Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Libreria del Noviciado de Madrid



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIB. XV

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV. Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati: nunc iterum editi, ac multarum rerum accessione locupletati:

AVCTORE CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI È SOCIETATE IESV

ROMÆ APVD BARTHOLOMAEVM Grassium. M D LXXXIX.

PERMISSV SVPERIORVM.

EVCLIDES

FLL 21.9

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

Christophorus Clauius e Societate Iesu S.P.D.

SCRIPSERAM *superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathemati*

carum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudēda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim sē res habet, quod te non fugit, Dux Serenissime, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui a principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparēt iterum ac sæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret

haret vulgatũ illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaque, cum priorem editionem sumerem postea in manus, multa esse animaduerti, quæ si adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumque inuentis videbantur melius explicari posse: si videlicet e pronuntiatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipsum etsi tunc etiam præstiti, multo tamen nunc feci copiosius: interiiciens ea scilicet, quæ vel vtilia, vel necessaria fore censui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt specimen dem aliquod rerum,

quæ hoc volumine accesserunt, demonstrationem Geometricam, eamque apertissimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam scimus a Proclo mutila esse atque imperfecta videatur. Descriptionẽ item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum a veteribus, tum a recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accurate, ac subtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum

dratum æquale circulo, quam exquisite rectilinea figura qualibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immo (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quam ad figuram rectilineam plurimorum angulorum, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc

meum, qualiscumque est, cum iterum essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, quã tibi, Dux Serenissime, dedicari posse. Primum quidem quod cum superiorem illam editionem sub Emmanuelis Philiberti clarissimi Ducis patris tui nomine apparere uoluerim, stulte fecissem, si posteriorem hãc alij, q̃ tibi, qui eius es & ditionis, & humanitatis, et pietatis hares, eiusque imago corporis, atque animi, consecrassem: Deinde vero quod in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscribenda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod cum ita sit, quid ni hoc tibi po-

bi potißimum deberetur donum, (ſi tamen donum dicendum eſt id, quod qui dat videtur accepiſſe) quem Ioannes Baptiſta Benedictus ſcientiſsimus rerũ Mathematicarum ita teſtatur excellere in his artibus, illa præcipue in parte, quæ principes viros, atque excellentes Imperatores decet, vt ea, quæ pertinent ad inſtruendos exercitus, oppidaque munienda, per te ipſe implere poßis. Neque vero hæc poſtrema fuit cauſa, etſi poſtremo in loco ponitur: vt tibi, aliisque, quorum in manus hæc ſcripta peruenerint, hac ſaltem ratione oſtenderem ita tibi obligatam eſſe Societatem noſtram vniuerſam, vt iure tibi omnia mea

opera

opera, & labores vindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui videatur, atque exile, non dubito tamen futurũ, quin vbi tuam istam attigerit dexteram fortitudine fideque præstantem, plurimum sit accepturum vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept. M. D. LXXXIX.

AD LECTOREM.

ETSI summam diligentiam adhibuimus, vt hi commentarij quam castigatissimi in lucem prodirent: fieri tamen non potuit, (vt est humani ingenij imbecillitas) quin errata aliquot irrepserint; quæ, ne cursum in demonstrando impediant, monitum te paucis uolo, ut ea, antequam ad demonstrationes te conferas, ad normam, quam hic descripsimus, prius corrigere ne grauere. Vale.

ERRA-

ERRATORVM PRIORVM sex lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata	Correcta.
31.	21.	*in se distent*	*inter se distent*
38.	13.	*recta CD,*	*recta CD,*
65.	1.	*lineam AE,*	*lineam AB,*
69.	3.	*in E.*	*in G.*
95.	13.	*limitem E,*	*limitem F,*
97.	16.	*anguli AED, EDA,*	*anguli EAD, EDA,*
102.	2.	*fust 3,*	*fust;*
187.	17.	*angulos ad E,*	*angulos ad D,*
122.	4. a fine.	*supra ED,*	*supra BD,*
123.	25.	*angulum ABC,*	*angulum BAC,*
136.	5.	*8. primi.*	*4. primi.*
140.	4. a fine.	*ad AC.*	*ad BC.*
170.	14. a fine.	*angulo ABC,*	*angulo BAC,*
188.	27.	*Et quia latus BA, latere AC, ponitur non minus, erit*	*Et latus BA, latere AC, ponatur minus; erit*
188.	31.	*non maior*	*minor*
195.		*Deest litera A, in fig.*	*in extremo lineæ FE.*
212.	1.	*æqualium*	*parallelarũ æqualiũ*
256.	10.	*ipsi AB:*	*ipsi AC:*
256.	11.	*ipsi AC, vel BI;*	*ipsi AB, vel CI;*
300.	5.	*ex AB, BD,*	*ex AB, BC,*
314.	2.	*AC, EC.*	*AC, BC,*
315.	10. a fine.	*3. secundi*	*5. secundi*
317.	1.	*ad DH,*	*ad DE.*
336.	12. a fine.	*maxima vel minima propinquiores,*	*maxima propinquiores,*
338.	7. a fine.	*7. primi.*	*4. primi.*
402.	16.	*BCD, BDA,*	*BCA, BDA,*
417.	9.	*18. primi.*	*18. tertij.*
423.	8. a fine.	*in eadem partes*	*non in eadem partes*
424.	27.	*æqualia*	*æqualia duobus lateribus GE, GF,*

432.	24.	*in* ADB,	*in* A, & E.
486.	17.	*& minus* CH.	*& minus* PH.
580.	20.	*a sesquialtera*	*a sesquitertia*
643.	12.	*vel una excedant,*	*vel una deficiant, vel una aqualia sint, vel una excedant.*
654.	1.	*vt nunquam*	*vt nonnunquam*
665.	5. *a fine.*	$\frac{1}{1\ 6}$.	$\frac{1}{6\ 4}$.
687.	16.	*erit* m	*erit* ea
696.	17.	*ad* C, *quartam.*	*ad* D, *quartam.*
706.	1.	*ita* DH, *ad* HE.	*ita* DH, *ad* HF.
706.	5.	*erit quoque* HE,	*erit quoque* HF,
723.	10.	*Ergo componendo*	*Ergo permutando*
788.		*In rect angulo* AC, *deest litera* B.	
795.	9. *a fine.*	AE, *primam*	AB, *primam*
798.	1.	*Ducta per* D,	*Ducta per* A,
799.	9.	*Erit igitur, vt* GB, *ad* BA,	*Erit igitur vt* GC, *ad* CA;
799.	13.	*vt* GB, *ad* BA,	*vt* GL, *ad* AK,
818.	*vltima.*	*22. quinti.*	*12. quinti.*
911.	17. *a fine.*	*ita* SR, *ad* KR,	*ita* SK, *ad* KR.
913.	16.	*cuius diameter*	*cuius semidiameter.*

Alia errata minoris momenti facile quinis corriget. Errata verò posteriorum librorum, ad finem totius Euclidis reperies.

QVÆ

QVAE PRAECIPVE Prioribus Commentarijs posteriore hac editione addita sint.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quã Proclus affert.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. pp. lib. 1. absque ope proportionũ sexti lib.

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2.

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi

cobi Peletarij, de angulo contactus.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima ad finem lib. 4. de figuris æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoq; æquilatera.

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica.

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquemultiplicia definierit.

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra: Et denique alia

alia scitu iucundissima perficiuntur.

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, siue ipsis adhæreant numeri integri, siue non.

X.

MINVTIARVM, siue numerorũ fractorum demonstrationes clarissimæ.

XI.

DE Proportionum cõpositione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regulariũ in data sphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & superficierũ conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter se.

Cætera quæ passim hisce commentariis adiecta sunt non pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.

IN EV-

IN EVCLIDIS

ELEMENTA

PROLEGOMENA.

PRAEFATIO.

SI QVIS forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus, is facile sibi persuadebit, non temere id a nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim lõga, diuturnaq; experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem, & illustrem auctorem a pleriſq; omnino negligi, a perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo re-

periantur, qui ſedulam operam, ac ſtudium in perdiſcendis his elementis ponant, ob eam potiſsimum, vt arbitror, cauſam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obſcuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem ſibi citra erroris periculum ſequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in ſingulos Euclidis libros ſane eruditi, qui ſatis eſſe poſsint cuiuis ad facile conſequendam horum elementorum doctrinā: Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinē, ac methodum peruerterunt, verbaque propoſitionum eiuſdem locis non paucis immutarunt, vt verus, germanuſque auctoris ſenſus perdifficile poſsit intelligi; id quod maxime in decimo libro perſpicitur: Alter (Theonē intelligo) pene innumeris mendis, vitijſque incuria librariorum ita eſt deprauatus, & propter notas græcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas, ac male expreſſas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem ſine maximo labore, ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram vſque memoriam maius aliquod ſtudium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel ſex priores tantum libros expoſuerunt, vel ſi qui in vniuerſum Euclidem commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demōſtrationibus certiſsimis, proprias alias, ac nouas con-

confinxerunt, quæ plerunq; non tam firmę sunt, neque rem ipsam simpliciter, & absolute conficiunt; præsertim quod modo e propositionibus voces quasdam perperam detrahũt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero, proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commãdinum Vrbinatẽ Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem latinè redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras, ac vigilias studiosis harum rerum nõnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, propter singularem vtilitatẽ, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque vnquam deponi ab his, qui fructũ aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere volunt, in eoque progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdũ factum videamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sunt enim hi nostri commentarij in vniuersum Euclidem cõscripti commodiore nunc for-

ma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum plerisque asseueramus, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatẽ licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erãt scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantissimo poeta dictum est. *Breuis esse laboro, obscurus fio*: Interdum etiam, cum breuius, atque succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrunq; vitantes, eas, velut παρεκβάσεις, atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupiẽtes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius a studiosis, ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problema

ta,

ta, ac theoremata ſcitu non iniucunda, neque a ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Cãpano, alijſq; auctoribus decerpſimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, aſſiduiſq; meditationibus ipſi confecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tãquam in ſcopulos quoſdam, incidentes, a recto curſu deflexerũt, & in errores varios, atque abſurdos, profſumq; ab inſtituto diſciplinæ abhorrẽtes, dilapſi ſunt.) dilucide, atque perſpicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facile iudicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excreſcerent, quam vt vnius libri ſpatijs, hac præſertim forma, commode includi poſſent, in duas partes totam tractationem diuiſimus. Altera ſex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vna cum decimoſexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla adijcere voluimus, complectitur.

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarũ disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi, benigne Lector, alteram editionem priore multò locupletiorẽ: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desiunt, adiecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationẽ vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce commentarijs est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquã, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentã, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quòd eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquã enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam, quia tamen

men eorum demonſtrationem diu ac diligenter quæſitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuerſa eſt) coactus ſum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam neceſſario iam dubitationi locus eſſet. Neq; enim Procli demonſtratio, quam ad propoſ. 28. lib. 1. Euclid. de re eadem affert, omni ex parte abſoluta, ac Geometrica cenſeri poteſt; cuius rei cauſa eodem loco à nobis explicata eſt. Deinde ex Pappo Alexandrino inſcriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis deſiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam, & ratio ad circulũ quadrandum (res tot ſeculis à doctiſſimis viris exagitata) conficitur: quod alibi docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè oſtendimus, cur Euclides magnitudines proportionales, & improportionales per ſequemultiplicium habitudinem deſcribere coactus ſit. Poſtremò (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari ſolent, Geometricè demonſtrauimus. Hæc ferè præcipua ſunt, quæ hac poſteriore editione ad commentarios noſtros in Euclidem acceſſerunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc poſterior priorem ſuperat, quæ ſanè plurima ſunt, & Euclidis propoſitionibus ſparſim inſerta, inter legendum facilè comperies, ſi vtramque editionem cum altera conferens attentius paulò conſiderabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa oſtium, atque aditum ad omnes alias diſciplinas Mathematicas referant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam

ad ipſa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenã Mathematicæ diſciplinæ hoc nomen acceperint: quæ ſit earum diuiſio: à quibus primùm ortæ, & per quos deinde ſingulæ fuerint excultæ: quanta ſit illarum præſtantia, atq; vtilitas; & ſi qua ſunt aliarei noſtræ opportuna.

MATHEMATICAE DISCIPLINAE CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem verſantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca μάθημα, ſiue μάθησις, quæ ſignificat diſciplinam, ſeu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen diſciplina, vel doctrinæ inter reliquas omnes ſolæ ſint adeptæ, duas potiſſimum cauſas apud probatos ſcriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici exiſtimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, eaſque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Chriſtiana fides falſum eſſe perſpicue docet) teſtantur, eas nomen doctrinæ, ſiue diſciplinæ obtinere, quod maxime ex ipſis nanciſcamur recordationem, reminiſcentiamque illius ſcientiæ, qua anima noſtra, (vt eorum eſt error) antequam corpori informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo coprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inſcribitur, vbi Socratem introducit puſionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimenſione, ad quæ licet in principio reſpoderit, vt puer, gradatim tamen aſcendens eo deductus eſt, vt reſponderit id, quod tandem dicturus fuiſſet, ſi diutiſſime perdidiciſſet Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen ſcientiæ, & doctrinæ ſibi vendicare, quod ſolo modum, rationemq; ſcientiæ retineant. Procedunt enim ſemper ex præcognitis quibuſdam principijs

principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, vt & Aristoteles testatur; neque vnquam aliquid non probatum assumūt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro confesso, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasue non semper obseruare videmus, cum plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratue, adducant. 1. Poster.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM diuisio.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atq; Astronomiam. Cū enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines cōprehenduntur, & vtraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum, quatuor prædictas facultates instituere, quæ vtramque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eādem quātitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus reficit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine siue quantitate continua, secundum se quoque, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique eādem magnitudinem, vt est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu ciuntur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica, & Geometria pura, Musica vero, atque Astronomia mixta dicuntur, oēs aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cætera huiusmodi, vel facile, vt ad capita, a quibus dependent, reduci possunt.

ALIA

ALIA ratione a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor eſt Proclus in commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica diſciplina diuiditur. Quam quidem diuiſionem, quoniam eleganter, copioſeq; docet, ad quanam ſe ſe extendat Mathematica diſciplina, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptam hic ſubijcere ſtatui. Volunt itaq; pradicti auctores, ſcientiarum Mathematicarum quaſdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam vero in ſenſilibus, ita vt attingant materiam ſenſibus obnoxiam, verſari. Prioris generis ſtatuunt duas longe primas, praciuaſq; ſcientias, Arithmeticam, & Geometrium: In poſteriori vero genere conſtituunt ſex, Aſtrologiam, Perſpectiuã, Geodaſiam, Canonicam ſiue Muſicam, Supputatricem, atq; Mechanicam. Aſtrologiam dicunt eſſe eam facultatem, qua de mundanis ediſſerit motibus, de corporum caleſtium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque diſtantijs, ac de alijs huiuſmodi rebus. Huius rurſum tres conſtituuntur partes; Gnomonica, qua in horarum dimenſione, poſitu gnomonum, exercetur: Metheoroſcopica, qua eleuationum differentias, ſiderumq; reperit diſtantias, nec non multa alia, & varia Aſtrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, qua planetarum, caterarumq; ſtellarum diſtantias huiuſcemodi Dioptricis dignoſcit inſtrumentis. Perſpectiuam aiunt a Geometria gigni, atque vti radijs viſorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hiſce conſtituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, qua proprio nomine dicitur Perſpectiua, qua quidem reddit cauſam earum apparentiarum, qua aliter, quam ſint, ſe ſe nobis offerre ſolent, ob eorum, qua ſub viſum cadunt, alios ſitus, & diſtantias, vt parallelarum coincidentia, vel quadratorum, tanquam circulorum, aſpectionis: Et in vniuerſam ſpecularem, qua circa varias, multiplicesq; verſatur refractiones: Nec non in eam, qua Scenographice, hoc eſt, vmbrarum deſignatrix appellatur, qua oſtendit, qua ratione fieri poſſit, vt ea, qua in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudinesq; videantur. Geodaſiam appellant eam ſcientiã, quares quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tãquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem

non

non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt sparti, & perpendiculo. Diuiditur hac, vt Geometria, in eam partem, qua plana, & in eam, qua solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, qua apparentes cõtinuum considerat rationes, sensusq; vbique vtitur adminiculo; & qua (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas praeposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, qua apud nos Arithmetica practica. Hac enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quae in cognitione rerum sensilium, materiaq; coniunctarũ consistit, apud ipsos multiplex est. Quadam enim est instrumentorum effectrix, qua ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, qua gerẽdis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra marique obsidentibus resistentia; Quadam mirabilium prorsus rerum effectrix, qua θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe qua alia quidem spiritibus maximo cum artificio cõstruit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inaequilibrium, status vero aequilibrium esse causam censendum est, vt Timaeus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisq; animatas cõuolutiones, ac motus imitantibus: Quadam est aequilibrantium omnino, & eorum, qua centroponderantia vocantur, cognitio: Quadam denique sphaerarum effectrix, qua σφαιροποιία appellatur, ad caelestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque vt vno verbo dicam, omnis, qua materiam mouẽdi vim habet. Ha igitur sunt disciplinae Mathematicae apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, qua ad instruendas, coordinandasque pertinet acies, quam Graeci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluere, sed vti eã volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodaesia, vt in diuidendis, dimetiendisque castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neque Historicam, neq; medendi artẽ Mathematices partem vllam esse dicunt, licet saepenumero tum Historici, tum etiam medici Mathematicis vtantur

vtantur theorematibus ; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusve colligendo : Medici vero quamplurimas res in arte sua huiusce modi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quę in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunq; aliquid de opportunis temporibus, locisq; dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamē ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quę numerosa est, paucissimam ostendere multitudinē, castra, suosq; exercitus ad figuram circuli formet ; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quę nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARUM DISCIPLINARUM.

OMNES disciplinas Mathematicas a varijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historia testantur : Immo vero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoria quoque proditum est. Arithmeticen.n. inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusque successores, nec nō Ægyptij, Græci denique atque Arabes amplificarunt, variisq; problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt ; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit ; Hic autem Thamyri, & Lino ; Linus vero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Ægyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim annuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretque, vt nemo

vt nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, sine γεωμετρέω id est significat, quod, terram metior. Caterum paulatim deinde Geometria capta est expoliri, & non contenta suis finibus, se se ad corpora etiam cœlestia dimetienda conuertit, traditisque principia vniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & aliis disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Graeciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimis, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antiphe, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Archytas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentã esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, excelsum esse voluunt fabulam, illũ suis humeris cœlum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero existimat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores. Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hæc autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoq; maximè illustres auctores clarescunt, quod non est huius loci declarare. Caterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliqua omnes de quantitate quomodo modo agentes, facile ex ipsis, tamquam riuuli ex fonte, deriuata sunt, atque deductæ.

NOBI-

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM *disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Methaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earū consideremus, vt recte a Proclo probatur. Methaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si vero nobilitas, atque præstantia scientia ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda, haud dubie Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq;, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationē tollant; Id quod aliis scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum sectæ, (vt alios interim philosophes silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nōnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij deniq; Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriātur) tanquam ducteres sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demōstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorū, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, siu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam*

tiam esse digniorem, praestantioremque, qua magis syncera-tis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborent, dubium esse non possit, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMATICARUM disciplinarum.

NON *solum vtiles, verumetiam necessaria admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Neque enim ad Methaphysicam, vt elegantèr ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, secundasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nos inetiis sæpe excæcabimus, non secus, ac ei contigit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quæ materia sensibus obnoxia sunt coniunctæ, ad res methaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime amotæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca rectè Diximus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti ha disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Augustinus lib. 2. de Doctrina Christiana demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac mystice posita sunt in scripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longo post pluribus verbis repetit eodem lib. Hoc idem*

Cap. 16.

Cap. 37.

idem docet D. Hieron. tomo 1 Epist. 5. asserens, magnam inesse mysteriis vim, & multa mysteria in scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam adferre Theologis utilitatem, perhibet. Rursum B. Augustin. loco, quem paulo ante retuli, testatur, Musicam permagnificam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, summis laudibus D. Basilium praeceptorem suum extulit, quod in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, caeterisque scientijs Mathematicis, fuerit nō mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hae artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, vt perspicue docet Proclus. His adde, quod omnia voluminа antiquorum philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretū cum Graecorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sint referta, ea potissimum de causa, vt ea, quae alioquin multis obstricta difficultatibus videantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quae procul dubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo vsus esset celeberrimam Diui a Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiae hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Phaedone, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse nō dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. praecipit: Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiose scribit) non solum ad reliquas artes rectius perficiendas, verum etiam ad reip. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum praeterita tempora, tum nostra aetatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, praecipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, & docossimos, adeo, vt etsi nullam aliam nobis ha scientia afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio

Cap. 16.

Cap. 19.

ſtudio eas eſſe ſtatuat, quod ingenium, mentemq; ad reliquas artes omnes capeſſendas aptiorem reddant, & acutiorẽ: Quod quidẽ experientia ipſa magiſtra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hiſce diſciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex aliis ſcientijs percipere: Contra vero, eos qui ad haſce facultates idonei minime reperiuntur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in ſuis operibus iterum atque iterum harum diſciplinarum vtilitatem nobis inculeat, atq; commendat; præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſopho, in Timæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnis eruditionis ingenua viam appellat, & pleriſque aliis in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de induſtria ſuperſedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiuſque animus his artibus colendis, exercendiſque perfunditur. Sunt enim hæ præcipua ex ſeptem artibus liberalibus, in quibus non ſolum ingenui adoleſcentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honeſtiſſimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quã ſumma etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multũque verſari ſolebant: Quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate imitari conſpicimus. Teſtatur, magnam animi voluptatẽ ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab aliis ſtudiis excæcatur, defoditurq;, a Mathematicis tantum diſciplinis recreari, excitarique rurſus ad eius, quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia Platonis, aliorumq; grauiſſimorum Philoſophorum, quibus harum diſciplinarum vtilitas cum neceſſitate, & delectatione coniuncta, atque præſtantia abunde poteſt comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elemẽtorum inſtitutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum propoſuimus, deq; Geometria vniuerſa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim,

vt teſtatur vulgata elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe philoſophum illum Megaris natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratiſque auditorem, qui ſectam inſtituit a ſe dictam Megaricam, qua alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod ſectatores illius interrogando, reſpondē doque (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de vitis philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Quaſt. Acad lib. 2. vbi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megareus, a quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet vnum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. ſcribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiā diſcipulus fuit, cōductores ara ſacra de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verum ſi Proclo nobili ſcriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum eſt, Euclides hic noſter iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemaei primi, qui Ægypto, poſt Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Chriſtum natū anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius eſſe crediderim, hoc maxime adductus argumēto, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentiſſime enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquā morituram famā ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monumentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus vel ſcientem voluiſſe praterire, vel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum, ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo philoſopho lōge alius eſt, qui, cum in doctrina Academicorum eſſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo vendicarit. Scripſit autem volumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes,

tes, Phanomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptũ, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item conica elementa, auctore Proclo, qua tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime vero hoc volumen elementorum Geometricorum nunquam omnium consensione satis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione cõtexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, qua ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea dũtaxat, qua visa sunt esse necessaria, atque vtilia, ad cõmunem omnium vtilitatem, argumentis, & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Caterum, quanta sit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersa Geometria, præstantia, ac vtilitas, partim ex ijs, qua ante scripsimus, partim ex ijs, qua nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eã ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hac Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hac Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum scioterricorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarũ, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere varie illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machina

totius huius mundanæ eſt inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Oſtenditur, atque demonſtratur vnius huius ſcientiæ vi cæli vniuerſi, ſiderumque perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, dies ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppoſitiones, aſpectuſque varij tam expedite cognoſcuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis, ac Lunæ defectiones certiſſime, antequam fiant, in omne poſterum tempus a Mathematicis præduci queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mētis noſtræ oculis, muncre ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe videntur, omniumq; fidem ſuperant, perſpicua facere, credibiliaq; eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtātur hiſtoriæ. Cum enim Hieron. Syracuſarum rex nauem, quā Ptolemæo Ægyptiorum regi mittere ſtatuerat, tanta eſſet molis fabricatus, vt eā omnes vna Syracuſij a loco dimouere minime valerent, Archimedes Geometræ peritiſſimus vnius Geometriæ viribus fretus regi promiſit, ſe effecturum, vt ipſam ſolus rex abſque vllo labore ſubduceret: Quod cum præſtitiſſet, in conſpectu omnium rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendū eſt. Non diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, non diſſoluta, ſingula auri, & argenti pōdera, qua inter ſe aurificis fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſimo offendit. Neque ſilentio præterire debet, eundem Archimedem robori, ac efficacia demonſtrationum Geometricarum innixum ſæpenumero iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtram, quā incolimus, e loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis viribus quibuſcunque, pondus quodcunque ſe poſſe mouere: Et alia id genus non ſolum ab Archimede, verum etiam ab aliis præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe memoriæ proditum eſt. Tantum denique nomen vna hac Geometria Archimedi peperit,

vt

vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quē diu Syracuſanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibuſdam per Geometricas demonſtrationes adinuentis, & conſtructis, in expugnata vrbis direptione, ac cade ciuium vnius Archimedis ſaluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium ſuum, & voluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo habuit, quem viuo habere nō potuit. Cuius ſepulchrum Cicero a ſe, cum in Sicilia Quæſtoris officio fungeretur, repertum eſſe, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in ſummo ſemper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoq; ad præſtantiam, vtilitatemq; Geometriæ, quod cum demonſtrationes Geometricæ ſint maxime illuſtres, nemo ſine ipſis ſatis perſpiciet, quæ ſit vis demonſtrationum, nemoq; eiſdem deſtitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidē ingenue fatetur Galenus inſignis philoſophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inſcripſit. Is enim inſtructiſſimus rebus Dialecticis, cum ſcholas Peripateticorū, ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta miro cum animi ardore, ſtudioq; arripuiſſet, nihil fere ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad demonſtrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperiſſe. Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonij philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) hæſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmetica, Geometria, Dialecticaque (quibus artibus ab auis, & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione, ſcientiaque reuocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe characteres illos Arithmeticos, & lineares demonſtrationes. Plato etiam cum ob alias, tū ob eā etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime ſit vtilis, vt alia artes facilius, & rectius percipiantur. Poſtremo eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibuſque modis prædicanda, quod non hæſit in exiguis, & inferioribus hiſce machinis, a quibus originem traxit, ſed euolauit in cælum uſque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurſus cœleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiuſque adminiſtrationem, & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersę sibi hunc scopum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque verum alicui videri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propria contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis: Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimũ circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel linea figuram vllam constituũt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus vero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus vero quinq; de solidis acutissime disputat, eorumq; proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam vero cum res oës Geometricæ, tum præsertim solida illa quinq; regularia, quę corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absq; linearum cõmensurabilium, atq; incommensurabilium notitia: Immo vero quam plurimæ magnitudines sub mensurã cadere nulla ratione absq; earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenumero sint talia, vt ea cõmunis, & nota mensura data metiri nequeat, vt liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; vsum: dcirco vt hisce elementis Geometricis copiosæ retur ora documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimẽsionemq; requisita, Stereometria sua præposuit decimum librũ, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis differit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum com-

men-

mensurabilium, & incommensurabiliũ sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorũ passionibus, easq; copiosè, & diligenter tribus libris, quos hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totũ hoc volumen elementorũ Geometricorum quindecim libris cõprehensum (quorum quidẽ priores tredecim sine vlla cõtrouersia Euclidi asscribuntur ab omnibus, posteriores verò duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes coplectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq; disputet; Quarta deniq; reliquis quinq; libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum cõplectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto deniq; proportiones figurarum planarum discutiũtur. Quid vero Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorũ diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocãt eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterũ constitui, appellabitur huiusce modi demonstratio problema, quoniã docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius vtraq; pars contradictionis (vt ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiã quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent cõstruere, & cuius contrarium effici etiã potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineã

rectam finitam triangulum aquilaterũ posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non aquilaterum, nempe Isosceles, vel scaleniũ, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineũ secare bisariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tñ discrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nã in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantũ probabiliter, ita vt intellectus cum sq; ambigat, vtrana illius pars vera sit: In Mathematico uero, quamcunq; quis partẽ elegerit, eam firma demonstratione, ita vt nihil omnino dubij sit reliquum, cõprobabit. Si.n. Geometra statuat ex puncto quolibet linea recta propositæ lineæ perpendicularem educere, efficiet vtiq; hoc ipsum ratione costans, & euidens: Eode modo dicendu est, si ex eodem puncto velit educere lineã non perpendicularem. Theorema aũt appellant eam demonstrationẽ, quæ solũ passionem aliquam, proprietatemue vnius, vel pluriũ simul quantitatum perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocabũt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulii, aut quippiam aliud construere, sed conteplatur tantũmodo trianguli cuiuslibet constituti passione hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hac demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis vtraq; pars vera vt sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoq; sint duobus rectis. Eade ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaq; vt uno verbo dica, quæsitum illud Mathematicũ construere aliquid docens, cuius etiam oppositũ potest effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam oẽs anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstrabitur lib. 3. propositione 31. Quamobrẽ theorema hoc, & non problema dicendu erit. Caterum tam problema, quã theorema dici cõsueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod vtrũque

que aliquid nobis proponat, vt in exemplis adductis constat. Hac ideo dixerim, vt studiosus lector non miretur quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositiones alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorũ interim voluminа taceã,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concludunt his fere verbis: Quod faciendũ erat: Theorematis vero hisce: Quod ostendendũ vel demonstrandum erat; habita nimirũm ratione finis vtriusq;. In quolibet aũt problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur et non vna tantũ, quamuis vltimus syllogismus demõstrationis solum cõcludat id, quod in initio demonstrandũ proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM vero ad demonstrationes problematis, atq; theorematũ sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus præcipue agit, vt breuius demõstrari possint. Vocant autem illa Lẽmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodum de alijs. Itaq; Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis assumit, vt demõstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

QVM omnis doctrina, omnisq; disciplina ex præexistente cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdẽ Aristotelis, aliorumq; philosophorum sentẽtia sua principia demonstret; habebunt vtiq; & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autem tria tãtummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In prima ponuntur oẽs definitiones, quas nonnulli cum Arist. suppositiones,

nes, vt vult Proclus, appellant. His autē vocabula artis explicandi, ne in tractatione ipsa, nominū ambiguitate, aut obscuritate te circūueniri in paralogismos incidamus. Secundū genus complectitur petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nullia indigeat confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiū genus referuntur Axiomata, siue communes animi notiones, quæ non solū in scientia proposita, sed etiam in cēteris alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atq; his principijs recte mihi videri accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles Ianua quis aberrabit? Vt præclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum elementorū præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum oīa hac principia, vt ex ipsis, quæ quidē facile a quouis intelligunt, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquā assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiā nomine summis laudibus efferenda est Geometria, oibusq; seculis prædicanda, quod ex tā exiguis initijs cuilibet quantūuis rudi et igna o notissimis, et quidem per facilibus progrediat ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tñ omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq; certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquat. Porro inhuiusmodi principijs tradēdis hic ordo ab Euclide seruatur, vt in ipso quidē introitu scientię proponat principia toti Geometriæ cōmunia, in alijs autē deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quada ratione, ad materiam illorum subiectam videtur spectare. Neq; vero oia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tñ ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt & intelligi. Verū ne in hac quoq; parte defuisse videamur rerū Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM eſt, cuius pars nulla eſt.



OTVS hic primus liber in eo poſitus eſt, vt nobis tradat ortus, proprietateſque triangulorum tum quod ad eorum angulos ſpectat, tum quod ad latera: qua quidem inter ſe cõparat interdũ, interdum vero vnumquodq; per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquãdo ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando vero ex angulis latera, ſecundum æqualitatem, atque inæqualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, vt cum triangulis inter eaſdem parallelas cõſtitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuiſionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiuſmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Proclí ſententia, rectilinearum figurarũ maximè primæ, ac præcipuæ,

cipua, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositã exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate cõtinua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adjciat partes etiam latitudinis; quædam denique præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solum est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

punctum

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT *hic lineam, primam speciem magnitudi-*

nis,

nis, quam dicit esse quantitatem longam dumtaxat, nō autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas removetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligere q; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quadam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & umbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes utriusq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quadam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari atque diuidi.



III.

LINEAE autem termini, sunt puncta.

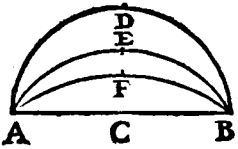
DOCET, *quanam sint extrema linea cuiusuis, seu termini, dicens lineā terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim linea infinita terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita ut earum extremitates sola esse puncta cogitemus.*

RE-

IIII.

RECTA linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

TRIPLEX *omnino eſt linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, ſiue compoſita ex vtraq;. Ex his deſcribit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit eſſe eam, quæ æqualiter inter ſua puncta extenditur, hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atq; illuc deflectit do ſubſultat; in qua deniq; nihil flexuoſum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue ſumma vi extentum: In eo enim omnes partes media cum extremis æqualem obtinent ſitum, neque vlla eſt alia ſublimior, aut humilior, ſed omnes æquabiliter inter extremos fines poſitæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo ſua interiacere puncta, quando æquale occupat ſpatium ei, quod inter ſua ſitum eſt puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat praciſe ſpatiũ, quanta eſt diſtant.a puncti A, a puncto B: Linea uero A D B, A E B, A F B, non dicentur recta, cum maiora obtineant ſpatia, quam ſit diſtantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta linea A C B, inter quæ eſt punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem, quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, ſubſultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineã perpulchre ſic definit. Linea recta eſt, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, ſi punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique eſſet C, punctum interiectũ, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rurſus oculus in A, exiſtens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C, quod quidem non contingit in lineis non*



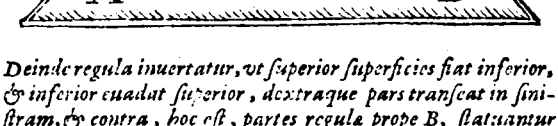
non rectis, vt perſpicuum eſt in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam eſſe minimam earum, quæ terminos habent eoſdem; qualis eſt A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non eſſet minima earum, quæ eoſdem terminos A, & B, poſſident, non ex æquo interiaceret ſua puncta, ſed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam A C B. Campanus deſcribens rectam lineam vocat eam breuiſſimam ex vno puncto in aliud extenſionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt deſcribi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ deſcriptæ intelligunt. Si namque punctum rectà fluere concipiatur per breuiſſimum ſpatium, ita vt neq; in hanc partem, neq; in illam deflectat, ſed æquabile quendam motum, atque inceſſum teneat, dicetur linea illa deſcripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea deſcripta, mixta: Si denique punctum fluens in ſuo motu non vacillet, ſed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque diſtantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur deſcripta illa linea, circularis. Itaque ſi duo puncta mouentur ſimilibus prorſus motibus, ita vt ſemper æqualiter in ſe diſtent; deſcribentur ab ipſis duæ lineæ ſimiles, hoc eſt, ſi vna earum fuerit recta, erit & altera recta: ſi vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici poſſunt, non definit hoc loco Euclides, ſed circularem exponet definitione decimaquinta, miſtam prorſus omittens, quod ea in hiſce elementis Geometricis nullum habeat vſum. Sunt autem plurima genera linearum miſtarum: quædam enim ſunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rurſus alia ſunt in plano, alia in ſolido. In plano ſunt Hyperbole, Parabole, Ellipſis, de quibus agit copioſiſſime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoides, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis ſpiralibus tractationem inſtituit, & alia huiuſmodi. In ſolido, ſeu ſuperficie curua ſunt alterius generis linea helica, quam ea ab Archimede deſcripta, qualis eſt illa, qua circa cylindrum aliquē conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum exiſtit, vel etiam quæ circa ſpharam, cuiuſmodi ſunt ſpiræ illa, quas Sol deſcribit ab ortu in occaſum, vt in Sphæra docuimus. Difformium autem

infinitus

infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quacunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum.

Lib. 1. tex. 5.

SED *quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur.*

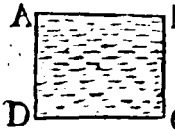


Deinde regula inuertatur, vt superior superficies fiat inferior, & inferior euadat superior, dextraque pars transeat in sinistram, & contra, hoc est, partes regulæ prope B, statuantur iuxta punctum C, rectæ descriptæ, & partes prope A, iuxta punctum D; & secundum idem latus regulæ C D, à puncto C, ad D, recta ducatur. Nam si posterior hac priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST *lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, desinit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; prima dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate.*



ditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehensa, consideratáq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbra corporum. Ha enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longa tantum erunt, & lata. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, moneant, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter longitudinem linea, latum quoq;, propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem intervallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

V I.

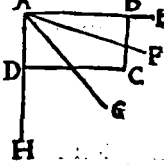
SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON *dissimilis est hęc definitio superiori, qua termini linea fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum linea fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineę A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, qua extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, qua corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.*

VII.

PLANA ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HAEC *quoq; definitio ſimilitudinem quandam deſcriptionis linea recta gerit. Superficies enim, qua ex aquo lineas ſuas interiacet, ita vt media partes ab extremis ſurſum, deorſumue ſubſultando, non recedant, appellabitur plana: qualis eſt ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocata, ita vt nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermedia cum extremis aqualem adepta ſunt ſitum, nec vlla eſt alia ſublimior, humilioriue, ſed omnes aquabiliter protenduntur. Alij ſuperficiem planam definiunt, dicentes eam eſſe, cuius partes media obumbrant extrema: Vel eſſe minimam, ſiue breuiſſimam omnium, qua eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt ſuperficies*



A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem ſit, qua A B, nunc eadem, qua A F, nunc eadem, qua A G, & nunc eadem, qua A H, nihil in ſuperficie offendit depreſſum, aut ſublatum, ſed omnia puncta ſuperficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod ſi minima ſuperficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipſa linea recta libere non poſſet circumduci, propter aliquem tumorem, ſeu eminentiam in ſuperficie occurrentem, iam non poſſet nuncupari plana. Itaq; vt ſit plana, requiritur vt omnibus modis poſſit recta linea commenſurari, hoc eſt, vt ei applicari poſſit recta linea ſecundum A B, & A F, & deniq; ſecundum omnes partes. Hac autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelligere poſſumus deſcribi ex motu linea recta in tranſuerſum, qua ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur ſuperficies perfecte

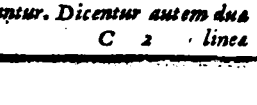
perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic ſuperficiei traditas deſcriptiones accommodare. Solent Mathematici ſuperficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda ſemper ſit ſuperficies plana. Catera omnes ſuperficies, quibus non omni ex parte accommodari poteſt linea recta, qualis eſt ſuperficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnaue rotũdæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim ſuperficiei columnæ rotundæ, ſeu cylindri, ſecundum longitudinem adaptari poſſit linea recta, tamen ſecundum latitudinem minime poteſt. Idemq; dicendum eſt de alijs. Superficies autem curua duplex eſt, conuexa videlicet, vt exterior ſuperficies ſphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, ſiue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro ſolum planam nobis explicauit, de qua eſt diſputaturus prioribus ſex libris.



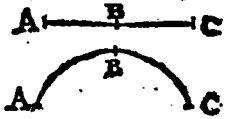
VIII.

PLANVS vero angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, *quid nam ſit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie inuicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex huiuſmodi concurſu, ſeu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & nõ iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtẽtem ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ*



linea non in directum iacere, quando altera earum versus cursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum cõtactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ linea se mutuo tangãt iacentes in directum, ita vt alterutra producta cõgruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed amba vnã integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta cõuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundũ suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaq; vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productę se mutuo secent: Curuę autem lineę, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotę cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

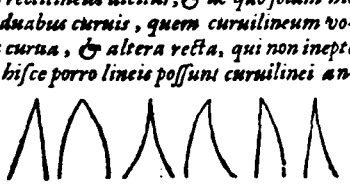


CVM

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineę, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS *omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex una curua, & altera recta, qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum cõuexum, & concauum, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisue linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdũ; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.*

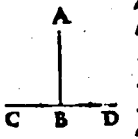


X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS *frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, pro-*

ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & qua nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus ipse explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, praeter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, recta C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos cadat linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat inter se aequales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed aequabiliter recta C D, insistet, vocabitur uterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis recta C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectae A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, unum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus aequalis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos aequales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius prim. libri. Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, qua ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, aequalem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, qua ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps aequalem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se aequales, nuncupatur uterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint aequales, non dicitur quisquam illorum rectus, ut constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hac dixerim, ut videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam usum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore haec quae diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.

QVANDO recta A B, recta C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, aquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.



XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in precedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibi litate linea perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ linea, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo linea conficiũt angulum, extrema vero significant initia linearum, qua angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum vero, per angulum A B D; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

IAM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id

hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcũque, qua angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro, ad interuallum D A, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat, [a] *erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si vero idẽ semicirculus rectã B C, secet in E, F, erit angul*[s] *B A C, obtusus; propterea quòd, ductis rectis E A, F A,* [b] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem pars est anguli B A C: Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea quòd ductis rectis E A, F A,* [c] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A G.*

[a] 31. tertij.

[b] 31. tertij.

[c] 31. tertij.

A L I T E R *idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A,* [d] *datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si verò idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C;* [e] *eritque angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus* [f] *maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur rectæ E B, E C;* [g] *eritq; angulus B E C, rectus in semicirculo: qui cum* [h] *maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse iudetur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ*

[d] 31. tertij.

[e] 31. tertij.

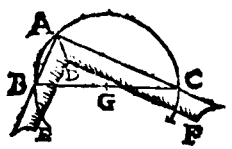
[f] 21. primi.

[g] 31. tertij.

[h] 21. primi.

quisita sint demonstrata. Satis est, ut praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes aequales eo in loco docebimus, ubi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas aequales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariae sint propositiones posterius demonstratae.

FACILIVS *idem cognoscemus beneficio normae alicuius accuratè fabricatae, qualem refert instrumentum* A B C, *constans duabus regulis* A E, A F, *ad angulum rectum in* A, *coniunctis. Nam si latus* A B, *huius normae rectae* A B, *applicetur, cadente puncto* A, *in punctum* A; *si quidem & norma latus* A C, *rectae* A C, *congruat, erit angulus A rectus: si uero citra rectam A C, cadat norma latus A C, erit angulus* A, *obtusus: si denique latus normae* A C, *ultra rectam* A C, *cadat, acutus erit angulus, ut perspicuum est.*



ITA *autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo* B A C, *ex centro* G, *cuiusuis magnitudinis, ductaque diametro* B C, *ponatur angulus* A, *in aliquo puncto circumferentiae, ut in* A, *latusque unum normae, ut* A B, *per* B, *punctum extremum diametri trãseat. Nam si alterum tunc latus* A C, *per alterum pũctum extremum* C, *transeat, vtè fabricata erit norma* A B C; *quòd tunc angulus* B A C, *in semicirculo* B A C, *rectus sit: si uero latus* A C, *non per* C, *transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus* A, *tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normae examinabimus, si angulum D, circumferentiae applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis* B, C, *&c.* 31. 3. Euclid.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES *sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim*

enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum sui una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

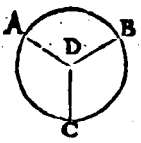
FIGVRA est, quę sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, ut solida finita, Figura nomine appellabuntur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, uel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura uocari nulla ratione potest. Figura unico comprehensa termino sunt, Circulus, Ellipsis, Sphæra, Spharoides, & alia huiusmodi: Pluribus uero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solidæ autem circunscriptæ, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos uariarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in primis 10 libris, solidarum uero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse uidetur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quę peripheria appel-

appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quę intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineę inter se sunt æquales.

DEFINIT *hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, qua vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes recta linea ducta ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint aquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a D,* 

omnes recta linea cadentes ad terminũ A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, qua describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri caperat. Qua quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri capit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoque punctum quiescens D, illud, a quo omnes linea cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipsam lineam ter minantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.

HOC

XVI.

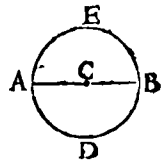
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, *punctum illud intra circulum, a quo omnes linea recta ad circunferentiam ducta, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.*

XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI *in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrũ duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest,*



teſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinque æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, *accommodari, & coaptari portioni reliquæ* A E B, *ita vt diameter* A B, *communis ſit vtrique portioni: Si igitur circunferentia* A D B, *congruat penitus circunferentiæ* A E B, *manifeſtum eſt, duas illas portiones a diametro factas, eſſe inter ſe æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si uero circunferentia* A D B, *non omni ex parte cadere dicatur ſuper circunferentiam* A E B, *ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ductæ rectæ a centro* C, *ſecante circunferentiam* A D B, *in* D, *& circunferentiam* A E B, *in* E, *erunt duæ rectæ* C D, C E, *ductæ ex centro ad circunferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamẽ vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, uel intra, uel partim extra, partim intra, ſed amba inter ſe aptabuntur, ideoque æquales erunt. quod demonſtrandum proponebatur.*



EX *hac demonſtratione conſtat, diametrum non ſolum circunferentiã, uerumetiã totam aream circuli ſecare bifariam. Cũ enim ſemicircunferentia ſibi mutuo congruant, vt oſtenſum eſt, congruent etiam ſuperficies ipſa inter diametrum, & vtramque circunferentiam comprehenſa, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter ſe erunt.*

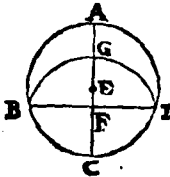
XVIII.

SEMICIRCVLVS vero eſt figura, quę continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quę de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI *gratia, in ſuperiori circulo figura* A D B, *contenta ſub diametro* A B, *& peripheria* A D B, *dicitur ſemicir-*

micirculus, quia, ut in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

QVOD si recta linea B D, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones



inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio B A D, maior est, quam alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Esse autem portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A C. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, ut super portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui res inter se æquales sunt ex defin. 10. cũ sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem est, quæ F A, maior erit, quam E A, pars ipsius F A. Cum ergo ipsi E A, sit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoque F C, maior quam E C, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio B G D, ut recta F G, eadem tunc existens, quæ F C, minor posset esse quam E A, uel E C. Si namque diceretur cadere extra, ut si circulus esset B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis est portio B A D, esset rursus F A, eadem tunc existens, quæ F C, maior quam E G, hoc est, quam E C, atque ita pars F C, maior rursum foret toto E C. quod absurdum est. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione B C D, cum hæc æqualis sit portioni B G D, quæ pars est portionis B A D.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST

POST *definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quæ nam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellare mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.*

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS *Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.*

XXI.

QVADRILATERAE vero, quę sub quatuor.

EADEM *ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius varia species mox subsequentur.*

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM *species rectilinearum figurarum sunt innume-*

numerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam ſpeciem, ſub qua omnia triangula continentur; quatuor conſtituunt ſecundam, qua omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt ſpeciem; ſex quartam, atque ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunſcribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortaſſis eam ob cauſam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis ſermo habeatur, & quod facile ad ſimilitudinem harum duarum ſpecierum cæteræ omnes a quolibet definiri poſſint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & ſex lineis comprehenſam ſexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiuſmodi figuræ quinquangula, ſexangula, ſeptangula, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT *iam ad ſingulas ſpecies triangulorum. Quia vero triangula diuidi poſſunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius ſpecies prioris diuiſionis, quæ tres ſunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis ſeſe poſſint habere. Aut enim omnia æqualia ſunt; aut duo tantum, tertio exiſtente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; eſſe, ceu ad quintam propoſitionem huius libri demonſtrabimus.*



ISO-

XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.



EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apponimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt dua sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius; & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.

XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

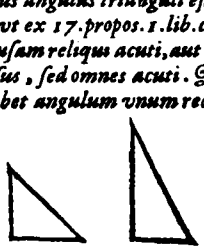


HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isoscheli, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Caterum quanam arte cõstruenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

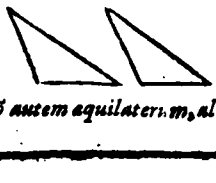
AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diuiſionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſupra diximus,) ſit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nulluſque obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figura indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum angulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, ſiue obtuſangulum eſſe quoq; poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur, nõ autem æquilaterum, aliàs eadem ratione eſſent omnes tres anguli

anguli per ea, quæ propos. 5. oſtendemus, æquales, ideoq; cum vnus ponatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quam Scalenum, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atq; Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri, quatuor vero Iſoſcelis, & tres Scaleni: atq; in vniuerſum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium eſſe diximus, Iſoſceles rectangulum, Iſoſceles amblygonium, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Iſoſceles Oxygonium habens latus tertium vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Qua etiam biſce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Iſoſceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Iſoſceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Iſoſceles, habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Iſoſceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perſpicuum eſt, quamnam connexionem, ſiue affinitatem habeant inter ſe triangula vtriuſq; partitionis. Poſſe autem dari triangulum Iſoſceles Oxygonium, cuius duorũ laterum æqualium vtrumuis tertio ſit minus, vt rectè animaduertit Franciſcus Barocius in ſua Coſmographia, oſtendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expreſſe no-

 minantur,

minantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in basę trianguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

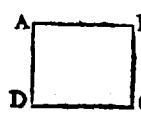
QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singillatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se aqualia existunt, omnes q; anguli recti. Itaq; quadrangulum aquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non aquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

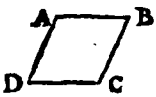


SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se aqualia, quamuis bina opposita inter se aqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter

inter se quoque aequalia sunt, cum A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

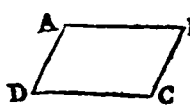
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HÆC figura tertia inter quadrilateras, qua Rhombus dicitur, oppositas prorsum habet conditiones, & diuersas a conditionibus figura altera parte longioris. Habet enim omnia latera aequalia, angulos vero non rectos, & inaequales, quamuis bini oppositi inter se aequales existant. Vt in Rhombo ABCD, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se aequales sunt, cum ABCD, propter aequalitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.



EST hæc figura, qua Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia aequalia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, C D, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, aequalia inter se, item angulis bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt aequales. Ha igitur quatuor figuræ quadrilatera dici possunt regulares; cætera vero omnes, quacunq; sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquę quadrilaterę figurę, trapezia appellentur.

RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita, neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisto penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas efferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

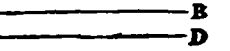


XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineę sunt, quę cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ; siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie planæ productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ linea in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata,

modata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari poteſt ſecundum omnia eius puncta, quamuis re ipſa in duabus ſuperficiebus diuerſis reperiantur; Vt propoſitis duabus rectis lineis A B, C D, ſi ſuperficies aliqua plana recta A B, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ C D; dicentur huiuſmodi rectæ duæ linea in eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamſi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, ſiue æquidiſtantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur ſuperficie exiſtere: Satis ſit hoc loco breuiter admoniſſe, recte ab Euclide vtramq; conditionem eſſe poſitam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & producta in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quod ſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum cõuenturas, quamuis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac diſiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam eſſe parallelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in vna, eademq; ſuperficie iacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret prius oportet, eas in eodẽ exiſtere plano, & in neutram partem productas coniungi poſſe. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur oſtendere, aliquas rectas lineas eſſe parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamſi infinite producantur, nulla facta prorſus mentione alterius conditionis, quæ eaſdem lineas in eodem requirit exiſtere plano.



HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, necnon earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, neceſſarium eſſe duximus, duabus definitio-

tionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & qua sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

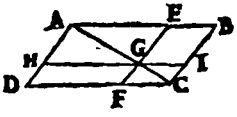
VT figura quadrilatera A B C D, si quidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solũ parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora uero duo nõ rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Caterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometra) dividere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammũ rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterũ, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorũ quoq; aliud quidẽ habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Praterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilateralarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.



XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter

meter ducta fuerit, duęq́, lineę lateribus parallelæ ſecantes diametrũ in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



SIT *parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC; et linea EF, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus AD, BC; Item linea HI, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq́, lateribus AB, DC, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC non tranſit, vocantur a Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.*

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM *hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi recte conſiderentur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo*

adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctũ B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeras alias ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.



II.

ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

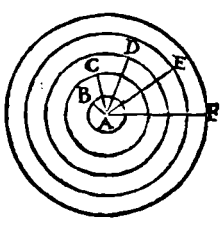
QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ea recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam.



Sic linea recta A B, producta est primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM vero, si terminatam rectam lineã cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatã esse secundum alterum extremum ad quoduis punctũ, itsamq; circa hoc punctũ fixum circũduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cepit; describetur erit circulus, effectũq;, quod tertia petitio iubet. Exemplũ habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ singulæ circa centrum A, circum-

circumuoluta singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER hac tria postulata quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia aque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometria. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IIII.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quãtitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indubitanter deueniatur.

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quę & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitu

dine

dine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI *nulla ratione potest, vt duę quantitates inęquales, equales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositę quantitati equalis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior equalis fuerit propositę quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quę eidem quantitati equales fuerint, inter se equales quoque esse. Reliquę quoque partes Axiomatis à nobis adiectę, quod frequentem vsum habeant, clarissimę sunt.*

II.

ET si equalibus equalia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI *enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.*

III.

ET si ab equalibus equalia ablata sint, quę relinquuntur, sunt equalia.

NAM *si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.*

IIII.

ET si inequalibus equalia adiecta sint, tota sunt inequalia. Et, si inequali-

bus

businęqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inęqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, *si aqualibus inaqualia adiecta sint, tota erunt inaqualia: quoniam maior quantitas addita vni aqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri aqualium adiecta: quemadmodum & si inaqualibus aqualia adjiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.*

V.

ET si ab inęqualibus ęqualia ablata sint, reliqua sunt inęqualia. Et si ab inęqualibus inęqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inęqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC *etiam, Si ab aqualibus inaqualia ablata sint, reliqua erunt inaqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuū maioris maius est residuo minoris, si aqualia auferātur ab inaqualibus. Caterū Euclides non docet, quidnā simpliciter, & absolutè gignatur ex additione quantitatum inaqualium ad quātitates inaquales, vel quid relinquatur post subtractionem inaqualium quantitatum ab inaqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim composita quantitates, vel residua, esse & inaquales, & aquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. qua sunt inaqualia.*

lia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3 & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quę eiusdem duplicia sunt, inter se sũt ęquàlia. Et quod vnius ęqualiũ duplũ est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, *quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forèt, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c, alicuius quantitatis, deficeret vtique minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si contrà, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiusplam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum Si enim dua quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertiæ illa addatur,* [a] *erunt compositæ duplices illius tertiæ, [a] sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cum igitur* [b] *& æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porrò partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non rarò eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron.

b 2. pron.

ET

VII.

ET quę eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ęqualia ſunt. Et contra, Quę ęqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARI *ratione, qua eiuſdem ſunt partes tertia, vel quarta, vel quinta, &c. inter ſe æqualia ſunt.*

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam qua æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, qua æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt. Partem quoque ſecundam huiuſce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris vſurpatur.

VIII.

ET quę ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt ęqualia.

HOC *eſt, dua quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed amba inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt dua linea rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea qua ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo excedituꝛ, ſed linea illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis linea interdum inter ſe inæquales exiſtant.*

ECONTRARIO, *Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuo congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuo congruentes, eſſe æquales, ſecundum id dunt axat, in quo ſibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.*

ET

IX.

ET totum ſua parte maius eſt.

CVM *pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte maius.*

IN ſequentibus porrò pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inſerenda eſſe cenſuimus valde neceſſaria, cùm ex ijs Axioma 12. quod Euclidi eſt decimum, demonſtrari poſſit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

o

X.

DVAE lineæ rectę non habent vnum & idem ſegmentum commune.

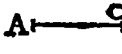
NON *eſt difficile iſtud Axioma, ſi perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo ſemper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo ſe mutuo interſecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonſtrat. Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA, [a] deſcribatur circulus ſecans duas rectas propoſitas in punctis B, & C; [b] Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC inter ſe æquales, (Sunt enim circunferentiæ ſemicirculorum æqualium, cum ADB, ADC, ponantur eſſe diametri) pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem ſegmentum commune. Quod eſt propoſitum.*



[a] 3. petit.

[b] 17. defi

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere ſegmentum, quando vnam & eandem rectam lineam conſtituunt. Vt in hac figura, recta AD, BC, commune habẽt ſegmentũ CD; quia amba vnam rectam conſtituũt



lineam

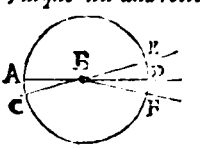
lineam A E. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonstratum.

X I.

o.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuò in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si C E, producta non cadit supra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentũ commune B D, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, sitq; vna recta linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta A B D, C B F, per centrum B, ducitur, erit tam A C D, quam C F, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ A C D, C F, vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.



DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

X I I.

x.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuive nequeat, sed prorsus sit immutabilis. Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, qua quidem alteri linea recta ita superstat, vt faciat vtrobique angulos aequales, neq; magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos aequales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis linea sint inaequales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico esse inter se aequales. Si enim fieri potest, sint inaequales, sitque A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, rectae A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quod angulus D E F, minor ponitur angulo A B C. [a] Producatur C B, in rectum & continuum vsque ad H; Cum igitur angulus A B C sit rectus, [b] erit angulus A B H, illi deinceps aequalis, & rectus quoque: quare maior etiam angulo A B G. [c] Producta autem G B, in rectum & continuum vsq; ad I, cadet portio productae B I, infra C B, productam, vt in praecedenti Axiomate est demonstratum. Quare cum angulus A B G, ponatur rectus, [d] fiet angulus A B I, illi deinceps, aequalis. Quapropter angulus A B H, maior quoque erit angulo A B I, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inaequales sunt duo anguli recti propositi, sed aequales. Quod est propositum: eademque est ratio in caeteris.



[a] 2. petit.
[b] 10. def.
[c] 2. petit.
[d] 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo aequalis rectus est, cum & curuilineus recto aequalis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus aequalis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se aequales erunt, sine vlla exceptione.

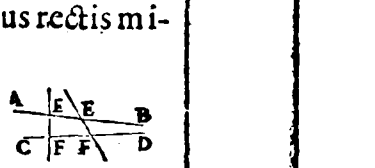
XI.

XIII.

ET si in duas rectas lineas altera re-

cta

cta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



VT si in duas lineas rectas AB, CD, *incidens alia recta* EF, *faciat duos angulos internos, & ex eadem parte* BEF, DFE, *minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem cõcenturas esse ad aliquod punctum vnũ, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in nullam partem coire possunt, sed æquali semper spatio protendantur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; idcoq; eas concurrere tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Procle, & alijs, quod non facile quiuis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum, & in duabus rectis* AB, CD, *accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeant, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcirco pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, vt firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos ali-*

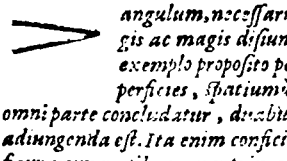
ter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

XII.

XIIII.

DVAE rectæ lineę spatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principiũ, Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiumue quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri potest, vt duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ A B C, A D C, *superficiẽ* A B C D, *ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis* A, & C.

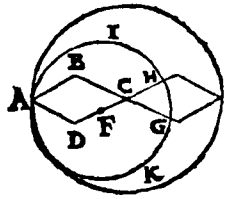


[a] 3. pet. [b] 2. pet. *Facto deinde cẽtro* C, [a] *describatur circulus interuallo* C A, [b] *& producantur rectæ* A B C, A D C, *in rectum, & continuum vsque ad circunferentiam, nempe ad puncta* E, *&* F. *Itaq; quia rectæ* A C E, A C F, *transeunt per centrum* C, [c] 17. def. *erunt semicirculi* A E, A E F, *inter se æquales, & idcirco circunferentia quoque* A E, *circunferentiæ* A E F, *æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.*

SED quia fortasis aduersarius dicet, rectas ABC, ADC, *productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in* E, *vel* F, *atque adeo non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in* E. *Sumpto puncto* F, *in recta* A D C, *quocunque, erit* A F, *minor, quam* F E, *cum minor sit, quam* A F C, *hoc est, quam* C H E, *quæ ipsi* AFC, *æqualis est, atque adeo multo minor, quàm* F E. *Circulus*

igitur

igitur ex F, ad internallum FA, describatur circulus secabit rectam FE, in punto H, atque adeo CGE, in E. Quoniam igitur AFH, diameter circuli, erit AIH, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia AIG, minor quam AIH, pars quam totum, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio AIG, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, intra circumferentiam AKG, ne pars maior sit quàm totum, vt supra demonstrauimus.



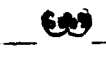
CONSTAT hoc etiam Axioma ex defin. linea recta. Cùm enim recta linea sit breuissima extensio ab vno punctò ad aliud, duci potest vnica tantùm linea ab vno puncto ad aliud. Quare si ABC, recta est, non erit ADC, recta. Quod etiam patet ex defin. Platonis. Nam si ABC, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta linea ADC, non obumbrant extrema, cum visus per rectam ABC, feratur. Non ergo recta est ADC.

HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minus necessaria ad sequentes demonstrationes Problematum atque Theorematum cum Euclidis, tum ceterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.

HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaq; quantitatibus AB, CD, addantur



inæquales B E, D F, *sitq; maior quàm* D F. *Et ex* B E, *auferatur* B G, *æqualis ipsi* D F, *vt sit* G E, *excessus, quo quantitas addita* B E, *superat quantitatem additam* D F. *Quoniam igitur æqua-*

[a] 2. pron. *libus* A B, C D, *addita sunt æqualia* B G, D F, [a] *erit tota* A G, C F, *æqualia. Quare constat, totam quantitatem* A E, *superare totam* C F, *eodem excessu* G E, *quo magnitudo* D F, *adiuncta a magnitudine adiuncta* B E, *superatur. Quod est propositum.*

XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, *addantur æquales* A B, C D. *Et ex maiore* B E, *auferatur* B G, *æqualis ipsi* D F, *vt* G E, *sit excessus, quo quantitas*

[b] 2. pron. B E, *quantitatem* D F, *superat. Quoniam igitur æqualibus* B G, D F, *addita sunt æqualia* A B, C D, [b] *erunt tota* A G, C F, *æqualia. Quamobrem tota quantitas* A E, *superabit totam* C F, *eodem excessu* G E, *quo maior quantitas proposita* B E, *minorem* D F, *superat. Quod est propositum.*

XVII.

SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.



A B *æqualibus* AB, CD, *auferantur inæqualia* BE, DF. *Sitq; EG, excessus, quo quantitas* BE, *superat quantitatem* DF; *ita vt* BG, *æqualis sit ipsi* DF. *Quia igitur ab*

[c] 3. pron. *æqualibus* A B, C D, *ablata sunt æqualia* B G, D F, [c] *remanebunt*

manebunt A G, C F, *æqualia*. *Perſpicuum ergo eſt, reſiduũ* A E, *ſuperari a reſiduo* C F, *eodem exceſſu* E G, *quo magnitudo ablata* B E, *ablatam magnitudinem* D F, *ſuperat*. *Quod eſt propoſitum*.

XVIII.

o.

Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.

A B *inæqualibus* A B, C D, *auferantur æqualia* A E, C F. *Sitq́;* B G, *exceſſus, quo tota quantitas* A B, *ſuperat totam quantitatem* C D, *ita ut* A G, *æqualis ſit ipſi* C D. *Quoniam igitur ab æqualibus* A G, C D, *ablata ſunt æqualia* A E, C F, [a] *remanebunt* E G, F D, *æqualia*. *Quare reſiduum* E B, *ſuperabit reſiduũ* F D, *eodem exceſſu* B G, *quo tota quantitas* A B, *ſuperat totam quantitatem* C D. *Quod eſt propoſitum*.

[a] 3. prom.

IN his quoque quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt una etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adjiciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune dematur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3 fiunt 11. & 9. quorum exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorum 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Denique ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

o.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM *omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.*

o.

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI *potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & Axiomata, quod cum vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri expostulant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem Postulatum a problemate, quod constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquid nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter* Axioma, *& Theorema reperitur; illud enim demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requireret. Quæ enim æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Ide iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.*

CON-

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometria, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita ut nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronũciatis. Nã octauũ, decimũ, undecimũ, duodecimũ, tertiũdecimũ, & quartũdecimũ soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM vero ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Aralum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab aliis vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie atq; ordine propositionũ, id quod maxime in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quãdo numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, cita-

citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt facilius cognoſcatur, ad quem locum quælibet citatio ſit referenda. Porrò citationes intelligendæ ſunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & ſic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Poſtulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propoſitio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.*
6. tertijd.	*Sexta tertijdecimi libri.*
9. ſextid.	*Nona ſextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi. &c.*

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PRO-

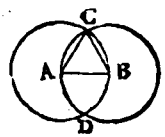
PROBLEMA I.
PROPOSITIO I.

1.

SVPER data recta linea terminata triangulũ AEquilaterum constituere.

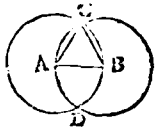
IN omni problemate duo potiſsimum ſunt conſideranda, conſtructio illius, quod propo nitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem recte eſſe inſtitutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet conſtituere triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta propoſita ſit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta linea, quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet conſtruere ex principijs conceſsis triangulum aliquod, deinde demonſtrare, ipſum ea ratione conſtructum, eſſe æquilaterum, hoc eſt, habere omnia tria latera inter ſe æqualia. Quod idem in alijs problematibus perſpici poteſt. Hæc etiã duo reperiũtur ſere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonſtretur id, quod proponitur, conſtruẽdũ eſt, atq; efficiendum prius aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pauca verò admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.

SIT igitur propoſita recta linea terminata A B, ſuper quam conſtituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] deſcribatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiuſdem rectæ B A, alius circulus deſcribatur C A D, ſecans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [b] ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; [c] Eritque ſuper rectam A B, conſtitutum triangulum



[a] 3. pet.

[b] 1. pet.
[c] 20. def.



lum A B C, hoc est, figura rectilinea cõtenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, [a] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quam B C, æqualis est rectæ A B. [b] Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

[a] 15. def.

[b] 1. pron.

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonstrationes in una propositione contineri, placuit primam hanc propositionem resolvere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demonstrativo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo praedicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrativo.

[c] 23. def.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, [c] *est æquilaterum.*

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

[d] 1. pron.

Quæ eidem æqualia sunt, [d] *inter se quoque sunt æqualia.*

Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac proterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia existunt.

Minorem vero huius syllogismi hac ratione colliget.

[e] 15. def.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, [e] *inter se sunt æquales.*

Lineæ A B, A C, sunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

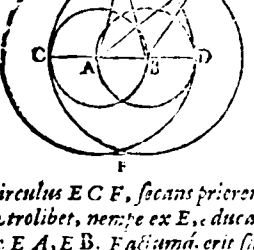
Eadem ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor praecedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter rest. poterunt omnes aliæ propositiones non solum

lum Euclidis, verum etiam caeterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod brevius, ac facilius fiat eo demonstrare id, quod proponitur, ut perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI QVIS autem super data recta desiderat constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum faciet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, ut primus. Deinde producatur A B, in utramq; partem ad circumferentias usq; ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D, describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo uero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum utrolibet, nempe ex E, ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Faciumq; erit super rectã A B, triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, ut mirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & ina æquale latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circumferentiam E D F, erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circumferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter se, (utraque enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediãtur.) Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur communi rectæ A B, erit tota A D, toti B C, æqualis.) Igitur A E, B E æquales quoque inter se erunt. Quod vero utraque A E, B E, maior sit quam A B, perspicuum est, cum A D, æqualis ostensa ipsi A E, maior sit, quam A B; Item B C, æqualis demonstrata ipsi B E, maior quoque sit, quam A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Proclo, aliorumq; interpretum Euclidis.



[a] 3 petit.

[b] 3. per.

[c] 1. per.

[d] 20. def.

[e] 15. def.

[f] 15. a. f.

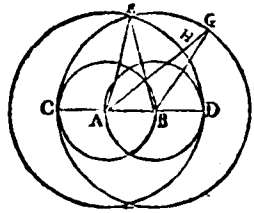
[g] 1 pron.

[h] 2. pron.

[i] 1. pron.

[k] 9. pron

[l] 9. pron.



BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum A B E, esse Isosceles, hac ratione. [a] Quoniã A E, aequalis est recta A D, & recta A D, est dupla rectæ A B, propterea quod B A, B D, aequales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus [b] qa B E, aequalis est rectæ B C, & B C, dupla est ipsius A B, propea qđ [c] A B, A C, aequales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cũ igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdẽ A B, [d] erũt A E, B E, inter se æquales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulũ A B E.

[a] 15. def.
[b] 15. def.
[c] 15. def.
[d] 6. pron.

IAM vero, si ex puncto A, [e] ducatur linea recta A G, ad circumferentiam E G F, qua non sit eadem qua A E, vel A D, secans circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B [f] ducatur alia recta G B, [g] constituetur erit triangulum A B G, super recta A B, quod dico esse scalenum. [h] Quoniam A G, maior est quam A H: [i] Sunt autem A H, A E, ex centro A, ducta, inter se aequales; erit & A G, maior quam A E, hoc est, quam B E, qua ostensa est aequalis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, [k] cum B G, sit aequalis ipsi B E. Est autem & B G, maior, quam A B, propterea quod tota B C, aequalis ipsi B G, [l] maior sit quam A B, pars. Omnia ergo tria latera trianguli A B G, inaqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

[e] 1. pet.
[f] 1. pet.
[g] 20. def.
[h] 9. pron
[i] 15. def.
[k] 15. def.
[l] 9. pron.

BREVIVS quoque ostendemus, triangulum A G B, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [m] A H, A D, ex centro A, ducta, sunt aequales, quam B G, B C, ex centro B, ducta: Sunt autem A D, B C, ipsius A B, dupla, quod A B, vtrique B D, A C, aqualis sit; erunt quoque A H, B G, ipsius A B dupla, ac propterea maiores, quã A B. Cum ergo [n] A G, maior sit, quam A H, siue quam B G, scalenum erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum; B G, medium, & A B, minimum.

[m] 15. def.
[n] 9. pron.

PRAXIS.

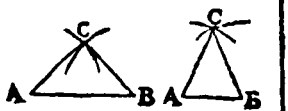
CONABIMVR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & brevem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere;

construere, Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentio rem usum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

ITAQVE triangulum aquilaterum ita facile construetur super data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero data recta A B, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contingat siue supra. Postea ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transiret enim necessario per puncta A, & B.



ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latius maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constructumq; erit isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.



SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutumq; erit Scalenum, ut constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

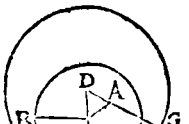


CÆTERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens trium laterum aqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

AD datum punctum, datę rectę lineę æqualem rectam lineam ponere.

SIT



SIT punctum datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta vero A C, [c] constituatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, [d] extendantur; D C, quidem oppositæ puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; D A, vero oppositæ centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam E G, [f] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, [g] remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, [h] æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadat ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidé vtraque æqualis est ostensæ rectæ C E, inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

a 3. post.
b 1 post.
c 1. primi.
d 2 post.
e 3. post.
f 15. def.
g 3. prop.
h 15. d. f.
i 1. prop.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, [k] describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta [l] ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C, [m] æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

k 3. post.
l 1 post.
m 15. d. f.

SCHO-

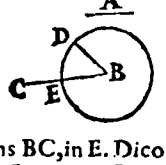
SCHOLIVM.

HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumq; iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel directo data linea, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat; vel non e directo, ita vt ab ipsa data linea extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo extendemus, rectam A G, recta B C, aqualem esse.

PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DVABVS datis rectis lines inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, [a] ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus [b] describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, [c] æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, per constructionem; [d] erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



[a] 2. primi.
[b] 3. pet.
[c] 15. def.
[d] 1. pron.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusq; B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coeuntes tendantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de quare lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtri que, sub quibus æqualia latera subtenduntur.



SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, cõtentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoq; esse æquales,

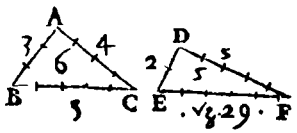
les. Quoniam enim recta AB, rectę DE, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri supponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [a] ipsę sibi mutuo congruant, punctumq; B, in punctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectę A B, rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, [b] quod est impossibile. Quòd si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineæ superficiem, [c] quod fieri non potest. Quare recta A B, rectæ D E, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc est, recta A C, rectę D F, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum A C, D F. Basis igitur B C, basi E F, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, claderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectâ esse, cum vtraq; ponatur esse eadem, quæ recta B C.) quod est absurdum. Duæ enim rectę superficiem [e] claudere non possunt. Quocirca [f] basis B C, basi E F, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. pron.
[b] 10. pron.
[c] 14. pron.
[d] 8. pron.
[e] 14. pron.
[f] 8. pron.

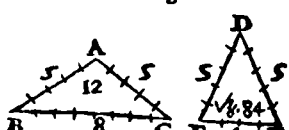
SCHOLIVM.

RECTE Excludes duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quę illis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonstratur: Triangula vero ipsa licet possint esse æqualia, posteriore

duntaxat conditione deficiente, vt ex ſcholio propoſ. 37. huius lib. conſtabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, *anguli A, & D, aquales, nempe recti, & latera* A B, A C, *aqualia lateribus* D E, D F, *non quidem vtrumque vtrique, ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitq;* AB, 3 AC, 4. *vt ambo ſimul efficiant* 7. *At vero* D E, *ſit* 2. *&* D F, 5. *vt ambo quoque ſimul* 7. *conſtituant. Quibus poſitis, erit baſis* B C, 5, *& baſis* E F, *radix quadrata huius numeri* 29. *quæ maior quidem eſt quam* 5. *minor autem, quam* 6. *Item area trianguli* A B C, *erit* 6. *area vero trianguli* D E F, 5. *Anguli denique ſuper baſim* B C, *inæquales erunt angulis ſuper baſim* E F. *Quæ quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quæ nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia eſſe, propterea quod non vtrumque latus vtrique lateri æquale exiſtit in dictis triangulis* A B C, D E F.



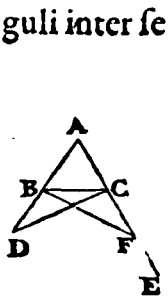
RVRSVS triangulorum A B C, D E F, *latera* A B, A C, *æqualia ſint lateribus* D E, D F, *vtrumque vtrique, ſitq; vnumquodque* 5; *anguli vero* A, *&* D, *contenti dictis lateribus inæquales, ſitq;* A, *maior, quã* D. *Quibus conceſſis, erit baſis* B C, *maior baſe* E F, *vt propoſ. 24. huius libri oſtendetur. Quod ſi baſim* B C. *ponamus eſſe* 8. *baſim autem* E F, 4. *erit area trianguli* A B C, 12. *area vero trianguli* D E F, *radix quadrata huius numeri* 84. *quæ maior quidem eſt quam* 9. *minor vero, quam* 10. *id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triangula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, vt vtrumque latus vnius æquale ſit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, vt optime dixit Euclides.*



THEOR. 2. PROPOS. 5.

5.

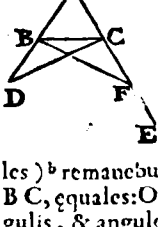
ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.



SIT triangulum Isosceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter se sint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, supra basim B C, æquales inter se esse: Item si latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse æquales. Ex linea enim A E, producta infinite[a] abscindatur A F, æqualis ipsi A D, [b] & ducantur rectæ B F, C D. Considerentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B ipsi A C, ex hypothesi, & A F, ipsi A D, ex constructione; angulusq; A, contentus lateribus A B, A F, æqualis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A, communis est vtrique triangulo: [c] Erit basis B F, æqualis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rursus considerentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam vero rectæ A D, A F, æquales sunt per constructionem, fit vt, si auferantur ex ipsis æquales A B, A C, [d] & reliquæ B D, & C F, sint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia sunt duobus lateribus C F, F B. trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, vt probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis

[a] 3. primi.
[b] 1. petit.
[c] 4. primi.
[d] 3. pron.

lateribus æqualibus æquales, vt ostensum etiam fuit. Igitur[a] erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim B C, vtriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales)[b] remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 4. primi.

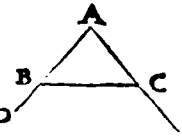
[b] 3. pron.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualibus, siue reliquum latus* B C, *ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione tradicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscurius vltimum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum quibus nondum sunt assueti. Verumtamen, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, si modo memor sit illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quæ quidam*

quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

VERITAS porrò huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoq; demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo ABC, duo latera aqualia AB, AC, quæ producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, supra basim BC, inter se æquales esse, quam angulos DBC, ECB, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo ACB, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta AB, recta AC, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo posito, cadet recta AC, super rectam AB, ob æqualitatem, sine identitatem angulis A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, congruet, [a] ac proinde tam sibi, quàm hi, inter se æquales erunt.



[a] 8. prop.

COROLLARIVM.

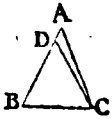
EX hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, [b] erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.



[b] 5. primi.

6. THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: [a] Et ex A B, abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur esse quam A B,) ducaturque recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B, & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: [b] Erunt triangula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 3. primi.

[b] 4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic vero, si anguli ad basim sint æquales, latera quo-

que

que angulis illis opposita esse equalia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligat per demonstrationem consequens aliquod, nunc vero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessarijs, quales sunt propositiones Geometricę, potest interdum predicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialectici loquuntur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hęc propositio; (Omnis homo est animal.) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessarijs: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocatur. Non enim sequitur, si figurę cuiusuis rectilineę vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemque modo multę alię propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, vt prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quę conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quę aliquam uidebuntur afferre utilitatem.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum aquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt aqua-



æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim triãguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & 6. primi. *C, sint æquales,* [a] *erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.*

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta [b] *abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C.* b 3. primi. *Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, E C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim:* [c] *erunt & bases C D, B F, æquales, & anguli* c 4. primi. *B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus,* [d] *remanebunt anguli F C D, D B F,* d 3. pron. *æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In-*

quibus

quibus quoniam latera D B, B F, *aqualia sunt lateribus* F C, C D, *utrumque utrique, nempe* D B, *ipsi* F C, *per constructionem, &* B F, *ipsi* C D, *vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus* D B F, F C D, *æquales, vt etiam fuit nuper demonstratum:* [a] *Erit angulus* B D F, *super basim* D F, *trianguli* D B F, *aqualis angulo* C F D, *super eandem basim* F D, *trianguli* F C D. *Hi enim aqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo* A D F, *duo anguli* A D F, A F D, *sint aquales, vt nunc ostendimus,* [b] *erunt latera* A D, A F, *aqualia. A quibus si recta* B D, C F, *per constructionem, aquales demantur,* [c] *remanebunt* A B, A C, *latera trianguli* A B C, *aqualia. Quod erat ostendendum.*

[a] 4. primi.
[b] 6. primi.
[c] 3. prom.

THEOR. 4. PROPOS. 7. 7.

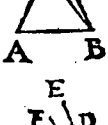
SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis alię duæ rectę lineę æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, vtraque vtrique, nempe A C, ipsi A D, quę eundê habent terminũ A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiam æquales. Aut igitur pũctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam A C, vel B D, in ipsam B C, cadat; aut intra

tra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, sit pars ipsius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia [a] erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; [b] Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, vt ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, [d] erunt anguli A C D, A D C,









[a] 5. primi.
[b] 9. primi.
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.

supra

supra basim C D, equales: Ac proinde [a] cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, [b] erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, equales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo equales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandũ.



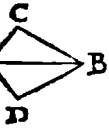
[a] 9. pron.

[b] 5. primi.

SCHOLIVM.

FIERI potest, vt duæ lineæ A D, B D, *æquales sint duabus* A C, B C, *vtraque vtrique, vt* A D, *ipsi* B C, *&* B D, *ipsi* A C. *vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egredientur ab eodem puncto linea illæ, quæ sint æquales inter se, vt constat. Sola enim* A C, A D, *eundem limitem possident* A; *Item* B C, B D, *eundem* B; *optimeq; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, vt* A C, A D, *inter se sint æquales, ita vt* B C, B D, *quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione apposita sunt hæc verba: eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ linea simul sumptæ* A D, B D, *æquales duabus lineis* A C, B C, *simul sumptis, vt in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse vtramque vtrique esse æqualem, &c.*

Eadem ratione possunt ex A, *&* B, *infra* A B, *basim trianguli* A B C, *hoc est, ad contrarias partes, duci duæ linea rectæ* A D, B D, *conuenientes ad aliquod punctum, ita vt* A D, *exiens e puncto* A, *æqualis sit ipsi* A C; *&* B D, *egrediens ex* B, *æqualis ipsi* B C, *vt perspicuum est in apposita figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad eosdem partes. Deniq; esse*



potuerunt

poterunt duæ lineæ A C, A D, *æquales inter se, eundem terminum* A, *possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ* B C, B D, *terminum habentes eundem* B, *inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratum. Appositæ igitur dictum est in propositione : duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Euclidis in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.*



8.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; sit autem & basis B C, basi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vtorque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F, [8. pron.] neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulũ A B C, cogitetur cadere super triangulum D E F, cadet punctũ A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum



ipſum punctum D, cadat, congruent ſibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod ſi punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunque id contingat, hoc eſt, ſiue in latus E D, ſiue intra triangulum E D F, ſiue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadē eſt, quæ B A,) æqualis ipſi E D; & F G, (quæ eadem eſt, quæ C A) æqualis ipſi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius. Hoc autem fieri non poſſe, iamdudum demõſtratum eſt, cum tam rectæ E G, E D, terminum eundem E, quàm rectæ F G, F D, eundem limitem E, poſſideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare ſi duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 8. pron.

[b] 7. primi.

SCHOLIVM.

VT videre, hæc propoſitio conuertit primam partem propoſitionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, colligebat fuiſſe baſium æqualitas; ita hic ex æqualitate baſium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Poſſumus eodem modo ex prima, & tertia parte concluſionis quartæ propoſitionis inferre totum antecedens eiuſdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrunque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtenduntur, angulosque reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

SIT enim baſis B C, *æqualis baſi* E F, *& angulus* B, *angulo* E, *angulusq;* C, *angulo* D F E. *Dico latus quoque* A B, *lateri* D E, *& latus* A C, *lateri* D F, *æquale eſſe, angulumq;*



gulumq; A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, [a] congruet sibi mutuo extrema earum, nec non & linea angulorum aqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea; omnia inter se aqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.

[a] 8. pron.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octaua propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus aqualibus contentos aquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos aqualibus comprehensos lateribus aquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint aqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse aqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

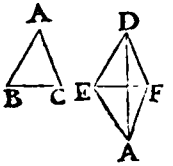
EX PROCLO.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis B C, basi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, quale est triangulum A E F. Aut igitur duo latera, nempe D F, F A, constituunt vnam lineam

lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti exiterint; aut non. Si constituant unam lineam rectam, veluti D A, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (fit enim nunc A E, recta eadem, quæ A E, quæ per hypothesin recta D E, æqualis est) [a] erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si vero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam constituant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primùm intra, quæ quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sint acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli A E D, E D A, æquales ad basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, [c] fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, [d] erunt anguli E A D, E D A, æquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis, [e] remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.

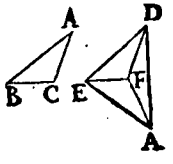


[a] 5. primi.



[b] 5. primi.

[c] 2. pron.



[d] 5. primi.

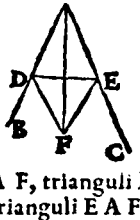
[e] 3. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

9

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT diuidendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD,



[a] 3. primi. secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde super DE, [b] constituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumque vtrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod trian

[b] 1. primi.

gulum DFE, constructum sit æquilaterum: [c] Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

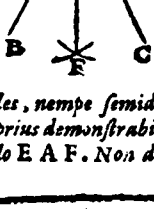
[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si loco trianguli aquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, qua sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

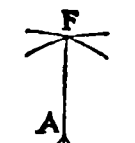
DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam secabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abscindantur recta aquales AD, AE, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (posses tamen ipsum variare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta AF, secabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur recta DF, EF, essent hæ aquales, nempe semidiametri circulorum aqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum DAF, aqualem esse angulo EAF. Non descripsimus autem dictas lineas, vt nuda



praxis

praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus, ne linearum multitudo tenebras obijciat, pariatq; confusionem.

QVOD si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, usque ad B, secta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.



SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos aequales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos aequales angulos fuerit diuisus, si horum vterque iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos aequales; Quod si singuli rursus diuidatur bifariam, obtinebimus 8. angulos aequales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides vsquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes aequales posset diuidi, quia id à nemine vsque ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdam linea curua, vel inflexa, ad finem lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quemcunque propositum in quotuis partes aequales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos aequales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunq; interuallũ, secans rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in



quot angulus propositus est diuidendus, vt in exẽplo proposito in quinq; punctis scilicet in D, E, F, G.



Si namque ad hæc puncta ex A, recta ducantur linea, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint æqualia intercruallа B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, [a] æqualia duobus lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumque vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E, vt dictum fuit, æqualis est: [b] Angulus igitur B A D, angulo E A D æqualis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sint omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quolibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales: Et diuisio linea recta in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requirentur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur recte esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, qua ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

[a] 15. defin.

[b] 8. primi.

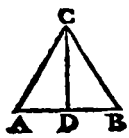
PRO-

PROBL. 5. PROPOS. 10.

10

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. [a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, [b] diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: [c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.



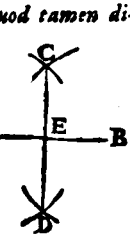
a 1. primi.

b 9. primi.

c 4. primi.

PRAXIS.

EX *centro A, ad quouis interuallum, quod tamen dimidium lineæ* A B, *excedat, describantur duo arcus, vnus superne, alter inferne; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in* C, *&* D. *Recta agatur ducta* C D, *secabit rectam* A B, *in* E, *bifariam. Si enim ex* A, *&* B, *ad* C, *&* D, *ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera* A C, C D, *æqualia sunt lateribus* B C, C D, *vtrumque vtrique, & basis* A D, *basi* B D, [d] *erit angulus* A C D, *angulo* B C D, *æqualis. Rursus quia latera* A C, C E, *æqualia sunt lateribus*



d 8. primi.

BC, CE, *vtrumque vtrique*, *& angulus* ACE, *angulo* BCE, *vt ostensum fuit* 3. [a] *erit basis* AE, *basi* BE, *aequalis*,

[a] 4. primi.



IAM vero si linea bifariam diuidenda, posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, *describemus ad eadem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in* D, *siue hoc fiat infra punctum* C, *vt in apposita figura, siue supra* C. *Nam recta per* C, D, *educta secabit rectam* AB, *bifariam*.

SCHOLIVM.

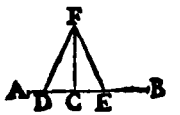
PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, *in* 4. *partes aequales, & in* 8. *in* 16. *in* 32. *&c. sicuti in propositione precedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes aequales, vberrime trademus ad propos.* 40. *huius lib. Idemque longè facilius postea efficiemus ad propos.* 10. *lib.* 6. *vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonstrentur. Neque vero vnquã diuisione linea in plures, quàm in duas partes æquales, ad eum locum usque indigebimus.*

11. PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit AB; & in ea punctum C, a quo

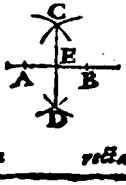
a quo iubemur erigere ſuper A B, lineam ad angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſumatur recta C D,[a] cui æqualis auferatur C E. Deinde ſuper D E, [b] conſtituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico eſſe perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia ſunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumque vtrique, nempe D C, ipſi E C, per conſtructionem, & C F, commune; Eſt vero & baſis D F, baſi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea a puncto in ea dato &c. Quod faciendum erat.

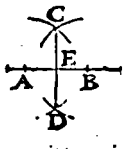


[a] 3. primi.
[b] 1. primi.
[c] 8. primi.
[d] 10. def.

PRAXIS.

EX puncto C, abſcindantur vtrinque lineæ æquales C D, C E. *Et ex* D, *&* E, *deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in* F. *Recta namque ducta* F C, *erit perpendicularis. Demonſtratio eadem eſt, quæ* Euclidis, *ſi modo ducantur rectæ* D F, E F, *quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex* D, *&* E, *deſcriptos, qui ſe interſecant in puncto* F. *Quod ſi punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur ſecundum præxim datum linea perpendicularis. Vt ſi linea data fuerit* A C, *& punctum datum* C, *extremum; protrahenda erit* A C, *in* B, *& ſumenda æquales* C D, C E, *&c. Si vero ad aliquam lineam conſtituenda ſit linea perpendicularis, non quidem in puncto aſſignato, ſed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis* A, *&* B, *quibuſcunque lineæ propoſitæ deſcribantur tam ſuperne, quam inferne duo arcus ſeſe interſecantes in* C, *&* D. *Nam*

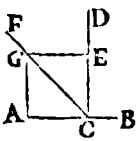




recta ducta C D, *erit perpendicularis ad* A B, *hoc est, faciet duos angulos ad* E, *rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxin, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad* E, *æquales, quippe qui super æquales bases A E, E E, consistant, & æquantur æqualibus lateribus* A C, B C, *quæ ex* C, *ad puncta* A, & B, *ducerentur.*

EX PROCLO.

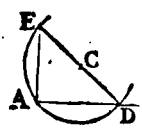
SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & *punctum* A. *Ex* C, *puncto quolibet extra lineam educatur perpendicularis* C D, *vt docuit Euclides; & a abscindatur* C E, *æqualis ipsi* A C: *Deinde b diuidatur angulus* C, *bifariam, ducta recta* C F: *Et ex* E, *rursus, vt docuit Euclides, educatur* E G, *perpendicularis ad* C D, *secans rectam* C F, *in* G. *Ducta igitur recta* G A, *perpendicularis erit ad* A B. *Quoniam cum latera* A C, C G, *trianguli* A C G, *æqualia sint lateribus* E C, C G, *trianguli* E C G, *vtrumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: Erunt anguli* A, & E, *oppositi communi lateri* C G, *æquales; Sed* E, *est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, c ideoque* A G, *ad* A B, *perpendicularis.*



3. primi.
b 9. primi.
c 4. primi.
d 10. defi.

SCHOLIVM.

BREVIS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea A B, *punctum in ea* A. *Ex centro* C, *extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodo recta* A B, *producta cum ipsa non conueniat, ve-*



t circu-

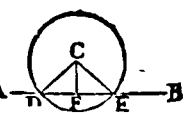
ternallo vero accepto vsq; ad A, describatur arcus circuli secãs AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcũ in E. Recta igitur ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo D A E, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo lineae, mouetur in scholio propos. 31. huius lib.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

SVPER datam rectam lineam *infinitam*, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta A B, interminatae quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret). Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, aequalia duobus lateribus E F, F C, trianguli, E F C, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, aequalis, cum hac sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare erit angulus D F C, angulo E F C, aequalis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.



a 10. primi.

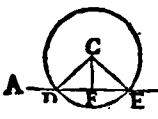
b 8. primi.

SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam: Infinitam

Si

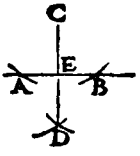
Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, *& punctũ* C, *non posset ex* C, *describi circulus secans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex* C, *perpendicularis duci ad* B E. *Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si* B E, *producatur, donec circulus ex* C, *descriptus secet totam* B A, *productam in* D, *&* E, *&c.*



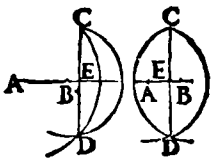
PRAXIS.

CENTRO facto C, *& intervallo quovis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in* A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodemq; intervallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in* D. *Nam ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *erit perpendicularis ad* A B. *Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi propositionis 10. Nam anguli ad* E, *erunt recti,*[2] *nempe inter se aequales.*

[2] *4. primi.*

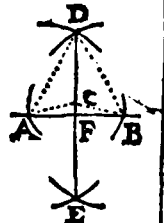


IDEM efficiemus hoc modo. Ex quovis puncto A, *in linea data, & intervallo quolibet vsque ad* C, *assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto* B, *intervalloq; vsque ad idem* C, *alius arcus describatur priorem secans in* C. *&* D; *Eritq; ducta recta* C D, *secans* A B, *in* E, *perpendicularis ad* A B. *Demonstratio eadem est, qua prior. Non est autem necesse, vt intervallum* B C, *aquale sit intervallo* A C, *vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & brevior operatio, si idẽ semper intervallum accipiatur.*



QVOD

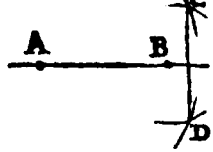
QVOD *si punctum* C, *fuerit nimis vicinum rectæ* AB, *ita vtdiximus erit. Cētro* C, *ad quoduis interuallū secetur rectæ* AB, *in duobus punctis* A, B, *ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam* AC, *vel* BC, *bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in* D, E. *Nam ducta recta* DCF, *quæ producta necessario per punctū* E, *transibit, perpendicularis erit ad rectam* AB, *in* F. *Quod ita demonstrabimus, ductis rectis* AD, BD, AC, BC. *Quoniam duo latera* DA, DC, *trianguli* ACD, *duobus lateribus* DB, DC, *trianguli* BCD, *æqualia sunt, nec non & baſes* AC, BC, *æquales sunt,* [a] *erunt anguli ad* D, *æquales. Quare cum duo latera* DA, DF, *trianguli* ADF, *duobus lateribus* DB, DF, *trianguli* BDF, *æqualia sint, continentque angulos ad* E, *æquales, vt ostendimus;* [b] *erunt anguli ad* F, *æquales, ac proinde recti, &c.*



[a] 8. primi.

[b] 4. primi

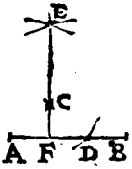
IAM vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, *quod è regione dati puncti* C, *videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ* AB, *describantur duo arcus supra, & infra lineam* AB, *ad interuallum* BC. *Deinde ex puncto* A, *aliquantum remoto à puncto accepto* B, *(Quò autem magis distabunt inter se puncta* A *&* B, *cò commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum* AC, *describantur, secantes priores in* C, *&* D. *Nam recta* CD, *perpendicularis erit ad datam rectam* AB.



SI autem punctum non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se intersecare non possint, siue punctum datum C, *sit propinquum lineæ* AB, *siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum* AC, *vbicunque punctum* A, *sumatur, de-*



scri-



scribatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, se se intersecantes in E. Recta namque ex D, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt supra demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam A B.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

13 THEOR. 6. PROPOS. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea A B, consistens super rectã C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, [a] erunt dicti anguli duo recti. Si vero A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnũ quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ij sos duobus esse rectis æquales. [b] Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero angulus rectus E B D, æqualis est duobus angulis D B A, A B E; [c] erunt, appositio cõmuni angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus quia angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; erunt, appositio communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiã esse

[a] 10. defin.
[b] 11. primi.
[c] 14. pron.
[d] 2. pron.
[e] 14. pron.
[f] 2. pron.

esse duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, [a] inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam cõsistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

[a] 1. huius

SCHOLIVM.

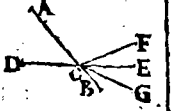
VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse ostenduntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

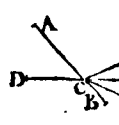
14

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse cõstitutas in directũ, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim non est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cum A C, consistat super rectam D C F, [b] fient duos anguli A C D, A C F, duobus rectis æquales;



[b] 13. primi



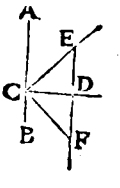
[a] 12.peon. aequales; Ponuntur autem & duo anguli 1 C D, A C E, aequales duobus rectis; [a] & omnes recti sunt inter se aequales. Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt aequales. Ablato igitur communi angulo [b] 3. prom. A C D, [b] remanebunt anguli A C F, A C E, inter se aequales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, aequales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quae C E; propterea, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

EST hac propositio precedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E, sit recta, angulos A C D, A C E, duobus esse rectis equales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis aequales, rectas D C, E C, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac: & non ad easdem partes. Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod linea data ad easdem partes duae lineae ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis aequales, quae tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductae partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, [c] *perpendicularis ad A B,* [d] *diuidaturque rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. Deinde ex D, quolibet puncto recta C D,* [e] *ducatur D E, perpendicularis ad C D, secans rectam C E, in E. Producta autem E D, ad partes D,* [f] *sumatur D F, aequalis recta D E, & ducatur recta F C. Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli E D C,*



[c] 11. primi. [d] 9. primi. [e] 11. primi. [f] 3. primi.

aequalia

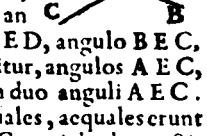
aqualia sunt lateribus F D, D C, *trianguli* F D C, *utrumq; utrique, & angulo* D, *ipsis contenti aequales, nempe recti;* [a] *erit basis* E C, *basi* C F, *aqualis, & angulus* E C D, *angulo* F C D. *Sed angulus* E C D, *dimidium est recti.* (*Est enim rectus* A C D, *diuisus bifariam.*) *Igitur &* F C D, *dimidium erit recti. Quare* C F, *cum* A C, *facit angulum* A C F, *constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem* C E, *cum eadem* A C, *angulum* A C E, *dimidium etiam recti.* Duo *igitur anguli* A C F, A C E, *quos ad eandem partes faciunt rectae* C F, C E, *cum* A B; *equales sunt duobus rectis: Et tamen* C F, C E, *non sunt una linea recta, propterea quod non sunt ducta ad diuersas partes, sed ad eandem.*

[a] 4. *prim.*

THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duae rectae A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse aequales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, [b] erunt duo anguli A E D, D E B, aequales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis aequales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint aequales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, aequales. Dempto igitur communi angulo D E B, [d] remanebit angulus A E D, angulo B E C, aequalis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se aequales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, qui duobus sunt rectis aequales, aequales erunt duobus quoque angulis D E B, B E C, [e] qui duobus rectis sunt aequales. Ablato igitur angulo communi B E C, [f] remanebunt anguli A E C, B E D, aequales inter se. Si igitur



[b] 13. *prim.*

[c] 12. *post.*

[d] 3. *post.*

[e] 13. *primi.*

[f] 3. *post.*

igitur duae rectae lineae se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium nō habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis aequales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis aequales, per. 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti aequipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis aequales existunt.

COROLLARIVM II.

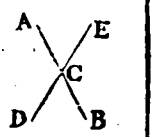
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis aequales esse. Si enim ex E, aliae lineae quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plurimas partes, [a] *quae omnes simul sumptae totis suis adaequantur. Cum ergo illi quatuor anguli aequales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis aequales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circūstans, aequualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis aequales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos aequales quatuor rectis.*

[a] 19. prop.

EX

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.



EX puncto C, recta A B, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ C D, C E, *facientes angulos A C E,* B C D, *inter se æquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas* C D, C E, *efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus A C E, æqualis est angulo* B C D; *addito communi angulo* B C E, [a] *erunt duo anguli* A C E, E C B, *duobus angulis* D C B, B C E, *æquales: Sed* [b] *anguli* A C E, E C B, *sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo* D C B, B C E, *duobus erunt rectis æquales. Quamobrem* C D, C E, [c] *erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæquintæ.*

[a] 2. pron.
[b] 13. primi.
[c] 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ ductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, *inter se æquales: Item duos* B A C, D A E, *inter se æquales. Dico tam* B A, A D, *facere vnam lineam rectam, quam* C A, A E. *Quoniam æquales sunt anguli* B A E, C A D, *si æquales illis addantur anguli* B A C, D A E, [d] *erunt duo anguli* B A E, B A C, *æquales duobus angulis* C A D, D A E, *Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt qua-*

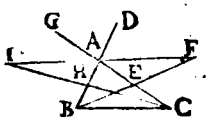
[d] 2. pron.

tuor rectis, per 2. coroll. precedentis propos. Igitur duo anguli
[a] *14. primi.* *B A E, BAC, æquales sunt duobus rectis;* [a] *atque adeo CA, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB, Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducēte ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.*

16. **THEOR. 9. PROPOS. 16.**

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemque maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur [b] enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt E F, [c] abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturque recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, [d] inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit [e] basis C B, æqualis basi AF, & angulus E C B, angulo EAF; Est autem angulus D A C, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, [f] H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, maiorem esse interno angulo, & opposito ABC.



[b] *10. primi.*
[c] *3. primi.*
[d] *15. primi.*
[e] *4. primi.*

Est

Est autem[a] angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cum lineæ B D, C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoque ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

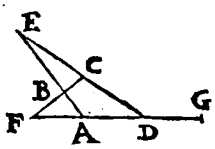
[a] 15. primi.

SCHOLIVM.

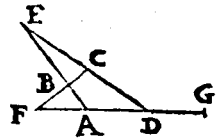
NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem esse angulo B A C, *interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet* A C B, A B C, *internorum, sibique oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colligantur ex propos. 13. per quæ anguli externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.*

I D vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cum & vno latere figura quadrilatera producto, externus angulus quilibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absolnemus.

SIT figura quadrilatera A B C D, *cuius angulus* B A D, *obtusus, &* A B C, *rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ* A B, D C, *productæ ad partes* B, *&* C, *in puncto* E, *nec non & rectæ* D A, C B, *ad partes* A, *&* B, *in puncto* F, *cocant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum* A D E, *obtusangulum, & productæ* D A, *versus* A, *ducatur ex quouis puncto* F, *ad* A E, *perpendicularis* F B, *secans latus* D E, *in* C. *Dico, si* A D, *producatur ad* G, *angulum externum* C D G, *maiorem esse quolibet trium internorum* B A D, A B C, B C D, *sibi oppositorum.*



[a] 16. primi.



rum. Cum enim ADE, triangulum sit, [a] erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursus cum DAB, obtusus maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, quàm

[b] 16. primi.

ABC. Postremo, quia & in triangulo CDF, [b] angulus externus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis BAD, ABC, BCD. Quam ob rem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, sunt æqualia,



[c] 5. primi.

[c] erunt anguli ACB, & ABC, æquales super basim BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt

[d] 5. primi.

æqualia, [d] erunt anguli ADB, & ABC, super basim BD, æquales. Quare cum vterq; angulus ACD, & ADB, æqualis sit angulo ABC, [e] erit angulus ADB, æqualis angulo

[e] 1. post.

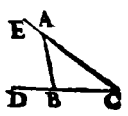
ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.

17. PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

SIT

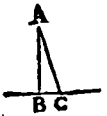
SIT triangulum A B C; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Item que duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur [a] angulus A B D externus maior est interno & opposito angulo A C B; si addatur communis angulus A B C, [b] erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: [c] Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur A B C, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, [d] maior sit angulo CAB, interno & opposito; [e] erunt, appositio communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo [f] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus B A E, [g] maior sit interno & oppositio angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, [h] erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo [i] sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 16. primi.
[b] 4. prom.
[c] 13. primi.
[d] 16. primi.
[e] 4. prom.
[f] 13. primi.
[g] 16. primi.
[h] 4. prom.
[i] 13. primi.

EX PROCLO.

HINC *perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum.* [k] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.*



[k] 17. primi

COROLLARIVM. I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus desin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectius, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inaequales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inaequales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD.



Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat, si fieri potest, perpendicularis AC, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus, & rectus, in triangulo ACB, maiores sunt duobus rectis: a sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

a 17. primi.

COROLLARIVM. III.

PARI ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes

omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam [a] *cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales;* [b] *sintque simultam illi duo, quàm hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.*

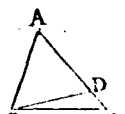
[a] *5. primi.*

[b] *17. primi.*

THEOREMA 11. PROPOS. 18. 19.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum a maiori latere AC, maiorem esse angulo ACB, qui a minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, [c] auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, [d] erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem [e] angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum [f] angulus totus ABC, maior adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, maius ponatur latere BC. ostendes angulum ABC, maiorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.



[c] *3. primi.*

[d] *5. primi.*

[e] *16. primi.*

[f] *9. pron.*

COROLLARIVM.

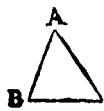
EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius



lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inaequales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inaequales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.

18. THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, maius non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si vero AC, minus esse dicatur latere AB, erit angulus B, subtensus a minori latere AC, minor angulo C, subtenso a maiore latere AB; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

[a] 5. prim.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, tum, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducatur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarũ AD, sola sit perpendicularis ad BC, et nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola una perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, [a] sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare [b] maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.



[a] 17. primi.

[b] 19. primi.

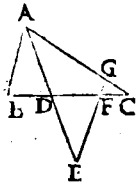
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori.

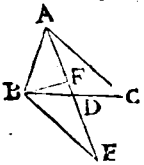
TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusq; segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse

[a] 3. primi. esse latere A B. Producatur enim A D, ad E, [a] vt sit D E, æqualis ipsi A D. Deinde ex maiori segmento D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmento D B, & per F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia sunt lateribus E D, D F, trianguli E D F, vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem [b] & anguli A D B, E D F, dictis lateribus contenti æquales; [c] Erunt bases A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est vero & angulus C A D, angulo B A D, æqualis, per hypothesin; Igitur [d] anguli G A D, G E A, trianguli A G E, æquales erunt, [e] ideoque latera A G, E G, æqualia erunt. Est autem recta A C, maior quam A G; quare & A C, maior erit, quam E G. Et quia E G, maior est, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonstratum sit rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.



[b] 15. primi.
[c] 4. primi.
[d] 1. pron.
[e] 6. primi.

HOC ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (inter quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, [f] vt sit D E, æqualis ipsi A D; ducaturque recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrumque vtrique, per constructionem, [g] & sunt autem & anguli A D C, E D B, dictis comprehensi lateribus æquales: [h] Erunt bases A C, & B E, æquales, angulusque A C D, angulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, ponitur esse minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoque angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra E D, eo quod angulus A B D, [i] maior sit angulo E B D. Quia vero E F, [k] maior est, quam E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quam A D; Sed adhuc A D, maior est, quam A F; Multo igitur



[f] 3. primi.
[g] 15. primi.
[h] 4. primi.
[i] 9. pron.
[k] 9. pron.

maior

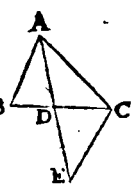
maior erit E F, *quam* A F. *Itaque quia recta* B F, *diuidens angulum* A B E, *bifariam, secat basin* A E, *inæqualiter in* F, *estque maius segmentum* E F, *minus autem* A F; *erit per theorema a Proclo prexime demonstratum, latus* B E, *maius latere* A B. *Ostensum est autem* B E, *æquale esse lateri* A C. *Igitur &* A C, *latus latere* A B, *maius erit. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

HÆC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit deducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POTERIMVS quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

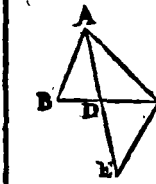
SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



DVO latera A B, A C, *trianguli* A B C, *sint inæqualia;* A C, *maius, &* A B, *minus. Recta autem* A D, *diuidens angulum* A B C, *bifariam, secet basin* B C, *in* D. *Dico segmentum* D C, *maius esse segmento* D B. *Si.n. non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale; producatur* A D, *ad* E, [a] *vt* D E, *æqualis sit ipsi* D A, *ducaturq; recta* E C. *Quoniam igitur latera* A D, D B, *æqualia sunt lateribus* E D, D C, *vtrumque vtrique; videlicet ipsi* E D, *per constructionem, &* D B, *ipsi* D C, *per hypothesin aduersarij, Sunt autem &* [b] *anguli ad* D, *dictis lateribus contenti æquales:* [c] *Erit basis* A B, *basi* E C, *æqualis*

[a] 3. primi.

[b] 15. primi.
[c] 4. primi.



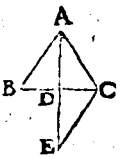
æqualis & angulo B A D, *angulus* C E D. *Positus autẽ est & angulo* B A D, *angulus* C A D, *æqualis; Igitur & angulus* C E D, C A D, *æquales erunt;* [a] *Ideoq; latus* A C, *lateri* E C, *æquale. Cũ igitur ostensum sit, latcri* E C, *æquale esse quoq; latus* A B [b], *erunt latera* A C, A B, *æqualia; quod est absurdum, quia* A C, *minus ponebatur, quam* A B. *Non erit igitur segmentum* D C, *segmento* D B, *æquale. Quod si* D C, *dicatur esse minus, &* D B, *maius; erit, per theorema Procli, latus* A B, *maius latere* A C; *Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit* D C, *quam* D B. *Quare erit necessario maius.*

a 6. primi.

b 1. pron.

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter sæ æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bisariam diuidit.



PRIMVM recta A D, *secans angulũ* B A C, *bifariam diuidat quoque basin* B C, *in* D, *bifariam. Dico latera* A B, A C, *inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus* A C, *æquale esse lateri* A B, *si* D C, *segmentum segmento* D B, *æquale ponatur, diuinodo figuram eodem modo construmus. Cum enim latera* A D, D B, *æqualia sint lateribus* E D, D C; [c] *& anguli ad* D, *dictis lateribus contenti æquales; erunt bases* A B, E C, *æquales, & angulus* C E D, *angulo* B A D, *hoc est, angulo* C A D, *æqualis. Quare* [c] A C, *æqualis erit ipsi* E C, *hoc est, ipsi* A B.

c 15. primi.

d 4. primi.

c 6. primi.

DEINDE sint latera A B, A C, *æqualia, & recta* A D, *secans basin* B C, *in* D, *diuidat angulum* B A C, *bisariam*

riam. Dico segmentum DC, æquale esse segmento DB. Cum enim latera AD, AB, æqualia sint lateribus; AD, AC, utrumque utrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus aequales per hypothesin, [a] erunt bases BD, DC, æquales. [a] 4. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum ABC. Dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnũ ex illis, vt CA, vsque ad D, [b] sitque recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia inter se sunt, per hypothesin, [c] erunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem angulo ABD, [d] maior angulus CBD. Igitur & angulus CBD, maior erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum maiori angulo CBD, [e] maius erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC, [f] fiet tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

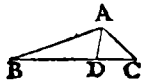


[b] 3. primi.
[c] 5. primi.
[d] 9. pron.
[e] 19. primi.
[f] 2. pron.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphy-

Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C trianguli A B C, maiora eſſe latere B C. Diuidatur angulus B A C,



[a] 9. primi. tuis lateribus contentus [a] bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum eſt ad B, [b] 16. primi. [b] erit angulus externus B D A, maior interno & oppoſito C A D; igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B, oppoſitum [c] 19. primi. [c] maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe, quam C D, quia [d] 16. primi. [d] angulus C D A, maior eſt angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eidemque eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus bifariam ſecetur.

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutę fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ



B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At vero angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, [e] 20 primi, 4. prop. [e] maiora ſunt latere B E, ſi addatur commune E C, erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rurſus quia in triangulo C E D, duo

duo latera C E, E D, maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, [b] erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Ostensum vero iam fuit, A B, C A, maiora esse, quam B E, E C. Multo igitur maiora erunt B A, C A, quam B D, C D, quod primo proponebantur. Preterea, quoniam angulus B D C, [c] maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est, eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

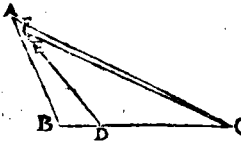
[b] 20. primi.
[b] 4 pron.
[c] 16. primi.

SCHOLIVM.

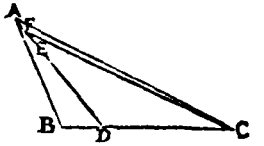
QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulo scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtusum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci posse duas lineas intra triangulū ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B, [d] minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtusus;



[d] 16. primi.



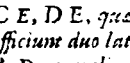
[a] 19 primi. [b] 3. primi. [c] 10 primi.

sus; erit A D B, minor recta, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, [a] maius ut latere A B. Ex D A, [b] abscindatur recta D E, aequalis rectae A B; Et reliqua linea A E, [c] bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duae lineae rectae constitutae C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C, [d] *maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, aequalis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur aequalia addantur E D, & A B, fient rectae C F, F D,* [e] *maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo rectae duceretur, essent duae rectae constitutae C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, vt Euclides demonstrauit.*

[d] 20. primi. [e] 4 pron.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, [f] *auferatur B D, aequalis rectae A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constituta igitur erunt intra triangulum duae lineae C E, D E, quae minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, aequalia sint,* [g] *erunt duo anguli B A D, B D A, aequales: Sed B D A, angulus* [h] *maior est angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*

[f] 3. primi.



[g] 5. primi. [h] 16. primi.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quae maiores sint, vel aequales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

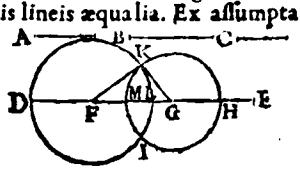
PROBL

PROBL. 8. PROPOS. 22.

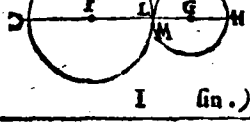
22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex propos. 20. in qua ostensum fuit, duo quęuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis DE, infinitę magnitudinis [a] abscindatur recta DF, æqualis rectæ A; Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus describatur DIK: Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus describatur HIK, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; si ex FE, sumatur recta FL, æqualis ipsi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipsi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, essent GL, FL, hoc est, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero M, caderet inter G, & L, essent eędem duę FL, GM, hoc est, DF, GH, minores recta FG; quorum vtrumq; est contra hypothe-

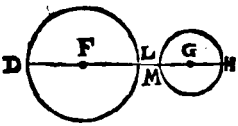


[a] 3. primi.



I fin.)

sin.) Id quod ex appositis figuris apparet.) ex quorũ quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, [a] æqualis sit rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem FD, æqualis; [b] erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



[a] 15. def.

[b] 1. pron.

PRAXIS.

SVMATVR recta DE, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum interuallum C; DE, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.



SCHOLIVM.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq;, & quoad aream ipsius constituemus. Sit namq; triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas



rectas datas AB, EC, CA, quarum quælibet duæ [a] *maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam* DE, *æqualem vni lateri, nempe* BC; *& ex* D, *interuallo lateris* AB, *arcum describo, item alium ex* E, *interuallo reliqui lateris* CA, *qui priorem secet in* F, *&c.*

[a] 20. primi.

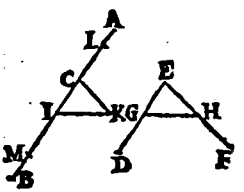
PROBL. 9. PROPOS. 23.

23.

AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde [b] constituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH. (Quod facile fiet, si CI, sumatur æqualis ipsi EG; & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GH. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes sese in N, &c.) Dico angulũ C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, vtrumque vtrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; [c] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

[b] 22. primi.

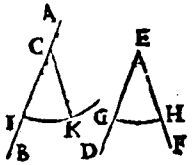


[c] 8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in

præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Faciliùs tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato vtramq; distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, *æqualia sint duobus* G E, E H, *ob æqualia interualla,* [a] *quibus arcus sunt descripti;* [a] *erunt anguli* I C K, G E H, *æquales.*



[a] 8. primi.

CÆTERVM quæ ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.

24. THEOR. 15. PROPOS. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus vero A, maior sit angulo E DF. Dico basin BC, maiorem esse basi E F. Ad lineam enim DE, ad eiusq; punctum D, [b] constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus EDF, minor ponatur

[b] 23. primi.

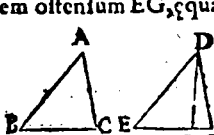
ponatur angulo A ; ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; [b] Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia; [c] erunt anguli D F G, D G F, æquales: Est autem angulus D G F, [d] maior angulo E G F. Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, [e] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quam E F. Quod est propositum.

[a] 3. primi.



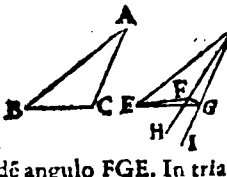
[b] 4. primi.
[c] 5. primi.
[d] 9. primi.
[e] 19. primi.

CADAT deinde E G, infra ipsam E F. Et quia rursus, vt prius, basis E G, [f] æqualis est basi B C: Et E G, [g] maior quam E F; erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.



[f] 4. primi.
[g] 9. prom.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, D G, vsque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, vt prius, [h] basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem, [i] erunt anguli G F H, F G I, infra basim F G, æquales: Est autem angulus F G I, [k] maior angulo F G E. Igitur & angulus G F H, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodē angulo F G E. In triangulo ergo E F G, [l] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basis basi E F. Si igitur duo trian-

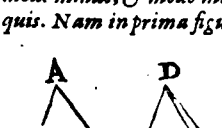


[h] 4. primi.
[i] 5. primi.
[k] 9. prom.
[l] 19. primi.

gula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera unius trianguli aqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & angulis contentis illis lateribus aquales, concluserit non solum aqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli aqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumq; vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inaquales, colligat tantum inaqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inaqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando aquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo aquale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC,

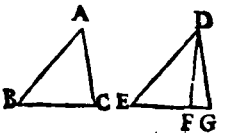


minor est semper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui aqualis est per 4. propos. angulo ABC,) minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo DEF, aqualis, per 4. propos. At vero angulus ACB, minor est angulo DFE, cui angulus DFE, maior sit angulo DGF. externus interior, & opposito; & angulus DGF, aqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC,

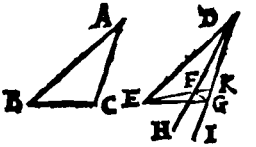
a 9. pron.

b 16. primi.

ABC, *maior quidem est angulo* DEF, *propterea quod angulus* DEG, *(equalis existens per 4. propos. angulo* ABC,) *a maior sit eodem angulo* DEF, *totum parte: Sed angulus* ACB, *minor est angulo* DFE. *Nam si recta* EF, *producatur secans rectam* DG, *in* K, *fiet angulus* DFE, *b maior angulo* DKE, *externus interno: Est autem & angulus* DKE, *maior adhuc angulo* DGE, *externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus* DFE, *angulo* DGE, *qui per 4. propos. aequalis est angulo* ACB. *Quare neque certi quicquam colligi potuit de inaequalitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit maior, modo minor, & modo aequalis.*



a 9. prop.



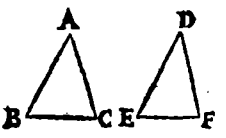
b 16. primi.

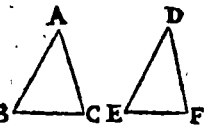
THEOR. 16. PROPOS. 25.

25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, scilicet AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit basi EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit





vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypothesin; [a] erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdũ; Ponitur enim basis B C, base E F, maior: Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis E F, [b] maior basi B C; quod magis est absurdum, cum E F, ponatur esse minor quam B C. Quare cum angulus A, neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

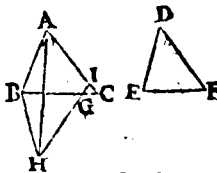
[a] 8. primi.

[b] 24. primi.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est precedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hęc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quę explicata sunt in propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex base maiore B C, [c] abscindatur recta B G, æqualis basi minori E F. Fiat quoque angulus G B H, [d] æqualis angulo D E F, [c] & sit B H, æqualis ipsi B G, atq; adeo ipsi D E. Ducta aut recta linea A H, ducatur quoque recta per G, ex H, secans A C, in I. Quoniam igitur duo latera



[c] 3. primi.

[d] 23. primi

[c] 3. primi.

latera B A, B H, *aequalia sunt*, [a] *erunt anguli* B A H, B H A, *aequales. Rursus quia latera* B G, B H, *aequalia sunt lateribus* E F, E D, *utrumque utrique*, & *angulus* G B H, *angulo* D E F, *per constructionem*; [b] *erit basis* H G, *basi* D F, *atque adeo ipsi* A C, *aequalis, angulusque* G H B, *angulo* E D F. *Et quoniam recta* H I, [c] *maior est quam* H G, *quae est ostensa aequalis ipsi* A C, *erit quoque maior* H I, *quam* A C; *Sed* A C, [d] *maior est adhuc, quam* A I. *Multo ergo maior erit* H I, *quam* A I. *Quare angulus* I A H, [e] *maior erit angulo* I H A. *Additis igitur duobus angulis* B A H, B H A, *qui ostensi sunt aequales, fiet* [f] *totus angulus* B A C, *toto angulo* B H G, *maior: Sed angulus* B H G, *demonstratus fuit aequalis angulo* D. *Maior igitur etiam erit angulus* B A C, *angulo* D, *quod est propositum*.

[a] 5. *primi*

[b] 4. *primi*.

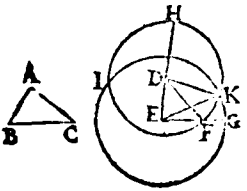
[c] 9. *pron*

[d] 9. *pron*.

[e] 18. *primi*.

[f] 4. *pron*.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F, *ad* G, *vt sit* E G, [g] *aequalis basi maiori* B C. *Deinde centro* D, *interuallo autem* D F, *describatur circulus, producaturque* E D, *ad* H, *in circunferentiam. Quoniam igitur* D H, [h] *est aequalis ipsi* D F, *erit quoque* D H, *aequalis ipsi* A C. *Additis igitur aequalibus* D E, A B, [i] *fient* A C, A B, *simul aequales toti* H E: *Sed* A C, A B, [k] *simul maiores sunt, quam* B C, *atque adeo quam* E G. *Igitur &* H E, *maior erit, quam* E G. *Quare circulus descriptus ex centro* E, *& interuallo* E G, *intersecabit rectam* E H, *atque adeo circunferentiam prioris circuli in* I, *&* K, *punctis; ad* K, *autem ducantur rectae* D K, E K. *Et quoniam duo latera* A B, A C, *aequalia sunt duobus lateribus* D E, D K, *utrumque utrique, (est enim* D K, *aequale ipsi* D F, *per definitionem circuli;* D F, *autem positum est aequale lateri* A C.) *& basis* B C, *basi* E K, *aequalis: (cum* E K *aequalis sit ipsi* E G, *per definitionem circuli;* E G, *vero recta per constructionem facta sit aequalis basi* B C.) [l] *Erit angulus* B A C, *angulo* E D K, *aequalis: Sed angulus* E D K, *maior est* [m] *angulo* E D F. *Quare & an-*



[g] 3. *primi*.

[h] 15. *def*.

[i] 2. *pron*.

[k] 20. *primi*.

[l] 8. *primi*.

[m] 9. *pron*.

& angulus A, angulo E D F, maior existet. Quod est propositum.

26. THEOR. 17. PROPOS. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtriq; & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est. A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtendun tur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri DE, sit D E, maius. a quo abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale



a 3. primi.

b 4. primi.

æquale. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum. [a] 4. primi.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F; sit E F, maius; [b] ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturq; recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtriq; & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; [c] Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [d] Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 3. primi. [c] 4. primi. [d] 16. primi.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, [e] erunt tota quoque triangula æqualia inter se. [e] 4. primi.

SCHOLIVM.

PRIOR *huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulo-*

angulorum ipſis contentorum, collecta fuit æqualitas baſium, & angulorum ſuper baſes. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate baſium B C, E F, *& angulorum ſuper has baſes, demonſtratum eſt, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia eſſe, reliquumq; angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonſtrauimus ad propoſitionem octauam huius lib. quem admodum eo loco monuimus.*



HOC loco demonſtrandum eſt theorema quoddam admodum neceſſarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, ſiue Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſin bifariam, perpẽdicularis eſt ad baſim, & ſi quidem angulum bifariam diuidat, ſecabit quoque baſin bifariam. Si vero baſim ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad baſin ducta diuidit & baſin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo A B C, duo latera æqualia A B, A C, *diuidatq; primum recta* A D, *angulum* A, *bifariam. Dico rectam* A D, *eſſe ad* A C *perpendicularem, ſecareq; baſin* B C, *bifariam. Cum enim duo latera* A B, A D, *duobus lateribus* A C, A D, *ſint* [a] *æqualia, angulosq; æquales contineant, ex hypotheſi, erunt & baſes* B D, C D, *æquales, & anguli ad* D, *atque adeo recti.*

[a] *4. primi.*

DIVIDAT deinde recta A D, *baſin* B C, *bifariam. Dico rectam* A D, *ad* A C, *perpendicularem eſſe, & angulum* A, *ſecare bifariam. Cum enim duo latera* B D, D A, *duobus lateribus* C D, D A, *æqualia ſint, & baſis* A B, *baſi* A C, *ex hypotheſi,* [b] *erunt quoque anguli ad* D, *æquales, atque*

[b] *8. primi.*

que adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, aequales erunt.

SED iam recta A D, sit ad B C, perpendicularis. Dico & basim B C, & angulum A, secari bifariam. [a] Erunt enim anguli B, C, supra basin B C, aequales. Itaque quoniam duo anguli D, B, trianguli A B D, duobus angulis D, C, trianguli A C D, aequales sunt, utrique, utrique, latusq; AD, aequalibus oppositum angulis B, C, commune; [b] erunt & reliqua latera B D, C D, aequalia & reliqui anguli ad A, aequales. Quod erat demonstrandum.

SED & hoc theorema verum est.

[a] 5. primi.

[b] 26. primi.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia aequalia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

IN eodem triangulo A B C, sit A D, ad B C, perpendicularis, diuidatque primum basin B C, bifariam. Dico & latera A B, A C, esse aequalia & angulos ad A, aequales. Quoniam enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, aequalia sunt, angulosq; comprehendunt aequales, nempe rectos; [c] erunt quoque & bases A B, A C, & anguli ad A, aequales. quod est primum.

[c] 4. primi.

SECET deinde perpendicularis A D, angulum A, bifariam. Dico & latera A B, A C, aequalia esse, & rectus B D, C D. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli A B D, duobus angulis D, A, trianguli A C D, aequales sunt, latusq; AD, illis adiacens, commune; [d] erunt quoque & latera A B, A C, & latera B D, C D, aequalia. Quod est secundum.

[d] 26. primi.

THEO-

27.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineę.

IN duas rectas A B, C, D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta C D, vsque ad punctum I,) angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G; quod est

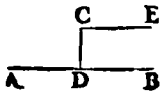
[a] 16. primi. absurdum; [a] quoniam externus interno maior est. Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

NECESSE est, vt linea, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano, vt ex definitione constat: Quare satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, vt duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in vno, eo-

dem

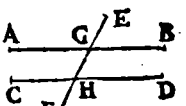
dem ſit existere plano. Fieri enim poteſt, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, *perpendicularis ad* A B, *rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; & ex* C, *in alio plano, ad* C D, *ducatur alia perpendicularis* C E, *ita vt punctum* E, *intelligatur in ſublime. Quo poſito, perſpicuum eſt, rectam* C D, *incidentem in rectas* C E, A B, *facere duos angulos* E C D, A D C, *alternos æquales, cum ſint recti; & tamen* C E, A B, *non ſint parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non apposuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem, in eodem plano exiſtentes: ſicut neque in ſubſequentibus; quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, vt ſupra diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſario in eodem plano exiſtere. In vndecimo vero libro & aliis, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis; quia in illis libris differetur de ſolidis, in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas, & ſuperficies, &c.*



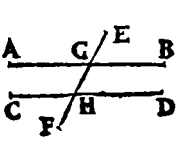
PROBL. 19. PROPOS. 28. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidēs linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erūt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidēs E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, eſſe parallelas Quoniam enim angu



lo A B,



lo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, [a] æqualis eſt angulus H G B; [b] erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, [c] parallelæ erunt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

[a] 15 primi.
[b] 1. prom.
[c] 27. primi.

DEINDE faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rurſus rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, [d] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, exterous angulo C H G, interno, & oppoſito ad eaſdem partes æqualis. Quare vt iam oſtenſum eſt, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem oſtendetur, ſi duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonſtrandum.

[d] 13. primi.

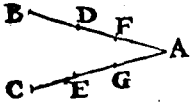
SCHOLIVM.

IAM DVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur ſequens propoſ. 29. cum multis alijs illis ita innitatur, vt ſine eius auxilio demonſtrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonſtratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nullo ratione dependent, Geometrica demõſtratione confirmare, vt in expoſitione dicti Axiomatis polliciti ſumus. Primo autem loco demonſtrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque euidentius demonſtrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonſtret, duo præmittit. Primum eſt.

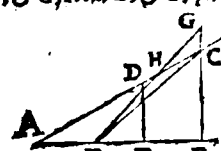
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedet.

EXEANT

EXEANT a puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectas lineas AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitæ ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & linea ipsa vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitæ esse productæ. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinitæ, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.



QVOD autem rectæ AB, AC, quò longius protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit, puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare quàm F, & G, Item B, & C, plus, quam D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in rectam AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à rectæ AB, metientur, cum sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico CB, maiorem esse, quàm DE, ac proinde plus distare rectam AC, à rectæ AB, in puncto C, remotiore, quàm in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est maior, quàm DE, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis, & rectæ AE, abscindatur æqualis BF, ita vt punctum F, tadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B; ducaturque recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque contineant æquales, vtpote rectos; [a] erunt & bases AD, FC, & anguli DAE, CFB, inter se æquales. Igitur cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit [b] parallelæ erunt AC, FC, quod est absurdum, cum concurrant in C.



[a] 4. primi.

[b] 27. primi.

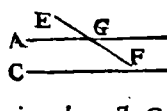
SIT deinde CB, *minor quàm* DE, *si fieri poteſt, & producta* BC, *fiat* BG, *ipſi* DE, *æqualis, iungaturq́ recta* FG. *Quia igitur duo latera* AE, ED, *trianguli* AED, *duobus lateribus* FB, BG, *æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales, puta rectos;* [a] *erunt & baſes* AD, FG, *& anguli* EAD, BFG, *inter ſe æquales. Igitur cum externus angulus* BFG, *interno* EAD, *æqualis ſit,* [b] *erunt* AC, FG, *inter ſe parallelæ, quod abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in* H. *Quocirca* BC, *ipſa* ED, *maior erit, cum neque æqualis, neque minor eſſe poſſit, vt demonſtratum eſt.*

[a] 4. primi.

[b] 27. primi.

SECVNDVM, quod Proclus præmiſit, huiuſmodi eſt.

SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.

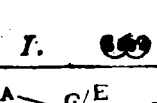


SINT duæ parallelæ AB, CD, *& recta* EF, *ſecet ipſam* AB, *in* G. *Dico rectam* EF, *ſi producatur, ſecturam eſſe quoq; ipſam* CD. *Quoniam duæ rectæ* GB, GF, *in puncto* G, *angulum faciunt, ſi producantur infinite, excedent omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallela* AB, *à parallela* CD, *diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia* GB, *à* GF, *maior iam fuerit ea, qua inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam* GF, *productam ſecuiſſe rectam* CD. *Nam quamdiu* GF, *continebitur inter duas parallelas, minori diſtantia a* GB, *remanebitur, quam* CD, *ab eadem* GB, *vt conſtat. His igitur ita expoſitis, facile demonſtrabitur hoc theorema, quod eſt apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.*

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

IN

IN *rectas* A B, C D, *incidens recta* E F, *faciat internos angulos ad partes* B, & D, *vt* B G H, D H G, *duobus rectis minores.*

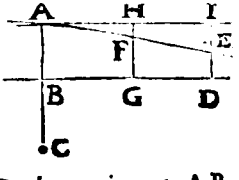


Dico rectas A B, C D, *coire ad eas dem partes* B, & D. *Quoniam enim duo anguli* B G H, D H G, *minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli* D H G, D H F, [a] *duobus rectis aquales; Erunt duo anguli* D H G, D H F, *maiores duobus angulis* D H G, B G H. *Ablato ergo communi angulo* D H G, *remanebit angulus* D H F, [b] *maior angulo* B G H. *Si igitur ad rectam* F G, & *ad punctum* G, [c] *constituatur angulus* K G H, *aqualis angulo* D H F, *cadet* G K, *supra* G B, *secabitq; producta rectam* A B. *Quoniam igitur in duas rectas* I K, C D, *recta incidens* E F, *facit angulum externum* D H F, *aqualem interno, & opposito* K G H; [c] *Erunt recta* I K, C D, *parallela. Secat autem recta* A B, *ipsam* I K, *in* G; *Producta igitur secabit quoque ipsam* C D, *vt demonstratum est. Quare* A B, *cum* C D, *conueniet ad partes* B, & D, *nimirum in puncto* L. *quod est propositum.*

[a] 13. primi.
[b] 5. pron.
[c] 23. primi.
[d] 11. pron.
[b] 28 primi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonstrare: Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, aquè dubium, & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, asseremus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuò sunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuò appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus; Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quòd dari possint in eodem plano duæ linea, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuò magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum amba producãtur, quorum illud ab Apollonio Pergeo,

hoc vero à Nicomede demonſtratum eſt: Ita quoque non videtur ſine demonſtratione admittendum eſſe, (quamquam veriſſimum ſit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur ambæ, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, vt nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ cõchoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia datam quamcunque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq;

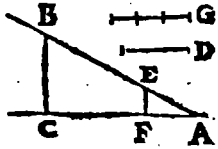


ſit recta A B. Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum nunquam æqualem eſſe rectæ A B, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim recta A B, quantumlibet vſque ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem A B, deſcribatur linea conchoideos A E, inflexa mirum linea, quæ recta B D, ſiat quidem ſemper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta A I, ad A C, perpendicularis, [a] *quæ ipſi B D, parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis H, I, vtcunque in recta A I, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares H G, I D,* [b] *quæ parallelæ,* [c] *atque adæquales inter ſe erunt, angulosque* [d] *conſtituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propoſitum oſtendamus, omnes demonſtrationes Euclidis, ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit demonſtratum ante propoſ. 29. huius lib, vbi primum vſus illius apparere incipit: vti verè à nobis mox ante propos. 29. demonſtrabitur. Itaque quoniam F G, maior eſt, quàm E D, vt Nicomedes demonſtrauit, erit F H, reliqua minor, quam reliqua E I. Magis ergo inter ſe diſtant lineæ A I, A E, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita ſemper eas probabimus magis ac magis diſtare, ſi longius protendantur. Diſtantia nihilominus ſemper minor erit.*

[a] 28. primi.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.
[d] 29. primi.

erit: quàm recta AB, hoc est, quàm perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, nunquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

SCIO principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinē D. Nam ex quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si vero non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; (quòd ex coroll. prop. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quæ parallelæ sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cum ergo BC, & G, æque multiplices sint ipsius EF, erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. quod est propositum.



VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex solum, quæ ante prop. 29. primi lib. demonstrata sunt. Ante enim prop. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam me accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationē

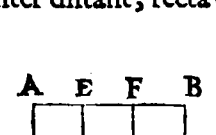
a 4. sexti.

b 13. primi.

illam legendi, etsi obsuxè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

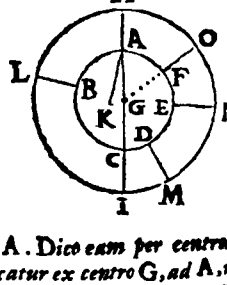
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ A B, *à recta* DC, *æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt* AD, EH, FG, BC, *ad* DC, *demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam* DC, *ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit* A B, *linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ* A B, *æqualiter distant à rectæ* D C, *ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilque in ea sinuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta* D C. *Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta* D C, *distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione comprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, quo solo concesso, una cum ijs, quæ vsque ad propos. 29.*

lib. ostensa sunt, Axioma 13. demonstrabimus, adeo clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sana mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nã etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta aequaliter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad aequales angulos incidentes aequales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua aequali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea aequaliter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper aequidistat, induit, propterea quæ recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos aequales; & contra, rectam, quæ aequales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex cõtro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se aequales.



Producta enim I G, vsque ad A, semicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo A E C, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se aequales. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruent, ac proinde aequales erunt. Efficiat iam recta H A K, aequales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, quæ ex proximè demonstratis angulos G A B, G A F, constituet aequales. Non ergo aequales sunt K A B, K A F. Quod est contra hypothesin.

HOC ostenso, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam A B C D E F, omniaq; eius puncta ab hac aequaliter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem

*8. tertij.

lineam cadentes, efficientesq; angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Hæ enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant a circumferentia omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ sint (Hoc enim demonstratum est in 8. Euclid. propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo hæc transferri possit) atque adeò eorum distantias à subiecta linea circulariter metientur. Dico lineam H L I M N O, esse circularem. Cum enim omnes, vt proximè ostendimus, per centrum G. transeant, si æqualibus H A, O F, addantur æquales A G, F G, erunt totæ H G, O G, æquales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ æquales erunt & rectis H G, O G, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum, videlicet.

II.

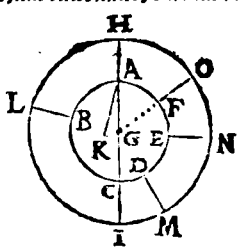
SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

VT si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoque lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco transimus, propterea quod omnia puncta lineæ A B, descripta æqualiter à recta D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa iaceant, quippe cum



cum nullum eorum magis aut minus a recta CD, *alsecedat sursum, aut deorsum vergẽdo, quam aliud. Patet hoc etiã ex iis, quae ad definitionem lineae rectae scripsimus. Cum enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quod recta AD, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed pũcta D, A, aeque velociter incedant, aequaliterque semper inter se distent.) describent (vtique lineas similes, vt in eadem definitione decuimus. Cum ergo punctum D, rectam* DC, *describat, erit quoque linea* AB, *quam punctum* A, *describit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, aequabilemq; motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc aeque clarum, & euidens, atque antecedens.*

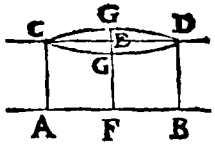
CONTINGIT *autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circularem in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari aequales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineę subiectae, à qua aequaliter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta* AD, *super rectam* DC, *in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum cum ea in suo extremo* D, *angulos semper rectos, ita vt nusquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam* AB, *altero extremo* A, *delineat: adeo vt linea descripta* AB, *naturam induat rectae lineae subiectae* DC, *à qua aequaliter semper recedit. Rectam autem, quae super lineam circularem in trãsuersum fluit aequabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta* HA, *in transuersum*



uersum super peripheriam ABCDEF, *aequabiliter, faciens semper in extremo* A, *cum ea angules aequales. Dico lineam* HLIMNO, *ab altero extremo* H, *descriptam esse quoque circularem circulum enim recta* HA, *in omni situ motus illius imaginarij faciat aequales angulos cum peripheria* ABCDEF, *sit vt ea producta in centrum* G, *cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis aequalibus* HA, OF, *ad rectas aequales* AG, FG, *fient totae rectae* HG, OG, *& omnes aliae, inter se aequales: ac propterea ex defin. circuli* HLIMNO, *circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.*

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculare rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



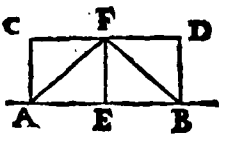
SINT ad rectam AB, *rectae duae perpendiculares* AC, BD, *inter se aequales: Et ductis recta* CD, *demittatur ex quolibet eius puncto* E, *ad* AB, *perpendicularis* EF. *Dico* EF, *vtrique* AC, BD, *esse aequalem. Si namque aequalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo aequali* FG, *si intelligatur recta* AC, *moueri in transuersum per rectam* AB. *facions cum ea angulos semper rectos, describet punctum* C, *lineam rectam per* G, *transeuntem. vt supra ostensum est, qualis est* CGD. *Duae ergo rectae* CED, CGD, *superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est* EF, *vtrique* AC, BD. *Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.*

SI

IIII.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam A B, *erectæ duæ perpendiculares* AC, BD, *æquales inter se, ducaturq́ recta* C D. *Dico vtrumq́ angulum* C, D, *rectum esse. Secta namque recta* A B, *bifariam in* E, *excitetur in* E, *ad* A B, *perpendicularis* E F, *iunganturq́ rectæ* A F, B F. *Quoniam igitur duo latera* A E, E F, *trianguli* A E F, *duobus lateribus* B E, E F, *trianguli* B E F, *æqualia sunt, vtrumq́ vtrique, angulosq́ continent æquales. puta rectos, erunt quoque & bases* A F, B F, *et tã anguli* F A E, F B E, *q́* A F E, B F E, *inter se æquales.* [a 4. primi.] *Ablatis igitur æqualibus angulis* F A E, F B E, *ex rectis æqualibus* C A E, D B E, *reliqui erunt æquales anguli* C A F, D B F. *Itaque cum duo latera* C A, A F, *trianguli* C A F, *duobus lateribus* D B, B F, *trianguli* D B F, *æqualia sint, angulosq́ complectantur æquales, vt ostendimus, erunt quoque & bases* C F, D F, *& tam anguli* C, D, *quam* C F A, D F B, *inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis* C F A, D F B, *addantur anguli* A F E, B F E, *ostensi æquales, fient toti anguli* C F E, D F E, *æquales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis* E F, *vtriq́* A C, B D, *æqualis est, vt proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ* A C, E F, *ad* A E, *perpendiculares, inter se æquales. Quare, vt de angulis* C, D, *prius probatum est, anguli* C, *&* E F C, *æquales inter se erũt. Est autem* E F C, *ostensus rectus. Igitur &* C, *rectus erit, ac proinde & angulus* D, *qui ostensus est ipsi* C, *æqualis.* [b 4. primi.]



CÆTERVM *angulos* C, D, *rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.*

SI

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.



RECTA linea A B, *in rectas* A C, B D, *incidens faciat angulu* A B D, *rectum*, & B A C, *acutum*. *Dico rectas* A C, B D, *minus semper inter se distare versus* C, D, *productas, magis vero, si versus* E, F, *producantur*. [a] *Ducatur enim ex* B, *ad* A C, *perpendicularis* B G, *qua ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli* B A C, *cadet. ac propterea angulus* G B D, *pars recti anguli* A B D, *acutus erit. Demissa ergo ex* G, *ad* B D, *perpendicularis* G H, *cadet quoque ad partes anguli acuti* G B D, *ex eodem coroll. angulus* [b] *propterea* H G C, *pars recti anguli* B G C, *acutus erit. Rursus ergo ducta perpendicularis* H I, *ad* A C, *per idem coroll ad partes acuti anguli* H G C, *cadet, ideoq; angulus* I H D, *pars recti anguli* G H D, *acutus erit. Atque ita deinceps in infinitum. si ex I, ad* B D, *perpendicularis* I K, *ducatur, & ex* K, *perpendicularis* K C, *ad* A C, *& ex* C, *ad* B D, *perpendicularis* C D, *&c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo* A B G, *angulus* B A G, *acutus est, &* A G B, *rectus,* [b] *erit recta* A B, *maior quam* B G; *& in triangulo* B G H, *recta* B G, *angulo recto* G H B, *opposita, maior quam* G H; *& in triangulo* G H I, *recta* G H, *maior quam* H I: *Atque ita deinceps erunt semper rectae, quae ipsi* A B, *propiores sunt, maiores ijs, quae remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cum nunquam possit esse finis descendarum perpendicularium. Quapropter recta* A C, *in* G, *minus distabit à recta* B D, *quam in* A, *& in* I, *minus, quam in* G, *& in* C, *minus, quam in* I, *&c. quandoquidem perpendiculares* A B, G H, I K, C D, *&c. quae ordinatim decrescunt, ut*

[a] 12. primi.

[b] 19. primi.

esten-

oſtendimus, minimae ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, vt ex coroll. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantias ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes. quod eſt primum.

DVCATVR rurſus [a] ex A, ad A C, perpendicularis A L, qua angulum obtuſum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq; angulus A L B, acutus, cum ambo A B L, A L B, [b] ſint duobus rectis minores, atque A B L, rectus ſit; ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadem ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, faciet q; angulum L M A, acutum, & L M E, obtuſum: Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, recta cadet inter M L, M E, angulumq; M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atque ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigatur N O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. dividient omnes ſigillatim angulos obtuſos, vna poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt, & A L B, acutus, [c] erit A L, recta maior, quam A B, & in triangulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita, maior quam A L; atque in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quam M L: Atq; ita deinceps erunt ſemper rectae, quae ab A B, longius abſunt, maiores ijs, quae propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis à recta B F, diſtabit, quam in A, & in O, magis, quam in M, & in E, magis, quã in Q, &c. quandoquidem perpendiculares A B, M L, O N, E P, &c. quae ordinatim augeri oſtenſae fuere, minimae ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam B F, cadentium, &c. Liquido ergo conſtat, rectas A C, B D, ad partes E F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes, quod eſt ſecundum. Quòd ſi proterue quiſpiam vellet contendere, rectam A L, quae ad A C, perpendicularis eſt, non concurrere cum D B, productа; conſtabit multò magis id, quod demonſtrandum proponitur. Nam linea D B, vltra punctum B, multò magis à recta C A, diſtabit, quam in puncto B; quandoquidem A L, ad A C,

[a] 11. primi.

[b] 17. primi.

[c] 19. primi.

AC, *perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum* D B, *cum tamen* G B, *ad eandem* A C, *perpendicularis cum* D B, *concurrat in* B, *&c.*

H Æ C *cum ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos* C, D, *eſſe rectos. Nam ſi angulus* C, *verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta* C A, *in rectas* A B, C D, *incidens efficit angulum* C A B, *rectum, &* C, *acutum, minus ſemper inter ſe diſtabunt rectae* C D, A B, *ad partes* D, B, *productae, hoc eſt, perpendiculares ex* C D, *in* A B, *demiſſae ordinatim minores fient, quam* C A, *vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis* D B, *quam* C A, *quod eſt abſurdum, cum ponatur aequalis. Non igitur acutus eſt angulus* C. *Eademque ratione neque angulus* D, *acutus erit. Sit deinde angulus* C, *obtuſus. Quia igitur recta* C A, *in rectas* C D, A B, *incidens facit angulum* C A B, *rectum, &* C, *obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectae* C D, A B, *ad partes* D, B, *productae, hoc eſt, perpendiculares ex* C D, *in* A B, *demiſſae continenter augebuntur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis* D B, *quam* C A, *quod eſt abſurdum, cum aequalis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus* C. *Eademq; ratione neq; angulus* D, *obtuſus erit. Sed neque acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterque eſt, quod erat oſtendendum.*

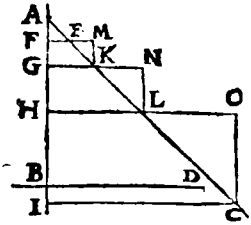
EX *his demonſtratis, facile iam Axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.*

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duę illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

HOC *eſt Axioma 13. apud Euclidem in noſtris commentarijs; apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſce-*

ſuſcepimus. Lucidens ergo recta A B, *in rectas* A C, B D, *faciat internos, ad eaſdemq́; partes angulos* A B D, B A C, *duobus rectis minores. Dico rectas* A C, B D, *ad partes* C, D, *productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe* A B D, *rectus, & alter* B A C, *acutus. Sumpto in recta* A C, *puncto quolibet* E, [a] *ducatur ex eo ad rectam* A B, *perpendicularis* E F, *& rectae* A F, *aequalis accipiatur* F G, *&* G H, *aequalis ipſi* A G, *&* H I, *ipſi* A H, *ita vt* A G, *ipſius* A F, *&* A H, *ipſius* A G, *&* A I, *ipſius* A H, *dupla ſit. Et quoniã ſi rectae* A F, *abſcindãtur continuè aequales rectae ex* A B, *aliqua tandem pars vltra* B, *punctum cadet, quod finita recta* A B, *per continuam ablationem unius eiuſdemq́; quantitatis abſumatur tandem, quando quidem linea* A F, *ita multiplicari poteſt, (quod fit, ſumendo ipſi in* A B, *continenter partes aequales) vt tandem aliquando finitã lineam* A B, *ſuperet: Id quod Euclides frequenter aſſumit in lib. 5. & alijs ſequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaequalibus proportionem inter ſe habentibus, ſubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit vt multò magis, ſi ipſi* A F, *aequalis abſcindatur* F G, *& toti deinde* A G, *non amplius ſoli* A F, *aequalis auferatur* G H: *Item toti* A H, *non amplius ſoli* A F, *vel* A G, *aequalis dematur* H I, *& ſic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum* B. *Statuatur ergo punctum* I, *terminans tertiam duplam in dato exemplo, exiſtere vltra punctũ* B. *Accipiatur quoq; in recta* A C, *recta* E K, *ipſi* A E, *&* K L, *ipſi* A K, *&* L C, *ipſi* A L, *aequalis, ita vt tot ſint partes in recta* A C, *quot in recta* A I; *ducanturq́; rectae* K G, L H, C I, *producanturq́; vnà cum* E F, *vſque* M, K N, L O, *ipſis* E F, K G, L H, *fiant aequales, ac tandem rectae iungantur* M K, N L, O C. *Itaque quoniam duo latera* K E, E M, *trianguli* K E M, *duobus lateribus* A E, E F, *trianguli* A E F, *per conſtructionẽ aequalia ſunt, vtrumque vtrique,* [b] *angulosq́; ad verticem* E, *continebunt aequales,* [c] *erit & baſis* M K, *baſi* A F, *& angulus* M, *angulo* F,

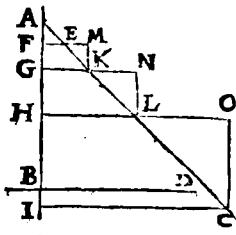


[a] 12. primi.

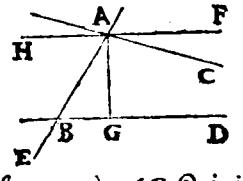
[b] 15 primi.

[c] 4. primi.

lo, F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, [a] æquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad F M, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione, [b] anguloq; comprehendunt æquales ad K, verticem, [c] erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se [d] erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiã angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesim rectus. Igitur rectæ IC, BD, [e] parallelæ sunt; ac propterea BD, productæ rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum.



SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis [f] minores; [g] sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo BAC. [g] Constituatur in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Cadetq; recta AF, supra rectã AC, cum AF maiorem angulum cum AB, constituat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, [h] interno BAF, ex eadem parte opposito æqualis est, [h] erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A



[a] 1. pron.
[b] 15. primi.
[c] 4. primi.
[d] 1. pron.
[e] 28. primi.
[f] 13. primi.
[g] 23. primi.
[h] 28. primi.

ad BD, a perpendicularis AG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. hujus lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritque angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, effiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, ut proximè demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, B, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, ut proximè demonstrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum.

QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc Axioma, & à Procle etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

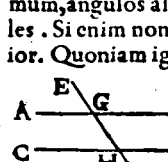
[a] 12. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29.

29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB,CD, recta incidat E F. Dico primum,angulos alternos AGH,DHG,inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales,sit alter,nempe AGH,maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G,si addatur communis angulus BGH, [a] erùt duo AGH,BGH, maiores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, [b] æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni,& ad eadem partes B,& D, [c] coibunt lineæ AB,CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo DHG:Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A,& C. Igitur æquales erunt anguli alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.



a 4. pron.
b 13. primi.
c 13. pron.

DICO secundò, angulum externum AGE, æqualem esse interno,& ad eadem partes oppositio CHG. Quoniã enim angulo BGH,æqualis est alternus CHG, vt ostensum est; & eidem B G H, [d] æqualis est angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, [e] inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur,angulum BGE, æqualem esse angulo D H G.

d 15. primi.
e 1. pron.

DICO tertio,angulos internos ad eadem partes, AGH,CHG,æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo CHG,interno;si addatur cõmunis AGH, [f] erùt duo AGE,AGH,duobus CHG,AGH,æquales:Sed duo AGE,AGH, [g] æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

f 2. pron.
g 13. primi.

SCHOLIVM.

[1] *CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.*
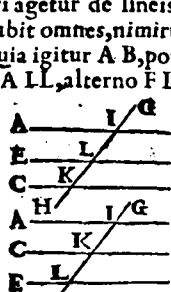
THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelę, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ A B, C D, eidem rectæ E F, parallelæ. Dico ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; C D, in K; & EF, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, [a] erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, [b] erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe interpus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I, [c] æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, [d] erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



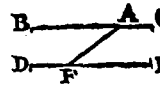
[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 1. prop.
[d] 27. primi.

SCHOLIVM.

QVOD *si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI; non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius sic poterat proponi.*

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemque lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, *coeuntes in A, parallelæ ipsi* DE. *Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim* A, *ducatur recta* AF, *secans* DE *in* F, *vtcunque. Quoniam igitur* AB, DE, *sunt parallelæ,* [a] *erunt anguli alterni* BAF, AFE, *æquales. Addito ergo communi angulo* CAF, [b] *erunt duo anguli ad* A, *æquales duobus angulis* CAF, AFE, *Sed hi duo* [c] *æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas* AC, DE. *Igitur & duo anguli ad* A, *duobus erunt rectis æquales; ac propterea* [d] *in rectum erunt constituta ipsa* AB, AC. *Quod est propositum.*

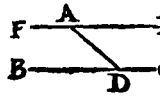


[a] 29. primi. [b] 2. post. [c] 29. primi. [d] 14. primi.

31 PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, [e] æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem, [f] Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.



[e] 23. primi. [f] 27. primi.

SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæ productæ cum illo nō conueniant. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam nō plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17.

ex

ex Procla; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallelas, quam una, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, continerent ipsæ in puncto illo eodē, quod est absurdum. a cum sint parallelæ inter se, propterea quòd uni & eidem, cui parallelæ ducuntur, duci, sunt parallelæ. a 30. primi.

EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facile negotio cōstituemus parallelogrammum, cuius unus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendētia datis duabus rectis lineis æqualia.

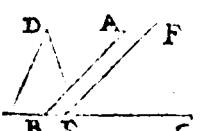
SINT enim data recta A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ recta A, sit æqualis, b fiat angulus E D F, angulo C, c & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, d agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione; e parallelogrammum erit D E G F. Quod cum ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.



b 23. primi.
c 3. primi.
d 31. primi.
e 35. def.

PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus a puncto extra datam rectam lineam proposito lineam rectē, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, ut ad propos. 23. polliciti sumus.

SIT cum datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam B C, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea B C, f constituatur in eo angulus C E F, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod iubetur. Si vero non transeat per A, g ducatur per A, recta A B, ipsi E F, parallela secans B C, in B. Dico angulum A B C, angulo D, æqualem esse. Cū enim parallelæ sint A B, E F, h erit



f 23. primi.
g 31. primi.
h 29. primi.

ad. pron. *angulus* CEF, *externus interno* ABC, *ex eadem parte opposito æqualis. Cum ergo & angulus* D, *angulo* E, *per constructionem sit æqualis, & æquales inter se erunt anguli* ABC, *&* D. *quod est propositum.*

NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, rectè Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum ABC, *sintq; latera* AB, AC, *latere* BC, *maiora. Abscindatur* BD, *æqualis ipsi* BC, [b] *ducaturq;* DE, *ipsi* AC, *parallela:* [c] *eritq; angulus* BED, *angulo* C, *æqualis. Quare duo anguli* B, C, *trianguli* ABC, *duobus angulis* B, E, *trianguli* DBE, *æquales sunt, vterque vtrique, latusq; latere* BC, *lateri* DB, *æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim* BE, *minus, quàm* BC, *atque adeo neque lateri* AC, *neq; lateri* AB, *æquale esse potest; quòd hæc latera maiora ponantur latere* BC. *Causa huius rei est, quòd latus* BC, *in triangulo* ABC, *adiacet angulis dictis, at latus* DB, *in triangulo* DBE, *opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo* DEB, *qui angulo* C, *æqualis est.*



[b] 31. primi. [c] 29. primi.

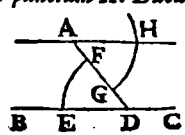
SIT rursus triangulum FGH, *sintq; iterum latera* FG, FH, *latere* GH, *maiora, &* FH, *maius, quàm* FG. *Abscindatur* HI, *ipsi* FG, *æqualis,* [d] *ducaturq; ipsi* FG, *parallela:* [e] *eritq; angulus* HKI, *angulo* G, *æqualis. Sunt ergo duo anguli* H, G, *trianguli* FGH, *duobus angulis* H, K, *trianguli* IKH, *æquales, vterque vtrique, latusq;* FG, *lateri* IH, *æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim* HK, *minus, quàm* HG, *atque adeo neq; lateri* HG, *neque lateri* FH, *æquale esse potest; quòd latus* FH, *maius etiam ponitur, quàm* GH. *Ratio huius rei est, quòd latus* FG, *in triangulo* FGH, *opponitur angulo* H, *at latus* IH, *opponitur angulo* K, *in triangulo* IKH, *qui non ponitur æqualis angulo* H, *sed angulo* G, *est æqualis,* [f] *qui maior est*

[d] 31. primi. [e] 29. primi. [f] 18. primi.

r est angulo H, propterea quòd latus F H, maius posuimus latere F G. Distulimus hanc demonstrationem huc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

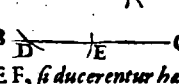
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi B C, per punctum A. Ducatur recta A D, utcunque ad B C, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, unus ad partes B, alter ad partes C: Deinde beneficio circini arcui E F, abscindatur ex arcu altero arcus G H, aequalis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, erit hac parallela ipsi B C. Nam anguli E D F, H A G, sunt aequales, ut constat ex praxi propos. 23. &c.

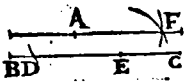


27. primi.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum lineae parallela lineae datae B C, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans B C, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta B C: Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secàtes sese in F. Nam ducta recta A F, erit parallela rectae B C. Quoniam enim propter idem interuallum assumptum recta A F, aequalis est rectae D E; & rectae A, D, rectae E F, si ducerentur hae lineae; erit A F, oppositae D E, parallela, ut posteà demonstrabimus propos. 34.

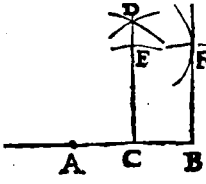


QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectae B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum. Et ex quouis puncto eiusdem rectae B C, nempe E, quod tamen aliquantulum distet a puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describantur ad partes A: Deinde ex A, interuallo D E, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta namq; ducta A F, ut parallela recta B C, ut prius; quia recta A F, aequalis



est recta D E, *ob idem interuallum*; *& recta* A D, *recta* E F, *si ha recta ducta essent*, *&c.*

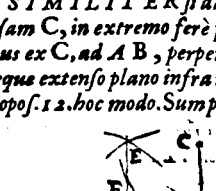
E X *his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta* A B, *ex cuius extremo puncto* B, *educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis* C, *abscindatur recta* C B, *æqualis* C A, *& ex* A, *&* B, *ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in* D, *ducatur recta* D C, *quæ ad* A B, *perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per* B, *ducatur ipsi* C D, *parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propos. proxime explicatam.*



E x C D, *abscissa recta quantacunque* C E, *describatur ex* B, *ad interuallum* C E, *arcus, quem in* F, *secet alius arcus ex* E, *ad interuallum* C B, *descriptus, ducaturq; recta* B F. *Hæc namque ipsi* C D, *parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igitur cum angulus* A C D, [a] *æqualis sit interno* C B F; *sit autem* A C D, *rectus, erit &* C B F, *rectus, ac proinde* B F, *ad* A B, *perpendicularis erit.*

[a] 29. primi.

SIMILITER si data sit recta A B, *& punctum extra ipsam* C, *in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex* C, *ad* A B, *perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam* A B, *vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto* D, *vtcunq; in linea* A B,



abscindantur vtrinque inter se æquales D A, D B, *& ex* A, *& B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in* E, *ducaturque recta* E D, *quæ ex praxi propos. 11. ad* A B, *perpendicularis erit. Deinde per* C, *ducatur ipsi* D E, *parallela, hoc modo, secundum praxim huius propos. 31. Ex dato puncto* C, *ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam* D E, *in* F: *eodemq; interuallo ex* B *versus* C, *alius arcus describatur, qui in* G, *intersecet alius*

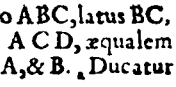
arcus

a ...us ex C, *ad internallum* D F, *delineatus*. *Recta ne*mq; d ...ata ex C, *per* G, *secans* A B, *in* H, *parallela erit recta* E, *ex primi huius propos.* 31. *Quare, ut proximè scripsimus,* H, *ad* AB, *perpendicularis erit, sicuti &* E D, *ad eandem* ...*pendicularis est*.

THEOR. 22. PROPOS. 32. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et *triáguli* tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. [a] Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, [b] erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, [c] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, [d] fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.



a 31. primi.
b 29. primi.
c 29. primi.
d 2. prom.

DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, [e] erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, A C B, [f] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

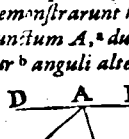
e 2. prom.
f 13. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

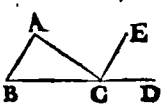
CVM *demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse aqualem, perspicuum est, alterutrum internorũ, & oppositorũ superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus* A, *internus superatur ab angulo externo* A C D, *angulo* B, *interno: Et angulus* B, *internus superatur ab eodem externo angulo* A C D, *angulo* A, *interno, quandoquidem angulus* A C D, *duobus angulis* A, *&* B, *est ostensus hoc loco aqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis aquales esse, manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli* A, *&* B, *a duobus rectis deficiunt angulo* A C B, *&c.*

OMNE *porro triangulum habere tres angulos duobus rectis aquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum* A B C, *&* per punctum A, [a] *ducatur recta* B C, *parallela* DE. *Quoniam igitur* [b] *anguli alterni* D A B, *&* A B C, *aquales sunt; si addãtur aquales* E A C, *&* A C B, *(sunt enim & hi alterni)* [c] *erunt duo anguli* D A B, E A C, *duobus* A B C, A C B, *aquales.* [d] *Addito ergo commune angulo* A B C, *erunt tres anguli* D A B, B A C, C A E, *aquales tribus angulis* A B C, B A C, A C B. *Sed anguli* D A B, B A C, C A E, *aquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo* A B C, *anguli* A B C, B A C, A C B, *duobus sunt rectis aquales, quod est propositum.* Ex hoc autem facile concludemus, *angulum externum* A C F, *latetis* B C, *sit protractum, aqualem esse duobus internis, & oppositis* A B C, B A C. *Quoniam n. anguli* A B C, B A C, A C B, [e] *aequales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit:* [e] *Sunt autem & anguli* A C F, A C B, *duobus rectis aequales; Erunt anguli* A B C, B A C, A C B, *angulis* A C F, A C B, *aquales.* [f] *Demto igitur communi angulo* A C B, [f] *remanebit angulus* A C F, *duobus angulis* A B C, B A C, *aqualis.*



[a] 31. primi. [b] 29. primi. [c] 2. pron. [d] 2. primi. [e] 13. primi. [f] 3. pron.

FACILE *etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus aequalis sit duobus internis, & opposito, illam lineam esse in directum ipsi latera constitutam. Ex C, cum ducatur* CD, *recta, sitq; angulus* ACD, *aequalis duobus angulis* ABC, BAC. *Dico, rectas* BC, CD, *in directum iacere. Cum enim angulus* ACD, *aequalis sit angulis* ABC, BAC; *si addatur communis angulus* ACB, *erunt anguli* ACD, ACB, *aequales angulis* ABC, BAC, ACB: *Sed* ABC, BAC, ACB, *aequales sunt duobus rectis. Igitur & anguli* ACD, ACB, *duobus erunt rectis aequales. Quare* BC, CD, *vnam lineam rectam constituunt.*



[a] 2. pron.

[b] 32. primi.

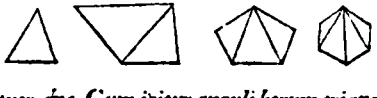
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quot nam rectis angulis aequiualeant interni anguli figura cuiuslibet rectilineae, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primae figurae rectilineae aequales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secundae figurae rectilineae aequales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiae figurae rectilineae aequales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis; Et sic de reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, semper binario; quoniam duae linea recta superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres rectae lineae ad figurae constitutionem requiruntur. Ex quo triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse

esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario demptorum tribus, relinquitur unum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cui sit decimaoctaua, habebit 20. angulos aequiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, aequiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autẽ hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraùe, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulũ in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituãt omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli aequales sint duobus rectis; perspicuum est omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ aequales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.



SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuslibet, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

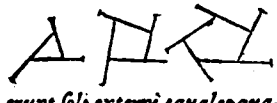
HOC est, anguli cuiuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera aequiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.

Demon-

Demonſtratio autem huius rei talis eſt. Si à quouis puncto intra figuram aſſumpto ad omnes angulos rectae lineae ducantur, efficientur tot trianguli, quot latera, angulosue figura ipſa continet. Cum igitur anguli cuiuſcunque trianguli, aequales ſint duobus rectis, [a] 32. primi. erunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figurae rectilineae propoſitae, vt conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figurę propoſitę, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum aſſumptum conſtitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum exiſtentes aequales 4. rectis tãtummodo, vt collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cuiuſque figurae bis tot rectis ſunt aequales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod eſt propoſitum.



XX. hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figurae cuiuſcus rectilineae producantur ordinatim verſus eandem partem, omnes angulos externos aequales eſſe quatuor rectis. Nã quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] 13. primi. aequantur duobus rectis; atque adeo omnes externi vna cum omnibus internis aequales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosue figura continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis aequales, minus quatuor, vt demonſtrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis aequales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni et externi ſimul aequales ſunt ſex rectis. Cum igitur interni, duobus ſint rectis aequales, erunt ſoli externi aequales quatuor dumtaxat rectis. [c] 32. primi. In quadrilatero, anguli externi & interni ſimul aequales ſunt octo rectis. Cum igitur interni ſoli aequales ſint quatuor rectis, vt oſtendimus, erunt & ſoli externi quatuor etiam rectis aequales. In pentagono, ſeu quinquangulo,



gulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.



IN pentagono A B C D E, latera in vtrãque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, sit protractũ ad F, [a] *erit externus angulus F B K,* [b] *duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales sunt quatuor* [2. pron.] *angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F,* [b] *erũt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinque angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F,* [c] *æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.*

[a] 32. primi.
[b] 32. primi.
[c] 32. primi.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, [a] *æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erũt & reli-*

[a] 32. primi.

& reliquum illius reliquo huius æqualis, æquiangula q; erunt ipsa triangula.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isosce le, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum, Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, [a] cum omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare, cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At verò si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.

[a] 32. primi.
[b] 5 primi.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque est, quemuis anguli trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [c] quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

[c] 32. primi.

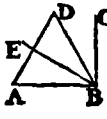
COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illius scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reli-

reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.

PORRO ex tertio corollario depromi poteſt methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, [a] *conſtituatur triangulum æquilaterum A B D. Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiuſdem recti. Diuiſo igitur angulo A B D,* [b] *bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuiſus eſt in tres angulos æquales. Quod eſt propoſitum.*

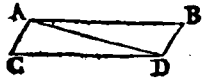


[a] 1. primi.

[b] 9. primi.

33. PROBL. 23. PROPOS. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt; Et ipſę æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, [c] erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia ſint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [d] erunt baſes B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas A C, B D, [e] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales.

[c] 29. primi.

[d] 4. primi.

[e] 27. primi.

Rectæ

Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

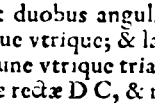
SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas aequales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt ipsę coniungentes sint & aequales & parallelae. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineę essent parallelę vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent æquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita A B, D C, inter se esse æqualia, nec non latera opposita A D, B C. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos DAB, & DCB: Denique ducta diametro A C, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim A B, D C, sint parallelæ, [a] erunt anguli alterni B A C, D C A, æquales. Rursus quia A D, B C, sunt parallelæ, [b] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique; & latus A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [c] erit recta A B, æqualis oppositæ rectæ D C, & recta B C, oppositæ rectæ A D. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æqua-



[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 26. primi.

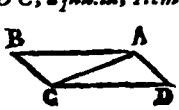
les anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD,
[a] 2. prom. [a] fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumq; vtriq;, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iã ostendimus; [b] erunt triãgula ABC, CDA,
[b] 4. primi. æqualia, ideoq; parallelogrammum ABCD, diuisum erit bifariã a diametro AC, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Item opposita latera AD, BC. Dico ABCD. esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Item lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & basis AC, communis. Igitur [c] *erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera AB, BC, æqualia sunt lateribus CD, DA, vtrumque vtrique, & anguli B, D, ostensi æquales;* [d] *erit angulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA alterno angulo DAC. Quare* [e] *erunt AB, & DC, parallelæ; Item AD, & BC, quod est propositum.*



[c] 8. primi.
[d] 4. primi.
[e] 27. primi.

HINC

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorũ latera sunt inter se aqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat aqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se aqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, *anguli oppositi* A, & C, *æquales; Item oppositi anguli* B, & D. *Dico* A B C D, *esse parallelogrammum; hoc est, lineas* A B, D C, *esse parallelas; Item & lineas* A D, BC. *Nam si æqualibus angulis* A, & C, *addantur æquales anguli* B, & D; [a] *erunt duo anguli* A, & B, *duobus* [a 32. primi.] *angulis* D, & C, *æquales, & idcirco anguli* A, *et* B, *dimidiũ facient quatuor angulorum* A, B, C, & D. *Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo* A, & B, *duobus rectis æquales. Quare* A D, BC, [b] *parallelæ sunt. Eadem ratione erunt* A B, DC, [b 28. primi.] *parallelæ. Erunt enim duo quoq; anguli* A, & D, *duobus angulis* B, & C, *æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiã manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.*

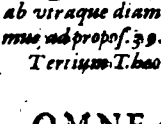
HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium [illegible] *quod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides* A B C D, *quod parallelogrammum esse ostẽsum est; in quo, ducta diametro* A C, *constituatur super* A C, *triangulo* A B C, *æquale triangulum* A E C, *inuersa*

ordine, ita vt latus C E, sit æquale lateri A B, & A E, ipsi C B, vt in scholio propos. 22. docuimus; fiatque trapezium A E C D. Quoniam verò triangulum A B C, triangulo A D C,
a 34. primi. æquale est, [a] quòd diameter A C, bifariam secet parallelogrammum D B: Erit & triangulum A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur a diametro A C.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogrammum erit, vt ostendimus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

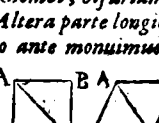
OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.



SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque A D, B C.
b 28 primi. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti; [b] erunt A D, B C, parallelæ. Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod est propositum.

HINC rursum constat, Quadratum, & Alterum parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Alterum parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos verò figuræ Alterum parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus

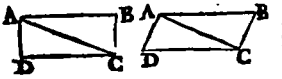


A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, vtrumque vtrique, & basis B C, basi D C; (sunt enim hæc figuræ æquilateræ) [c] erunt anguli B A C, D A C, æquales.
c 8. primi.

Quare

Quæ angulus BAD, dividitur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.

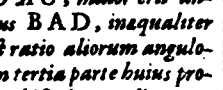
SIT rursus Altera parte lõgius, vel Rhõboides ABCD, in quo diameter AC, sitque, maius latus AB. Quoniam



igitur in triangulo ABC, latus AB, maius est latere BC, [a] erit angulus BCA, maior angulo BAC. Est autem angulus BCA, [b] æqualis angulo DAC, alterno; quod BC, AD, parallelæ sint. (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC; maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter dividitur a diametro AC. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

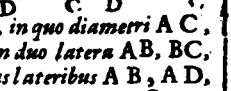
[a] 18. primi.
[b] 29. primi.

EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse; At vero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem vero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico esse æquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD; vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus; [c] erit basis AC, basi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.



[c] 4. primi.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo diametri AC, BD; sitq; angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim æquales sunt, quia alias vterque esset rectus, cum [d] æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem esse diametro AC. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, vtrumque vtrique, & angulus



[d] 29. primi.

[a] 24. primi. BAD, angulo ABC, maior existit; a erit basis BD, maior basi AC. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC. quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, [b] æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique; & [c] latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; [d] Erit & AE, recta recta CE, & recta DE, recta BE, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.

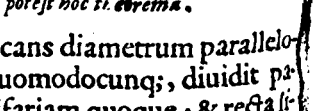
[b] 29. primi. [c] 34. primi. [d] 26. primi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidãt in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E, [e] æquales quoque; [f] erunt & bases AB, CD, æquales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis. [g] Quare recta AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallela ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.

[e] 15. primi. [f] 4. primi. [g] 27. primi.



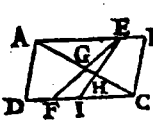
HVC quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunq;, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta li-

nea

nea diuidēs parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariā secet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus EAG, [a] æqualis est angulo alterno FCG, & [b] angulus EGA, angulo FGC: Est autem & latus AG, lateri CG, æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis AEG, CFG, opponūtur; [c] erunt & latera EG, FG, æqualia. Quare cum latera AG, GE, æqualia sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti æquales; [d] erūt triangula AGE, CGF, æqualia. Addita igitur communi quadrato BCGE, [e] erit triangulum ABC, trapezio BCFE, æquale: Sed triangulum ABC, [f] dimidium est parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta EF, parallelogrammum bifariam secat.



[a] 29. primi.
[b] 15. primi.
[c] 26. primi.
[d] 4. primi.
[e] 2. prom.
[f] 34. primi.

SECET iam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim diameter AC, non bifariam diuiditur in G, [g] diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo æquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.

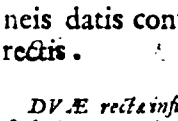
[g] 10. primi.

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiuslibet punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, qua parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Pelectarius problema non inuocandum, videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quę cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem esse duobus rectis.

DVÆ rectæ infinitæ A B, A C, *contineant angulũ* B A C, *sitq; data recta finita quacunque* D, *& angulus datus* E, *hac lege, vt duo anguli* E, *&* B A C, *minores sint duobus rectis.*



Oportet igitur inter rectas A B, A C, *collocare rectam æqualem quidem rectæ* D, *cum alterutra vero illarum, nimirũ cum* A C, *facientem angulum æqualem angulo dato* E. [a] *Fiat angulus* C A F, [b] *æqualis angulo* E, *& producta* F A, *ad* G, [b] *sit* A G, *æqualis* [c] *rectæ* D; *& per* G, [c] *ducatur* G B, *parallela ipsi* A C, *secans* A B, *in* B: *Deinde per* B, *ducatur* B C, *parallela ipsi* A G, *secans* A C, *in* C. *Dico rectam* B C, *collocatam inter rectas* A B, A C, *æqualem esse rectæ* D, *angulumq;* B C A, *angulo* E. *Cum enim parallelogrammum sit*, [d] *per constructionem*, A C B G, [d] *erit recta* B C, *rectæ* G A, *æqualis*: *At* G A, *æqualis est*, *per constructionem*, *rectæ* D. *Igitur &* B C, *rectæ* D, *æqualis erit*. [e] *Rursus quia angulus* B C A, *angulo alterno* C A F, *æqualis est*; *& eidem angulo* C A F, *æqualis est*, *per constructionem*, *angulus* E; *erunt anguli* E, *&* B C A, *æquales*. *Quod est propositum*. *Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis*. *Nam alias non fieret triangulum* A B C, *si anguli* B A C, *&* B C A *æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos.* [17] *vel* 32.

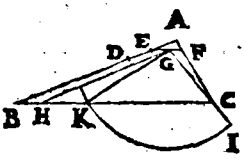
[a] 23. primi.
[b] 3. primi.
[c] 31. primi.
[d] 34. primi.
[e] 29. primi.

SCHO-

SCHOLIVM. II.

NON alienum erit à noſtro inſtituto, adijcere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum conſtitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonſtrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propo. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non ſit æquilaterum, vel Iſoſceles habens baſim latere minorem, non ſolum à duobus punctis baſis conſtitui poſſunt duæ rectæ intra triangulum, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint duobus lateribus ſimul ſumptis, vt à Proclo in trianguliis rectangulis, vel obtuſangulis oſtenſum eſt ad propos. 21. ſed etiam æquales.

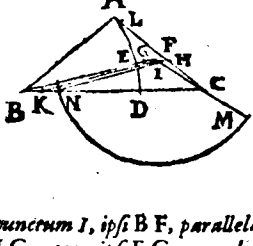
SIT enim primum triangulum A B C, habens latus A B, latere A C, maius, ſitq; B D, dimidium vtriuſque laterum A B, A C, ſimul: Sumpto autem inter A D, puncto E, vtcunque, agatur E F, ipſi B C, parallela; & ex quouis puncto G, lateri A B, parallela ducatur G H, rectæq; iungatur G C, Et quoniam E A, A F, a maiores ſunt, quam E F: item C F, F G, maiores, quàm G C; erunt E A, A C, F G, ſimul maiores, quam E F, G C, ſimul: ablatáq; communi F G, erunt E A, A C, ſimul maiores, quam E G, G C, ſimul; ac proindè multò maiores, quam G C, ſola. Producatur ergo G C, ſitq; G I, ipſis E A, A C, ſimul æqualis. Quia vero B E, maior eſt, quam vtraque E A, A C, ſimul, quod B E, ſuperet B D, dimidium vtriuſque B A, A C, ſimul, at E A, A C, ſimul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque D A, A C, ſimul; erit quoque B E, maior, quam G I, quæ ipſis E A, A C, ſimul eſt æqualis. Cum igitur b ipſi B E, æqualis ſit G H, in parallelogrammo B E G H; erit quoque G H, maior, quam G I. Si igitur centro G, & interuallo G I, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam G H, ac propterea & ipſam C H, prius ſecabit in K. Connectatur G K. Dico vtramque G H, G K, ſimul æqualem eſſe vtriq; A B, A C, ſimul. Id quod ex conſtructione perſpicuum eſt. Nam G H, ipſi B E, æqualis eſt, & G I, hoc eſt, G K, ipſis E A, A C, ſimul.



a 20. primi

b 34. primi

mul. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt, prout punctum E, remotius à D, ſumptum fuerit, & punctum G, à puncto E; hoc eſt, prout tam A D, quam E F, infinitis in punctis ſecari poteſt.



SIT deinde Iſoſceles A B C, *habens baſim* B C, *utrouis latere maiorem. Deſcripto ex centro* B, *per* A, *arcu* A D, *ſecante rectam* B C, *in* D, *ducatur vtcunque recta* B F, *ſecans arcum in* E, *& latus* A C, *in* F; *& in* E F, *per quoduis punctum G, ipſi* B C, *parallela agatur* G H, *& per quodcunque eius punctum I, ipſi* B F, *parallela ducatur* I K, *rectæ iungatur* I C; *atque ipſi* E G, *æqualis abſcindatur* A L. *Erit igitur* B G, *ipſis* A B, A L, *ſimul æqualis, at* L C, *minor quam* B E, *ſiue* A B, *& ob id multò minor, quam* B G. *Et quia ipſi* B G, [a] *æqualis eſt* I K, *in parallelogrammo* B G I K; *erit quoque* I K, *ipſis* A B, A L, *ſimul æqualis, maior autem, quam* L C. *Itaque* [b] *quia* G F, F H, *maiores ſunt, quam* G H; *&* H C, H I, *maiores, quam* I C: *erunt* G F, F C, H I, *ſimul maiores, quam* G H, I C; *& ablata communi* H I, *erunt reliquæ* G F, F C, *ſimul maiores, quam* G I, I C, *ſimul; ac proinde appoſita communi* B G, *fient* B F, F C, *ſimul maiores, quam* B G, G I, I C, *ſimul. Sed ipſis* B F, F C, [c] *maiores ſunt* B A, A C, *ſimul. Ergo multò maiores erunt* B A, A C, *ſimul, quam* B G, G I, I C, *ſimul. Cum ergo* B G, *ipſis* B A, A L, *ſimul æqualis ſit, erit reliqua* L C, *maior, quam reliqua* G I, I C, *ſimul, ac proinde multò maior, quam* I C, *ſola. Ponatur* I M, *(producta* I C) *ipſi* L C, *æqualis. Et quia* I K, *oſtenſa eſt maior, quam* L C, *hoc eſt, quam* I M; *ſi ex centro* I, *per* M, *arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam* I K, *ac proinde prius ipſam* C K, *ſecabit in* N. *Connectatur* I N. *Dico vtramque* I K, I N, *ſimul æqualem eſſe vtrique* A B, A C, *ſimul. Id quod ex conſtructione patet. Eſt namque* I K, *ipſis* A B, A L, *ſimul æqualis, & I N, hoc eſt,* I M, *ipſi* L C, *æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt; cum* B F, *infinitis modis duci poſſit, & tam E F, quam G H, infinitis modis ſecari.*

[a] 34. primi.
[b] 20. primi.
[c] 20. primi.

CON-

CONSTAT autem, si intra idem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I, I N, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus A B, A C, simul sumptis: quippe quæ [a] maiores forent rectis H G, G K, in priori triangulo, vel rectis K I, I N, in posteriori. [a] 21. primi

AT verò in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrumlibet latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim A B C, cuius duo latera A B, AC, æqualia, & basis B C, nō maior, [b] sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, ma ter non sit, quam angulus B, vel C, sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ D E, E F, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus A B, A C, simul sumptis. Producatur enim D E, secans latus A C, in G, iungaturq; recta G B. Quoniam igitur [c] duo anguli A B C, & C, æquales sunt, estq; A B C, maior angulo G B C, erit quoque C, maior angulo G B C. Est autem [d] & angulus G D B, angulo C, maior, externus interno. Igitur multò maior erit angulus G D B, angulo G B C; ac proinde latus G B, latere G D, maius erit. Quia verò [e] angulus B G A, maior est angulo C, externus interno; angulus [f] C, vel æqualis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoq; angulus B G A, angulo A, maior. Quarē latus A B, latere G B, maius erit: Sed recta G B, ostensa est maior, q̄ G D; ac proinde multò maior, quam D E. Igitur latus A B, multo etiam maius erit, quam D E. Eadem ratione, si F E, producatur secans A C, in H, iungaturq; recta H B, ostendemus latus A B, ac proinde & A C, maius esse, quam F E. Quocirca latera A B, AC, simul maiora sunt duabus rectis D E, E F, simul sumptis. Quòd si F E, producta secaret latus A B, demonstraremus eodem modo, latus A C, maius esse recta E F.



[b] 5. vel 18. primi.

[c] 5. primi.

[d] 16. primi.

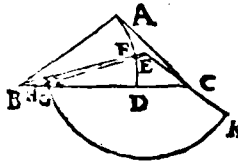
[e] 19. primi.

[f] 16. primi.

[g] 19. primi.

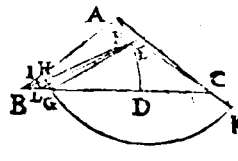
IAM verò, si admirabile videatur ijs, qui Geometria ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interio-

interiores, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint, vel æquales duabus lateribus ſimul ſumptis; admirabilius ſanè erit, intra eadem illa triangula conſtitui poſſe duas lineas, quarum ſingulæ ſingulis lateribus maiores ſint, vel æquales. Sint ergo primùm conſtituendæ ſingulæ lineæ ſingulis lateribus maiores in triangulo A B C, *cuius latus* A B, *minus non ſit latere* A C, *at latus* B C, *vtrouis latere* A B, A C, *maius. Deſcripto ex centro* B, *arcu circuli* A D, *ſumatur quoduis punctum* E, *inter arcum* A D, *& latus* A C, *ducaturq; recta* B E, *ſecans arcum in* F; *ita vt* B E, *maior ſit, quam* B F, *hoc eſt, quam* B A, *iungaturq;* E C.



21. primi. Quia vero a B E, E C, *ſimul minores ſunt, quam* A B, A C, *ſimul, eſtq;* B E, *maior, quam* A B, *erit* E C, *multò minor, quam* A C. *Producta igitur* E C, *fiat* E K, *ipſi* A C, *æqualis, ac propterea minor, quam* E B; *deſcribaturq; ex* E, *per* K, *arcus circuli, qui rectam* E B, *ſecabit, ac proinde & ipſam* C B, *prius ſecabit in* G. *Sumpto denique inter* B, *&* G, *quouis punctо* H, *iungatur recta* E H, *ſecans arcum in* I: *factumq; erit, quod proponitur. Nam* B E, *maior eſt, quam* B A, *&* E H, *maior, quam* E I, *hoc eſt, quam* E K, *vel* A C.

DEINDE ſint ſingulæ lineæ ſingulis lateribus æquales conſtituendæ intra idem triangulum: fiatq; eadem conſtructio, dempta linea E H, *ſed arcus* K G, *ſecet rectam* E B, *in* H. *Et quia latus* B A, *latere* A C, *ponitur non minus, erit* B E, *recta maior, quam* A B, *cum maior ſit, quam* B F, *hoc eſt, quam* A B. *Sumpta igitur* E I, *æquali ipſi* A B, *cadet punctum* I, *inter* B, *&* H; *quandoquidem* E B, *maior eſt quam* A B, *&* E H, *non maior, quam* A B. E x E, *per* I, *deſcribatur arcus circuli ſecans* B C *in* L, *iunganturq; rectæ* E L, E G: *factumq; erit, quod proponitur. Nam* E L, *ipſi* E I, *hoc eſt, ipſi* A B, *æqualis eſt, &* E *ipſi* E K, *hoc eſt, ipſi* A C.



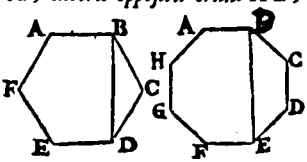
PRÆTER hæc demonſtrat Pappus, intra eadem [illegible] *diximus*

duximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionē data tam, quæ tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cum ex propositionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habēte numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraque parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono A B C D E F, *latera opposita erunt* A B, E D; *quoniam tam ad partes* A, *&* E, *duo sunt latera, quam ad partes* B, *&* D. *In octogono vero* A B C D E F G H, *latera opposita erunt* A B, F E, *quia tam ad partes* A, *&* F, *tria sunt latera, quam ad partes* B, *&* E. *Et sic in alijs figuris æquilateris pariū laterum, ex vtraque parte oppositorum laterum erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur qualibet latera opposita esse parallela;* A B, *nimirum ipsi* E D, *in hexagono; &* A B, *ipsi* F E, *in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad eandē partes linea recta, qualis est in hexagono* B D, *& in octogono* B E. *Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli* B, C, D, *eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli* B C D, C B D, C D B, *trianguli* B C D, [a] *duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli* A B D, E D B, *duobus rectis*



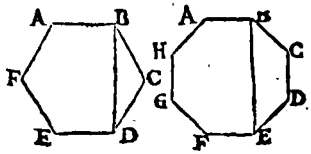
[a] 32. primi.

[a] 28. primi.

ctis æquales erunt. Quare [a] parallela erunt A B, & E D. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis æquales. Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus

[b] 28. primi.

erũt rectis æquales, [b] atq; adeo A B, F E, parallela erũt. Eodem modo demonstrabitur, in omnibus aliis figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorũ laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales: At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.



QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consuevit, propterea quæ in definitionibus. Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35.

THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

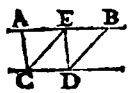
INTER duas parallelas A B, C D. super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quãdo duo latera opposita partes sunt parallelarum, vt in

vt in exemplo proposito cernitur. Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta AE, [a] æqualis est rectæ CD, oppositæ; & eidem CD æqualis est FB, in parallelogrâmo CDBF, oppositæ; Erunt AE, FB, [b] inter se æquales. Dempta igitur communi FE, [c] remanebit AF, ipsi EB, æqualis: [d] Est autem & AC, ipsi ED, oppositæ æqualis in parallelogrammo CDEA; [e] & anguli BED, angulo FAC, externus interno. [f] Quare triangulum FAC, triangulo BED, æquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, [g] fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod est propositum.



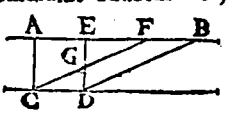
[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 3. pron.
[d] 34. primi.
[e] 29. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. pron.

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC; atq; adeo [h] triãgula EAC, BED, æqualia. Addito igitur cõmuni triangulo CDE, [i] fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.



[h] 4. primi.
[i] 2. pron.

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta CF, secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ AE, FB, sunt æquales; si communis addatur EF; [k] erit tota AF, toti EB, æqualis, nec nõ & anguli BED, FAC, æquales erunt; atque adeo [l] triãgulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo EGF, [m] remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.



[k] 2. pron.
[l] 4. primi.
[m] 3. pron.

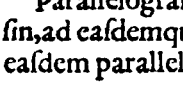
SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propoſitionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes conſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

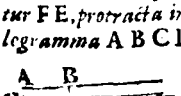
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, *ſuper eandem baſin* C D, *& ad eaſdem partes. Dico rectam* A B, *productam in directum iacere ipſi* E F, *& propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Aliàs enim* A B, *producta vel cadet infra* E F, *vel ſupra.*



Cadat primo infra, qualis eſt A H. *Erit igitur parallelogrammum* C D G H, [a] *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur autem eidem parallelogrammo* A B C D, *æquale parallelogrammum* C D E F. *Quare parallelogramma* C D E F, C D G H, [b] *æqualia erunt, totum, & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet* A B, *infra* E F.

[a] 35. primi.

CADAT ſecundo A B, *producta ſupra* E F. *Cadet igitur* F E, *protracta infra* A B. *Quare, vt prius, erunt parallelogramma* A B C D, C D H G, *æqualia. totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum eo ſequeretur, ſi* C F, D E, *producerentur vſque ad* A B, *protractam. Eadem demonſtratio conuenit omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum* E. *ſit vltra B, ſiue non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet* A B, *ſupra* E F: *ſed nec infra, vt demonſtratum eſt: ergo producta in directum iacet ipſi* E F; *ac proinde parallelogramma* A B C D, C D E F, *in eiſdem ſunt parallelis.*

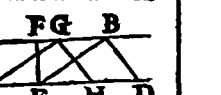


36. THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA ſu-

per æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin, Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, parallelæ erunt, & æquales, ideoq; CEBG, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, erit parallelogrammũ ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, erit quoq; parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallalelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



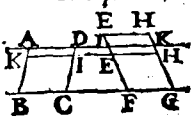
[a] 34. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.
[d] 35. primi.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, super baſes æquales BC, FG, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut ſupra. Quo poſito ſequitur, totum & partem eſſe æqualia, quemadmodum in conuerſa præcedentis propoſitionis eſt dictum, & figura facile commonſtrat. Intelligenda ſunt autem baſes æquales data in eadem linea recta BG.



SINT ſecundò eadem parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas AH, BG. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, [a] abſcindatur BI, æqualis rectæ FG, & [b] ducatur IK, parallela ipſi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, [c] æquale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo BC, maior eſt, quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare baſes BC, FG, æquales ſunt.

[a] 3. primi.
[b] 31. primi.
[c] 36. primi.



SEQVENS quoq; theorema facile hinc demonſtrabitur.

SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contra ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in poſteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, ſitq; baſis BC, maior baſe FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius eſſe. [d] Auferatur enim recta BI, ipſi FG, æqualis, [e] ducaturq; IK, ipſi AB, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma BK, FH, ſupra æquales baſes BI, FG, æqualia. Cum igitur BD, [g] maius ſit, quàm BK, erit idem BD, maius, quàm FH.

[d] 3. primi.
[e] 31. primi.
[f] 36. primi.
[g] 9. pron.

SINT rurſum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico baſim BC, maiorem eſſe baſe FG. Nam ſi

fore

foret æqualis, [a] essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cum B D, ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum F H, maius, quam B D, vt proximè ostendimus quod multò magis est absurdum, cùm B D, maius ponatur, quàm F H. Basis ergo B C, cum neq; æqualis sit ipsi F G, neque minor, erit maior, quàm F G, quod est propositum.

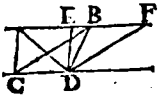
[a] 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

37.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

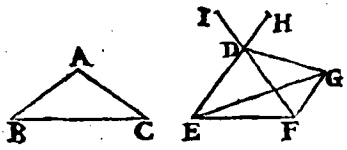
INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D. Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quādo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [b] ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectæ B C. Erunt igitur parallelogramma A C D E, B C D F, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; [d] quod A D, B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, [e] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 31. primi.
[c] 35. primi.
[d] 34. primi.
[e] 7. pron.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Prolo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius qualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, liquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. pollicite sumus. Sine enim duo triangula A B C,



DEF, & latera AB, AC, aqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, sintq; primum hi duo anguli duobus rectis aquales.

Dico triangula esse aqualia. Producatur enim ED, ad H, & [a] FD, ad I; [a] fiatq; angulus EDG, aqualis angulo A, [b] & recta DG, recta DF, seu AC; ducanturq; recta EG, GF. Quoniam igitur duo anguli A, & EDF, ponuntur aquales duobus rectis, & angulus EDG, aqualis factus est angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis aquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH, [c] duobus rectis aquales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, aquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG, [d] remanebit angulus EDF, aqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF, [e] aqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, aquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt aqualia in triangulo DFG; [f] erunt anguli DFG, DGF, aquales; qui cum [g] aquales sint externo angulo GDI, erit vterlibet eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI. [h] Quare anguli GDH, DGF, aquales erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG, [i] erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem [k] triangula DEG, DEF, aquales erunt, cũ habeant eandẽ basin DE, sintq; inter eas dẽ parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG, [l] aquale est triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, aqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, aqualis angulo EDG; erit & triangulum ABC, triangulo DEF, aquale, quod est propositum.

a 23. primi.
b 3. primi.
c 13. primi.
d 3. pron.
e 15. primi.
f 5. primi.
g 32. primi.
h 7. pron.
i 27. primi.
k 37. primi.
l 4. primi.

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, [m] FD, ad I; [m] fiatq; angulus EDG, aqualis angulo A, [n] recta DG, recta DF, seu AC, aqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur

m 23. primi
n 3. primi.

ores duobus rectis, erũt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sũt autẽ anguli EDG, GDH, [a] æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero [b] angulus EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, maior quam GDH; atq; adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, æqualia sunt: [c] erunt anguli DFG, DGF, æquales: qui cum sint [d] æquales externo GDI, erit vterque eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, [e] æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK, [f] parallela ipsi DE, secabitq; GK, rectam EF. Ducatur ex D, ad K, vbi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, [g] æquale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, [h] æquale est triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulus A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, [i] minus sit triangulo DEF; erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est propositum.

[a] 13. primi.

[b] 15. primi.

[c] 5. primi.

[d] 32. primi.

[e] 23. primi.

[f] 27. primi.

[g] 37. primi.

[h] 4. primi.

[i] 9. prop.

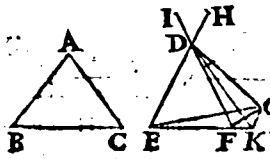
SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, minus esse triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [k] fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, [l] & recta DG, rectæ DF, seu AC; ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores: Sunt [m] autem anguli EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igi-

[k] 23. primi.

[l] 3. primi.

[m] 13. primi.

tur EDG, EDF, *minores sunt, quàm* EDG, GDH; *demptoq; communi* EDG, *remanebit* EDF, *minor, quàm* GDH. *Est autẽ* EDF, [a] *æqualis ipsi* HDI. *Quare & HDI, minor erit, quam* GDH; *atque adeo* GDI, *maior est dimidio anguli* GDI. *Quoniam autem* DGF, *dimidium est eiusdem anguli* GDI, *vt iam supra ostensum fuit; erit* GDH, *maior, quam* DGF. *Fiat igitur angulus* DGK, [b] *æqualis angulo* GDH, *ducta recta* GK, *quæ secabit rectam* EF, *protractam in* K; *& ducatur recta* DK. *Erit ergo, vt prius,* GK, [c] *parallela ipsi* DE; [d] *triangulumq;* DEG, *triangulo* DEK, *æquale: Est autem iterum* DEG, [e] *æquale ipsi* ABC. *Igitur & ABC, æquale est ipsi* DEK. *Quocirca cum* DEK, [f] *maius sit, quàm* DEF; *erit & ABC, maius, quàm* DEF. *Quod demonstrandum erat.*



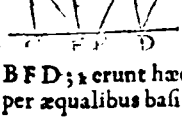
[a] 15. primi.
[b] 23. primi.
[c] 27. primi.
[d] 37. primi.
[e] 4. primi.
[f] 9. pron.

EX his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

38. THEOR. 28. PROPOS. 38.

TRIANGVLA *super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.*

INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa [a] 31. primi. [b] 36. primi. [i] 34. primi. [k] 7. pron.



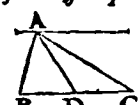
esse æqualia. Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF. Eruntq; [b] parallelogrãma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum [i] dimidia sint triangula ACE, BFD; [k] erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostenditur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo A B C, ex angulo A, recta A D, diuidens bifariam latus B C, in D. Dico triangulum A B C, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi B C, erunt duo triangula A B D, A D C, inter easdem parallelas; & super aequales bases. [a] Quare aequalia erunt.



[a] 38. primi.

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quę bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt est ostensum: Si vero D, non diuidit B C, bifariam, [b] secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta D A, & per E, [c] parallela E F, ipsi D A, iuncta A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifariam à linea D F. Nam ducta recta E A, [d] erunt triangula E F A, E F D, aequalia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E, [e] erunt tota triangula A E C, C D F, aequalia: Est autem A E C, dimidium totius A B C, vt iam fuit ostensum. Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.



[b] 10. primi.

[c] 31. primi.

[d] 38. primi.

[e] 2. pron.

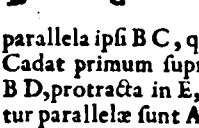


QVOD *si punctum* D. *fuerit in altera mediatate* E C, *eodem modo problema conficiemus : sed tunc triangulum abscindetur ad partes* B, *trapezium vero ad partes* C, *ut figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur littera* B, *in* C, *&* C, *in* B. *Hoc tamen problema multo nos universalius proponemus ad finem sexti libri.*

39. THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes.



Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primum supra, qualis est A E, coeatque cum B D, protracta in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum E B C, æquale : Est autem per hypothesin, triangulum quoq; DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 31. primi.
[b] 37. primi.
[c] 1. pron.

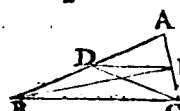
SCHO-

SCHOLIVM.

Ex his infert Campanus *sequens hoc theorema.*

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, *latera* A B, A C, *trianguli* A B C, *bifariam in* D, *&* E. *Dico* D E, *parallelam esse lateri* B C. *Cum enim triangula* A D E, B D E, *sint super aequales bases* A D, D B, *& inter easdem parallelas; (si per* E, *ducatur parallela ipsi* A B,) [a] *erit triangulum* B D E, *triangulo* A D E, *aequale*: *Eadem ratione erit triangulum* C E D, *eidem triangulo* A D E, *aequale. Quod etiam constat ex scholio praecedentis propos. Recta enim* E D, *secabit triangulum* A E B, *bifariam, & recta eadem* D E, *triangulum* A D C, *bifariam etiam, quod bases* A B, A C, *sectae sint bifariam à recta* D E, *ex hypothesi. Igitur triangula* D B E, C E D, [b] *aequalia erunt: Habent autem eandem basin* D E, *& sunt ad easdem partes constituta. Quare* [c] *inter easdem erunt parallelas, & idcirco* D E, B C, *parallela erunt. Quod est propositum.*



[a] 38. primi.

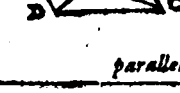
[b] 1. pron.

[c] 39. primi.

ID *autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.*

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum A B C D, *diuidatur bifariam ab vtraque diametro* A C, B D. *Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula* A D C, B D C, *dimidia sint eiusdem quadrilateri* A B C D, [d] *ipsa inter se aequalia erunt. Quare cum eandem habeant basin* D C, *ad easdemque partes sint,* [e] *ipsa in oisdem parallelis erunt; Atque idcirco rectae* A B, D C,



[d] 7. pron.

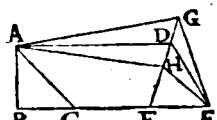
[e] 39. primi.

parallelae

parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. *Parallelogrammum igitur est* A B C D. *Quod est propositum.*

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, super *bases* æquales B C, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primum supra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ sunt A G, B F, [a] erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale. Igitur [b] triangula DEF, GEF, æqualia erũt, pars & totũ. Quod est absurdũ. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triãgula HEF, DEF, æqualia, pars & totũ, quod est absurdum. Est igitur A D, parallela ipsi B F. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *38. primi.*

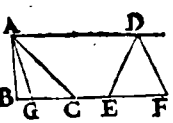
[b] *1. prom.*

SCHOLIVM.

HÆC propositio conuertit uno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propos. 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter easdem paralle-

parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.



SINT triangula æqualia A B C, D E F, *inter parallelas* A D, B F, *& super bases* B C, E F, *quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit* B C, *maior. Abscissa ergo recta* C G, *æquali ipsi* E F, *& ducta recta* G A; [b] *erit triangulum* A G C, *triangulo* D E F, *æquale: Ponitur autem & triangulum* A B C, *eidem triangulo* D E F, *æquale. Igitur triangula* A G C, A B C, [c] *æqualia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases* B C, E F, *sed æquales. Quod est propositum.*

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

[a] 3. primi.
[b] 38. primi.
[c] 1. pron.

SI duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, *triangula* A B C, D E F, *sitq; basis* B C, *base* E F, *maior. Dico triangulum* A B C, *maius esse triangulo* D E F. *Abla ta enim recta* C G, [d] *æquali ipsi* E F, *ductaq; recta* A G; [e] *erunt* triangula A G C, D E F, *supra æquales bases* G C, E F, *æqualia. Cum ergo* [f] *triangulum* A B C, *triangulo* A G C, *maius sit; erit idem triangulum* A B C, *maius, quam* D E F.

SINT rursus triangula A B C, D E F, *inæqualia, & maius* A B C. *Dico basin* B C, *basi* E F, *maiorem esse. Si enim dicatur æqualis,* [g] *erit triangulum* A B C, *triangulo* D E F, *æquale. quod est absurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur esse minor, erit triangulum* D E F, *maius triangulo* A B C, *vt proximè ostendimus, quòd multò magis est absurdum, cum* A B C, *ponatur maius, quam* D E F. *Recta igitur* B C, *maior erit, quam* E F, *cum neque æqualis sit ostensa, neque*

[d] 3. primi.
[e] 38. primi.
[f] 9. pron.
[g] 38. primi.

ſa, neque minor. Quod eſt propoſitum.

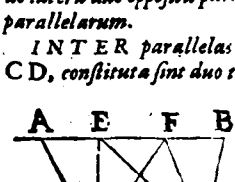
QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoque demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem paralleliſ, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partesq; ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur A B, C D, *ſuper eadem baſi* C D, *conſtituta ſint duo trapezia* A C D E, F C D B, *quorum baſes oppoſitæ* A E, F B, *æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis* E C, F D, [a] *erunt tã triangula* E C D, F C D, *ſuper eadem baſi* C D, *& in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia,* [b] *quam triangula* A C E, F D B, *ſuper æqualibus baſibus* A E, F B, *& in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus* E C D, F C D, *addantur æqualia* A C E, F D B, [c] *erunt tota trapezia* A C D E, F C D B, *inter ſe æqualia.*



[a] 37. primi.

[b] 38. primi.

[c] 2. pron.

SINT iam trapezia A C D E, F C D B, *æqualia. Dico baſes oppoſitas* A E, F B, *æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus* [d] *triangula* E C D, F C D, *æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [e] *æqualia erunt reliqua triangula* A C E, F D B. *Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* A E, F B, *æquales erunt.*

[d] 37. primi.

[e] 3. pron.

TRA-

II.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq; est illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

VT in eadem figura, si basis A E, dicatur esse maior base F B; Dico trapezium A C D E, *maius esse trapezio* F C D B. *Erunt enim rursus triangula* E C D, F C D, *æqualia: At triangulum* A C E, *triangulo* F D B, *maius, vt in hoc scholio demonstratum fuit.* [b] *Totum ergo trapezium* A C D E, *toto trapezio* F C D B, *maius erit.*

[a] 37. primi.

[b] 4. pron.

RVRSVS si trapezium A C D E, *dicatur esse maius trapezio* F C D B; *Dico basin* A E, *basi* F B, *maiorem esse.* [c] *Erunt rursus triangula* E C D, F C D, *æqualia. Quare reliquum triangulum* A C E, *reliquo triangulo* F D B, [d] *maius erit: ac proinde, vt in hoc scholio ostensum est, basis* A E, *maior erit basi* F B. *Quod ostendendum erat.*

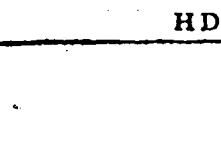
[c] 37. primi.

[d] 5. pron.

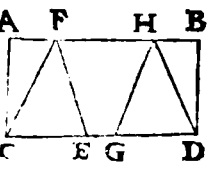
III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.

