX iis quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quàm angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus H B, & angulus rectilineus H A B. Dico tam arcum H B, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quàm angulum H A B, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice D E, quæ rectam H A, secet in F, ducatur per F, basi A E, parallela F I. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta I A, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt I N, ad N A, eandem proportionem habeat, quã duæ rectæ inuentæ; atque adeo & I N, N A, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta N K, ipsi A E, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum H B, in L. Dico tam arcus H L, L B, quàm angulos H A L, L A B, inter se esse incommensurabiles. Quoniam. n. per propos. 1. est, vt I N, ad N A, ita arcus H L, ad arcum L B: sunt autem I N, N A, incommensurabiles; erunt & arcus H L, L B, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, [a] vt arcus H L, ad arcum L B, ita angulus H A L, ad angulum L A B; erunt etiam anguli H A L, L A B, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.



[a] 33. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

919

REGESTVM

* A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iij Kkk Lll Mmm.

Omnia ſunt folia integra, præter M m m, ſemifolium.

ROMAE, *Apud Sanctium, & Soc.*
M. D. LXXXIX.