INTER parallelas A B, C D, super æquales bases C E, G D, *constituta sint duo trapezia* A C E F, H G D B, *quorum bases oppositæ* A F, H B, *æquales quoque sint. Dico ipsa trapezia æqua lia esse. Ducatur enim recta* F C,



H D.



a 38. primi. HD.[a] *erunt tam triangula* FCE, HGD, *super æquales baſes* CE, GD, *quam* ACF, BDH, *ſuper baſes æquales* AF, BH, *inter ſe æqualia.* b 2. pron. [b] *Tota ergo trapezia æqualia erunt.*

c 38. primi. *SINT tam trapezia* ACEF, HGDB, *æqualia ſuper baſes æquales* CE, GD. *Dico baſes oppoſitas* AF, BH, *æquales quoque eſſe.* [c] *Erunt namque rurſus triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula* ACF, BDH, d 3. pron. [d] *æqualia erunt; ac proinde, vt paulo ante in hoc ſcholio oſtendimus, baſes* AF, BH, *æquales erunt.*

IIII.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq; eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorq; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis AF, *dicatur eſſe maior baſi* HB, *erit trapezium* ACEF, *trapezio* HGDB, *maius.* e 38. primi. [e] *Erunt enim rurſum triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia. At triangulum* ACF, *maius triangulo* BDH, *vt ſupra oſtenſum eſt, quod baſis* AF, *maior ponatur baſi* BH. f 4. pron. [f] *Totum ergo trapezium* ACEF, *toto trapezio* HGDB, *maius erit.*

RVRSVS ſi trapezium ACEF, *maius ponatur trapezio* HGDB, g 38 primi. *erit baſis* AF, *baſe* BH, *maior.* [g] *Erunt enim rurſus triangula* FCE, HGD, *ſuper æquales baſes* CE, GD, *æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum* ACF, *reliquo triangulo* BDH, h 3. pron. [h] *maius erit,*

rit; ac proinde, vt in hoc scholio ostensum fuit, basis A F, basi B H, maior erit. Quod erat ostendendum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in scholio propos. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem confici possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. ostendemus, iucundum tamen est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam.

IN triangulo A B C, aquidistet D E, ipsi B C, & recta A F, secet alterutram B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo posito,[a] & anguli ad G, recti erunt. Si igitur B C, diuidatur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in scholio propos. 26. huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta A G, ad basim D E, trianguli A D E, perpendicularis, diuidens angulum A, bifariam, dimidet bifariam quoque basim D E, vt ibidem ostendimus, quod est propositum.

[a] 29. primi.

SI vero D E, ponatur diuidi bifariã, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariam; ac proinde recta A F, ad basim B C, perpendicularis; diuidensq; angulum A, bifariam, basim quoque B C, bifariam secabit, quod est propositum.

SINT deinde anguli ad F, non recti, sed A F C, obtusus, & A F B, acutus. Quo posito, erit & A G E, obtusus, & A G D, acutus, [b] cum his illi sint æquales, externi internis.

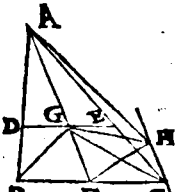
[b] 29. primi.

Si

[a] 23. primi. Si igitur B C, diuiditur bifariam, [a] constituatur acuto angulo A G D, æqualis angulus A G H, [b] & recta G H, rectæ G D, æqualis, ducanturque rectæ A H, H F, F D, F E. Quia igitur tam triangula tota A B F, A C F, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt, [c] quam triangula ablata D B F, E C F, ob æquales bases B F, C F: [d] erunt quoque reliqua triangula A D F, A E F, æqualia. Rursus quoniam duo latera A G, G D, trianguli A G D, duobus lateribus A G, G H, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales A G D, A G H, ex constructione, [e] erunt quoque triangula A G D, A G H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera D G, G F, duobus lateribus H G, G F, æqualia sunt, ex constructione, angulosq; continent æquales D G F, H G F, (cum enim per constructionem anguli A G D, A G H, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum D G F, H G F, æquales.) [f] sunt enim tam A G D, D G F, quam A G H, H G F, duobus rectis æquales.) [g] erunt quoque triangula D G F, H G F, æqualia: [h] ac proinde & tota triangula A D F, A H F, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo A D F, æquale ostensum triangulum A E F. Igitur & inter se æqualia erunt triangula A H F, A E F: [k] ac propterea inter easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta E H, erit basi A F, communi parallela. Igitur [l] & triangula H G F, E G F, inter easdem parallelas, & super eadem basi F G, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum H G F, triangulo D G F, ostensum æquale. Igitur triangula quoque D G F, E G F, æqualia inter se erunt; propterea q; basim quoque D G, basi G E, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

[m] 23. primi. [n] 3. primi. [o] 34. primi. [p] 2. pron. SI vero D E, ponatur bifariam diuidi, [m] constituatur angulo acuto A F B, æqualis angulus A F H, [n] & recta F H, rectæ F B, ducanturq; rectæ A H, H G, G B, G C. Quoniam igitur tam triangula A G D, A G E, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt, [o] quam triangula D G B, E G C, ob æquales bases D G, E G; [p] erit tota etiam triangula A G C, æqualia. Rursus quia duo latera A F, F B, ductis lateribus

lateribus AF, FH, *aqualia sunt, continentq; angulos aquales* AFB, AFH, *ex constructione;* [a] *erunt triangula quoque* AFB, AFH, *aqualia. Pari ratione, quia duo latera* GF, FB, *duobus lateribus* GF, FH, *aqualia sunt, aqualesq; continent angulos* GFB, GFH, *ex constructione;* [b] *erunt quoq; aqualia triangula* GFB, GFH: *quibus demptis ex aqualibus* AFB, AFH, [c] *aqualia erunt reliqua triangula* AGB, AGH: *Est autem eidem triangulo* AGB, *ostensum aquale triangulum* AGC. [d] *Igitur & triangula* AGC, AGH, *inter se erunt aqualia.* [e] *Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est, ducta recta* CH, *ipsi* AF, *parallela erit; ac proinde* [f] *aqualia inter se erunt triangula* GHF, GFC. *Fuit autem ostensum triangulum* GHF, *triangulo* GBF, *aquale.* [g] *Igitur & aqualia inter se erunt triangula* GFC, GFB; *ideoq;, vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases* FC, FB, *aquales erunt. Quod est propositum.*



[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 3. pron.
[d] 1. pron.
[e] 39. primi.
[f] 37. primi.
[g] 1. pron.

ALITER. Diuisa sit primum BC, *bifariam in* F. *Dico & DE, bifariam esse diuisam in* G. *Si enim* DG, GE, *non sunt aquales, sit maior* DG, *ducantur; recta* FD, FE. *Erit igitur per ea, qua in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum* ADG, *triangulo* AEG, *quàm triangulum* FDG, *triangulo* FEG, *maius.* [h] *Totum ergo triangulum* ADF, *toto triangulo* AEF, *maius erit: quibus si addantur triangula* DBF, ECF, [i] *qua propter bases aquales* BF, CF, *aqualia sunt,* [k] *fiet totum triangulum* ABF, *toto triangulo* ACF, *maius; ac proinde, vt in hoc scholio monstrauimus, basis* BF, *basi* FC, *maior erit: Sed & aqualis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est* DE, *in* G. *Quod est propositum.*



[h] 4. pron.
[i] 38. primi.
[k] 4. pron.

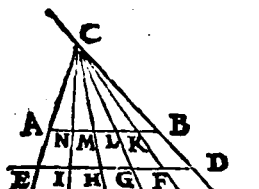
SIT iam DE, *secta bifariam in* G. *Dico & BC, diuidi bifariam in* F. *Sin minus,* [l] *diuidatur* BC, *in* H, *bifariam, ducaturque recta* AH, *secans* DE, *in* I. *Quoniam igitur* AH, *secat* BC, *bifariam in* H, *secabit eadem ipsam* DE,

[l] 10. primi.

quoque bifariam in I, vt proximè ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si D I, aqualis est ipsi I E, cum I E, maior sit, quàm G E, erit quoque D I, maior quam G E, hoc est, quàm D G, qua ipsi G E, aqualis ponitur. Diuiditur ergo B C, bifariam F. Quod erat demonstrandum.

HOC ostenso theoremate, ad diuisionem linea recta in quotuis aquales partes iam veniamus.

DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



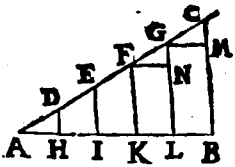
[a] 31. primi.

[b] 3. primi.

SIT data recta A B, secanda in quinque partes aquales. Per extremum punctum B, ducta recta B C, vtcunq;, & assumpto in B C, puncto quocunq; D, siue infra B, siue supra, [a] ducatur per D, ipsi A B, parallela D E, in qua [b] abscindantur quinque partes inter se aquales D F, F G, G H, H I, I E, hac tamen lege, vt existente puncto D, infra B, recta D E, ex quinque partibus aqualibus composita maior sit, quàm data A B, minor vero, existente puncto D, supra B, vt nimirum recta A C, per alterum extremum A, & per E, ducta cum B D, concurrere possit in pũcto aliquo, vt in C: A quo si per pũcta F, G, H, I, recta ducantur, secta erit data recta A B, in quinque partes aquales B K, K L, L M, M N, N A. Quoniam enim in triangulo C B L, recta D G, ipsi B L, est parallela, vel in triangulo C D G, recta B L, ipsi D G; secta atque est D G, bifariam in F, secta quoque erit bifariam B L, in K, vt in proximo theoremate demonstrauimus. Eademque ratione recta K M, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & F H, in G, bifariam secta est. Sunt ergo tres partes B K, K L, L M, inter se aquales, sicuti tres D F, F G, G H, atque ita de cæteris.

ALITER. Ad extremum A, linea A B, secanda in quinque

quinque partes æquales, cõstituatur angulus rectilineus quicunq; A, & recta AC, [a] abscindantur quinque partes quantacunq; inter se æquales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB, [b] agantur ei parallelæ GL, FK, EI, DH. Dico rectam AB, sectam esse in quinque partes æquales. [c] Ductis enim per G, F, ipsi AB, parallelis GM, FN; [d] quæ inter se etiam parallelæ erunt, [e] & ipsis BL, LK, æquales in parallelogrammis GB, FL; [f] erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GL, CB, quàm anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli GFN, æquales sunt, uterq; utrique, lateraque illis adiacentia CG, GF, æqualia per constructionẽ; [g] erunt quoque latera GM, FN, æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis BL, LK, erunt quoque BL, LK, inter se æquales. Eademque ratione ostendemus KL, KI, æquales esse, necnon IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.



[a] 3. primi.
[b] 31. primi.
[c] 31. primi.
[d] 30. primi.
[e] 34. primi.
[f] 29. primi.
[g] 26. primi.

ALITER. Ad extrema puncta A, B, lineæ AB, in quinque partes æquales dividenda constituantur duo æquales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in vtraque linea BC, AD, [h] quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter se fiunt, [i] sumantur quatuor partes inter se omnino æquales, tot nimirũ, una minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt BE, EF, FG, GC, AH, HI, IK, KD, iungaturque recta CH, GI, FK, ED, [k] quæ inter se erunt parallelæ, cum coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam AB, in quinque partes æquales sectam esse. [l] Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, FQ, [m] quæ inter se quoque parallelæ erunt, [n] & ipsis NO, MN, æquales in parallelogrammis EN, FM: (Sũt enim & GI, FK, inter se parallelæ, cum coniungant extrema



[h] 27. primi.
[i] 3. primi.
[k] 33. primi.
[l] 31. primi.
[m] 30. primi.
[n] 34. primi.

[a] 29. primi.



æqualium FG, KI, [a] erunt tam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli GFQ, FEP, externus, & internus in parallelis QF, PE, inter se æquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales sunt, vterque vtrique, lateráq; illis adiacentia FG, EF, æqualia, per constructionem, [b] erunt quoque latera FQ, EP, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eadem ratione æquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea & recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

[b] 26. primi.

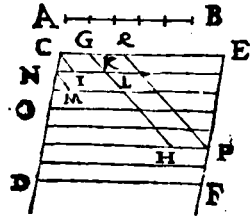
[c] 33. primi.

PRAXIS hac breuius ita demonstrabitur. [c] Quoniam rectæ ED, FK, GI, CH, parallelæ sunt, quæ coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt.

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, [d] sumantur in vtraq; partes omnino inter se æquales quæcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctáq; respondentia lineis rectis iungantur, [e] quæ parallelæ inter se erunt, cum coniungant extrema parallelarũ æqualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque dividenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G, vsq; ad punctum H, sta vt quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta GH, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus si in data AB, [f] sumantur partes æquales, diuisa quoque erit AB, in quinq; æquales

[d] 3. primi.

[e] 33. primi.



[f] 3. primi.

æquales partes. Sectam autem esse GH, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi GH, parallelis CI, NM, [a] quæ inter se quoque parallelæ erunt; [b] & ipsi GK, KL, æquales in parallelogrammis GI, KM; erunt tam anguli CNI, NOM, externus & internus in parallelis NK, OL, quàm anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter se. Igitur cùm duo anguli N, C, trianguli CNI, duobus angulis O, N, trianguli NOM, æquales sint, verique utrique, lateraque illis adiacentia CN, NO, æqualia, ex constructione, [d] erunt quoque latera CI, NM, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis GK, KL, erunt quoque GK, KL, inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ GH, ostendentur æquales; ac proinde recta GH, in quinque partes æquales erit divisa.

[a] 30. primi.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 26. primi.

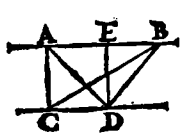
PRAXIS etiam hac brevius demonstrabitur hoc modo. Sumpta quinque interuallis recta EF, ab E, usque ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, divisa à parallelis in quinque partes æquales, vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ PQ, quæ data recta AB, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB, divisa quoque erit AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD.

[a] 37. primi.



[b] 34. primi.

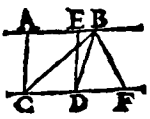
Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [a] erùt triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum est trianguli ACD; [b] quòd triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint.

[c] 6. pron.

Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, vt sit DF, æqualis ipsi CD, ducaturque recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [d] *quòd triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE,* [e] *duplum eiusdem trianguli BCD.* [f] *Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.*



[d] 38. primi.

[e] 41. primi.

[f] 6. pron.

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [g] *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD;* [h] *quòd diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam;* [i] *erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc* [k] *esset duplum etiam trianguli BFG, &c.*



[g] 38. primi.

[h] 34. primi.

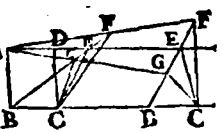
[i] 6. pron.

[k] 38. primi.

CON-

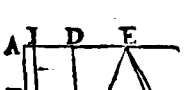
CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.



SIT parallelogrammum ABCD, duplum triãguli EBC, ſint eandem habeant baſin, ſiue æquales. Dico rectam ductam AE, parallelam eſſe rectæ BC. Nam alias ducta parallela ex A, cadet aut ſupra AE, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propoſ. oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. [a] *Nam* [a] *41. primi.*
eruntque parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum. [b] *Quare triangula EBC, FBC, vel* [b] *6. pron.*
triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum.

SIT deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eiſdemque parallelis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe BQ, ſit maior, abſciſſa æqua



li CH, & ducta HI, parallela ipſi AB, demonſtrabimus [c] *31. primi.*
parallelogramma ABCD, IHCD, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli EFG; illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturque recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque aimi-

dium est parallelogrammi A B C D ; Illud quidem per propos. 41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.

EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas A E, B C, sint constituta trapezium A B C D, & triangulum E B C, super basim B C, eandem, qua sit tamen maior, quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam B C, sumatur A F, aequalis ipsi B C, & ducatur recta C F, [a] *quae erit parallela ipsi A B; atque adeo parallelogrammum erit* A B C F, [b] *quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium* A B C D, *cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*

[a] 33. primi.
[b] 41. primi.



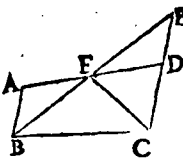
SINT rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis B C, sit minor, quam reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, *maius esse duplo trianguli* E B C. *Cum enim A D, maior sit, quam* B C, *abscindatur* D F, *aequalis ipsi* B C, *& ducatur recta* B F, [c] *quae erit parallela ipsi* C D; [d] *atque adeo parallelogrammum erit* B C D F: [d] *quod duplum est trianguli* E B C. *Quare totum trapezium* A B C D, *quod superat parallelogrammum* B C D F, *maius erit duplo eiusdem trianguli* E B C. *quod est propositum.*

[c] 33. primi.
[d] 41. primi.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super aequales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere oppositio parallelo, nunc vero minor.

TRA-

TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppoſiti.



SIT trapezium A B C D, *cuius duo latera oppoſita* A B, *D C, ſint parallela, & ſuper baſin* B C, *conſtituatur triangulum* E B C, *verticem* E, *habẽs in medio puncto* E, *lateris* A D. *Dico trapezium A B C D, duplum eſſe trianguli* E B C. *Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe* B E, *donec coeat cum* C D, *protracto in* F. *Et quia parallela ſunt* A B, C F, [a] *erunt anguli alterni,* B A E, F D E, *æquales:* [b] *Sunt autem & anguli* A E B, D E F, *æquales, quippe qui ad verticem* E; *& latus* A E, *trianguli* A B E, *lateri* D E, *trianguli* D E F, *æquale, per hypotheſin.* [c] *Igitur & reliqua latera* A B, B E, *reliquis lateribus,* D F, F E, *æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli* A B E, D F E, *æquales: atque idcirco trianguli* A B E, D F E, *ex coroll. propoſ. 26. huius lib. æqualia erũt. Quare addito communi triangulo* C D E, [d] *erunt triangulo* C E F, *æqualia triangula ſimul* A B E, C D E. [e] *Eſt autem & triangulum* B C E, *eidem triangulo* C E F, *æquale, quòd baſes* B E, E F, *oſtenſæ ſint æquales, & ipſa triangula inter eaſdem ſint parallelas, ſi per C, duceretur parallela ipſi* B F. [f] *Igitur triangulum* C B E, *æquale erit triangulis* A B E; C D E; *& propterea* C B E, *triangulum dimidium erit trapezij* A B C D, *quod eſt propoſitum.*

[a] 29. primi.
[b] 15. primi.
[c] 26. primi.
[d] 2. prom.
[e] 38. primi.
[f] 1. prom.

PROBL. 11. PROPOS. 42. 42.

DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

DATVM



DATVM triangulum sit ABC & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur cõstruere parallelogrammũ æquale triãgulo ABC habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta A F, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, [d] duplũ est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C, [e] quod triangula A E C, A B E, super æquales bases E C, B E, & in eisdem parallelis, sunt æqualia: Erunt parallelogrammum C E F G, & triangulum A B C, [f] æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.
[b] 23 primi.
[c] 31. primi.
[d] 41. primi.
[e] 38. primi.
[f] 6. pron.

SCHOLIVM.

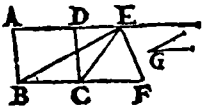
PRAXIS huius problematis facillima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datũ parallelogrãmum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, secetq; recta BE, rectã AD, productã in E: Extendatur quoq; BC, ad F, sitq; CF, æqualis rectæ BC, & iungatur EF. Dico triangulum BEF, habere

habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale eſſe parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, [a] erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E: Item trianguli B E F, eiuſdem trianguli B C E, duplum; [b] quod æqualia ſint triangula E B C, E C F. Quare [c] æqualia inter ſe erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod eſt propoſitum.



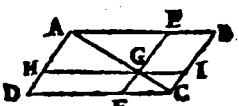
[a] 41. primi.
[b] 38. primi.
[c] 6. pron.

PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipſa conſtructione perfacilis eſt.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

43.

IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

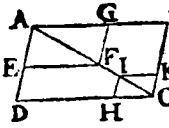


IN parallelogrāmo A B C D, ſint circa diametrum A C, parallelogramma A E G H, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia. Cum enim [d] triangula A B C, C D A, æqualia ſint; Itemque triangula A E G, G H A; ſi hæc ab illis demantur, [e] remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [f] Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare ſi detrahantur ex trapezijs, [g] remanebunt æqualia complementa D F G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod oſtendendum erat.

[d] 34. primi.
[e] 3. pron.
[f] 34. primi.
[g] 3. pron.

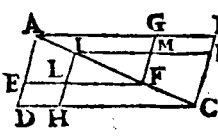
SCHOLIVM.

EODEM modo hoc theorema demonſtratur a Proclo, etiam



etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non coniunganture in puncto G, sed vel vnum ab altero sit sectum, vel ambo se mutuo interfecent. Sit enim prius vnum ab altero distãs, ita vt complementa sint figura quinquangula. Vt in parallelogrammo A B C D, *circa diametrum* A C, *consistant* [a] *parallelogramma* A E F G, C H I K. *Dico complementa* D E F I H, B K I F G, *esse aequalia. Cum enim* [a] *triangula* A B C, C D A, *aequalia inter se sint; Item triangula* A E F, C H I, *aequalia triangulis* A G F, C K I, [b] *erunt reliqua complementa* D E F I H, B K I F G, *aequalia. Quod est propositum.*

[a] 34. primi.
[b] 3. pron.



SECENT se iam mutuo parallelogramma A E F G, C H I K, *circa diametrum consistentia, ita vt communem partem habeant* I L F M. *Dico adhuc complementa* D E L H, B G M K, *esse aequalia. Cum enim* [c] *aequalia sint triangula* A B C, C D A; *Item triangula* A F G, A F E; [d] *erunt reliqua quadrilatera* B C F G, D C F E, *aequalia: Sunt* [e] *autem rursus aequalia triangula* I F M, I F L. *Igitur si haec addantur dictis quadrilateris,* [f] *erunt figura* B C I M G, D C I L E, *aequales. Cum igitur* & [g] *aequalia sint triangula* C I K, C I H; [h] *erunt reliqua complementa* B G M K, D E L H, *etiam aequalia. Quod est propositum.*

[c] 32. primi.
[d] 3. pron.
34. primi.
[e] 2. pron.
[f] 34. primi.
[g] 3. pron.

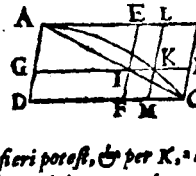
CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis E F, G H, *quae sint parallelae rectis* B C, C D, *secẽtes in* I, *diuisum sit parallelogrammum* A B C D, *in quatuor parallelogramma, quorum aduer-*

sa duo

ſin dum BEIH, DFIG, ſint æqua lia. Dic reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum conſiſtere, hoc eſt, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam tranſire per punctum I. Si enim nõ tranſit, ſecet diameter CKA, rectam GH, in K, ſi fieri poteſt, & per K, [a] *ducatur LM, parallela ipſi BC.* [b] *Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, æqualia: Eſt* [c] *autem DGKM, maius quam DGIF. Quare & maius erit BHKL, quam DGIF. Cum ergo DGIF, æquale ponatur ipſi BEIH;* [d] *erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quàm totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, ſecat, ſed per punctum I, tranſit. Quod eſt propoſitum.*



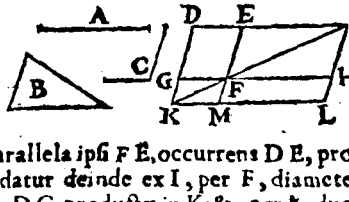
[a] 31. primi.
[b] 43. primi.
[c] 9. pron.
[d] 1. pron.

THEOR. 12. PROPOS. 44.

44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habẽs æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Conſtituatur triangulo B, [e] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF ad H, vt FH, ſit æqualis rectæ A, & per H, [f] ducatur HI, parallela ipſi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & [g] per K, ducatur KL, parallela ipſi GH, ſecans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LM-



[e] 42. primi.
[f] 31. primi.
[g] 31. primi.

L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqualem, [a] cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, [b] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

[a] 15. primi.

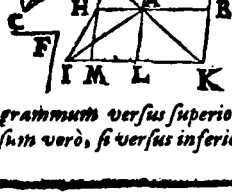
[b] 43. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse unum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatq; super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triangulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto uno latere trianguli, ut D E, bifariam in G, ductaq; recta C G, secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eam partem, ubi parallelogrammum



construendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, ut hic versus A, fiatq; A H, æqualis ipsi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, [c] constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, secus verò, si versus inferiorem. Posita autem recta A I, æqua-

[c] 23. primi.

lis ipsi

li ipſi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulos q; contenti æquales; [a] erunt triangula A H I, E G C, æqualia. Poſt hæc, [b] ducta per I, ipſi H B, parallela I K, [c] conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, æqualis, ſecetq; A L, rectam I K, in L. [d] Ducta quoque per H, ipſi A L, parallela H M, ſecante I K, in M; [e] erit parallelogrammum A H M L, trianguli A H I, duplum: Eſt autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quod æqualia oſtenſa ſint triangula E G C, D G C. Igitur cum æqualia ſint demonſtrata triangula A H I, E G C, [f] erũt æqua lia parallelogrammum A H M L, & triangulum C D E. Iam vero, ſumpta recta L K, data recta A B, æquali, ducatur recta K A, producaturq; donec cum M H, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi H B, parallela N O, donec in O, coeat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur vſque ad P, in rectã N O. Dico parallelogrammum A B O P, eſſe id, quod quæritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam A B, habetq; angulum B A P, dato angulo F, æqualem, & cum æqualis ſit angulo H A L, qui angulo F, factus eſt æqualis. Denique æquale eſt dato triangulo C D E, [h] cum æquale ſit parallelogrammo A H M L, quod triangulo C D E, oſtenſum fuit æquale.

a 4. primi.
b 31. primi.
c 23. primi.
d 31. primi.
e 41. primi.
f 7. pron.
g 15. primi.
h 43. primi.

PRAXIS vero huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta H I, duci non debet, neque recta C G. Hæ enim propter demonſtrationem tantum ductæ ſunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

SIT data recta A B; datum parallelogrãmum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, vt D G, æqualis ſit ipſi C D, & iungatur G E, recta: Eritq; triangulum C E G, parallelo-

rallelogrammo C D E F, æquale, vt demonſtrauimus ſcholio propos. 41. Fiat tam ſuper data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc eſt, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt ſit I K, æqualis ipſi A I, iungaturq; recta B K. Dico triangulum A B K, conſtitutum ſuper datam rectam A B, habere q; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale eſſe dato parallelogrammo C D E F. Cum enim triangulum A B K, æquale ſit parallelogrammo A B H I, ex ſcholio propos. 41. quod æquale eſt conſtructum parallelogrammo C D E, F conſtat propoſitum.

a 44. primi.

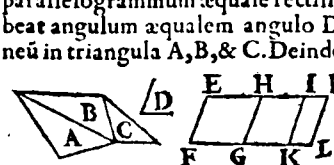
PRAXIS huiuſce problematis à conſtructione non differt; difficilisq; non eſt, ſi adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, ſuper data recta A B, in dato angulo A, conſtruatur.

THEOR. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema abſolutè, non aſtringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat, tamè quia in ſequentibus frequenter vſurpatur in data recta linea, placuit ipſum proponere vnà cũ data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur conſtruere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Reſoluatur rectilineũ in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, æquale

b 44. primi.



parallelogrammum conſtituatur E F G H, ſuper rectã E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectam G H, paralle-

parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, [a] inter se sunt æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, [b] qui duobus rectis æquiualent, [c] æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [d] Quare F G, G K, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quòd duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sunt, ([e] cum sint æquales oppositis angulis æqualibus E F G, H G K.) [f] & duo anguli H I K, I H G, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint parallelæ; [g] Itemque E F, I K, quod vtraque parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineam E F, dato rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

[a] 1. prom.
[b] 29. primi.
[c] 2. prom.
[d] 14. primi.
[e] 34. primi.
[f] 29. primi.
[g] 30. primi.

SCHOLIVM.

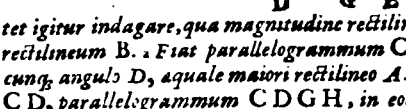
PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hac parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis mandet duo rectilinea proposita A B, & C; Atque A B,

resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL, super rectas EF, HG, I K, *iuxta artem huius problematis, aequalia constituantur. ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum* E F L M, *aequale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.*

PRAXIS autem huius problematis ex praxi praecedentis propos. sapius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus, in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. [a] *Fiat parallelogrammum* C D E F, *in quocunq; angulo D, aequale maiori rectilineo A. Et super rectam* C D, *parallelogrammum* C D G H, *in eodem angulo D, aequale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum* C D E F, *superat parallelogrammum* C D G H, *parallelogrammo* E F H G; *superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo* E F H G. *Quod est propositum.*

[a] *45. primi.*

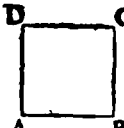
45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta A B, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, educantur A D, B C, perpendiculares ad A B, sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico A B C D, esse quadratum. Cum enim

[b] *11. primi.*

enim anguli A, & B, sint recti, [a] erũt A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur [b] & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum A D, D C, C B, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [c] æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratũ igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.



[a] 28. primi.
[b] 33. primi.
[c] 34. primi.

EX PROCLO.

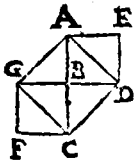
LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

SINT primum rectæ A B, C D, æquales. Dico earũ quadrata A B E F, C D G H, *æqualia quoque esse. Ductis enim diametris* B F, D H, *erunt duo latera* B A, A F, *trianguli* B A F, *duobus lateribus* D C, C H, *trianguli* D C H, *æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ* A F, C H, *æquales sint rectis* A B, C D: *Sunt autem, & anguli* A, *&* C, *æquales, nempe* [a] *recti.* [b] *Igitur triangula* B A F, D C H, *æqualia erunt. Quæ* [c] *cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.*

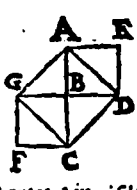


[a] 4. primi.
[b] 34. primi.

SINT deinde quadrata A B D E, B C F G, æqualia. Dico lineas quoque ipsorum A B, B C, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, B C, in directum constituantur. Et quoniam anguli A B G, A B D, *sunt recti,* [c] *erunt & rectæ* G B, B D, *in directum constituta. Ducantur diametri A D, C G, iungaturque recta A G, C D. Quoniam*



[c] 14. primi.



niam igitur quadrata ABDE, BCFG, aqualia sunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, aqualia. Addato ergo communi triangulo BCD, fiet totũ triangulum ACD, toti triangulo GDC, aquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandẽ habeant basin CD, ad eandem[a] sint partes, [a] in eisdẽ sunt parallelis: ideoque parallela sunt AG, CD. Et quoniã, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoque aquales. Quamobrem, [b] & parallela sunt AD, CG. Igitur parallelogrammũ est ADCG; ac propterea [c] recta AD, CG, aquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, aqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam aquales, cum sint semirecti, vt in scholio propos. 34. ostensum fuit; [d] erunt reliqua latera aqualia, nempe AB, ipsi BC, &c. Quod est propositum.

a 39. primi.
b 27. primi.
c 34. primi.
d 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hac omnia multo brevius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si linea sint aquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsa inter se. Cum ergo & anguli sint aquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint aqualia, congruent ipsa inter se, propter aqualitatem angulorum. Igitur & linea: alterum quadratum alio maius esset.

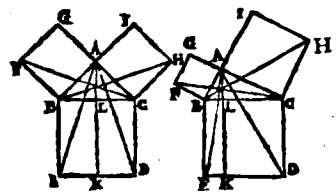
PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi data recta AB, aqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem AB, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iungunturque rectæ BC, DC, constructũ erit quadratũ. Nã ABCD, cũ ex cõstructione sit figura aqualia laterum, atque adeo latera opposita habeant aqualia, parallelogrammum erit, vt ad initiũ scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, [e] erunt & B, D, recti, necnon [f] & oppositus angulus C, &c.

e 29. primi.
f 34. primi.

THEOR.

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectangulis triangulis, quadratū, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



IN triāgulo ABC, angulus BAC, sit rectus, & describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, [b] parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, [c] erūt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, [d] fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, [f] duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli

[a] 46. primi.

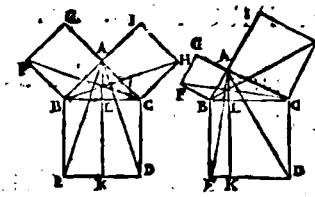
[b] 31. primi.

[c] 14. primi.

[d] 2. pron.

[e] 4. primi.

[f] 41. primi.



ABE, quòd sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basim BE. Quare [a] æqualia erunt quadratũ ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. [b] Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL, æquale est duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 6. pron.

[b] 4. primi.

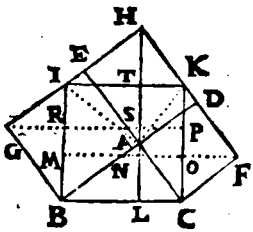
SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate isto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus cũ ambientibus, fieret latus oppositum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris anguli recto oppositi aquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum, perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris anguli acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

QVONIAM vero theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæ pretiũ iudicaui tentare, nũ illud

Illud aliquis demonstrari possit, variata aliquantulũ constructione, quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit.

Sit ergo rursus triangulũ ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, producturq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiat AD, AE, ipsis AC, AB, aequales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelae agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quam latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, aequalia sunt, erit vtrumque parallelogrammum aequilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt. [b] Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, aequales sunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, rectis sunt, quod vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB, aequalis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, aequales sunt; sunt autem & recti anguli BAC, BGI, aequales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, aequales, vterq; vtriq;: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia aequalia, ob quadratum BE. [d] Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, aequalia erunt, & reliqui anguli C, I, aequales. Nõ aliter in triangulis ABC, FKC, aequalia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea q duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, aequales sunt, (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorũ, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia aequalia, ob quadratum CD. Quare recta BI, CK, [e] inter se etiã aequales erũt. [f] Cum ergo sint quoq; parallelae, [g] erũt etiam BC, IK, aequales & parallelae. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint aequalia, & omnes anguli recti, [h] quòd anguli I, K, oppositis rectis C, B, aequales sint. Dico



[a] 34. primi.

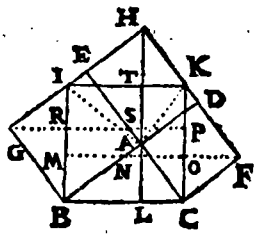
[b] 34. primi.

[c] 29. primi.

[d] 26. primi.

[e] 1. pron. 28. primi.

[g] 33. primi.



ergo, quadratum C I, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Ducta enim ex H, per A, recta H T A L, ipsis B I, C K, parallela erit. Nam quia [a] G E, ipsi B A, æqualis est, & E H, ipsi A I, hoc est, ipsi G I, quæ ipsi A C, æque A D, ostensa fuit æqualis, erit & addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc est, ipsi A B, æqualis. Cum ergo H I, A B, sint etiam parallelæ, [b] erunt quoque B I, A H, parallelæ & æquales. Eodemq; modo A H, ipsi C K, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur [c] tam quadratum B E, parallelogrammo B H, super eandem basin A B, quam parallelogrammum B T, eidem parallelogrammo B H, super eandem basin B I, æquale est, [d] erit quoque quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Sic etiam quia tam [e] quadratum C D, parallelogrammo C H, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, super eandem basin C K, æquale est, [f] erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compositum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Loco rectæ H T A L, jungantur duæ rectæ A I, A K, & per A, ipsis B I, C K, parallela ducatur T A L. Quoniam ergo [g] tam quadratum B E, (ostendemus enim ut prius, B K, B E, C D, quadrata esse laterum B C, A B, A C,) trianguli A B I, super eandem basin A B, quàm parallelogrammum B T, eiusdem trianguli A B I, super eandem basin B I, duplum est: [h] erit quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Pari ratione, quia [i] tam quadratum C D, trianguli A C K, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eiusdem trianguli A C K, super eandem basin C K, duplum est, [k] erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, ut prius, totum quadratum B C K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, constatum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat ostendendum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 35. primi.
[d] 1. pron.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron.
[g] 41. primi.
[h] 6. pron.
[i] 41. primi.
[k] 6. pron.

AL-

ALITER. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelæ FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, æqualis. Quoniam enim a anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, æquales, quòd vterque angulo ABC, supra ostensus sit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quòd vtrumque supra sit ostensum ipsi BC, æquale. b Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaque quoniam c tam parallelogramma BCFN, BCOM, super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, æqualia sunt, eique parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, ostensas æquales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter latera, angulorumque æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, compositio æqualia. d Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, æquale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonstrandum erat.

a 29. primi.

b 26. primi.

c 35. primi.

d 33. primi.

ATQVE in hunc modum alia demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENTIO porrò admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam praclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisset q. quadratum numerum maioris aqualem esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes aquales,

les, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his ductus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idq; in quamplurimis aliis numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebãt vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi vehementia adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descriptæ, vt ibidem ostendemus.

CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, breuiter explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si iidem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima asscribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. remoue vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, qua talis est. Accipiatur numerus quicũque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahatur vnum,

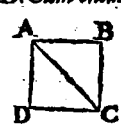
vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 12. reperientur alij duo 24 & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato A B C D, *ducatur diameter* A C. *Dico quadratum* A C, *duplum esse quadrati* A B C D. *Cum enim in triangulo* A B C, *angulus* B, *rectus sit, erit quadratum lateris* A C, *æquale duobus quadratis laterum* A B, B C. *Cum igitur quadrata linearum* A B, B C, *æqualia sint, quòd lineæ* A B, B C, *sint æquales; erit quadratum lineæ* A C, *dupluin cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ* A B, *hoc est, quadrati* A B C D. *Quod est propositum.*

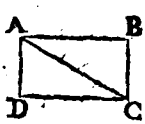


a 47. primi.

II.

QVADRATVM diametri figuræ alterà parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori A B C D, *ducatur diameter* A C; *& quia in triangulo* B C, *angulus* B, *est rectus,* b *erit quadratum lateris* A C, *æquale duobus quadratis laterum inæqualium* A B, B C. *Quod est propositum.*

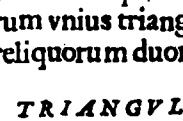


b 47. primi.

SI

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.



TRIANGVLORVM ABC, DEF, *anguli* A, & D, *ſint recti, laterag; oppoſita* BC, EF, *æqualia. Dico duo quadrata laterum* AB, AC, *ſimul ſumpta æqualia eſſe duobus quadratis laterum* DE, DF, *ſimul ſumptis. Nam quadrata linearum* BC, EF, *æqualia inter ſe ſunt, cum & ipſa inter ſe ponantur æquales:* [a] *Quadrato autem lineæ* BC, [a] *æqualia ſunt quadrata linearum* AB, AC; *Et quadrato lineæ* EF, *æqualia ſunt quadrata linearum* DE, DF. [b] *Quadrata ergo rectarum* AB, AC, *quadratis rectarum* DE, DF, *æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.*

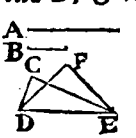
[a] 47. primi.

[b] 1. pron.

IIII.

DVOBVS quadratis inæqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta æqualia duobus inæqualibus propoſitis ſimul ſumptis.

SINT A, & B, *latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus* DCE, *ſitq; ipſi* DC, *recta æqualis recta* B, & *recta* CE, *recta* A. *Ducta deinde recta* DE, *coniungente duo puncta* D, E, *conſtituantur ſuper ipſam duo anguli ſemirecti* DEF, EDF, [c] *coeantq; rectæ* DF, EF, *in* F. *Quoniam igitur in triangulo* FDE, *anguli* FDE, FED, *æquales ſunt;* [d] *erunt & latera* DF, EF, *æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata*



[c] 13. pron.

[d] 6. primi.

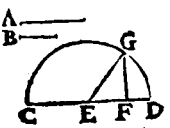
rearum DF, EF, *æqualia esse quadratis linearum* A, & B, *hoc est, quadratis linearum* CE, & CD. *Nam cum in trian*
gulo DEF, *angulus* FDE, FED, *faciant unũ rectũ; erit reli*
quus angulus F, *rectus.* [b] *Quamobrẽ erunt quadrata linearũ*
DF, EF, *æqualia quadrato lineæ* DE: *Sed eidem quadra*
to lineæ DE, *æqualia sunt quoque quadrata* CD, CE. *Igi*
tur quadrata linearum DF, EF, [d] *æqualia sunt quadratis*
linearum DC, EC. *Quod est propositum.*

[a] 32. primi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 1. prom.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.

POTENTIA lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quauis recta linea *posse* dicitur, *quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales* A, & B, *oportet* [a] *cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ* A, *quam minoris* B. *Ex quauis lineæ rectæ* CD, *sumatur* CE, *æqualis rectæ* A, & EF, *æqualis rectæ* B. *Deinde centro* E, & *intervallo* EC, *semicirculus describatur* CGD; & *ex* F, *ducatur* FG, *perpendicularis ad* CD. *Dico quadratum rectæ* A, *hoc est, rectæ* CE, *sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ* B, *hoc est, rectæ* EF, *sibi æqualis, quadrato rectæ* FG. *Ducta enim recta* EG, [c] *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum* EF, FG, *hoc est, quadratum rectæ* EC, *illi æquale, superabit quadratum rectæ* EF, *quadrato rectæ* FG. *Quod est propositum.*



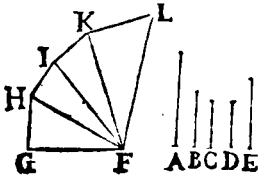
[c] 47. primi.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteat ipsi inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus FGH, sitque recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitque HI, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitque IK, æqualis rectæ D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitque KL, æqualis rectæ E, ducaturque recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis.

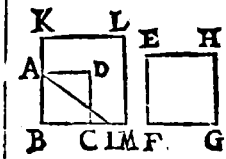


[a] *47. primi.* *Quadratum enim rectæ FH,* [a] *æquale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B.* [b] *47. primi.* *Rursus quadratum rectæ FI,* [b] *æquale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C.* [c] *47. primi.* *Item quadratum rectæ FK,* [c] *æquale est quadratis rectarum FI, IK, ideoque quadratis rectarum A, B, C, & D.* [d] *47. primi.* *Denique quadratum rectæ FL,* [d] *æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.*

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata ABCD, EFGH, propositumque sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturque quadratum BKLM. Dico figuram AKLMICD, quadrato ABCD, adiunctum, æqualem esse quadrato

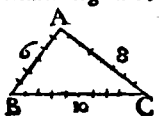


quadrato E F G H. Quoniam enim quadratum rectæ A I, hoc est, quadratum B K L M, [a] æquale est quadratis rectarum A B, B I, hoc est, quadratis A B C D, E F G H: si auferatur commune quadratum A B C D, [b] remanebit figura A D C M L K, æqualis quadrato E F G H. Quod est propositum. [a] 47. primi. [b] 3. prem.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, rectus in triangulo A B C, sintq; primum cognita latera A B, A C, circa angulum rectum, quorum A B, ponatur 6. palmorum, & A C, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, nempe quadrati palmi 36. & 64. [c] æqualia sunt quadrato rectæ B C; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorũ palmorũ 100. Latus ergo B C, continebit 10. palmos. Tãtũ enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera A B, B C, sitque A B, 6. palmorum, & B C, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, [d] æqualia sunt quadrato rectæ B C; si quadratum rectæ A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ B C, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectæ A C, 64. palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tantus enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod est propositum. Caterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.

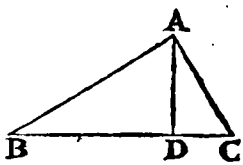


[c] 47. primi. [d] 47. primi.

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur

bitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusq; illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.



C A D A T primum in triangulo A B C, cuius latus A B, maius sit latere A C, perpendicularis A D, ad B C, demissa intra triangulum, quod tum demum continget, quando uterq; angulus B, C, acutus est, vt ex coroll. 2. propos. 17. constat. Dico segmentum B D, esse maius segmento C D. Quoniam enim [a] *tam quadratum ex A B, quadratis ex A D, B D, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, C D, æquale est: Est autem quadratum ex A B, maius quadrato ex A C, quod latus A B, latere A C, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex A D, B D, maiora duobus quadratis ex A D, C D: Et ablato communi quadrato rectæ A D, reliquum quadratum ex B D, reliquo quadrato ex C D, maius erit. Quare & recta B D, maior erit, quam recta C D. quod est primum.*

[a] 47. primi.

F A C I A T deinde perpendicularis A D, segmentum B D, maius segmento C D. Dico latus A B, maius esse latere A C. Erit enim quadratum ex B D, quadrato ex C D, maius: Additoq; quadrato communi ex A D; duo quadrata ex B D, A D, duobus quadratis ex C D, A D, maiora erunt. Cum ergo [b] *tam quadratum ex A B, quadratis ex B D, A D, quam quadratum ex A C, quadratis ex C D, A D, æquale sit; erit quoque quadratum ex A B, quadrato ex A C, maius; propterea q; & latus A B, latere A C, maius erit. Quod est propositum.*

[b] 47. primi.

A T Q V E in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, qua consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

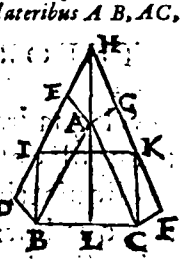
T H E O R E M A T E porrò hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni trian-

gu-

galeſſime illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunque parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamſi non ſint inter ſe æquangula. Quæ nos in formam theorematis redigentes, clariorem modo propoſuimus, & meo iudicio generaliorem adhuc, quam Euclides.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſint parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.

SIT triangulum quodcunque ABC, conſtituanturq; ſuper latera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, aſſumpta in triangulo opponuntur, producãtur ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehenſi, conueniant in H, ducaturque recta AH. Dico parallelogrammã AD, AF, æqualia eſſe parallelogrammo ſuper latus BC, deſcripto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, ſecet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipſi AH, iungaturque recta IK. Quoniam igitur parallelogramma ſunt BIHA, CKHA; [a] erit vtraque BI, CK, ipſi AH, æqualis; atque adeo & inter ſe æquales erunt BI, CK; [b] quæ cum ſint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ ſint; [c] erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum eſt BCKI, ſuper latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelũ:



[a] 34. primi.
[b] 30. primi.
[c] 33. primi.

Cui quidem æqualia oſtendenda ſunt parallelogramma AD, AF. [a] Quia ergo æqualia ſunt parallelogramma AB, ABIH, quòd eandem habeant baſin AB, in eiſdemque ſint parallelis AB, HD; [b] Eſt autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat baſin BI, in eiſdemq; ſit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter oſtendemus, AF, ipſi KL, eſſe æquale. Quare parallelogrammum AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 35. primi.

b 35. primi.



c 29. primi.

PAPPVS conſtruit figuram aliter: Nam ſumſit rectus AG, AE; & AB, AG, in directum poſitas, ita ut parallelogramma AD, AF, ſint æquiangula, habentia angulos AED, AGF, angulo BAC, [c] interno externo æquales, cum hæc eius figura in dicat. Sed nos vniuerſaliter rem propoſuimus, ut manifeſtum eſt.

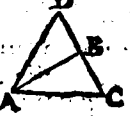
47. THEOR. 34. PROPOS. 48.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DETVR triangulum ABC, ſitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, eſſe rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC,

con-

connectaturque recta A D. Quoniam igitur in triangulo A B D, angulus A B D, rectus est; [a] erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, B D. Est autem quadratum rectæ B D, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ A C, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; [b] erunt quadrata rectarum A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ A D, A C, æquales. Quoniam igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & basis A D, ostensa est æqualis basi A C; [c] erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 47. primi.

[b] 1. prop.

[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perspicuum est.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem, [d] collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

[d] 4. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque basi æqualis, [e] intulit æqualitatem angulorum

[e] 8. primi.

ſorum illis lateribus comprehenſorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus eſſe æqualia.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus ſunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, [a] oſtendit baſim maiori angulo oppoſitum eſſe maiorem baſe minori angulo oppoſita.

[a] 24. primi.

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtriq;, at baſes inæquales, [b] demonſtrauit angulum maiori baſi oppoſitum eſſe maiorem angulo minori baſi oppoſito.

[b] 25. primi.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales ſunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod vni æqualium angulorum opponitur, [c] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius eſſe æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus ſequi etiam, tota triangula eſſe æqualia.

[c] 26. primi.

SEXTO [d] demonſtrauit, duo triangula ſuper eandem baſin, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia.

[d] 37. primi.

SEPTIMO [e] oſtendit, duo triangula ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, æqualia eſſe.

[e] 38. primi.

OCTAVO [f] docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſim, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

[f] 39. primi.

NONO

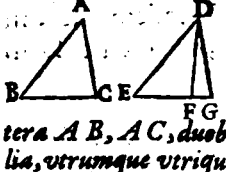
NONO denique [2] probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemq; partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. [2] 40. primi.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo; ſed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hæſce comparationes excluſimus, quòd ex ijs non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.

SIT enim Iſoſceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta baſe GF, vſque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG,

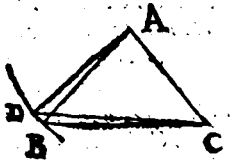




æquale triangulum constituatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia sint, & basis BC, basi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, angulique B, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppositi æquales: & eadem basis BC, maior est base EF; quòd BC, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quòd angulus C, acutus est, [a] 5. primi. at DFE, obtusus. Nam cum [a] anguli DFG, & [b] 17. primi. G, æquales sint; [b] & simul sumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, [c] 13. primi. recto maior: quandoquidem [c] duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demum sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quàm EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quòd DF, idem [d] 5. primi. sit, quod AC, ipsi DG, æquale; [d] erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque minor recto; [e] 17. primi. [e] quòd ambo minores sint duobus rectis. [f] 13. primi. Cum igitur, [f] duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, qui à DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor est, aut maior recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior basi EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsi DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vterque angulo

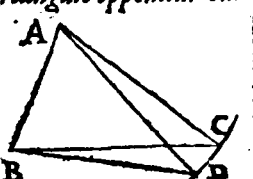
angulo C, & F, vel minore recto, vel maiore.) cadat punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus quod est contra hypothesin.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus equalia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi potest. Nam si triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit [a] ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis; cadatque CD, supra CB. Describatur quoque circa A, per B, arcus circuli



secans CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD, opposito: Et tamen bases BC, DC, æquales non sunt. Si enim æquales essent, essent tam duæ rectæ AB, AD, quàm duæ CB, CD, æquales, [b] quod est absurdum.

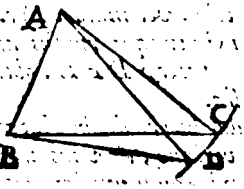
POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterũ, nihil etiam potest inferri. Sit namque triangulum ABC, cuius vtrumque latus AC, CB, maius sit latere AB; & BC, maius, quàm AC. Erit [c] ergo angulus BAC,



[a] 18. primi.

[b] 7. primi.

[c] 18. primi.



maior angulo ABC. Sigur fiat angulus ABD, angulo BAC, equalis, cadat BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadat, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD, erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, equalia, vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, equalis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur; Et tamen bases BC, BD, equales non sunt. Alias tam recta AC, AD, quam
27. primi. BC, BD, equales essent, a quod est absurdum.

RECTE igitur Euclides propos. 4. praecipit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse equalem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM SECVNDVM

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.



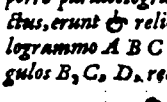
QVIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusuis linea recta diuisa, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem linea diuisa comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius linea, &c. Quod vt commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, qua demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est,

Paralle-

Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus dunt axat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallela sint

[a] 29. primi.



A D, B C,[a] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis aquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero[b] quilibet suo opposito est aqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

[b] 34. primi.

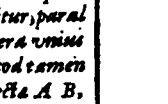
DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, qua vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, D C; vel sub D C, C B, vel denique sub A B, B C: quoniam qualebet huiusmodi dua linea exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera vero, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, qua angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quòd ex motu imaginario vnius linea in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius latera circa vnum angulum rectum aqualia sunt duabus li-

lis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentũ, E
erit idẽ quod parallelogrammũ ABCD: F
quoniã latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F.

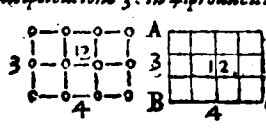
PERSPICVVM autẽ est ex dictis, parallelogrammũ rectangulum contentũ sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cuiuis enim quilibet illarũ linearum æqualium, æqualis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectã guli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, vtraque vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum sub AB, BC, æquale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [a] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.



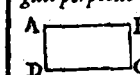
[a] 4. primi

HABET autem comprehensio hac parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammũ ABCD, comprehensum sub duabus rectis AB, BC, quarum illa sit 3 palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem



quidem ex ductu lineæ A B, 3. palmorum in lineam B C, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq; a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ A B, in lineam B C, vel (quod idem est) ex ductu lineæ B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

OBITER quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem litera repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammū appellant A C, vel B D.

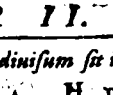


II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrammi,

grãmi, ita vt parallelogrãmum diuisum sit in quatuor parallelogrãma, quorũ duo EH, IF, dicũtur esse circa diametrum, alia vero duo BG, GD, cõplemẽta, vt manifestũ est ex vltima definitione primi lib. Tum figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis est figura E B C D H G E, quam complectitur circumferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum; & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.





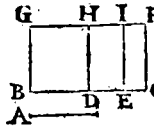
SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sane operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videantur esse nihil. Ex alijs deinde propositionibus huius lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se addantur, subtrahuntur, multiplicantur, atque diuidantur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neque per Diuinam potentiam in numeris possunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulo minor sit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4? Et tamen summa, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior est, quam 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area, & quantitas

quantitas cuiusuis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, ac dimanat. Postremò vltima propos. huius lib. omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, utilitates verò eximias contineat propè infinitas.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum *sub illis* duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento cõprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duę perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturque recta F G. Nam rectæ B G, C F, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur, [c] erunt quoq; G F, B C, parallelæ & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit B F, contentum sub A, siue G B, & B C, ex defin. 1. huius lib. Deinde D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, vel C F.

[a] 28. primi.
[b] 1. pron.
[c] 33. primi.

CF. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, a inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cum ex cõstructione parallelogramma sint B H, B I, b æquales erũt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D. Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E. Item rectangulum E F, sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis B D, D E, E C, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

a 30. primi.
b 34. primi.

SCHOLIVM.

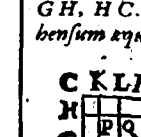
QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si dividantur, vt linea; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius linea in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq; vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: ad quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duę rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT

SINT duæ rectæ A B, A C, rectam angulum A continentes, quæ secentur in partes A D, D E, E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H, E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur. Compleatur rectangulum A I, ducanturq; D K, E L, F M, parallelæ ipsi A B, vel B I: Item H N, G O, parallelæ ipsi A C, vel B I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H; & H K, sub A D, H C; (a quod rectæ G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub D E, A G; D E, G H; D E, H C; (b quod D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H; F B, H C, perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.



a 34. primi.

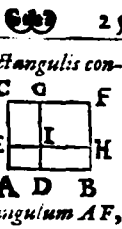
b 34. primi.

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturque autem vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentem A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C; vna cum rectangulis com-

prehen-

prehenſo ſub partibus AD, EC, æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur. n. rectangulũ AF, agaturq; per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; nec non per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI; ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.



IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. poſterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; ſimul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

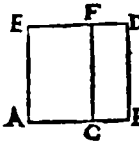
RVRSVS, ſi ijdem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoque eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod a tota fit, quadrato.

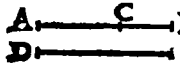
RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe



quadrato totius lineæ A B. Describitur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F, parallela rectæ A E, vel B D, quæ [a] æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B, cui æqualis est recta A E, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmẽto A C. Similiter erit rectangulũ C D, cõprehẽsum sub tota A B, & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est, rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 34. primi.

A L I T E R. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B.



Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta A B, hoc est, quadratum rectę A B, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehẽduntur sub D, insecta, hoc est, sub A B, & singulis segmentis A C, C B. quod est propositum.

[b] 1. secũdi.

S C H O L I V M.

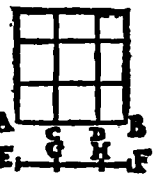
Q V A N Q V A M Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem mediis demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.





S I M I L I modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcunq; segmenta: Quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.



SIT recta AB, divisa in partes quotcunq; AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD, CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, divisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC, CD; AC, DB; CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.

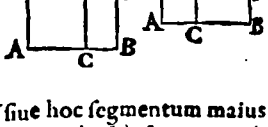
IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. dividatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

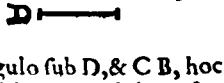
SI recta linea secta sit vtcunq;: Rectangulum sub tota, & vno segmentorũ comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectan-

gulo, & illi, quod a prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.



LINEA recta AB, diuiſa ſit vtcunq; in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota AB, & vtrouis ſegmento, vt AC, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis AC, CB, comprehéſo, & quadrato prioris ſegmenti aſſumpti AC. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti AC, quod ſit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipſi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis eſt, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, cóprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Rurſus, quia recta CD, eadem ratione æqualis eſt rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehenſum ſub ſegmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale ſit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido conſtat, rectangulum ſub AB, tota, & ſegmento AC, comprehenſum, eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis AC, CB, & quadrato prædicti ſegmenti AC. Itaque ſi recta linea ſecta ſit vtcunq;, &c. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento AC. Qm̃ igitur recta AB, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub D, & AB, hoc eſt, ſub AB, & AC, [a] æquale rectangulo ſub D, & CB, hoc eſt, ſub AC, CB, & rectangulo ſub D, & AC, hoc eſt, quadrato ſegmenti AC. Quod eſt propoſitum.



[a] 1. ſecũdi.

SCHOLIVM.

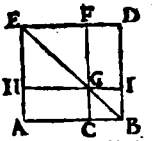
VT hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. diuiſus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem eſſe numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, una cum 49. qui-

49. quadrati prioris partis 7. id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. ſimul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

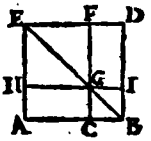
SIrecta linea ſecta ſit vtcunq; : Quadratum, quod a tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ a ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.



RECTA linea AB, diuiſa ſit vtcũq; in C. Dico quadratũ totius rectæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis AC, CB. Deſcribatur ſuper AB, quadratũ AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, ſecans diametrum in G. puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectæ AB, Eritque quadratum AD, diuiſum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia ſunt; [a] erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis ſunt æquales, & BAE, rectus eſt. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadem ratione oſtendes angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quod etiam conſtat ex ijs, quæ ad 34. propoſ. lib 1. demonſtrauimus. Nã, vt ibi oſtenſum eſt, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, [c] æquales ſunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus eſt, [d] cum ſit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, oſtenſus ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus; ideoque æqualis angulo FEG.

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 32. primi.
[d] 29. primi.

[a] 6. primi.
[b] 34. primi.



Quare[a] æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint[b] æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quòd existent vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogramo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quòd latus HG, [c] æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quòd CG, GI, æquales sunt rectę CB,

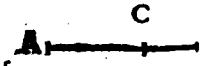
[c] 34. primi.

ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH; hoc est, [d] rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

[d] 34. primi.

[e] 2. secũdi.

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, [e] erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, AC, comprehensum,



[f] 3. secũdi.

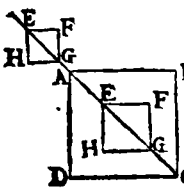
[f] æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectę AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, parallelogrammatica diametrum quadrati esse quadrata.

CON-

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrum B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H. Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilominus verũ est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, cõsistat parallelogrãmum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, [a] erunt anguli B A C, F E G, æquales, interni, & externus; atque eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erunt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt: [b] propterea que latera E F, F G, illis opposita, æqualia, [c] & angulus F, rectus. Quare cum E F, F G, latera [d] æqualia sint oppositis lateribus G H, H E, æquilaterum erit parallelogrammum F H: Sed & rectangulum est, ex ijs, quæ ad defin. 1. huius lib. ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur F H, quadratum erit. Quod est propositum.



[a] 29. primi.

[b] 6. primi.
[c] 32. primi.
[d] 34. primi.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1. demonstrauimus.

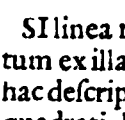
SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quarium exercebitur. Sit

numerus 10. diuisus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri aequale esse 49. & 9. quadratis partis 7. & 3. una cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PER FACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectę, quadratum ex illa descriptũ, quadruplũ est quadrati ex hac descripti. Et si quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.



SIT enim primũ linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bifariã in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atq; inter se aqualia, cum omnia eorum latera sint aqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. Quare cũ quadratũ AD, aquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratũ lineæ AB, quadruplũ quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, qua aqualis est ipsi AC. Est. n. vtraq; dimidiũ lineæ AB.

2 4. secũdi.

BREVIVS. 2 Quadratũ rectæ AB, aquale est quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum aqualium AC, CB, aqualia sint; & rectangulum sub aqualibus AC, CB, quadratum quoq; sit, atq; aquale quadrato rectæ AC; Constat quadratũ rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum aquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodq; quadrato rectæ AC, aquale est.

SIT deinde quadratũ rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplũ esse lateris K. Nam diuisa recta AB, bifariam in C, vt AB, dupla sit ipsius AC, erit, vt iam demonstratũ est, quadratũ rectæ AB, quadruplũ quadrati rectæ AC: Ponitur autem & quadruplũ quadrati rectæ K. Igitur aqualia sunt quadrata rectarum K, & AC, & ipsa propterea recta K, & AC, aquales: Est aũt AB, ex constructione, ipsius AC, dupla. Dupla igitur etiã erit ipsius K. Hu-

tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. lib. 6.

CÆTERVM ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quæritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inueniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. conſtituit 64. quadratum numerum, cuius latus eſt 8. nempe numerus una unitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc eſt. Quoniam quadratum A D, rectæ A B, æquale eſt duobus quadratis F H, C I, partim A C, C B, una cum rectangulo bis comprehenſo ſub A C, C B; ſi gnomonem H B F, qui cum quadrato F H, conſtituit totum quadratum A D, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem C I, ſtatuamus 1. atque adeo latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde ſegmentum A C, 7. vt nimirum ex A C, in C B, qua eſt 1. fiant 7. Quadratum ergo F H, erit 49. Totum autem latus A B, erit 8. nempe una unitate maius, quam A C, latus quadrati F H. Hæc ergo eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone H B F, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidiũ ſtatuamus latus quadrati F H, quæſiti. *4. ſecũdi.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe talis, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunque numerus datus ſit.

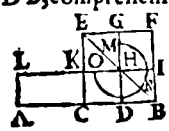
VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam ſi ex numero dato demitur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi rurſum datus ſit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidiũ 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus eſt 7. quod perpetuo eſt una unitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius

huius regula facilis est ex eadem figura huius propos. 4. Nam si gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, subtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus: Quadratum vero C I, statuamus 1. atque adeo & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & segmentum A C, 7. vt superius dictum est, & tota linea A B, 8. &c.

5. **THEOR. 5 PROPOS. 5.**

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidiam C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F; secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K. Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoque D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vna cum quadrato



34. primi.

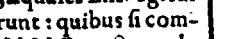
drato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo [a] complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: [b] Est autem & A K, eidem C I, æquale, quòd & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, una cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 43. primi.

[b] 36. primi.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus usque ad 11. exclusivè faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex C B, [c] æquale est quadratis ex C D, D B, una cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, una cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B, [d] æquale reliquo quadrato ex C D, una cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, [e] æquale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, una cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.



[c] 4. secundi.

[d] 3. secundi.

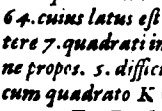
[e] 1. secundi.

IDEM in numeris est manifestum. Dividatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita ut medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, una cum 4. quadrato intermedij

termedij numeri 2. aqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à reliqui numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum A H, cum quadrato K G, [2] æquale sit quadrato C F; si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. vt numerum ex A D, in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

[2] 5. secũdi.



HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoq; quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerũ 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoq; est ex eadẽ figura huius propos. 5. Nam si rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatum relinquit quadratum K G, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeo & D B, eius latus 1. erit tota A B, 16. & eius dimidium C B, 8. &c.

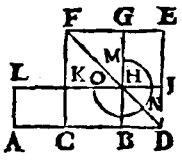
THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quę ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namque C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D: Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4 huius lib. B I, K G, quadrata, ideoque recta D I, rectæ D B, æqualis: [a] Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehędetur sub rectis A D, D B, & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaque est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammũ A K, [b] æquale est parallelogrammo C H, quod bases A C, C B, æquales sunt: [c] Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale.



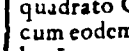
[a] 34. primi.

[b] 36. primi.
[c] 43. primi.

Quocir-

Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, una cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

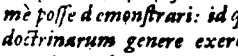


ALITER. Quia quadratum ex C D, [a] æquale est quadratis ex C B, B D, una cum rectangulo bis sub D B, C B: hoc est, quadratis ex C B, B D, una cum rectangulis sub B D, C B, & sub D B, A C: (sumpta A C, semel pro C B, qua illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub D B, A C; D B, C B; & sub D B, D B, (quod [b] est quadratum ex D B,) [b] æquale rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B, una cum rectangulo sub D B, A D: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

[a] 4. secũdi.

[b] 1. secũdi.

CÆTERVM si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentẽ 5. facillimè posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Bressius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animadvertit. Si enim recta A B, secta in C, bifariam, & ei addita recta quotacunque B D. Dico rectangulum cõprehensum sub tota A D, composita, & adiecta B D, una cũ quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato rectæ C D, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque rectæ A D, ex altera parte rectæ A E, quæ adiecta B D, æqualis sit, erit tota E D, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoq; E B, rectæ A D, æqualis erit, quod E A ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis. Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus E B, B D, una cũ quadrato



[c] 5. secũdi.

quadrato intermedia sectionis C B, hoc est, rectangulum sub A D, B D, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale erit quadrato dimidiæ C D, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia C B, datæ rectæ A B, & ex adiecta B D, compositæ. Quod est propositum.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero cõposito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmetica proportionalitatis, qua consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadẽ magnitudine C B: habebunt tres lineæ A D, C D, B D, proportionalitatẽ Arithmeticam; quandoquidẽ prima A D, superat secundam C D, eodem excessu A C, siue C B, qua secunda C D, tertiam B D, superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniũgi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam) cuius tertiæ, siue minori addita sit in rectum, mediaque composita sit ex dimidio excessu inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt puta, si tres rectæ sint datæ A D, C D, B D. Si namque ex prima A D, abscindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia B D. Cum enim C B, excessus sit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi A C, nempe excessui inter primam A D, & mediam C D; erit necessario A B, secta in C, bifariam. Eadem ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus,

bentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. una cum 9. quadrato excessus 3. aqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quinis numerus quadratus quoque numerum componat. Nam si ex dato numero demitur 1. & reliquus numerus bifariã secetur, erit quadratus horum dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæsitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerũ 64. cuius latus 8. vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta est ex hac 6. propos.

6. secũdi. Cum enim rectangulum A I, cum quadrato G K, *aequale sit quadrato C E, si rectangulum A I, statuatur 15. at quadratũ B I, 1. ideoq; & latus B D. 1. erit tota linea A D, 15. videlicet multiplicata in B D. 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D. remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæsiti.

NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparẽ, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

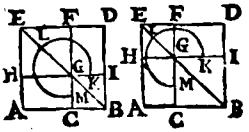
VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum A I, quod ex quadrato C E, subtractum relinquit quadratum K G, statuatur 15. at quadratum B I, ideoque & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. vt dictum est. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio C B, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quæritur, &c.

THEOR

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcũque; Quod a tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehẽditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.



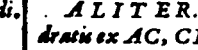
SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmẽti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cum quadrato reliqui segmenti CB. Describatur enim super AB, quadratum AD; & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectę AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, [a] æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, cõprehensum erit sub eisdem rectis AB, AC, quòd rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata AD, H. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratum AD; si apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.

S SCHO-

SCHOLIVM.

[a] 4. secũdi. ALITER. Quia quadratum ex AB, [a] æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB;



addatur cõmune quadratũ ex AC, erũt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cũ rectãgulo bis sub AC, CB. Sed rectãgulũ

[b] 3. secũdi. sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, [b] æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.

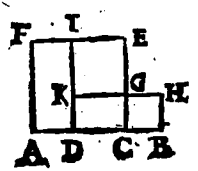
IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur enim quadrata AE, CH, & ipsum

DI, ipſi CE, *parallela, producatur*que HG, *ad* K. *Itaque quoniam* AD, *ipſi* CB, *eſt æqualis, addita communi* DC, *erit tota* AC, *hoc eſt,* CE, *tuti* DB, *æqualis: Eſt autem* & CG, *ipſi* CB, *æqualis, quòd quadratum ſit* CH. *Igitur & reliqua* GE, *reliquæ* DC, *æqualis erit: Ac proinde, cum &* IE, *ipſi* DC, *ſit æqualis, erunt* GE, IE, *æquales; ideoq;* IG, *quadratum erit ab exceſſu* DC, *deſcriptum. Quoniam verò rectangula* AI, DH, *continentur ſub partibus* AC, CB, *(Eſt enim* AC, *vtriquæ lineæ* AF, DB, *&* CB, *vtriquæ* AD, BH, *æqualis) manifeſtum eſt, quadrata* AE, CH, *partium* AC, CB, *æqualia eſſe rectangulis* AI, DH, *quæ continentur ſub partibus* AC, CB, *vna cum quadrato* IG, *exceſſus* DC. *Quod eſt propoſitum.*



SCHOLIVM.

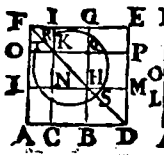
IN numeris. Secetur numerus 10. *inæqualiter in* 4. & 6. *ita vt maior pars ſuperet minorem numero* 2. *Vides igitur numeros* 16. 36. *quadratos partium, qui efficiunt* 52. *æquales eſſe numero* 24. *qui ex* 4. *in* 6. *fit, bis ſumpto, vna cum* 4. *quadrato exceſſus* 2. *vt volebat theorema.*

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI recta linea ſecetur vtcunq;: Rectãgulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum eo, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod a tota, & dicto ſegmẽto, tanquã ab vna linea deſcribitur, quadrato.

SIT recta AB, in C, diuiſa vtcunque. Dico rectan-



gulum quater compre-henſum ſub AB, & ſe-mento ſiue maiore, ſi-minore CB, vna cu-quadrato reliqui ſegm-ti AC, æquale eſſe qua-drato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto ſegmento CB componitur. Producatur enim AB, verſus dictũ ſegmentum CB, ad D, ſitque BD, recta æqualis ſegmento CB, & ſuper tota AD, quadratum deſcribatur AE. Ductæ autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipſi DE, ſecantes diamettum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipſi AD, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, [a] æqualis eſt rectæ AC, erit OI, quadratum ſegmenti AC. Rurſus [b] quia NH, æqualis eſt rectæ CB, erit NQ, quadratum ſegmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales ſint. Quare rectæ BH, HQ, æquales ſunt ſegmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento CB, [c] cũ LH, ſit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ [d] æquales ſint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc eſt, rectæ LH, hoc eſt, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia ſunt; ſi addatur commune KG, erunt BM, KG, ſimul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta AB, & ſegmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia ſint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta AB, & ſegmento CB, vna cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento CB. Quamobrem, ſi recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 34. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, æquale est quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: At quadrata ex AB, BC, [b] æqualia sunt rectãgulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.



[2] 4. secũdi.

[b] 7. secũdi.

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eadem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hac 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

NAM recta AB, secta est in C, vtcunque, eique adiecta BD, segmento CB, æqualis, demonstratumque est, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, vnà cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

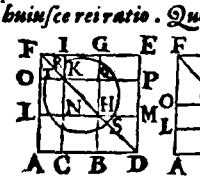
SI linea recta secetur bifariam, eique in rectum

ctum ádijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, *secta est bifariam in* B, *eique addita* CA, *probatumque fuit, quadratum totius* AD, *æquale esse rectangulo quater comprehenso sub* AB, *compositam ex* BC, *dimidia, & adiecta* AC, *& sub dimidia* CB, *vna cum quadrato adiectæ* AC.

IAM vero ex hac quoque propos. 8. inueniemus aliæ rationi, numerũ quadratũ, cũ quo datus quilibet numerus conficiat numerũ similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. Tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratũ 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratũ 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huius rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater sumptum, cum quadrato OI, æquale est quadrato AE; si rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum CH, *adeoque, &* CB, *eius latus,* 1. *erit linea* AB, 8. *vt data in* CB, 1. *faciat* 8. *Ablata ergo* 1. *reliquum erit* AC, *latus quadrati* OI, 7. *quod quæritur.*

a 8. secũdi.



VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerũ diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

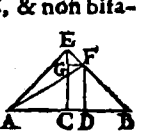
CONTRA, *inueniemus quoque numerũ quadratum à quo datus numerus subtractus relinquat numerũ etiã quadratum. Si namque ad quartã partem numeri dati addatur* 1. *conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum numerus* 32. *si ad quartã eius partem* 8. *adijciatur* 1. *fiet latus* 9. *à cuius quadrato* 81. *si detrahatur datus numerus* 32. *remanebit*

remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semp est una unitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus reliquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 1. quarta pars dati numeri 32. at quadratum B M, ideoque & latus eius B D, 1. erit linea A B, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi aqualis, 1. quod quidem latus A C, perpetuo una unitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

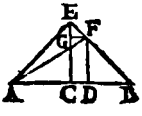
SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, ducanturque rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturque tandem A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; [a] erunt anguli C A E, C E A, æquales: Est autem angulus A C E, rectus:



[a] 5. primi.

Reliqui igitur [a] anguli alium rectum conficient, idemque AEC, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semi rectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, [b] æqualis est recto ECB, externus interno; [c] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, propterea quæ anguli EFG, FEG, æquales erunt, [d] idcoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, [e] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quòd & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, [f] erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, dupli erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, [g] recta rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE, EF, [h] æqualia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia; & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 32. primi.
[b] 29. primi.
[c] 32. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 34. primi.
[h] 47. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. *Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum, æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, una cũ parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, una cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub* [a] *4. secũdi*



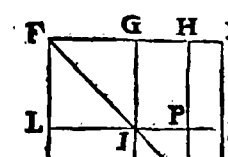
B C, C D; At qui quadrato ex D B, una cum rectangulo bis sub B C, C D, [b] *æqualia sunt quadrata ex B C, seu AC, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex AC, C D. Quod ostendendum erat.* [b] *7. secũdi.*

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoque A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, ut in 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum AC, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, una cũ quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex AC, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo sub AC, C D, bis [c] *est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex AC, C D.* [c] *4. secũdi.*

IAM vero rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. seu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. et 9. partiũ inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt precedentes, hoc modo. Descripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductáq; diametro B F, ducantur per C, D, lateribus A F, B E, parallelæ C G, D H, secantes diametrũ B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B, F E,

I



FE, parallela agantur LM, NO, secantes CG, DH, in I, P. Quoniam igitur ex coroll. 1 propos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, a estq; LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, aequalis; erunt NH, DO, quadrata partium inaequalium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatae lineae AC, & intermediae sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, aequalia quadratis LG, QP, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum haec bis in illis contineantur. Quòd autem vna haec rectangula DO, NI, IH, aequalia sint quadratis LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, b aequale est rectangulo QM, quod recta NQ, QO, c aequales sint aequalibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP, & insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, aequalia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, aequalia duobus quadratis LG. Esse autem KM, DO, IH, aequalia quadrato LG, sic demonstrabimus. d Rectangula KM, DO, simul aequalia sunt ipsi PE, quod recta BM, ME, aequales sint, cum BM, aequalis sit ipsi CB; ob quadratum CM, e & ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est f ipsi AC. Addita ergo communi IH, erunt KM, DO, IH, aequalia ipsi IE, hoc est, quadrato LG; g quod IE, LG, aequalia sint, ob rectum LI, IM, h qua aequalibus AC, CB, aequalia sunt. Quod erat propositum.

a 34. primi.
b 36. primi.
c 34. primi.
d 36. primi.
e 34. primi.
f 34. primi.
g 36. primi.
h 34. primi.

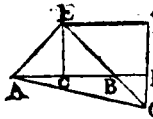
10.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

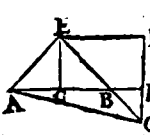
SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quępiam recta linea:

linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in præcedenti propos. & C E B, semirectum; [a] ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque: [b] Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare [d] rectæ E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G, esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum rectæ E G, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, [g] cum C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est



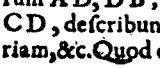
[a] 29. primi.
[b] 34. primi.
[c] 32. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 34. primi.



[a] 47. primi. le est [a] quadratum rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

[b] 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratum ex A D,* [b] *æquale est quadratis ex A C, C D, una cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; si commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D.* [c] *Sed quadrato ex B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonstrandum.*



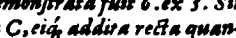
[c] 7. secũdi. *ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta B D, superabit quoque C D, ipsam A C, eadem recta B D. Quare, ut ad 7. propositionis huius lib. ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo sub A C, C D, bis,* [d] *æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadratum ipsarum A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

[d] 4. secũdi. *NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cuidatur numerus quinis 3. vt totus numerus compositus sit 15.*

Quadrati

Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

SED & hac propos. 10. facile ex precedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum A C, C D, simul.



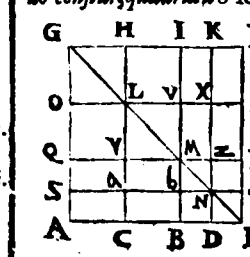
Addita namque recta A D, ad partes h, recta A E, qua adiecta B D, aequalis sit; erit tota E D, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod E A, A C, ipsis D B, B C, aequales sint. Rectaque E B, recta A D, aequalis erit, quod E A, ipsi D B, sit aequalis, & A B, vtrique communis. Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc est, rectarum A D, B D, dupla erunt quadratorum rectarum E C, C B, hoc est, rectarum C D, A C, quod est propositum. a 9. secundi.

VOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum precedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, sit adiecta linee B D, aequalis, describatur quadratum A F, totius linee A E, ducanturque per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K, secantes ductam diametrum E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agantur O P, Q R, S T, secantes priores in Y, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius libri omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata sunt, erit S N, ipsi A D, aequalis, & O L, ipsi A C, & a N, ipsi C D; erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, siue B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, simul dupla esse quadratorum O H, a X, simul. Quoniam enim quadrata S K, D T, superant quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulis S L, L K; sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, aequalia



b 34. primi.

æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonstrabitur; hoc autem constat, quadrata S K, D T, quadratorũ O H, a X, dupla esse, cum hæc in illis continentur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia sint, ita probabitur. Rectangulum Q L, [a] æquale est quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales sunt; [b] propterea quod Q O, ipsi Y L, æqualis est, & Y L, ipsi O G, ob æqualia quadrata Y V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item, S Y, ipsi a M, & L I, ipsi V Y, & V K, ipsi V Z, & D T, ipsi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S Y, L I, V K, D T, hoc est, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia sunt quinque rectangulis O H, a M, I V, V Z, b Z, hoc est, duobus quadratis O H, a X. Quod est propositum.



[a] 36. primi.

[b] 34. primi.

[c] 34. primi.

II. PROBL. 1. PROPOS. 11.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

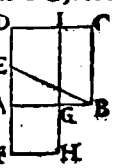
DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota A B & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex A B, quadratum A C, & diuiso latere A D, quod cum linea data A B, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis fiat E F, & ipsi A F, abscindatur ex recta A B, data æqualis A G. Est. n. A B, maior quam A F. Nã cum E B, sit æqualis ipsi E F, ex constructione; sint autem latera A E, A B, ma-

[d] 29. primi.

ior

iora latere E B; erunt quoque rectæ E A, A B, maiores rectæ E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B, maior erit, quam reliqua A F. Dico rectam A B, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ A G; adeo vt A G, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint æqualia, quippe cum [a] F H, G H, æqualia sint oppositis A G, A F, æqualibus; omnesq; anguli eiusdem recti, ob rectum A, vt ad defin. 1. huius lib, ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub A B, & segmento B G; quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F; [b] erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) vnà cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, [c] æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

[a] 34. primi.



[b] 6. secũdi.

[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alterum partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9

Vbi

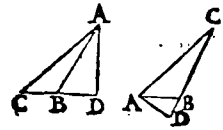
Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.

PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debeat maius segmentum lineæ datæ A B, excitata perpendicularis A D, ipsi datæ lineæ A B, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maioris segmento A G, æqualis, vt demonstratum est.

12. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterũ A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse quadratis laterum A B, B C, cum rectangulo sub C B, B D bis comprehẽso. Cũ enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunq;



est

erit quadratum rectę CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: Est autem quadratis rectarum CD, DA, [b] æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

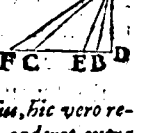
[b] 47. primi.

[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

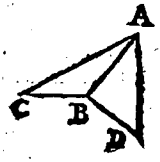
IAM hoc loco demonstrauit Euclides, quanto minus sit in triangulo amblygonio quadratum lateris anguło obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem prop. 13. ostendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, ut ad initium scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM *vero assumpsit Euclides, perpendicularē ductā ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractū, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triāgulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum,*



SED & *hoc theorema verum est.*

SI in triangulo quadratum vnius lateris ius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.



IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius sit quadratis laterum A B, B C, Dico angulum B, quem latus A C, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, linea B C, aequalis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, [a] *aequale est quadratis ex A B, B D, hoc est, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A C, & idcirco recta A D, maior quam recta A C. Itaque quia latera A B, B C, trianguli A B C, aequalia sunt lateribus A B, B D, trianguli A B D, vtrumque vtrique, & basis A C, maior est basi A D;* [b] *Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus est. Igitur A B C, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*

[a] 47. primi.

[b] 25. primi.

QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris ma ius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa haec linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta A D, sitque quadratum

lateru

ut eris AC, maius quam quadrata lateris AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam duo cadere necesse est in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [a] *quadratum ex AC, aequale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa, in punctum B.*



[a] 47. primi.

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus BC, qualis est AF. Erit igitur [b] *quadratum ex AC, aequale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quòd recta AB, recto angulo AFB, opposita* [c] *maior sit quam AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadet in CB.*

[b] 47. primi.

[c] 19. primi.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB, [d] *aequale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.*

[d] 47. primi.

CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli, AGC, ACG, [e] *minores sunt duobus rectis, estq; AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB,* [f] *maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB; ac proinde multo minus quadratis, ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neque inter C, B, neque*

[e] 17. primi.

[f] 19. primi.

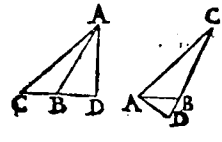
Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.

PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debeat maius segmentum lineæ datæ A B, excitata perpendicularis A D, ipsi datæ lineæ A B, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interualum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, æqualis, vt demonstratum est.

12. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterũ A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, una cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehẽso. Cũ enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunq; erit



erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD: Eſt autem quadratis rectarum CD, DA, [b] æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale ſit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Quod eſt propoſitum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 4. ſecundi.

[b] 47. primi.

[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

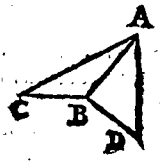
IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quanto maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris anguli obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad eiuſdem ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM vero aſſumpſit Euclides, perpendicularem rectæ ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractæ, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtuſus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiuſmodi eſt recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus: Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis eſt recta AF, eſſent rurſus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum,



SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.



IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius sit quadratis laterum A B, B C, Dico angulum B, quem latus A C, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, linea B C, aequalis, iungaturque recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, [a] *aequale est quadratis ex A B, B D, hoc est, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C; Erit quadratum ex A D, minus quadratis ex A C, & idcirco recta A D, minor quam recta A C. Itaque quia latera A B, B C, trianguli A B C, aequalia sunt lateribus A B, B D, trianguli A B D, vterumque vtrique, & basis A C, maior est basi A D;* [b] *Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus est. Igitur A B C, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*

VT IN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrauimus: nimirum.

[a] 47. primi.

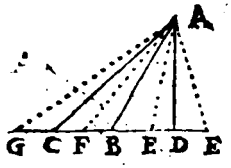
[b] 25. primi.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam extra illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea extra latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta A D, sitque quadratum

lateri

lateris AC, maius quam quadrata lateri AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam duo cadere necesse est in



CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [a] quadratum ex AC, aequale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa, in punctum B. [a] 47. primi.

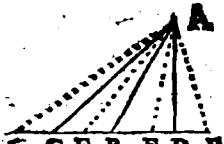
CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus BC, qualis est AF. Erit igitur [b] quadratum ex AC, aequale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quòd recta AB, recto angulo AFB, oppositae [c] maior sit quam AF, & BC, tota maiori parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadet in CB. [b] 47. primi. [c] 19. primi.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB, [d] aequale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadet in C. [d] 47. primi.

CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli, AGC, ACG, [e] minores sunt duobus rectis, est autem AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, [f] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB; ac proinde multo minus quadratis, ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neque inter C, B, neque [e] 17. primi. [f] 19. primi.

in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est A D, vti monstrabitur. Quare angulus ABE, [a] acutus erit, & ABC obtusus. quod secundo loco proponitur demonstrandum.

[a] 17. primi.



QVOD autem A D, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad C B, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, est obtusus, [b] erit quadratum rectæ A C, maius quàm quadrata rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B E: sed & quadratum eiusdem rectæ A C, maius ponitur quàm quadrata earundem rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D. Igitur quadrata ex A B, B C, vna cum rectangulo bis sub C B, B D, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo sub C B, B E, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum A B, B C, rectangulum bis sub C B, B E, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, ac proinde & rectangulum sub C B, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub C B, B D, comprehenso, & recta B E, recta B D, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo A D, ad C D, perpendicularis, & nulla alia. quod est propositum.

[b] 12. secundi.

IAM vero, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quòd posito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumque partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita diuisa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libitu commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum est; præscribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesque eorum a lineis perpendicularibus facta sint lineæ commensurabiles: atque adeo veritas vtriusque theorematis in numeris quoque appareat

appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum est vel Isosceles, in quo

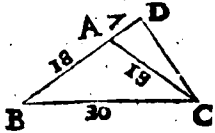
tertium latus semper [a] maius est, quòd obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (aequilaterum enim esse non potest, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum aequalium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

[a] 19. primi.

REGVLA I.

AD construendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum aequalium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium aequalium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrius laterum aequalium ponatur dicti segmenti duplum supergradripartiens septimas, maximũ autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo ABC, angulus A, sit obtusus, ductaque sit CD, ad BA, latus productum perpendicularis. Si igitur AD, cõstituatur partium 7, erit vtrumuis laterum AB, AC,



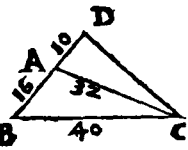


partium 18. *qui numerus habetur, si duplicaueris* 7. *addideris que* $\frac{4}{7}$. *ipsius. Latus vero* BC, *erit partium* 30. *quem numerum habebis, si quadruplicaueris* 7. *adiunxerisque* $\frac{2}{7}$. *ipsius. In hoc triangulo quadratũ lateris* BC, *est* 900. *cui aqualia sunt quadrata laterum* AB, AC, *nempe* 324. 324. *vna cum rectangulo bis comprehenso sub* AB, AD, *hoc est, cum* 126. 126. *Hæc enim conficiunt quoque summam* 900. *Quam ob rem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta* CD, *ad* BD, *perpendicularis, & angulus* BAC, *obtusus. Quòd si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies* AD, 14. *& tam* AB, *quàm* AC, 36. *at* BC, 60. *Propositum quoque triangulum reperies, statuendo segmentum exterius* AD, *quotcunque partium, etiamsi à* 7. *non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus quodcunque, à quo incipere uis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti* AD, *quadruplum superbipartiens septimas, vtrumuis autem aqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadripartiens septimas.*

REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium aqualium à 5. *numerataruum, vt* 5. *vel* 10. *vel* 15. *vel* 20. *&c. Quibus si addas* $\frac{3}{5}$. *habebis minimum latus. Si vero eadem partes dicti segmenti triplices, addasque* $\frac{1}{5}$. *vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes eiusdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in appos. triangulo segmentum* AD, *constituatur* 10. *erit* AB. 50. AC,

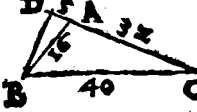
AC, 32. & BC, 40. *Vbi etiam vides, quadrato lateris* BC, *quod est* 1600. *aqualia esse quadrata laterum* AB, AC, *nimirum* 256. 1024. *vnà cum rectangulo bis sub* AB, AD, *comprehenso, id est, cum* 160. 160.



Ex quo fit, CD, *esse ad* BD, *perpendicularem, & angulum* BAC, *obtusum, vt supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus* AB, 32. AC, 64. & BC, 80. *qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum* AD, *statuas partium* 20. *quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes* 10. *Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius* AD, *partium* 30. *latus* AB, 48. AC, 96, BC, 120. & *sic deinceps.*

REGVLA III.

PRO *triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quilibet partium à* 5. *numerat arum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addasque* $\frac{1}{5}$. *produces minimum latus: Si vero easdem multiplices per* 6. *adiungasque* $\frac{2}{5}$. *habebit latus medium: Si denique easdem per* 8. *multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum* AD, *sit partium* 5. *erit* AB, 16. AC, 32. & BC, 40. *Atque ita quadrato lateris* BC, *nimirum* 1600. *aqualia existent quadrata laterum* AB, AC, *nempe* 256. 1024. *vnà cum rectangulo bis comprehenso sub* AC, AD, *hoc est, cum* 160. 160. *Ac proinde* BD, *ad* CD, *erit perpendicularis, angulusque* BAC, *obtusus, vt in hoc scholio supra demonstrauimus.*



Quòd si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hac propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD, 40. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.

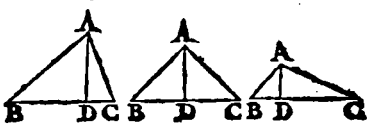
CAVE *autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium aqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solum colligendum erit, ex lineis rectis, qua dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vel cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.*

13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triangulis, quadratum a latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, oppo nitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa anguium acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duobus quadratis laterum A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarum B C, C D, [a] æqualia rectangulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, [b] æquale est quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, [c] æquale sit quadratum rectę A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, CD, & quadrato rectæ A B. quod est propositum. Eodem modo ostendetur quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 7. secũdi.

[b] 47. primi.

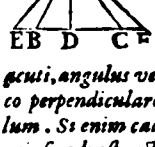
[c] 47. primi.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius,

maius, minusne, & quanto maius sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus aut acutus.

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, qua scilicet omnes angulos habent acutos; Idē tamen verū etiā est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs vero a quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus. [a] maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

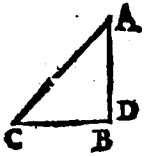


a 16. primi.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, qua latus A B, vt in rectāgulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. praecedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, qua eadem erit, qua latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis

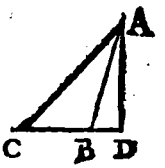
cularis cadit, & sub linea C D, qua interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C.



Cum enim quadrata ex A B, C B, [a] aqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, aqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, una cum rectangulo bis sub C B, C D, aquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.

[a] 47. primi.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D, [b] aqualia sunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erũt tria quadrata ex A D, C D, C B, aqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, [c] aquale est quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, una cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, aqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, [d] aqualia quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, una cum rectangulo bis sub C B, B D, aqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, una cum rectangulo sub C B, B D, [e] aquale est rectangulum sub C D, C B; Ac propterea duplo quadrati ex C B, una cum rectangulo bis sub C B, B D, aqualia est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, una cum rectangulo bis sub C B, C D, aquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quã quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D.



[b] 47. primi.

[c] 4. secũdi.

[d] 47. primi.

[e] 3. secũdi.

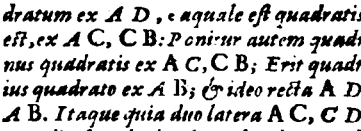
C D. *Quod est propositum.*

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex AC,
[a] *maius est, quam quadrata ex A B, B C, rectangulo bis sub* a 12. secũdi.
C B, B D, comprehenso, hoc est, quadratum ex A C, aequale est quadratis ex A B, B D, vnà cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso; erit quadratum ex A B, minus, quam quadratum ex A C, quadrato ex B C, & rectangulo sub C B, B D, bis: Ac proinde si quadrato ex A C, addatur quadratum ex B C, erit quadratum ex A B, minus quam quadrata ex A C, B C, quadrato ex B C, bis sumpto, & rectangulo bis sub C B, B D, comprehenso. Cum ergo quadrato ex B C,
[b] *vna cum rectangulo sub C B, B D, contento, b aequale fit rec-* b 3. secũdi.
tangulum sub C B, C D, contentum; erit quoque quadratum ex A B, minus quam quadrata ex A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, C D. Quod est propositum.

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio praecedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorũ: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo A B C, quadratum lateris A B, minus sit, quam quadrata laterum A C, C B. Dico angulum C, quem
dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad



A C, perpendicularis C D, lineę C B, aequalis; iungatur-
que recta A D. Quoniã igitur qua-
[c] *dratum ex A D, c aequale est quadratis ex A C, C D, hoc* c 47. primi.
est, ex A C, C B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B; & ideo recta A D, maior quam recta
A B. Itaque quia duo latera A C, C D, trianguli A C D,
[d] *aequalia sunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B,* d 25. primi.
vtrumque vtrique; & basis A D, maior basi A B; d Erit an-
gulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C D, rectus,
ex constructione. Ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

SED

SED & conuersum huius prepos. 13. ostendemus, nimirũ.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppositio demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

IN triangulo A B C, ad latus B C, demittatur ex angulo opposito A, recta A D; sitq; quadratum lateris A B, minus quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo sub B C, C D, bis comprehenso. Dico A D, esse perpendicularem ad B C, & angulum A C B, acutum. Si namque A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad B C, perpendicularis, quam dico necessario cadere citra punctum C, versus B, hoc est, vel in latus B C, vel in punctum B, vel ultra B C, versus B, productum. Cadat enim, si fieri potest, in C, ita vt A C, sit ad B C, perpendicularis. Erit igitur, quadratum ex A B, æquale quadratis ex A C, C B. quod est absurdum, cum minus ponatur. Nõ cadit ergo perpẽdicularis ex A, deducta ad B C, in punctũ C.



[a] 47. primi

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa vltra C, in E, qualis est A E. Erit igitur [b] *quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B. Igitur & quadrata ex A E, E B, minora erunt quadratis ex A C, C B. Cum ergo quadratum ex A C,* [c] *æquale sit quadratis ex A E, E C; erunt quoque quadrata ex A E, E B, minora quadratis ex A E, E C, C B: Et ablato communi quadrato ex A E, erit reliquum quadratum ex E B, minus quoque quadra-*

[b] 47. primi

[c] 47. primi

quadratis ex E C, C B. quod eſt abſurdum. Cum enim quadratum ex E B, [a] æquale ſit quadratis ex E C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt oſtendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis eſt A D, vt demonſtrabitur, ac propterea [b] angulus A C B, acutus erit. Quod ſecundo loco propoſitum demonſtrandum.

[a] 4. ſecũdi.



[b] 17. primi.

QVOD autem A D, ſit ad B C, perpendicularis, ita oſtendemus. Si non eſt, ſit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum eſt, vbicunque hoc contingat, ſiue intra triangulum, ſiue in punctum B, ſiue extra triangulum. (In ſecundo tantum triangulo non dicat aduerſarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem eſſet, quæ A D. quod ille negat) Quia ergo angulus A C B, oſtenſus fuit acutus, [c] erit quadratũ ex A B, minus, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C F, hoc eſt, quadratum ex A B, vnà cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F, æquale eſt quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quam quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum idem ex A B, vnà cum rectangulo bis contento ſub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale erit quadrato eidem ex A B, vnà cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F: Et ablato communi quadrato rectæ A B, rectangulum ſub B C, C D, bis comprehenſum æquale erit rectangulo bis ſub B C, C F, comprehenſo; ac proinde & rectangulum ſemel comprehenſum ſub B C, C D, æquale erit rectangulo ſemel comprehenſo ſub B C, C F, ideoq; & rectæ C D, C F, æquales erunt, pars & totus. Quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod eſt propoſitum.

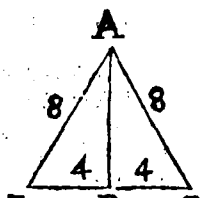
[c] 12. ſecũdi.

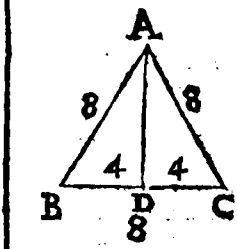
QVEMADMODVM autem in ſcholio ſuperioris pro-

propositionis triangula amblygonia constituximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel aequilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangul. aequilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inaequale, sive maius illud sit, sive minus utrouis aequaliu. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisque in alterutrum aequalium laterum cadit: Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum aequalium cadit: Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus: Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur: Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basim sunt acuti, sive oppositus angulus acutus etiam sit, sive non: De his enim propositio etiam intelligenda est, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli aequilateri statuatur quotuis partium aequalium, numero tamen pariarum, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo aequilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppositum latus B C, bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus

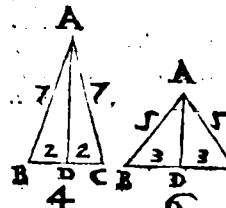




ſtrauimus. Quam obrem poſ-quolibet latere 8. erunt ſegmen-ta B D, C D, *4. 4. Vbi vides qua-dratum lateris* A B, *angulo acu-to* C, *oppoſiti, (omnes enim anguli in triangulo aquilatero acuti ſunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1. hoc eſt, 64. vnà cum rectangulo bis contento ſub* B C, C D, *id eſt, cum 32. 32. efficere 128. quan-tum videlicet conficiunt duo quadrata laterum* A C, C B, *nempe 64. 64.*

REGVLA II.

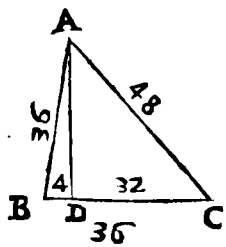
SI vtrumque laterum aqualium trianguli Iſoſcelis ſtatuatur quotcunque partium aqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, ſint pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet aqualium, ſiue plures, dummodo tot non ſint, quot in vtroque ſimul, aut plures; quia ſic non poſſet fieri triangulum, propterea quod duo latera aqualia non eſſent maiora tertio latere, ſed vel aqualia, vel minora, quod propoſitioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquit latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter ſe commenſurabiles. Vt ſi in priori horum Iſoſcelium vtrumuis latus A B, A C, *ſtatuatur 7. & B C, 4. Inpoſterum autem vtrumlibet* A B, A C, *5. & B C, 6. Cum ergo perpendicularis* A D, *diuidat baſim* B C, *bifariam, ex ſchol. propos. 26. lib. 1. erunt ſegmenta* B D, C D, *in priori quidem triangulo 2. 2. in poſteriori vero 3. 3. Vbi etiam perſpicuum eſt, quadratum lateris A B, angulo acuto* C, *oppoſiti, (vter enim angulus B, C, acutus eſt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub* B C, C D, *æquari eſſe quadratis ſimul laterum* A C, C B. *&c.*



REGV-

REGVLA III.

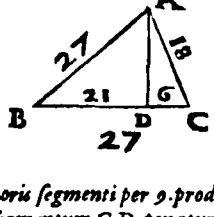
IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum aqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, easq; per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique segmenta simul addita conflabunt vtrumq; laterũ aqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus vero AC, 48. & vtrumq; latus AB, BC, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296.



una cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cũ 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoq; quadratum ex AC, nimirum 2304. una cum eo, quod bis fit ex CB, in B D, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inaqualia proportionem habent octuplam: vtrumuis vero aqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

REGVLA IIII.

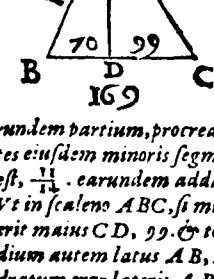
IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum aqualium laterum cadit, id segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad prop. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmẽtũ si statuas quotuis par numero pariũ, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earũ



medietatem per 7. multiplices, producet maius segmentum: Si easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique aqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9. producetur. Vt ſi in Iſoſcele ABC, minus ſegmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atque tam AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppoſiti, nimirum 729. vnà cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id eſt, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

IN Scaleno triangulo, in quo perpẽdicularis in minimũ latus demittitur, erit ſegmentũ baſis iuxta mediũ latus, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtratũ eſt. Quod ſegmentũ ſi conſtituatur tot partium æqualium vt à 70. numerentur, numerum partiũ 70. vel 140. vel 210. &c. eiſq; addantur earum $\frac{29}{70}$. confectum erit ſegmentum maius, & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimũ latus. Si vero partes minoris ſegmenti duplicentur, & producto adjiciantur $\frac{42}{70}$. hoc eſt, $\frac{3}{5}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiuſdem minoris ſegmenti duplicentur, producto $\frac{55}{70}$. id eſt, $\frac{11}{14}$. earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in ſcaleno ABC, ſi minus ſegmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. vnà cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id eſt,

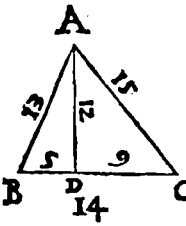


cum

cum 16791.16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus simul quadratis 38025.28561. laterum AC, CB, &c.

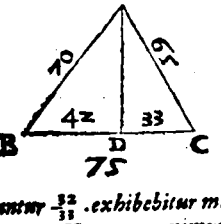
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, q̃ ad propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentū minimo lateri adiacens. Quod ſegmētū ſi ſtatuatur tot æqualiū partium, vt à 5. numerētur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eisque addantur $\frac{4}{5}$. conflatum erit ſegmentum maius, & partes horum ſegmentorum in vnam ſummam collecta component medium latum. Si autem partibus minoris ſegmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris ſegmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, ſi minus ſegmentum BD, ſiat 5. erit ſegmentum maius CD, 9. & totum latus BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.



REGVLA VII.

IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, eris minus ſegmentum iuxta latus minimum, ex ijs, quæ ad propoſ. 47. lib. 2. ſcripſimus. Si ergo pro minori ſegmento ſumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq̃ addantur $\frac{9}{33}$. hoc eſt, $\frac{3}{11}$. fiet maius ſegmentum: quæ duo ſegmenta ſimul compoſita maximum latus offerent. Si vero numero minoris ſegmenti duplicato adijciantur $\frac{4}{33}$, producetur medium latus. Si denique eidem numero lateris maximi adpectantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur minimum

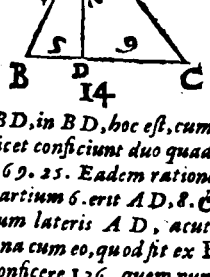


nimum latus. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum CD sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumque latus maximum BC, 75. & medium AB. 70. & minimum AC, 65. &c.

QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium, si modo proportiones seruentur, quas supradictis regulis exprimimus.

HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones prascriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque vero hoc regula illa docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodentur.

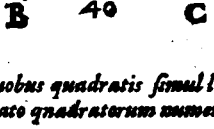
IAM vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regula 6. si in triangulo ABD, minimum latus BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernis quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. una cum eo, quod fit bis ex



BD, in BD, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex AB, BD, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latus BD, statuatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. una cum eo, quod fit ex BD, in BD, bis, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. una cum eo, quod fit ex AD, in AD, bis, id est,

id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum AB, AD, nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo ACD, minimum latus CD, ponas 9. reperies ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus, AD, 40. & AC, 41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vnà cum numero, qui fit ex CD, in CD, bis; id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quòd si minimum latus CD, facias 7. comperies AD, 24. & AC, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris CD, angulo acuto A, subtensi, id est, 49. vna cum numero, qui bis producitur ex AD, in AD, hoc est, cum 576. 576. facere 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD, hoc est, 625. 576.

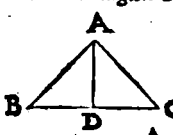
AT si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentũ namque exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD, inter angulum acutum C, & perpendicularem BD, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est quadratum lateris AB, angulo C, acuto oppositi, hoc est, 256. vnà cum rectangulo sub AC, CD, comprehenso bis, id est, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum BC, AC, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.



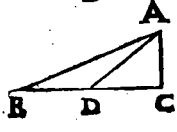
NEQVE vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.

IN triangulo A B C, recta A D, secet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C; dupla esse quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, qua primùm recta A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, aequilaterum sit, vel Isosceles, vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. [a] *Quoniam igitur tam quadratum ex A B, aequale est quadratis ex A D, D B, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, aequalia quadrato ex A D, bis sumpto, vnà cum quadratis ex D B, D C. Cum ergo quadrata ex D B, D C, aequalia sint, si auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadratis ex A D, bis sumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla sunt duorum quadratorum ex A D, D B. quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur.* [b] *Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, aequale est: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob aequalitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonstrandum erat.*



[a] 47. primi.



[b] 47. primi.

CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratum ex B C, quadruplum est tam quadrati ex B D, quam quadrati ex D C, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem

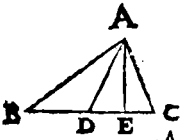
duo quadrata ex AC, CD, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex AD; quòd [a] quadrata ex AC, CD, semel sumpta æqualia sint quadrati ex AD. Igitur quadratum ex BC, vnà cum quadratis ex AC, CD, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex DB, DC, AD. Cum ergo & quadratum ex CD, bis sumptum, duplum sit quadrati ex CD; [b] erit reliquum quadratum ex BC, vnà cum quadrato ex AC, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Sunt autem [c] quadrata ex BC, AC, æqualia quadrato ex AB. Igitur quadrata ex AB, AC, (quæ æqualia sunt quadrato ex BC, vnà cum quadrato ex AC, bis sumpto) dupla quoque sunt quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

[a] 47. primi.

[b] 20. pron.

[c] 47. primi.

TERTIO cadat perpendicularis AE, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur [d] quadrata ex BE, EC, dupla sunt quadratorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quòd [e] quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, vna cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; [f] erunt reliqua quadrata ex BE, EC, vna cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DE, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, [g] æquale sit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.



[d] 9. secundi.

[e] 47. primi.

[f] 20 pron.

[g] 47. primi.

POSTREMO cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum. Quoniam igitur [h] quadrata ex BE, CE, dupla sunt quadratorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quòd [i] quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, vna

[h] 10. secundi.

[i] 47. primi.

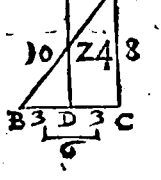
cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; [a] erunt reliqua quadrata ex BE, CE, vnà cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, [b] aequale sit quadratum ex AB; & quadratis ex CE, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat ostendendum.

[a] 20. pron.

[b] 47. primi.

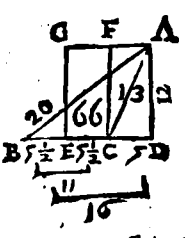
NON te moueat autem, quod ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi potest sine demonstratione, vt in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum pet libr. 5. demonstrari; ita vt circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur libro 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

EX his autem, quae proximis duobus theorematibus, & propos. 47. lib 1. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt rectè hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac ferè ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota sint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiso latere BC, bifariam in D, vt sint CD. BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum ACDE, quod aequale est triangulo ABC, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu CD, trium palmorum in CA, 8. palmorum producitur area rectanguli CE, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem itemos quadratos continebit triangulum ABC, rectangulo CE, aequale. Quod est propositum.



SIT

SIT deinde triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorū; A C, 13. B C, 11. Primū igitur inuenienda est quantitas per pendicularis linea A D, ex A, in latus B C, protractum demissa, hoc modo. Quoniā quadratum lateris A B, [a] minus est, quā quadrata laterū A C, B C, rectangulo bis cōprehenso sub B C, C D; si quadrata laterū A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis cōprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidiū 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorū, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratū est in libro de mensurationibus omnium quantitatum. Quia vero quadrata laterum A D, C D, [b] æqualia sunt quadrato lateris A C; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam vero diuisa latere B C, bifariā in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est [c] enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis &c.) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.



SIT postremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13. palmorum; A C, 15. B C, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis A D, ex A, ad B C, demissa, hac ratione. Quoniam quadratum lateris A B, [d] minus est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum

[a] 12. secūdi.

[b] 47. primi.

[c] 34. primi.

[d] 13. secūdi.

tum lateris A B, *nimirum* 169. *detrahatur ex quadratis laterum* A C, E C, *hoc est, ex* 225. 196. *quæ efficiunt* 421. *remanebunt* 252. *pro rectangulo comprehenso bis sub* B C, C D, *cuius numeri dimidium* 126. *dabit rectangulum sub* B C, C D. *Si igitur* 126. *rectangulum sub* B C, C D, *dividatur per* B C, *latus notum, ut per* 14. *exibit reliquum eius latus* C D, *palmorum* 9. *ut constat ex Ioan. Regiom. lib.* 1. *de triangulis propos.* 17. *& à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadratum ex* A D, C D, [a] *æqualia sunt quadrato ex* A C; *si quadratum* 81. *palmorum, nempe lateris* C D, 9. *palmorum super inuenti, auferatur ex* 225. *quadrato lateris* A C; *remanebunt* 144. *palmi pro quadrato lateris* A D. *Quare cum radix quadrata huius numeri* 144. *sit* 12; *erit latus* A D, 12. *palmorum.*

[a] 47. primi.



Iam vero diuiso latere B C, *bifariam in* E, *educantur* E C, E, *ad* B C, *perpendiculares* C F, E G, *occurrentes rectæ* A F, *quæ per* A, *ipsi* B C, *parallela ducitur, in punctis* G, F. *Quibus peractis, si* C E, 7. *palmorum ducatur in* E G, 12. *palmorum, (est enim* E G, *recta ipsi* A D, *æqualis) exurget area rectanguli* E F, *palmorum* 84. *Quod cum triangulo* A B C, *sit æquale, ex scholio propos.* 41. *lib.* 1. *(sunt enim rectangulum* E F, *& triangulum* A B C, *in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli* A B C, 84. *palmorum. Quod est propositum.*

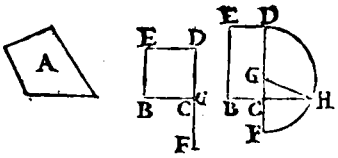
ITAQVE in vniuersum, area cuiuscunque trianguli reperitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

PROBL

PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius unum latus, vt D C, producatur ad F, sitque C F, recta æqualis rectæ B C. [a] 45. primi.



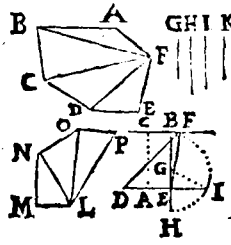
Diuidat quoque D F, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera D E, E B, [b] æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, [c] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, [d] æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vna cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quamob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato igo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat. [b] 34. primi. [c] 3. secũdi. [d] 47. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuique triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum A B C D E F, resoluemus illud in triangula A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Dein recta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem N O, lateri I, æqualem. Similiter recta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusq; rectam P L. Atque hoc modo pergrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ex propos 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc est, datæ figuræ rectilineæ A B C D E F.



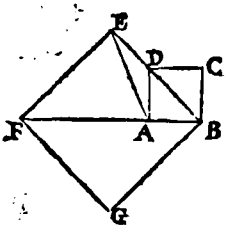
PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo D E F, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe D E, bifariam in G, producaturq; quatum libet. Ducta deinde per angulum F

situm F, lateri D E, parallela F B, ducatur per E, ad D H, perpendicularis H E B, secans F B, in B, sitq; E H, ipsi A E, dimidio lateris D E, aequalis. Postremo, diuisa tota linea B H, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum G H, vel G B, arcus secans latus D E, productum in I. Dico quadratum lateris E I, aequale esse triangulo D E F. Si namque compleatur rectangulum A E C, & semicirculus B H, ducaturq; recta G I, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum rectae E I, rectangulo A B, aequale esse. Cum ergo rectangulum A B, triangulo D E F, sit aequale, ex scholio propos. 41. lib. 1. quod basis D E, sit dupla basis A E, constat propositum.

QVONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato non inuocandum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

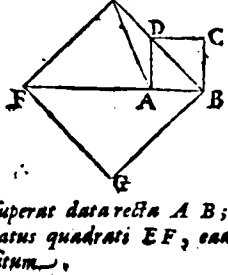
DICE DAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem rectae A B. inueniendumq; sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum A C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt sit D E, recta recta A D, aequalis. Dico rectam E B, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B. Ducatur enim E F, perpendicularis ad B E; quae rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus E B, rectus est, & E B F, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4. primi lib. [a] *erit & B F E, semirectus.* [b] *Quare recta B E, F E, aequales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constituetur erit quadratum rectae B E. Quod si ducatur recta*



[a] 32. primi.
[b] 6. primi.

[a] 5. primi.

[b] 6. primi.



cta A E, erunt anguli A E D, E A D, aqualibus lineis D E, D A, oppositi aquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanentes anguli A E F, E A F, aquales; [b] ideoq; recta E F, A F, aquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B, quod oſt propoſitum.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS

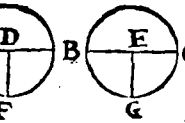
ELEMENTVM TERTIVM

DEFINITIONES.

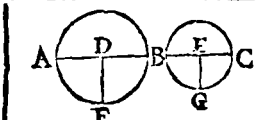
I.

AEQVALES circuli ſunt, quorũ diametri ſunt æquales; vel quorum, quę excentris, rectæ lineæ ſunt æquales.

QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demõſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt vſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumlatione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu rectæ ex centris ductæ, ſunt æquales; vel etiam quorũ totæ diametri æquales ſũt. Vt ſi diametri A B, B C, vel rectæ D F, E G, è centris D, & E, ductæ ſint æquales, æqua-



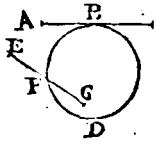
les



les erunt circuli A F B, & B G C Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosue inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

II.

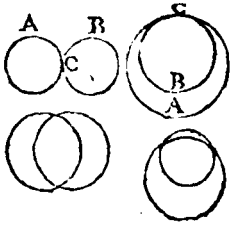
RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.



VT recta A B, si ita circulum B F D, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatq; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.



EODEM modo duo circuli A C, B C, se mutuo dicuntur tangere in C, si ita se se contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnius extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum con-

constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, ut unus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

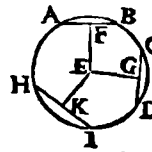
IIII.

IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; alia vero infinitis modis variari possunt; recta distantia illius puncti a linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est brevior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum A E, A F, maiores sunt, quam A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim A F, [a] maior, quam A E, cum angulus A E F, sit obtusus, & A F E, acutus, & sic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim A F E, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, [b] minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum A D F, rectus sit, angulum A F D, recto esse minorem. Eadem ratione angulus A E D; ostendetur acutus, propterea quod in triangulo A D E, [c] duo anguli A D E, A E D, minores sunt duobus rectis, & A D E, rectus est.) ac proinde, cum ambo A E D, A E F, [d] æquales sint duobus rectis, erit A E F, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definiens per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales.



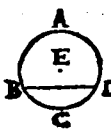
[a] 19. primi.
[b] 17. primi.
[c] 13. primi.
[d] 17. primi.



inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abesse dicetur a centro E, quam linea H I, si perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.

V.

SEGMENTVM circuli est figura, quę sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



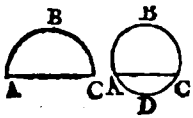
VT si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta B D; quam figura B C D, comprehensa recta B D, & circumferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum B C D. Id quod ad defin. 18. lib. 3. demonstrauimus. Vocatur a plerisque Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmenti, hoc est,

cens, angulum mixtum BAC, vel BCA, contentum ſub recta linea AC, & circumferentia ABC, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentum circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi: Si vero ſegmentum maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si denique ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.



VII.

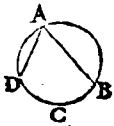
IN ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehenſus.

SIT ſegmentum circuli quodcunq; ABC, cuius baſis recta AC. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur exiſtere in ſegmento ABC.

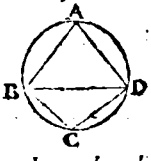


VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

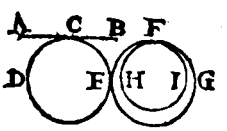


EX puncto A, quolibet susceptо in circumferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuiusque, quæ quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, insistere dicitur circumferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis ducereтur; ex hac vero insistere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit, ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmètū aliquod circuli BCD, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circumferentiæ B C D, insistens, erit angulus B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum consentire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verbo græco ἐφεῖναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circumferentiam B C D.



PRÆTER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea rectâ tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc extrorsum fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel B C E, dicitur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus C E D,

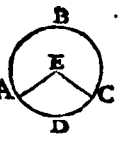
CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tã angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.



IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

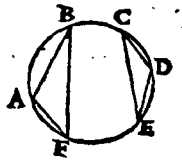
Si in circulo A B C D, cuius centrum E, rectæ AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis AE, CE, assumptæ: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quã rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione ipsius est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.



X.

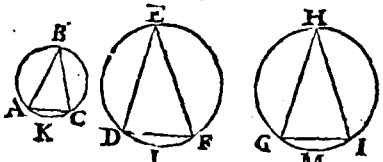
SIMILIA circuli segmenta sunt,

quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.



SEGMENTA, seu circumferentiæ ABDF, DCAE, eiusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.

EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes.



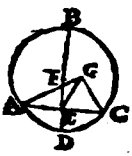
Consistit autem hæc segmentorum, circumferentiarum similitudo in eo, quòd qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD; Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta; seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasue, appellari similes.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes,

similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæ AKC, DLF, GMI, quibus insistunt, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius libri demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, [a] quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hæc igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (a centro enim ducuntur) [b] erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. quod erat faciendum.

[a] 10. primi.

[b] 8. primi.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta ali-

qua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

2. THEOR. 1. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.



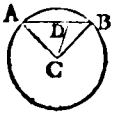
IN circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetque E D, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (a centro enim ducuntur) [b] erunt anguli E A D, E C D, æquales: Est autem angulus E D A, [c] angulo E C D, maior externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur & angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, oppositæ, hoc est, rectæ E B, [d] æqualis. [d] maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, oppositæ, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur,

[a] 1. tertij.
[b] 5. primi.
[c] 16. primi.
[d] 19. primi.

tur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli A B, cuius centrum C. Dico rectam A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur recta C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, [a] *erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem angulus C D A,* [b] *angulo C B A, maior, externus interno. Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A,* [c] *lateri C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circumferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostenderetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod est propositum.*



[a] 5. primi.
[b] 16. primi.
[c] 19. primi.

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, [d] *caderet pars recta inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.*

[d] 2. tertij.

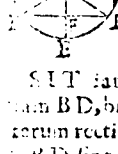
THEOR.

3.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

IN circulo centrum A, circuli B C D, recta C E, extensa quandam rectam B D, non per centrum extensam, bifariam secet in F. Dico rectam A F, esse ad angulos rectos ipsi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & basis A B, A D, æquales. [a] Igitur anguli A F B, A F D, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.



SIT iam A F, ad angulos rectos ipsi B D. Dico rectam B D, bifariam secari in F, à recta C E. Ductis enim earum rectis A B, A D; cum latera A B, A D, trianguli A B D, sint æqualia, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, æquales sunt duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F; & latera A B, A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [c] erunt latera F B, F D, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim A F, perpendicularis est ad B D, erit tam quadratum rectæ A B, [a] æquale quadratis rectarum A F, F B, quam quadratum rectæ A D, quadratis rectarum A F, F D. Cum igitur quadratum rectæ A B, æquale sit quadrato rectæ A D; erunt & quadrata rectarum A F, F B,

47. primi.

FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facile inferemus, in quo uis triangulo duorum laterum æqualium, siue aquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim: Et contra, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia sunt, ex eo, quod recta A F, secat basim B D, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basim B D, à recta A F, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circunferentiæ exterioris recta ducatur interioris circunferentiam secans: erunt eius segmenta inter vtramq; circunferentiam posita, inter se æqualia.

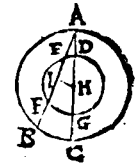
DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta A C, secans circunferentiam interiorem in D, G. Dico reliquum A D, C G, æquales esse. Nam si ex H A, H C, quæ a *æquales sunt, demantur H D, H G, quæ eadem ratione æquales sunt,* b *erunt*



recta

a 15. def.
b 3. pron.

recta A D, C G, æquales.



DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, non per centrum, secans rursus circunferentiam in E, F. Dico rursus, rectas A E, B F, esse æquales. [a] Ducta enim ex centro H, ad A B, perpendicularis H I, [b] secabit hanc tam rectã A E, in circulo A B C, quã rectã E F, in circulo D E F G, bifariam. Ablatis igitur æqualibus I E, I F, ex æqualibus I A, I B, [c] remanebunt A E, B F, æquales. quod est propositum.

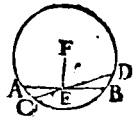
[a] 12. primi.
[b] 3. tertij.
[c] 3. pron.

4. THEOR. 3, PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ, se se mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquã bifariam ita altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. [d] Inuento igitur centro circuli F, ducatur ad eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, [e] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, eum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 1. tertij.
[e] 3. tertij.

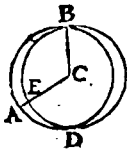


THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

5.

SI duo circuli seſe mutuo secent; nō erit illorum idem centrum.



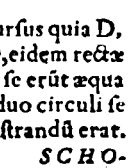
DVO circuli A B D, E B D, seſe mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere idem cētrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionem B; C A, vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, [a] æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 1 *pron.*

THEOR. 5. PROPOS. 6.

6.

SI duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVO circuli A B, B C, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, a quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramque circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, æqualis. Quare rectę A D, & C D, [b] inter se erūt æquales, pars & totū, quod est absurdū. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangāt, &c. Quod demonstrandū erat.

[b] 1. *pron.*

SCHO-

SCHOLIVM.

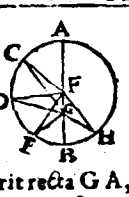
EVCLIDES proposuit theorema hoc de circulis se se interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum extrinsecus se se tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse eos idem centrum, manifestum est.

7. THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circunferentiam cecuntur, maximam esse G A, in qua est cẽtrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam G C, quæ rectæ G A, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta G D, quæ ab eadem G A, plus distat; & eadem ratione G D, maiorem recta G E; atq; ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineę GB, vel maximæ GA, duci posse tantũmodo duas lineas inter se æquales. Ducantur

antur e centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, maiora sunt latere GC; Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, maior quam GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



[a] 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, [b] minus est duobus lateribus FG, GE; Est autem EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

[b] 20. primi.

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior est angulo GFD; [c] erit basis GC, maior basi GD. Eadem ratione maior erit GC, quam GE: Item maior erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior.

[c] 24. primi.

FIAT iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; [d] erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 4. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVAMQVAM autem Euclides solum demonstrauerit, lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si ambæ linea ex eadem parte diametri A B, existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam G D, propinquiorem esse rectæ G A, quam rectam G H; dico G D, maiorem esse, quam G H. Si namque ipsi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum est, nempe si fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, distent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur magis distare, quam G H, ac proinde magis, quam G E. Cum[1] ergo G D, maior sit, quam G E, maior quoque erit eadem G D, quam G H.



[1] 7. tertij.

HANC porrò propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ, vel minimæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



IN circulo A B C, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum rectarum maxima sit D A, minima vero D C, reliquarum vero D E, D F, maior sit D E; denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, quæ minor ponitur quam D F, propinquiorem esse maximæ D A, quam

D F

DF. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, [a] erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transit ergo DA, per centrum. [a] 7. tertij.

DEINDE si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directum, [b] erit alia recta quam DC, ex D, cadat, nempe pars ipsius AD, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri. [b] 7. tertij.

RVRSVS si DE, non est vicinior maxima DA, quam DF; aut æqualiter distabunt ab ea, aut DE, longius ab ea aberit: Si æqualiter utrinque à DA, dicantur distare, [c] ipsa erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim DE, maior. Si uero æqualiter ex eadem parte à DA, distare dicantur, erunt DE, DF, una eademq; linea; atque adeo DE, maior non erit, quàm DF, quod est contra hypothesim. Quod si DF, dicatur esse propinquior maximæ DA, [d] ipsa erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum. [c] 7. tertij. [d] 7. tertij.

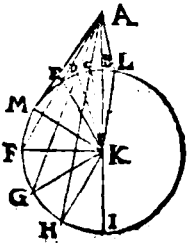
POSTREMO si DE, DB, non æqualiter distant à DA, vel DC, [e] erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB. [e] 7. tertij.

THEOR. 7. PROPOS. 8. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore

tiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimę, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ rectæ A I, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem rectam A G, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione A G, maiorem quam A F.



E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, minorem, quam A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ A I, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, a maiora ſunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc eſt, toti rectæ A I; erit & A I, maior

a 20. primi.

or, quam A H. Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quam A F. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; [a] erit basis A H, basę A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F: Item A G, maior, quam A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore. [a] 24. primi.

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, [b] minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K: remanebit adhuc AB, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est. [b] 20. primi.

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duę rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; [c] erunt A C, C K, minores, quam A D, D K. Sublatis igitur æqualibus C K, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E: Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem. [c] 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; [d] erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ A I, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam A L. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 4. primi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ AI.

FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungaturque recta AM. Quia igitur latera AK, KH, [a] 4. primi. æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales: [a] erunt bases AH, AM, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quacunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam AH, prout citra vel vltra rectam AH, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.



HÆC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longior à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus aliis in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in prima figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus vero [b] 24. primi. AKF, angulo AKM, maior. Igitur [b] basis AF, basi AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quacunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta AM.

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior erit omnibus aliis in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cum [c] 21. primi. duo latera AE, EK, [c] minora sint duobus lateribus AM, MK; si auferantur æquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quam reliqua AM. Eademque ratio est cæterorum.

QVAMQVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minori minorem esse remotiore, si amba linea ex eadem parte maxima, vel minima existant: idem tamen verum etiam est, si diuersus partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus ineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

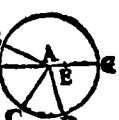
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; [a] erũt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 8. primi.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, [b] sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; [c] erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quam recta A C, remotior ab A G, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



[b] 1. tertij.

[c] 7. tertij.

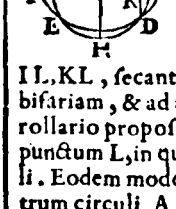
QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; [a] erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quàm AB, & AC. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

[a] 7. tertij.

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

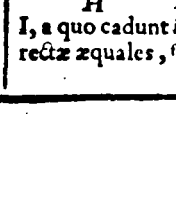
CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF. circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus [b] bifariam diuisis in I, & K, [c] educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHI, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem posident centrum, [d] quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.



[b] 10. primi.
[c] 11. primi.
[d] 5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. [e] Inuentum autem sit centrũ circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, a quo cadunt in circumferentiam plures, quàm duæ rectæ æquales, [f] erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem



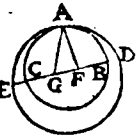
[e] 1. tertij.
[f] 9. tertij.

autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum: [a] Quod est absurdum. [a] 5. tertij.

THEOR. 10. PROPOS. 11. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A. & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, [b] non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, [c] maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum. [b] 6. tertij. [c] 20. primi.



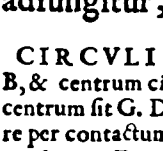
QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, [d] maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponatur esse centrum circuli ABC,) erit [d] 20. primi.

quoque G C maior, quam G E, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum minoris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

11. THEOR. 11. PROPOS. 12.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli A B C, sit F, circuli vero D B E, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, [a] maiora



a 20. primi.

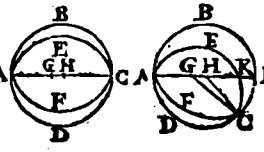
sunt latere F G: Est autem recta B F, rectæ F C, æqualis, (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, sine extra tangat.

TAN-

TANGANT sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [a] quæ diuersa erunt; per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est [b] cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrũ, & recta AGHC, diameter, diuidet A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidiũ totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.



[a] 6. tertij.

[b] 11. tertij.

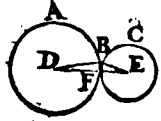
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propoſ. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo recte affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propoſ. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera GH, HC, [c] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quòd HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ G I; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quam G I, pars quàm totum. quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ H G, G C, [d] maiores sunt recta HC; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A. Quare dempta communi

[c] 20. primi.

[d] 20. primi.

communi HG, erit GC, maior, quam G A. quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis. quam vno.

TANGANT se iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, [a] quæ per contactum F, necessario transibit: Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant se se in B. Ductis igitur rectis D B, EB, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi DE: [b] Sunt autem & maiores. quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.



[a] 12. tertij.

[b] 20. primi.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra vnum circulorum, per 2. propoſ. huius tertij. & ideo extra alium, quod est contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

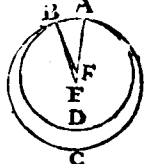
SCHOLIVM.

SI recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probatur, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potissimum concludere; circulum non posse tangi a circulo in duobus; vel pluribus punctis, quæ longo interuallo a se dissideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni exparte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno; ostendemus breuiter in vno eodemq; contactu non posse esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, [c] quæ diuersa sunt; recta ducatur E F, [d] quæ ad contactum perueniet necessario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos se se duntaxat tangere in puncto A. Si.n. se tangant in alio etiã puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F, [e] erunt rectæ E F,

[c] 6. tertij.

[d] 11. tertij.

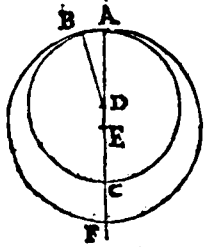
[e] 20. primi.



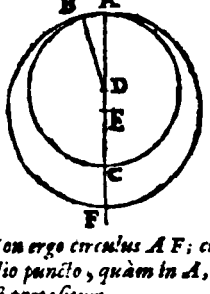
EF, FB, maiores recta EB. Est autem recta EB, æqualis rectæ EA, cum vtraque sit ex centro E. Igitur & rectæ EF, FB, maiores erunt rectæ EA. Quare empta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA. quod est absurdum, cum FB, FA, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.

NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema; videlicet.

SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.



SIT circulus ABC, cuius centrum D, & in semidiametro AD, producta sumatur punctum quodcunque E, ex quo ad internallum EA, circulus describatur AF, quem dico circulum ABC, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior est, quàm AD, hoc est, quàm DC, hoc est, à fortiori, quam EC; erit quoque EF, quæ ipsi AE, æqualis est, maior quàm EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, existet, circulus quoque AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, existet. Multò magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, si E, extra eundem circulum ABC, existet. Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat; secet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, si fieri potest, duc-



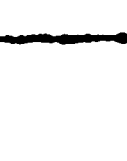
ducatur, recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, sumptum est punctum D, præter centrum E, a erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo D A, quàm D B. quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiusdem circuli A B C. Non ergo circulus A F, circulum A B C, secat aut tangit in alio puncto, quàm in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.

a 7. tertij.

QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, ut centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quidem priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, non intra eundem cadet. Vt si in semidiametro A E, circuli A F, sumatur punctum D, ex quo ad internallum D A, circulus describatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetque eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proximè sit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet vicissim totus hic intra illum, ita ut se mutuò in solo puncto A, contingant.

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distant a centro, æquales sunt inter se.



SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D. Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D. b Secabunt rectæ

b 3. tertij.

rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadratum rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, [a] æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoq; & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter a centro E.

[a] 47. primi.

RVRSVS distent rectæ AB, CD, æqualiter a centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [b] diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, [c] æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 3. tertij.

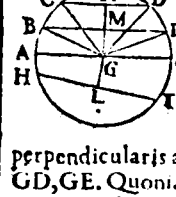
[c] 47. primi.

THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF; & HI, maiorem,

quam



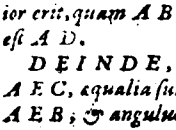
quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, a centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atq; per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, a centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, [b] maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; [c] erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *14. tertij.*
[b] *20. primi.*
[c] *24. primi.*

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab eodem circumferentia puncto plurima linea cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarũ AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, [d] maiora sint latere AC; sintque rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc est, rectæ AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior erit, quam AB; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.



[d] *20. primi.*

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia sunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, totus maior est angulo AEB, erit

rit basis AC, maior basi AB. Eodemque argumento
it AC, maior quacunque alia linea, qua a centro remo-
or est.

CÆTERVM & hic dua tantum æquales lineæ duci
ossunt a puncto A, ad vtrasque partes maxima AD. Si
amque angulo AEC, æqualis fiat angulus AEF, iunga-
urque recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint late-
ribus AE, EF, & anguli contenti quoque AEC, AEF,
æquales; b erunt bases AC, AF, æquales. Neque vero vl-
la alia hinc duabus æqualis potest exhiberi. Quacunque enim
ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero in-
fra AC, ea maior erit, vt iam demonstratum est.

QVOD si AB, AF, ad diuersas partes diametri AD,
ducta sint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB,
demonstrabitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. AF, maio-
rem esse, quàm AB. Si namque, vt proximè ostensum fuit,
ducatur ipsi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe si fiat
angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum
C, inter B, & D; quòd AF, AC, c æqualiter distent ab AD,
ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF,
AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro,
quàm AB, vt & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit cen-
tro, quam AB, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum
ergo AC, maior sit, quàm AB, vt in hoc scholio demonstra-
tum est, maior erit quoque AF, quàm AB.

a 24. primi.

b 4. primi.

c 14. tertij.

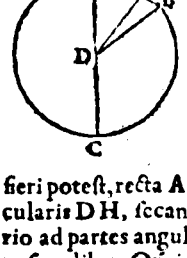
THEOR. 15. PROPOS. 16.

15.

QVAE ab extremitate diametri cu-
iusq; circuli ad angulos rectos ducitur,
extra ipsum circulum cadet; & in locum
inter ipsam rectam lineam, & peripheriã
omprehensum, altera recta linea non
adet; & semicirculi quidem angulus,
quouis angulo acuto rectilineo maior
st; reliquus autem minor.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB; ducta DB, [a] erunt duo anguli DAB, DBA, æquales; sed DAB, rectus est, per constructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod est absurdum. Non enim anguli in triangulo [b] minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neq; eadem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iã ex A, inter AE, recta, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I. quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. [c] Qm igitur in triangulo DAH, duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, idcoque recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, [d] maior erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cũ AC, angulũ rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cũ AE, angulum rectilineũ acutũ maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque intra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, demon-



[a] 5. primi.
[b] 17. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius ſit pars: Angulus vero contingentiæ contentus ſub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quòd ille huius pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quę ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

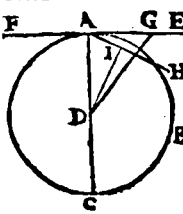
HINC manifeſtum eſt, rectam a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.



QVARE ſi iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, qua circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hec enim circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

EX QRONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiue hac forme. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Sumatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum F, & coniungatur recta FD. Quoniam igitur in triangulo



ADG, duo anguli DAG, DGA [a] *minores sunt duobus rectis, & DG factus est rectus; erit DGA, recto minor. Quare* [b] *maior erit recta DG, quam DA; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque est ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur cõmuni angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales tres angulo rectæ* [c] *DAE, ideoque minores duobus rectis: Quare* [c] *coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in margine DAI,* [d] *æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA,* [e] *maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta AH, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.*

a 17. primi.
b 19. primi.
c 13 prop.
d 32. primi.
e 19. primi.

SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu linea rectæ & circumferentia, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

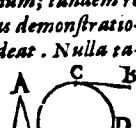
CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt ita quantitates minimæ dari possit; qualem hoc loco angulum quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem esse omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quæ-

titas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, BCD, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus a reliqua parte maius, quam dimidium: sicque continuò ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non



videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hac quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc veniemus, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstrãda,

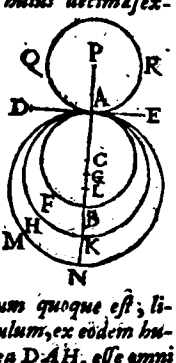
aliisque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rem conferat.

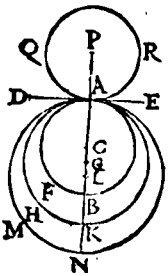
NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, qua circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc semi-recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidē angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec perueniat ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tū enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam A B, euanescit angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, prateriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli contingentiæ cum peripheria, in ipso puncto A, donec cessante decussatione, linea E D, sola sit E K, & tangat circulum. Actum linea D E, non tam inclinata intelliguntur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducuntur lineæ, faciantque spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, qua rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit inepta angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, linea recta manere in suo recto, punctumque A, peripheria in suo recundo; neque

utrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se velut lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contraposita fiant manifestiora; Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese extrinsecus tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Habit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theorematia.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsextæ, lineam DE, cõtingere ipsum AFBA, circulum: ac propterea DAF, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partẽ huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro AB, centrum G, & spatio GA, describatur alter minor circulus AHKA. Dico FAH, nõ esse quantitatem. Constat quippe circulum AHKA, transire inter rectam DA, & curuam AF, cum sit semidiameter GA, maior semidiametro CA. Manifestum quoque est, lineam DE, tangere ipsum AHKA, circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ consectario: ac propterea DAH, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium GA, circulus AMNA; Et erit ex eodem consectario, DAM, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, qui efficiũt lineæ DE, cum circulis ductis per A, punctum,





quorum centra in AB, linea, minorem ni acuto rectilineo : ac sic omnes æquales, si modo æqualitas inter non quascunque dici possit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietque ut MAF, contactus interior circulorum neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas nulla est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF, quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsexta: neque per obliquam, vt per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad punctum

punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; DAF sit quantitas, per secundam earundē; neq; DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

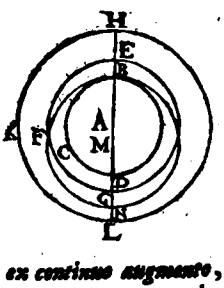
ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

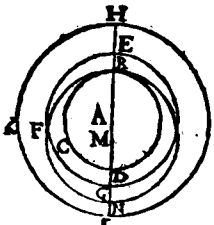
VT in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus est, & æqualis ipsi DAP, cum DAQ, nihil addat: quod erat probandum.

HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait plenorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

SINT enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG, & secet EG, vtrumque circulum in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neq; enim cōtra, CBD, maior ullo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco sit futurus HKLM: fiet tandem ex continuo augmento,





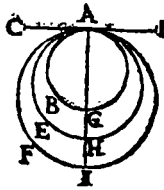
angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sint igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se aquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus BFNB, tanti interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro aquali ipsi A E; qui circulus tanget ECDB circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F BD aqualem esse angulo F E D, propter aqualitatem peripherorum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, aqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est, quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eius, qua in tertio libro adduximus, theorematum.

HÆC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, qua omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi aqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantoperè defudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem eo, qui acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, eiusmodi est angulus contactus, Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quod magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi re-

recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactûs nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minimæ dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Imo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineã circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, si per A, describatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A; fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eadem angulo contactus CAB. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos cõtactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus CAF maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG, describantur, tangentes rectã CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est

acutus

acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quia alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incrementis nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit aqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui aqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtū, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Imo asserimus, quibis angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG, maior est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus semicirculi FAI: Atque ita deinceps, semper circuli describantur, quam AFI, tangens rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI. E contrario vero, angulo semicirculi FAI, minor est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quibis maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inaquales inter se, & non omnes aquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinationes, quae non in directum iacent, vt constat ex angulo plani definitione. Hinc enim fit, vt aqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur.

Ea

Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (uno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiusmodi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus angeri, & duplicari poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum conetur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum inæqualium maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conuenient.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo utrarum multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto recti-

rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt eorum, inter se aquales angulum acutum rectilineum excluderent, vel se illis aquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel aqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare multo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à cuneo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

I A M vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide; quanquam se inuicem non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria, & linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem nõ esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes aquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aquales. Sic etiam omnes formitæ (vt ex rebus quoque naturalibus exem-

plum

lum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsa inter se valde sint inaquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum inferiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium aquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt aquales, vel qua angulos rectilineos capiunt aquales; non autem quorum anguli aquales existunt. Inter magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliqua Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, qua vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asserunt, angulum semicirculi aqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoq; Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in precedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, hominemq; Geometra prorsus indignas.

HÆC porrò mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commouit, atque perturbauit, vt lasam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij

editionem

editionem, hoc est, anno 1579. pro sui defensione Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neq; ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem meam tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias, atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia affecit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hæc à me scripta iam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusq; Apologiæ mentio facienda fuit: quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, inseram, vt benignus lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsaque mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abstinere, aperte testatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quàm quòd me Peletarius non synecre, sed inuidiose, atque adeo inuidiose fecisse insimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: qua fane vana fuisse semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeq; educato alienissima. Verum ea quàm longe abhorrent à nostra Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. His vero, qui nostra minime norunt, hic ipse liber fide factet, syncera me omnia dicti, nihil inuidiose, nihil animose: plane vt veritatem quæstam, non cuiusq; auctoritatem contemptam esse appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsi videatur, occasione oblata, cur id mihi minus probetur, ostendam;

dam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nã in scholio hoc de angulo contactus ituare liquido possem, nihil me minus cogitasse, quàm vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quòd Peletario ipso non modo inuito, sed etiam libenti existimani me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atque Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemaeo, Hippocrate Chio, Geometria luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum est, in omni doctrina, praesertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columna illa Geometria errasse interdum praedicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quarit potius, quàm in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, ne ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferre non potest: quae tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, qua conuitia dicat, intelligo. Nã alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebã: neque vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quòd cum à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum.

vsurum. Quòd si sophisma consumeliosius verbum est, quàm paralogismus, in Gallia, ignoscas consuetudinis eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atqui vt plane intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum-vnà consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potius, quàm rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quamquam occasione in eius reprehendendi in sinum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atque in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reiecit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse a Geometria dignitate putat esse alienum, hoc solum inductus ratione, quòd superpositionem illam mechanicam quid esse vtretur, & quòd omnes fere propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid præmitur construendum: atque in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falso criminatur; maxime in eo, quòd eadem ratione vsus fuerit existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quippe Geometra superpositionem illam vsurpans. Neque enim volunt, re ipsa faciendam esse figurarum superpositionem, (nec enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, quæ mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero non. Namque in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatemve, quæ, vt nota, ponitur, facile intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendit, vnam vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factum est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinem propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirum

sit,

sit *Peletarium* sibi persuadere potuisse, *propos. 2. & 3. lib. 1. & alias permultas per superpositionem, sine translationem lineæ rectæ, figurarum posse demonstrari, si hoc modo argumentandi in Geometria uti liceret. Et certe hac in re non solum Euclidem in primis vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusque commentatorem grauissimum, eumque doctissimum Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, se deduxerit. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifestam videre non potuerat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurima, eaque præcipua propositiones in Geometria demonstrentur ex propos. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonstrari nequeunt, quam per illam figurarum superpositionem, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione ductam, vt dixi, comprehensam. Quò igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sane rem magis à Geometra alienã, quam est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propositionem 4. lib. 1. esse definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeo concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem vero 8. eiusdem lib. principium esse per se quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in propositionem 4. lib. 1.* (Etenim nulla euidentiori specie æqualitas figurarum dignoscitur, quam ex laterum æqualitate.) *Idemq; quasi confirmat, & repetit in propositionem 8. eiusdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas superficies esse æquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt æqualia? *Hæc Peletarius, vt dicta propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, communia est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnopere miranda sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsiderate proferre. Scilicet verum est, quod philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumserat enim Peletarius propos. 4. & 8. lib. 1. pro principijs:*

quod quidem falsum est, atque absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiam illi, qui vix alia principia Geometria attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero aequalia, posse tamen inter se valde esse inaequalia? Id quod in Pentagonis quoque aequilateris, & in alijs figuris plurium laterum aequalium fieri potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inaequalitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero aequalia; demonstrandum fuit necessario Euclidi, aequalitatem triangulorum colligi ex laterum aequalitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quas illis nititur, quas innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim nona propos. 4. quam Peletarius confixit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis aequale, immo idem, atque hoc ipsum quidem ineptissime, cum ad id praestandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstrationibus non vtitur, quod vtiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod a posteriori nihil differt, priori esse aequale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula posita esse aequalia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Praetereo alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quòd plerunq; secundam propos. lib. 1. inscite pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solum calumnias, quas frequen-

tat

tes in sua Apologia adhibuit, a me depellere. Qua cũ ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigisse, qui non tam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidẽ sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) a calumnijs ipsius defendam, omnesque insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius a me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisque percipere. Nunc vt, quam disparille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi a me moderatio adhibebitur, vt modestia, qua hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quòd in eius demonstrationibus circandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cum vbique eum honorifice appellem, eiq; plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamen alter, quam ipse, & multo breuius demonstret, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, tàm me parum syncere, atq; adeo inuidiosè factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiosè factum quispiam iudicaret. Quòd vero propos. 16. lib. 3, & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obijcit, animosè, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui: id feci, vt iam ante dixi, non cuiusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco

odijs potius, quam ingenijs inter se certare videantur. Quis alterum sensus ignoro, equidem, vt supra dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando cuncta admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque vtiberius id facerent, enixe rogarim non paucos, & nunc iterum eosdem, atque etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quam facile possit in suis quisque inuentis hallucinari; vidi (quod ipse quoque Peletarius in Apologia sapienter asserit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quod in additionibus ad propos. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non est, quod ægre ferat, cum illa propositiones non sint ab ipso inuenta. Quædam enim multo tempore ante ipsum demonstrata sunt vel a Campano, vel a Proclo, aut Theone, quædam vero demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem; quòd adeo manifesta sint, & faciles, vt nullo probatione egeant, sed sint instar corollariorum propos. 47. Nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maxime eas ab ipso inuentas esse (quod tamen verum non est) profiteretur; cum eas quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti putaverit esse dicat, cum sint omnium iudicio leuissimæ; adeo vt plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pons agoni æquilateri & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirifice (vt alia peccata taceam) abutitur propositione 9. lib 3. cum ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sane dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi ostensa sunt æquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propositum ex ipsa constructione possit concludi, & ex demonstratis, vt proxime dixi, etiamsi propo-

sitio

sitio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus describendus est. Quòd si ideo sum reprehendendus, quòd propositionem unam, multo aliter a me, & brevius demonstratam, ei non ascripserim, non video, quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cum problema hoc (Propositis duabus lineis inequalibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.) multis seculis ante ipsum a Theone demonstratum sibi arroget, hac solum de causa, vt arbitror, quòd illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo equalem angulum curuilineum constituere.) quod in Apologia suâ proprium appellat, idemq; hactenus desideratum esse gloriatur; cum tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum seculis floruit, in defin. 5. lib. 5. multo brevius, & clarius demonstrauerim. Nam; vt eo in loco ostendi, si recta linea datum angulum rectilineum continentes ponantur aquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui aquales erunt) versus eandem partes describantur, illico constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo aqualis: Neque opus est tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet; quamuis robur demonstrationis ipsius idem sit, quod meæ. Et quod magis mirandum est, fatetur Peletarius, se meâ demonstrationem vidisse, & eam nihilominus sibi audet, tanquam propriam, arrogare. Eu cur Peletarius clamet, me non paucas demonstrationes parum honeste, vt mihi vendicem, sibi subdacere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipse sibi gloriosum putat? Itaque multo verius, ac iustius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare possum; cum nunquam propositionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipse, sed solum eius nomen, ob rationes a me expositas, reticuerim.

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineum eiusdem generis esse, contra me pluribus verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo uberrat, quod dicitur, a scopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, vtrumque angulum planum esse; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare possit ex

angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neque ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis nego: hac solum de causa, quod angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 16. videtur ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodammodo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem generis magnitudinis; nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hinc namque fiat, vt collimasse videatur: quamquam vt omnia fiat, collimabit nunquam; ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, innumero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. vbi luculentes satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quam viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitatus incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nequam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) diuersum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alterum superet: Iam, me minime reluctante, frustra sese fatigat, vt doceat, id fieri non posse; sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemque linea recta, & curua. Hæc enim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquido affirmarit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (vt Aristotelis dictum sit) verum vsquequaque non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quamnam lineam rectam æqualis possit esse circumferentiæ cuiusuis circuli dati, idemque nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare potest Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates a proportionis

portionis definitione excludi, diuersiq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodē magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multæ item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilineæ superficies, & rectilineæ; necnon linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. expenimus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem quinta defin. lib. 5. recipere; immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia incendisse nerues, obliuiscitur, quæ fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed sine ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, sine secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certe ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans habere volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Eucl. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit; aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) vt enim vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui dissertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tū in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt a me est exposita: quinetiam ibidem asserit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, qui testem produxerat pro se

Peletarius, iam pro me teſtimonium dicat. Atque ex his duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam ſuæ tionę, quanto contradicendi ſtudio mihi inſultet Peletarius, cum ſemel atque iterum odioſe percontatur, undenam patrim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (ſi crimen eſt, lineam infinitam exempli cauſa nominare) vocat etiam Petrum Nonium teſtem ſuum, atque adeo omnes philoſophos, quorum eſt illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem. Deſinat igitur a me ſciſcitari, vnde lineam infinitam deportarim: Inde enim reſpondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philoſophi omnes deportarunt. Quid? nonne ſophiſma dixi Peletarij, ſemper in hoc erro, demonſtratio illa, velut diuina, & quidem palmaris, qua conatur oſtendere, propoſitionem 1. lib. 10. cum propoſ. 16. lib. 3. ſtare non poſſe, ſi angulus contactus concedatur eſſe quantitas, à Petro Nonio Peletarij oppugnatore eadem prorſus ratione, qua a me ipſo, conſutatur? Quæ ſit germana demonſtratio eſt, miror quid ſit, cur eam Nonius Geometriæ ſcientiſſimus, idemque Peletarij approbator, non probarit: Cur nihilo magis demonſtrationes eiuſdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non eſſe, eundem illum Nonium nihil admodum moueant! Id enim (niſi fallor) illa Nonij verba (Si quis ſententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam ſi demonſtrationes exiſtimaſſet, profecto Peletarij doctrinam in eo retinendam eſſe dixiſſet, Geometrica enim demonſtrationes eiuſmodi ſunt, vt aſſenſum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloque modo quemquam ſinant ancipiti opinione diſtrahi ſic, vt tum aſſentiatur, ſi velit, tum, ſi nolit, diſſentiat. En cur Peletarius Nonij teſtimonio aliorum iudicia contemnat, en præclarum teſtimonium, quod Petrus Nonius eius demonſtrationibus dedit: quæ æquo animo ferat, eas a me nihilo magis, quam ab illo ſuo approbatore, demonſtrationes putari.

TERTIO, quòd exiſtimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil eſſe, falſum eſſe, clamat: Nuſquam enim dixiſſe ſe, nihil eſſe, ſed quantitatem non eſſe. Ita ne vero! at in prædicamento Quantitatis, quod neque eſt punctum, (quis enim inclinationem illam punctum eſſe dixerit?) neq; quan-

titas

titum, quo alia nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, quis posteà additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo aequalem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt aequalem eam alteri efficeret? Praetereo, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nonum est, & inauditũ apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duae linea rectae angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantum haberet angulum. Quae omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil attinet. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res nõ potest, mea verba carpit, verba defendam: quae quidem ille nescio quibus praestigijs ita depraua t, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quarit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Nec enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlciscretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cũ impune pugnaret: At quam palaestrice pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus anguloo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se effictum iugulasset, exclamat.* (En Clauij argumenta, quę vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potius figmenta, cum ipse

ipſe ſuum angulum contactus nihil eſſe dicat, non erit.
Verum vt hominem faneum, atque adumbratum nequaquam petere deſinat, virium oſtendam, qui cum, ſi velis, tutare cum laude poſſit. Ego vt oſtenderem, angulum contactus, ex Euclidis ſententia, verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi angulo recto rectilineo minorem, ita ſum argumentatus. Si Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, (hoc eſt, vt Peletarius intelligit, non eſſe angulum, vel non eſſe quantitatem) & angulum ſemicirculi æqualem rectilineo; quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, hoc eſt, quàm id, quod quantitas non eſt, minus eſſe quacunque angulo? Quid rurſus magis perſpicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Agnoſcat itaque Peletarius, Nihil illud ſuum male à nobis acceptum, idque ita vlciſcatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego ſi angulum contactus dixi eſſe nihil, & non potius eum nihil eſſe aſſerui ex ſententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexiſſe meum argumentum, aut intelligere noluiſſe: niſi eum quis dicat, dedita opera verba mea vellicaſſe cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem eſſe, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quantumcunque minorem eſſe, aut maiorem aliquo alio angulum contactus, quem non ego dixi nihil eſſe, ſed Peletarius; eundemque Euclidem minorem quolibet acuto rectilineo recte demonſtraſſe. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipſe negat, dixiſſe Dialecticam, illum ipſum tam lepidum, atq; acutum ſyllogiſmum, quo Nihil illud ab ſe confictum mira venuſtate conſixit, paulliſper conſiderabimus; vt quàm ſuo iure Dialectica ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipſe ſyllogiſmus videtur, incudique reddendus. Etenim cū verſetur in tertia figura, in eo maior extremus, (vt Dialectici loquuntur) quæ eſt, Nihil, de minori extremitate, quæ eſt, angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus

ctus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidem conclusio recte sequitur ex præmissis, quarũ prior Peletarij est, nõ mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Cõclusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in utraque præmissa subijcitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neq; contendat Peletarius, mentionẽ factã esse anguli in minore extremitate, vbi dictũ est, angulũ cõtactus angulo rectilineo maiorẽ esse. Nã angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod vt planum fiat, vtemur ea palæstra, quam ab illo didicimus. Si quis sic ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum præmissa vera sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem olim Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ recte ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialectica, si ab Aristotelica abhorret, vtique fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicat, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupiosque scire, quid sibi sit, angulum contactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Quæ in re morem geram homini non grauate, etsi è tabulis huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere.

Nempe

Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, quo dicimus, angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus, sicut nec angulus contactus rectilineus est, aut acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. angulos rectos, obtusos, & acutos. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quàm ad Geometras. Quòd etiã, ne librum meum parum spissum viderer fecisse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo a me consilio factum est, ut omnes plane viderent, syncere me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod verum in meis verbis recitandis ipse facere in animum inducisset. Multo enim minus spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed ea sum cautus Peletario, quòd ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanis rerum videretur, tres demonstrationes vel potius ad eam pertinentes inserit: quarum priorem inuertit suam propriam facit, ut supra dixi: posteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse. ego & longè breuius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam prædem demonstrauit, ut mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimensionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario sua Apologia, ne incomitata prodiret, nouo more comites adhibere quas adiungeret mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? An igitur omnes reprehendat, atque in primis Petrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi uitio dedisse fateatur. Quòd si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius crimi-

criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quod factum fuisset, si alienis verbis eius opinionem in medium adduxissem? Equidem facile sibi persuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

QVARTO vt leviora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare ostendit, vt probem, angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea quòd scripsi, æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, si alter alteri superponatur, iuxta octauum pronunciatũ. Quæ in re duplicitèr me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cum tamen angulus rectilineus ostendi sit æquales curulineo, atque adeo eiusdem generis cum illo, licet non sit in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde quod putem angulos contactus ideo inter se inæquales esse, quòd sibi mutuo non congruant. Equidem si quid in eo a me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Pelatario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cum, tota ea etiam accuratè considerata, nihil omnino vitij ineſſe videam, ita, qua obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Pelatario, qui occasionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli semicirculi, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quæ vt cum linea recta vnius congruat linea recta alterius, circuli vero circulari non item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curvilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Pelarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad prop. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam eorum in rectilineis: in cæterisque omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atque

in

in vtrinque conuexis, &c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data sunt; sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nonne hæc clamant ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concipere æquales, quorũ recta linea, & curua sibi mutuò congruant? Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint eiusdem speciei, atque adeo æqualitatem non admittant, minusque alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, an Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquam, ne non modo Geometria ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non recte à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam vsu in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, planè rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cauillatores, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletarius quidem ipse ita me adhuc respondisse arbitror, vt inanis mihi potius ignarus Geometriæ, ac Dialectica videar, quàm peritus. Nunc, vt perspiciat, neq; me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam commemorat, probam esse, ita tamen, si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque vero hoc vnquam negaui, nec alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loco contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori vero in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cum tum prima [illegible] membra

membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum (vt Logici loquuntur) exhaeriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem aequalitatis, & inaequalitatis, cum haec membra diuidentia latius pateant, quam Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eò magis duplex illa diuisio mihi probatur, quòd eum desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem aequalitatis, & inaequalitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac diiudicationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, si atus duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quaerunt vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet haec subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudentis lectoris institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum praetulerim. Quòd si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut impropriet atum, quae per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, na scriptorum nullus aliquo vitio caret, neque ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quae dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialectiorum normam exquirere, profectò reprehendendi materia nõ deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (quamcunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Sanum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquàm ex superiore illegismo, quem in me conuertit, liquido constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem conficit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo; ergo omnes inter se sunt aquales. Itemq; hanc; Anguli semicirculorum, quò a maioribus circulis fiunt,

fiunt, eò sunt maiores : igitur tandem ad aliquem perimus, qui recto rectilineo maior sit, in qua quidem ad Crinum scribit, nullum esse paralogismum. Ego sane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & vero Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superq; in scholio huius propos. 16. a me sunt confutatæ, adductis contra ipsas evidentissimis instantijs. Deinde quòd me perstringit, quasi parum intellexerim, quæ sit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse; cum has proportiones vbiq; ex sententia grauissimorum scriptorum definierim : neq; vero ipse, vllum peccatum a me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat, quam illa intellexerim, nec ne. Demq; quòd criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in def. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellasse, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; hanc in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero Proportionem. Neq; enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

EX his, quæ diximus, satis (vt opinior) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarij inanem, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem videar, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amice putaui. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certe contrariam sententiam tueri donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit : rationes enim Peletarij fallaces sunt, nihilque continent in se probabilitatis, vt in scholio huius propos. 16. ostendi, vbi omnes diluui : neque meis ipse solutionibus vel vnum verbum (excepto ijs, quæ supra ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat : Vt non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse.

scripsisse, sed ne veritati cessisse videretur. Nec vero quisquam putet, me unum existimare, angulum contactus vere esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosque grauissimos laudare possem, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atque Iordanum: quin etiam (quod libentissime facio) Euclidem ipsum, eiusque commentatorum celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis praestantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero in primis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flussatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propos. hanc 16. apertissime docet, angulos contingentiae verè esse angulos, ex definitione anguli plani, alios q; alios esse maiores, aequales, ac minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium procul dubio intelligit, Praeter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurde multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quadam ex eius commentarijs in lib. 1 Euclidis, quae obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij commento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duae namque circumferentiae se inuicem secando, vel se contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis) Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem lib. ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet. (Cornicularis namq; angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) Quid clarius, quam Proclum hic asserere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita

scribit. (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquàm æqualis; Et Semicircularis similiter, transitusq; à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, ut supra tumq; propterea fieri a maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque posteros appellere paralogismum. Denique eadem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his iudicare arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

OBITER quoque hoc loco monendum lectorem curiosum, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, numerum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem intercipitur, altera recta linea non cadit; atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt quatuor Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi satis maior absurditas apparet, quæ ad sensũ, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, et in ea Hyperbola, quæ fere lineæ rectæ esse videntur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticẽ illius Ellipsis, & Hyperbolæ cõstituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur a circumferentia

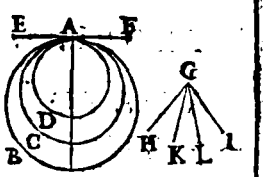
Ellipsis,

Ellipſis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expoſitionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas poteſt continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius.

PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus EGI. Si igitur deſcribantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continuo angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantumuis diminuatur.

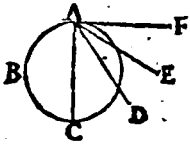


EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propoſitione 16. perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

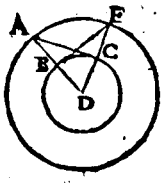
DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in



A. Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quamdiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum non ſecare ceſſat, effici angulum rectum aut iorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor;) conſtat quoque vitioſam eſſe poſteriorem illationem conſequentiam.

16. ## PROBL. 2. PROPOS. 17.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circuli A E, in E. Ducta deniq; recta E D ſecante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli B D E, æqualia ſint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus, ſit communis: Erunt a & baſes BE, CA, & anguli DBE, DCA, ſuper ipſas, æquales. Eſt autem DBE, rectus ex conſtructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaq; CA, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſectæ diametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangens circulum B C, in C, quod faciendum erat.

a 7. primi.

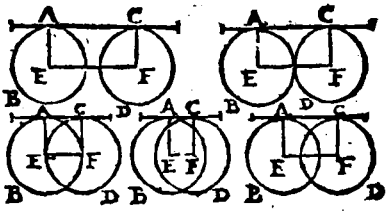
SCHO-

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facilè dicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propos. 31. huius lib. tradendo.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

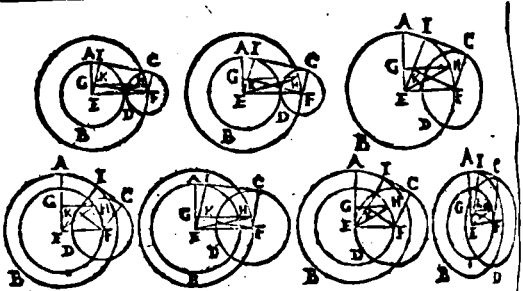
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.



SINT primum duo propositi circuli æquales AB, CD, quorum centra E, & F, recta iungantur EF, ad quam ducantur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrumq; circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, [a] *& parallela, quòd anguli E, & F, recti sint;* [b] *erunt quoque EF, AC, æquales & parallelæ; Idcoque* [c] *& anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.*

[a] 28. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. primi.

SINT deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum rursus centra E, & F, iungantur recta EF, ad cuius externum latus ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proxime descripti. Ductu autem recta E, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atque per F,



agatur ipſi E I, parallela recta F C. Dico rectum per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abſcindatur enim ex I E, recta I K, ipſi A G, vel ſemidiametro F C, minoris circuli, æqualis, vt ſint reliquæ E G, E K, æquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam vtrius latera H E, E G, trianguli H E G, æqualia ſunt lateribus F E, E K, & anguli ipſis contenti æquales, ex conſtructione: [a] Erunt anguli H G E, F K E, æquales: Ac proinde, cum H G E, rectus ſit, ex conſtructione, erit & F K E, rectus. Rurſus quia C F, I K, æquales ſunt, & parallelæ, ex conſtructione, [b] erunt quoque I C, K F, æquales & parallelæ; Atque propterea anguluſ E I C, [c] cum æqualis ſit externo F K E, rectus erit; [d] Ideoque & I C F, rectus exiſtet. Quocirca, per coroll. propoſ. 16. huius lib. recta I C, vtrumque circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus ſemidiametrorum. Quod erat propoſitum.

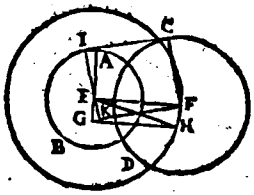
[a] 4. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. primi.
[d] 29. primi.

SATIS autem conſtat, ſi circuli propoſiti æquales fuerint, id quinq; modis poſſe fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut ſe mutuo contingunt, aut ſe inuicem per centra ſecant, aut non ita tamen, vt vel centra conſiſtant in communi eorum ſegmento, vel certe extra illud.

ITEM ſi circuli propoſiti fuerint inæquales, id euenire poſſe ſeptem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipſum tangit, aut ipſum ſecat, ita vt vel centrum eius ſit in circumferentia maioris, vel intra ipſum circulum: hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris tranſeat, vel centrum minoris ſit extra circulum ma-

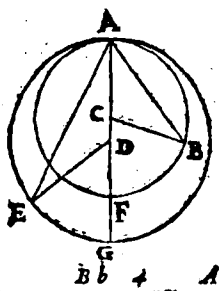
maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.

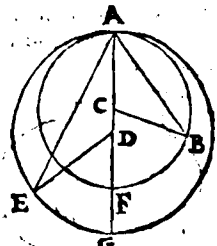
QVONIAM vero, circulis inaequalibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper a maiori, si quis maluerit a minori incipere, is efficiet eadem constructione demonstrationeq; nisi quod rectae AE, IE, protrahendae sunt ad G, & K, vt AG, IK, aequales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco aequales esse, quod HEA, FEI, reliqui duorum rectorum, aequales sint ex constructione: Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, sint parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.



QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quae circulum tangat, ex iis, quae demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex corolli. propos. 16. per punctum vero extra circulum, ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quae duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, sive interius, sive exterius, describendus sit.

SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quodvis punctum D, ex quo ad internallum DA, circulus describatur AE, qui circulum





A B, in A, tanget; Et ijdem punctum D, fuerit vtro centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum A B; intra vero si punctum D, in ſemidiametro A C, exiuerit, vt ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

DEINDE extra eundem circulum A B, datum ſit punctum G, per quod deſcribendus ſit circulus circulum A B, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta G C A, eaque ſecta bifariam in D, deſcribatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, tranſibit, tangetq; circulum AB, in A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

ALITER. Sit datum rurſus punctum E, extra circulum A B. Ducta recta E A, vtcunque ex puncto dato E, qua circulum ſecet, & non per centrum tranſeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritq; angulus E A C, acutus cum pars ſit anguli ſemicirculi, qui recto minor eſt. Angulo ergo E A C, in E, æqualis conſtituatur A E D: cumque recta E D, cum A C, in D, ob duos angulos D A E, D E A, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli D A E, D E A,

[a] 6. primi.

æquales ſunt, [a] erunt & latera D A, D E, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, deſcriptus per datum punctum E, tranſibit, tangetq; circulum A B, in A, ex ijs, quæ in ſuprædicto ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus.

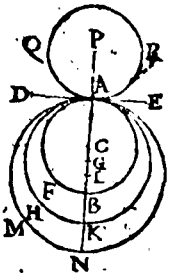
TERTIO datum ſit punctum F, intra circulum A E. Ducta ex F, per centrum D, recta F A, eaq; ſecta bifariam in C, deſcribatur ex C, per A, circulus A B, qui per datum punctum F, tranſibit, tangetque ex dicto ſcholio circulum A E, in A.

ALITER. Sit datum rurſus punctum B, intra circulum A E, cuius centrum D. Ducta recta quacunque A D, per centrum D, & non per datum punctum B, tranſeunte, cum recta coniuncta A B, faciet angulum acutum B A D, vtpote minorem angulo ſemicirculi, qui recto minor eſt. Angulo ergo B A D, in B, æqualis fiat A B C: coibitq; recta B C, cum A D, in C, ob duos angulos B A C, A B C, duobus rectis

minores.

mentores. Quoniam igitur anguli B A C, A B C, æquales sunt, erunt & latera C A, C B, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tanget[que] circulum A E, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt. [a] 6. primi.

QVOD si per punctum N, extra circulum Q A R, datum describendus sit circulus tangens circulum Q A R, exterius, ita vt neuter intra alterum cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli Q A R, recta N P, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta N A, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tanget[que] circulum Q A R, in A, propterea quod vterq; circulus rectam D E, qua per A, ducitur ad N P, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16. huius lib.



EODEM modo, si in circumferentia circuli Q A R, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum Q A R, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta P A C, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum A M N, ex centro L, tanget hic circulum Q A R, vt dictum est, in A.

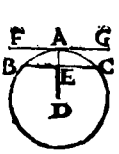
EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis E A, B A, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; at tandem in recta A G, eiusdem figuræ, vel in P A C, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens describendus sit, ad finem huius lib. trademus.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, li-

neam

neam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturque ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. [a] *Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetque circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.*

[a] 28. primi.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quæ totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 17. primi.

[c] 19. primi.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD,

ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [a] maior est omni acuto. [a] 16. tertij.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.



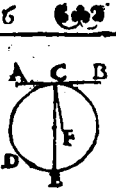
SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamq; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, [b] quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur [c] rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur [d] autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est. [b] 18. tertij. [c] 14. tertij. [d] 3. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; &

ex



ex C. ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta FC, [a] quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

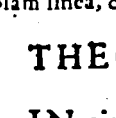
[a] 18. tertij.

19.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, [b] erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, [c] æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando n. duæ magnitudines duarum sunt duplæ singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.



[b] 5. primi.

[c] 32. primi



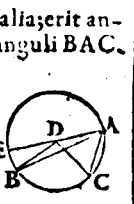
DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, [d] æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo [e] inter se sunt

[d] 32. primi.

[e] 5. primi.

sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Qm enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.



a 20. pron.

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propos. demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia vero parte demonstrationi hoc aliud principium adhibitum est.* (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5 propos. 1. & 5. Non tamen propterea demonstratio huius propos. censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari poterit ante tertium hunc librum, cum ex eo non indeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquam demonstrata. Neque vero hac in re eius ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propos. 20. huius lib. demonstratur, hac eadem propositione non demonstrentur, aut aliis propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM,

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione.

[a] 5. primi. *Repetatur prima figura, Et quoniam* [a] *tres anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æqualis est ijsdem tribus angulis BAC,*

[b] 32. primi. *B, & C; (Nam* [b] *cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis.) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.*

[c] 32. primi. *ALITER. Quoniam sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illi sex æquales: ablatis*

[d] 3. pron. *communibus ADB, ADC,* [d] *reliquis BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare ut prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus.*

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo,

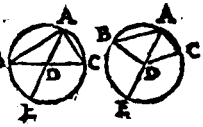
[c] 5. primi *ducta recta AD,* [c] *duo anguli DAC, DCA, æquales sunt, est q; angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC,*

[f] 32. primi [g] 5. primi. *æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F,* [f] *angulique EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero* [g] *anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA, erunt & reliqui*

[h] 5. primi. [i] 15. primi, *DAB, ECF, æquales. Cum* [h] *ergo DAB, ipsi DBA, æqualis sit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem* [i] *anguli DEB, FEC, ad verticē E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erūt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cū ergo angulus EFC. ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoq; angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositum.*

QVOD

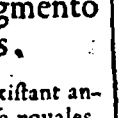
QVOD ſtrictæ BD, CD, in centro angulum non conſtituãt ad partes baſis BC; quod tum demum fit, quando ſegmentum BAC, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmento minus; nihilominus ſpatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat baſin, quam ſpatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt oſtenſum eſt. Spatium igitur ad centrum D, baſin habens BEC, conſtansque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum eſt totius anguli BAC. Quod eſt propoſitum.



THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

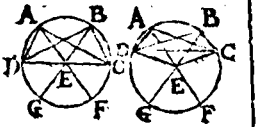
IN circulo A B C D, cuius centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento DABC. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum DABC, primum ſemicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus eſt tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cum omnes habeant eandem baſin DC; erunt anguli A, & B dimidiatæ partes anguli E. [b] Quare inter ſe æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendentur eſſe æquales.



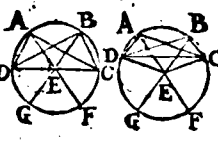
[a] 20. tertij.

[b] 7. pron.

SIT deinde ſegmentum DABC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrũ E, rectæ AF, BG, & in ſegmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus eſt anguli DAF,



[c] 20. tertij.



DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, angulo CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC, [a] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

[a] 7. pron.

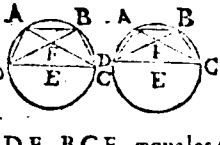
ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: [b] Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

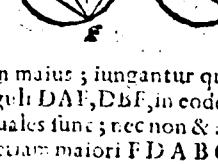
[b] 7. pron.

ALITER. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; [c] quoniam tam illi, quam hi æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, [d] qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

[c] 32. primi.

[d] 3. primi.





ALITER. Datis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori FDABC, existentes: si hi illis addantur, [e] erit totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

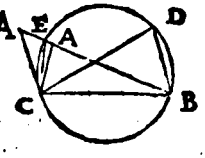
[e] 2. pron.

SCHO-

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema iſtud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ ad eaſdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit.

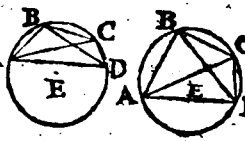


EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex ſingulis, conſtituentes ad eaſdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, deſcriptum, tranſire quoque per angulum A. Si enim non tranſit, tranſibit vel vltra A, vel citra ſecans rectam A B, in E. Ducta ergo recta C E, [a] *erit* [a] *21. tertij.*
anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli C A B, C E B, æquales, externus, & internus, quod eſt abſurdum, [b] *Externus enim internum maior eſt. Tranſit ergo circulus per A. quod eſt propoſitum.* [b] *16. primi.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. 21.

QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex adverſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppoſitos A B C, D A: Item B C D, D A B, æquales eſſe duobus rectis.



[a] 21. tertij.

Ductis. n. diametris in b quadrilateri AC, BD, a erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmẽto ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodẽ segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. [b] Sed hi tres æquales ſunt dũobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Nam rurſus [c] duo anguli ABD, ACD, ſunt æquales: Item duo BCD, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Additoigitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. [d] Sed hi tres ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur intra culis deſcriptorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 32. primi.

[c] 21. tertij.

[d] 32. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circulus, qui per tres quoſcunque eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum quartum angulum. Atque adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B, D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur

scribatur; (*Quo modo autem hoc fieri possit, ad 23. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostendetur.*) *quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra.* *Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non secent rectas CD, AD. Quo facto,* [a] *erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum.* *Ducta enim recta AC,* [b] *erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.*

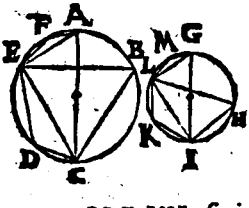
[a] 22. tertij.

[b] 21. primi.

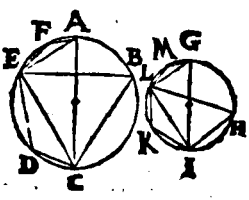
SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositis æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.



SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, quinctis vtcunque D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex defin. segmentorum similium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus



[a] 22. tertij. [b] 3. prom.

anguli IKL, IHL, sine inæquales; quod tam illi, quàm illi sint æquales duobus rectis: [b] erit & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, similes erunt.

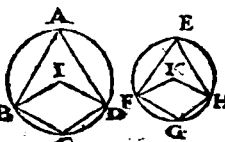
DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt, erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; [c] quòd tam illi, quàm illi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmẽtorum similium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. prop. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; [d] quòd tam illis, quàm his duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

[c] 22. tertij. [d] 22. tertij.

QVANDO autem de segmentis similibus fuit hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis permaxime vtilia, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum



rimum arcum similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. [a] Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum [b] cum dupli sint anguli I, K, [c] erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.

[a] 32. tertij.
[b] 20. tertij.
[c] 6. prop.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcum BGD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint [d] autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, [e] erunt quoque eorum dimidia, æqualia hoc est, anguli A, E. Quare ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.

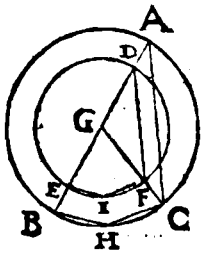
[d] 33. tertij.
[e] 7. prop.

SECUNDUM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

DUO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Productæ enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens [f] duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC; [g] erunt anguli EDF, BAC, æquales: Sunt autem duo anguli EDF,

[f] 20. tertij.
[g] 7. prop.



[a] 22. tertij.

[b] 3. pron.

EIF, duobus angulis BHC, BHC, æquales; quòd [a] *tanti illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC,* [b] *reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.*

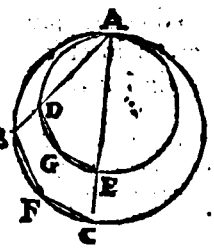
[c] 7. pron.

[d] 20. tertij.

BREVIVS sic. Quoniam [c] *anguli A, D, æquales sunt, quòd utriusque* [d] *duplus sit anguli G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.*

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



TANGANT se mutuò interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tã arcus DE, BC, quàm AD, AB, & AED, ACB, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, inter easdem rectas BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE,

[e] 21. tertij.

[f] 3. pron.

DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt; quòd [e] *tanti illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC,* [f] *erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde*

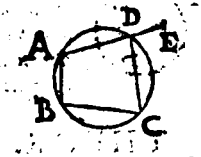
proinde arcus DE, BC, similes erunt, ex defin. segmentorum similium.

BREVIVS sic. Quoniam anguli A, communis utriusque arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proximè antecedem theorema, arcus DE, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cognoscatur recta AC, hac in constructum A, cadit, sumtis eodem pacto arcu DE, BC, similes, fit, ut hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoque sint: atque his ablatis ex totis circumferentijs similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, ut paulo ante demonstratum. Quod est propositum. a 11. tertij.

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

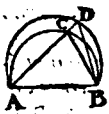


IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulū EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, b æquales sint duobus rectis: Item duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC; reliquus EDC, externus reliquo B; æqualis erit. Quod est propositum. b 13. primi. c 22. tertij.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur

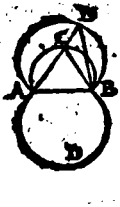


ad eafdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia ACB, ADB. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolum interſecent in punctis A, & B; Circulus enim circulum non ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B: Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo ADB, externus interno: quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia: Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 10 tertij.

[b] 16 primi.

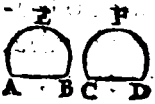
SCHOLIVM.



EADEM ratione, neque ad diuerſas partes ſuper eadem recta linea duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia conſtituentur. Nam ſi alterum eorum intelligatur manere circa lineam A B, vt iam ambo ſint ad eaſdem partes, in idem abſurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, conſtituta ſint ſegmenta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Nam rectæ enim A B, C D, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmẽtũ AEB, ſegmento

segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quæ si extra cadat, aut intra, cõstituetur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia; quod est absurdum. [a] Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabũt sese in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [b] Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quàm duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 23. tertij.

[b] 10 tertij.

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruit; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quòd si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secentque se mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quam duobus, quod est absurdum. [c] *Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quàm duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum alterum alteri superponatur, &c.*

[c] 10. tertij.

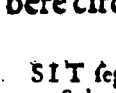
PROBL.

24.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

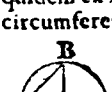
CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primùm maior,



(quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens *diametrum*, [a] sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, [b] maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli cõtenti, recti. [c] Quare bases EA, EC, æquales erunt; [d] Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt; [e] ac propterea E, centrum erit circuli ABC. quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

[a] 7. tertij.
[b] 18. primi.
[c] 4. primi.
[d] 6. primi.
[e] 9. tertij.



SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis; (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) [a] Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quòd recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres

[a] 5. prim. & 6. primi.

tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam [a], erit D, centrum.

[a] 9. tertij.

SIT tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eueniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit.) Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, exiſtit; [b] erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadit, maxima; maior igitur erit quam DA, [c] ideoq; angulus DAB, maior angulo DBA. fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus DBA, maior erat angulo DAB, vt constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.



[b] 7. tertij.

[c] 18. primi.

SCHOLIVM.

SED fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia trium circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta AC, bifariam in D, erectaq; perpendiculari DB, & ducta AB; aut DB, minor est, quàm DA, aut æqualis, aut maior. Si minor, [d] erit angulus DBA, maior angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi ABD; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc eueniet, quando segmentum est semicirculo minus.

[d] 18. primi.

SI vero DB, æqualis est ipsi DA; erunt omnes tres DA, DB, DC, æquales; [e] ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.

[e] 9. tertij.

SI denique DB, maior est, quàm DA; [f] erit angulus DBA, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.

[f] 18. primi.

ALITER eidem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulus DBA, æqualis angulus EAB. Et si quidem recta AE, cadit infra AC, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero AE, cadit

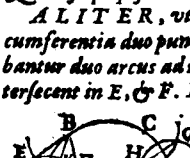
supra

supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum AB, in A, angulum aequalem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue aequale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque: A, B, & C, quibus duabus rectis coniungantur AB, BC, quarum bisariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quam EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt amba in centro, vt in F. Quare centrum efficiemus. Quod est propositum.



ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectae EF, GH, transibunt ambae per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem linea EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectae AE, AF, BE, BF, quae inter se aequales erunt, ob aequalitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, aequalia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF, BF, aequales: [a] *Erunt anguli AEF, BEF, aequales. Rursus ducta recta AB, quae secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, aequalia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK; & anguli AEK, BEK, ostensique aequales; erunt* [b] *& bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, aequales, ideoque recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per*



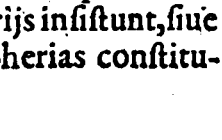
[a] 8. primi.

[b] 4. primi.

per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. Eadem ratione oſtendetur G H, tranſire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali ſitu accipi, vt rectæ EF, GH, non in directum ſibi occurrant, ſed vt ſe mutuo ſecent. Quòd ſi quando contingat, rectas EF, G H, in directum eſſe conſtitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehenſa, bifariam. Punctum enim diuiſionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa eſt diameter circuli, quandoquidem per centrum tranſit, ex coroll. propoſ. 1. huius lib.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, conſtituti ſint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus inſiſtunt, ſiue ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur [a] anguli B, & E, dimidij ſunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ea definitione, ſegmenta ABC, DEF, ſimilia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent G, H, æquales, ex hypotheſi; [b] erunt baſes A C, D F, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ſint ſuper lineas æquales AC, DF, [c] erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi a circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta A C, DF, inter

[a] *20. tertij.*

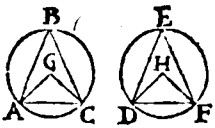
[b] *4. primi.*

[c] *24. tertij.*

inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, [a] quod sint dupli angulorum æqualium B, & E, erit, vt prius, rectæ AC, DF, æquales) [b] erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

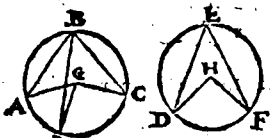
[a] 20. tertij.
[b] 24. tertij.



SCHOLIVM.

HÆC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, [c] dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrum maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheria CI, DF, æquales; Ac propterea AC, maior, quam DF.



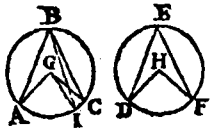
PORRO propositio hæc cum tribus proximè sequentibus intelligenda etiam sunt in eodem circulo. Hoc est, In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquebit. Eadem. n. semper demonstratio, quæ duobus, pluribus circulis accommodatur, locum habet in vno eodemque circulo.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. [a] Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

[a] 26. tertij.

INSISTANT deinde eisdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, [b] eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 26. tertij.

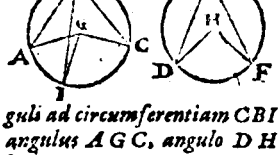
SCHOLIVM.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniam [c] *anguli ABC, & E, dimidij sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.*

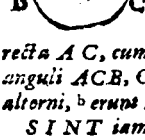
[c] 20. tertij.

Sin vero peripheria fuerint inæquales, insistet maiori maior an-

ior angulus, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, qui minori. In figura enim scholij precedentis sit peripheria AC, maior, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, maiorem esse angulo DHF; & angulum ABC, maiorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, equalis peripheriæ DF, ducanturq; rectæ IG, IB, erunt, ut sensum est, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior.



EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si fiant parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ducta namq;



[a] 27. tertij. recta AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales; quæ cum sint alterni, [b] erunt AD, BC, parallelæ.

[b] 27. primi.

SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ducta recta AC; [c] erunt anguli alterni ACB, CAD,

[c] 29. primi, & 26. tertij. æquales; Ac proinde & arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

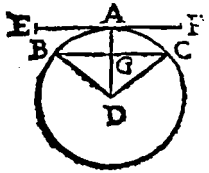
LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcum BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, secante rectam BC, in G, connexisq; rectis DB,

[c] 27. tertij. DC, [c] erunt anguli ADB, ADC, circumferentijs æqua-

lib

libus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, utrumque utrique. [a] Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, [b] quòd DA, perpendicularis sit ad EF. Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.



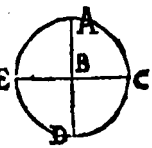
[a] 4. primi.

[b] 18. primi.

EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstravimus.

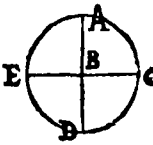
ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.

RECTVS angulus ABC, insistat centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & anguli DBE, rectus, [c] cui æqualis sit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, utpote recti: ac propterea [d] arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquidò constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.



[c] 15. primi.

[d] 26. tertij.

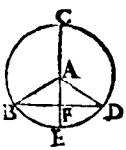


SED insistat iam quadranti AC, cuius A B C, in centro B. Dico angulum A B C, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis A B, C B, ad D, E; quoniam tà C A E, quàm A C D, & A E D, semicirculus est, estq; A C, quadrans; erit tam A E, quàm C D, quadrans quoque, ac proinde & D E, in semicirculo A E D, quadrans erit. Sunt ergo quatuor arcus A C, C D, D E, E A, æquales, ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum A B, auferens minorem arcum quadrantis A C, facit in centro B, cum A B, minorem angulum recto angulo A B C; recta vero cum eadem A B, auferens maiorem arcum quadrante A C, constituit in centro B, angulum recto angulo A B C, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum.

a 27. tertij.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstranimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansq; aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli B C D E, recta egrediens A E, secet rectam B D, bifariam in F. Dico & arcum B E D, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis A B, A D; quoniam duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia sunt, vtrumq; vtrique, basisq; B F, basi D F, æqualis ponitur; b erit angulus B A F, angulo D A F, æqualis. Igitur c arcus B E, arcui D E, æqualis erit. Sectus ergo est arcus B D, in E, bifariam.

b 8. primi.
c 26. tertij.

SECET iam recta A E, arcum B D, in E, bifariam. Dico rectam quoq; B D, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum

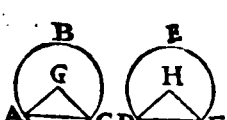
rum rectis AB, AD; quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; [a] *erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, utrumque utrique, angulosq; continent æquales, ut ostendimus;* [b] *erunt quoque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.*

[a] *27. tertij.*

[b] *4. primi.*

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



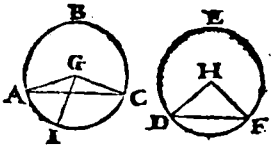
IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam ABC, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ducantur enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, DF, æquales. Igitur [c] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ AC, DF, quibus insistunt, [d] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] *8. primi.*

[d] *26. tertij.*

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint linea inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si quamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis



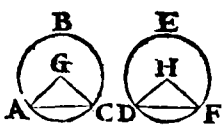
enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, simul circulo minorem, maiorem esse peripheria D F: Aptet. pheriam A B C, minorem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F: Ponitur autem basis A C, maior base D F. Igitur [a] angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H E, æqualis; eritque propterea [b] peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F: Ideoq; reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.

[a] 25. primi.

[b] 26 tertij.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F: Sunt autem & anguli G, H, [c] æquales, quod æqualibus peripheri js A C, D F, insistant. Igitur [d] bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 27 tertij.

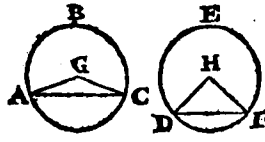
[d] 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiori

maior

maior linea, quam minorem. si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim aequalibus ABC. DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriae semicirculo minores AC, DF, sitq; AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor quã DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGG, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, aequalia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [a] erit basis AC, maior basi DF, &c.



[a] 24. primi.

SVNT autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligenda etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemque circulo.

ITAQVE eadem quatuor propositiones magis vniuersales sient, si ita proponantur.

IN aequalibus circulis, vel eodem, aequales anguli aequalibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN aequalibus circulis, vel eodem, anguli qui aequalibus peripherijs insistunt, sunt inter se aequales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

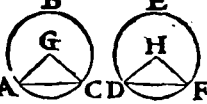
IN aequalibus circulis, vel eodem, aequales rectae lineae aequales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN aequalibus circulis, vel eodem, aequales peripherias aequales rectae lineae subtendunt.

QVID & sequentes propositiones demonstrare, nõ fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nã si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, [a] *ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta* [b] *ABC, DEF, similia. Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum.*

[a] 24. tertij.

[b] 24. tertij.

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentia ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IIII.

RECTAE lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.

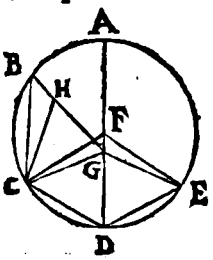
IN eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DF, dicantur æquales, [a] erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ AC, DF, ponantur similes, & inæquales.

[a] 28. tertij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, sumatur tabimetro AD, punctum G, prater centrum, constituanturque primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tum rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales esse. Quoniam enim



[a] *tã duo anguli CGD, CGE, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales sunt, sed ponuntur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulus FGC, angulo FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, uterque sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis GC, basi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG;* [b] *ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.*

DEINDE sint lineæ GC, GE. æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia: Est autem & basis FC, basi FE, æqualis. [c] *Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, baseq; æquales ponuntur GC, GE;* [d] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales,* [e] *atque idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum.*

TERTIO sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt, [f] *erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq; æquales contineant;* [g] *erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE,*

a 13. primi.
b 26. tertij.
c 8. primi.
d 8. primi.
e 26. tertij.
f 27. tertij.
g 4. primi.

FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.

VI.

SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

IN eadem figura proxima sint duo anguli æquales CGD, CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem esse. Ductis enim rectis BC, CD, [a] quo niam recta GB, maior est, quam recta GD, abscindatur GH, ipsi GD, æqualis, iungaturq; recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus lateribus GD, GC, æqualia sunt, angulosq; continent æquales; [b] erunt & bases CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Est autem GDC, in Isoscele FCD, acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtusus erit. Cum ergo, [c] duo anguli CHB, CBH, sint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare [d] latus BC, latere CH, maius erit. Est autem CH, recta ostensa ipsi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoque erit, quàm CD; ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat ostendendum.

[a] 7. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 17. primi.
[d] 19. primi.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur per-

perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam


secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erit latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus C D, D B, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur, & baſes AB, CB, æquales erunt; Ac propterea b peripheriæ A B, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendū.

a 4. primi.
b 28. tertij.

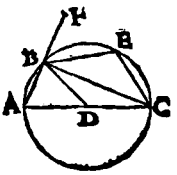
PRAXIS.

NON differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propoſ. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt A B C, intelligenda ſemper eſt recta linea eum ſubtendens A C, etiamſi ducta non ſit; atque ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem interuallo ſe mutuò interſecantes ſupra & infra puncta A, & C, &c. non ſecus, ac ſi recta recta A C, ſecanda eſſet bifariam. Recta enim diuidens rectam A C, bifariam, ſecabit quoque arcum datum bifariam.

30. THEOR. 27. PROPOS. 31.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui vero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, conſtituatur; in ſemicirculo angulus A B C, exiſtetque angulus B A C, in maiori ſegmento C A B. Conſtituatur quoque in C E B, minori ſegmento angulus B E C.



BEC. *Dico* angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, *in* maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectę DA, DB, æquales sunt, [a] erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadē ratione erit angul[us] DBC, angulo DCB, æqualis, ideoq; tot[us] angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. [b] Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

[a] 5. primi.

[b] 32. primi.

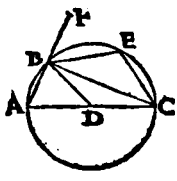
QVONIAM vero in triangulo ABC, [c] duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

[c] 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, [d] duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

[d] 22. tertij.

SATIS autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuū est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcumq; angulum in segmento maiore



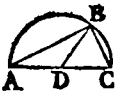
maiore B A C, esse recto minorem, ut constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineatur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunq; alius ostenderetur esse etiã recto minor, quia [a] *æqualis est angulo B A C, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.*

[a] 21. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta B C, & peripheria B E C, pars sit quoque anguli recti F B C; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

A L I A demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit angulus A B C, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D, [b] erunt anguli D B A, D A B, æquales, quod rectæ D A, D B, æquales sint. Cum igitur angulus B D C, externus [c] æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cum igitur [d] anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorũ dimidiũ, rectus: quod est primũ.



[b] 5. primi.

[c] 32. primi.

[d] 13. primi.

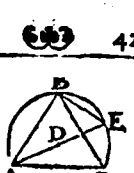
[e] 5. primi.

VEL sic. Quoniam [e] angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimidium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiusdem trianguli. Quocirca [f] cum tres anguli in triangulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.

[f] 32 primi.

SIT

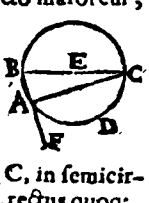
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum. Atque hęc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.



IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritque angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoq; Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC; constat vtrumque.



[a] 2 tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli,

guli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus ideo quod illis contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eò quod dimidium sit trium angulorum trianguli, a qui duobus rectis æqualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

a 32. primi.

EX CAMPANO.

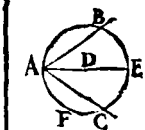
EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum una est.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. b Erit angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur uersus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, perueneriet, c vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si vlterius moueatur ad A C, d faciet à fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transiit ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, veritatem esse prædictæ consequentiæ.



b 31. tertij.
c 16. tertij.
d 13. tertij.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEG-

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

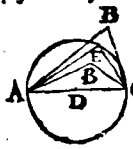
NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atque ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Praeterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit, semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoque maior erit. quod hypothesi aduersatur.

QVIN & *hoc theorema verum est; scilicet.*

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositum

positum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum DA, vel DC, circulus describatur AEC, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit, angulus AEC, rectus quoque. Quare anguli

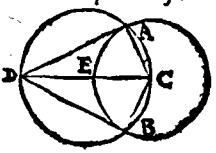


[a] 31. tertij.

recti B, & E, aequales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, [b] vel maior, vel minor angulo B. Transibit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.

[b] 21 primi.

EX ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.



SIT enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, iungaturq; recta DA, DB. Dico vtramque circulum tangere in A DB. Ductis enim rectis AC, BC, [c] erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per corol. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A; & recta DB, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quam hæc ad extremitatem semidiametri CB.

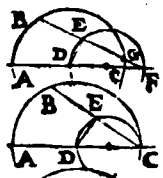
[c] 31. tertij.

SED & hoc theorema non inuiucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco; nimirum.

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta ejaculatur, à puncto vero, vbi hæc recta à posteriore circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

SIT

SIT circulus ABC, per cuius centrum D, describatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac denique ex puncto F, vbi circulus DEF, rectam AF, inter secat, ducatur recta FB, secans circumferentias in B E G. Dico BE, GE$_2$ esse aequales. Ducta enim recta DE, [a] erit angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Igitur [b] recta DE, rectam BG, secat bifariam.



[a] 31. tertij.
[b] 3. tertij.

QVOD si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit [c] rursum angulus DEC, in semicirculo DEC, rectus; ac propterea BC, in E, secabitur bifariam. SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum [e] angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Quare [f] recta DE, rectam BG, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

[c] 31. tertij.
[d] 3. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 3. tertij.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.

IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum ABCD, cuius duo opposita latera AD, BC, parallela sint, & aqualia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim recta AD, BC, parallela sint, & aquales, [g] erunt quoque AB, DC, parallela, & aquales. Parallelogrammum ergo est ABCD. Quia vero [h] & arcus AD, arcui BC, ob rectas aquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob aquales rectas AB, DC, aqualis est; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, aqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC,



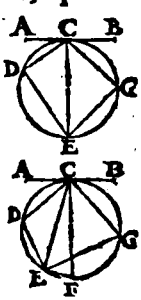
[g] 33. primi.
[h] 28. tertij.

a 31. tertij. *semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare* a *quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.*

31. THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, a quo ducatur recta CE, diuidens circulum in suo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoq; segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta CE, per centrum. b Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: c Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.



b 18. tertij.
c 31. tertij.

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, d connectatur recta EF: d eritque CF, perpendicularis ad AB, e & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulus rectus ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: f Est autem angulus CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis

d 18. tertij.
e 31. tertij.
f 21. tertij.

æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero C D E G, [a] duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: [b] Sunt autem & duo anguli A C E, B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si igitur circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 22. tertij.
[b] 13. primi.

SCHOLIVM.

POTEST *theorema hoc converti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primum recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum. Quoniam [c] *angulus C G E, rectus est, erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam vero C E, non transeat per centrum, construatur figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E, in alterno segmento maiore,* [d] *& hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo E C F, erit angulus A C F, æqualis duobus angulis E F C, E C F: Atqui anguli E F C, E C F, æquales sunt duobus rectis; quòd e angulus C E F, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo C E F,* [f] *æquales sint duobus rectis. Anguli igitur A C F, rectus quoque erit; ideoque per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget.*

[c] 31. tertij.
[d] 21. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 32. primi.

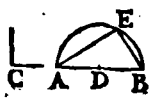
EODEM *modo, si angulus B C E, æqualis fuerit angulo C D E, in alterno segmento minori, ostendetur recta A B, tangere circulum. Cum enim* [g] *anguli B C E, A C E, duobus sint rectis æquales:* [h] *Item duo anguli C D E, C G E, duobus rectis æquales; si demantur æquales B C E, C D E, remanebunt*

[g] 13. primi.
[h] 22. tertij.

bunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.

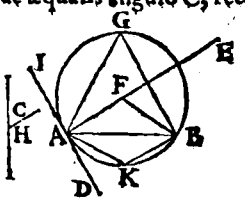
32. PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



RECTA data sit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus AEB; factumque erit, quod proponitur. Nam [a] angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

[a] 31. tertij.



SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE, in F. [b] Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualé angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB.

[b] 6. primi.

[c] 32. tertij.

SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo

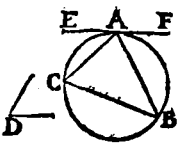
angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ ſupra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, deſcriptumque erit ſuper AB, ſegmentum AKB, in quo angulus K, æqualis eſt angulo dato obtuſo H. Nam angulus I A B, hoc eſt, angulus datus H, [a] æqualis eſt angulo K, in alterno ſegmento A K B. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat.

[a] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. 33.

A DATO circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus ſit A B C, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo D. [b] Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D.



[b] 17. tertij.

Dico igitur angulum A C B, in ſegmento ablato A C B, æqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim [c] angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno ſegmento A C B. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus F A B; erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum A C B, &c. Quod erat faciendũ.

[c] 32. tertij.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED.

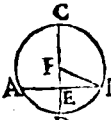


Aut enim vtraque linea tranſit per centrum, aut vna tantum, aut neutra. Tranſeat primum vtraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus vnius lineæ æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 1. ſcripſimus.

TRANSEAT deinde CD, ſola per centrum F, diuidatque primum rectam AB, bifariam, [a] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniã igitur CD, diuiſa eſt per æqualia in F, & per inæqualia in E; [b] erit rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, ſint æquales. Eſt autem quadratum rectæ FB, [c] æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum ſub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc eſt, rectangulo ſub AE, EB; cum AE, EB, rectæ ſint æquales: ac proinde rectangulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum, ex ijs, quæ ad defin 1. lib 2. ſcripſimus.

[a] 3. tertij.

[b] 5. ſecundi.



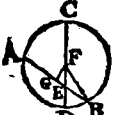
[c] 47. primi.

DIVIDAT iam CD, tranſiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB; [d] eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ FE, [e] æquale eſt quadrato rectæ FD, hoc eſt, quadrato rectæ FB: Eſt autem quadratum rectæ FE, [f] æquale quadratis rectarum FG, GE; & quadratum rectæ

[d] 3. tertij.

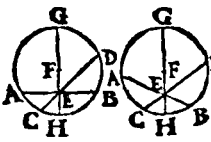
[e] 5. ſecundi.

[f] 47. primi.



rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub C E, E D, vna cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ G E, [a] æquale est eidem quadrato rectæ GB. Igitur rectangulum sub C E, E D, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnà cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale rectangulo sub A E, E B. quod est propositum. [a] 5. secundi.

TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta G H. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue A B, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub C E, E D, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue C D, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ seſe mutuò secent, &c. Quod demonstrandum erat.



SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit rei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circu-

culus per quælibet tria puncta earum extrema describitur, per quartum quoque punctum transibit.

SECENT se mutuo rectæ A B, C D, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiã C. Describatur enim per tria puncta A, D, B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub F E, E D, [a] *æquale est rectangulo sub A E, E B; & rectangulum sub C E, E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B; Erunt rectangula sub C E, E D, & sub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.*

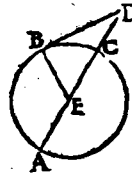
[a] 35. tertij.

35. THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo

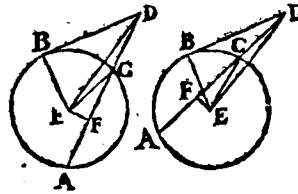
quo linea ducatur D A, secans circulum in C, [a] & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B.



Transeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, [b] quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, [c] erit rectangulum sub D A, D C, vna cũ quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectę D E, [d] æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod est propositum.

[a] 17. tertij.
[b] 18. tertij.
[c] 6. secũdi.
[d] 47. primi.

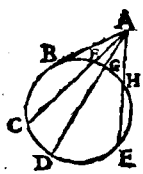
NON transeat iam D A, secans per centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; [e] eritque E B, ad B D, perpendicularis; [f] & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, [g] diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, [z] erit rectangulũ sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, vna cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, [h] æquale quadratum rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et [i] quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadratum rectæ D E, [k] æquale sit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo communi



[e] 18. tertij.
[f] 3. tertij.
[g] 6. secũdi.
[h] 47. primi.
[i] 47. primi.
[k] 47. primi.

muni quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

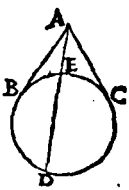
COROLLARIVM. I.



HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, a *erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.*

a 36. tertij.

COROLLARIVM. II.



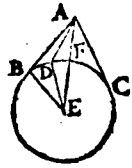
CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, b *æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.*

b 36. tertij.

COROL.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, [a] erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, [b] erit angulus ADE, maior angulo ABE.



[a] 18. tertij.

[b] 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F, [c] erit AD, cum sit propinquior minimæ AF, minor quam AB, quæ a minimæ AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD, sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales. quod est absurdum. [d] Sunt enim maiores AB, BE, quàm AD, DE. Solum igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangãt: Quod est propositum.

[c] 8. tertij.

[d] 21. primi.

COROLLARIVM. IIII.

ILLVD deniq; constat etiam si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt.

possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntq; ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum.

a 8. tertij. a Duæ enim tantum duci possunt.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duo recta æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. b Igitur anguli B, F, æquales erunt: c Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit: atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.

b 8. primi.
c 18. tertij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex punto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & secans AE, quæ primum per centrum F, transeat; secetque circumferentiam in D. Dico rectangulum sub AE, AD, æquale esse quadrato ex AB. Descripto namque ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vsque ad H, I; & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, æquales, ac prinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, KL, æquales erunt, secabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub KD, DL, æqualia inter se erunt, atque ideo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; KD, DL. Itaque quoniam rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub AE, (quæ ipsi HD, ostensa est æqualis) AD, d æquale est rectangulo sub KD, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB; constat propositum.



d 35. tertij.

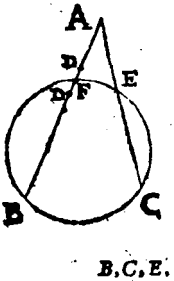
SED

SED iam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetq; circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, aquale esse. Describpto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsque ad G, I; & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Erunt que ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, aquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, aquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, aquales erunt, secabunturq; in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, aqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob aqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Itaq; quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, (quia ipsi GC, ostensa est aqualis) AC, [2] aquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sine quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur. [2] 35. tertij.

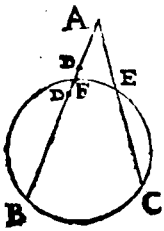
PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo fere conuertemus.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quam vmetiam punctum extremum transibit.

EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint aqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta



B, C, E.



B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. diximus) circulus B C E, qui si dicatur non transire per quartũ punctũ D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub A E, A F, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub A C, A E; & rectangulum sub A B, A D, eidem rectangulo sub A C, A E, pariter æquale: erunt rectangula sub A B, A F, & sub A B, A D, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.

LICEBIT quoque ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehẽsum, quadrato alterius sit æquale.



SINT data duæ rectæ A B, & C, sitq; ipsi A B, maiori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, minoris. Diuisa recta A B, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallũ A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipsi C, æqualis, ac deniq; ex E, per A centrum recta extendatur E F, secans circumferentiam in G. Dico si recta A B, adijciatur B G, ipsi E G, æqualis, rectangulum sub tota A G, & G B, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub F E G, æquale est quadrato rectæ E D; (quod E D, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulum sub F E, E G, æquale rectangulo sub A G, G B, (quod rectæ F E, E G, rectis A G, G B, æquales sint. Sunt

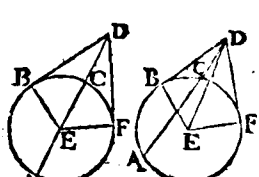
*36. tertij.

enim eſt GB, ipſi EG, æqualis, & AB, ipſi FG, æqualis poſita eſt,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex conſtructione.) æquale. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod eſt propoſitum.

NON ſecus propoſitum demonſtrabitur, ſi recta C, minori adiungenda ſit recta, ita vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum quadrato rectæ AB, maioris æquale ſit.

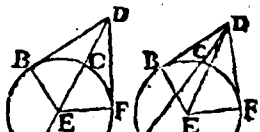
THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.



EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctum ſumatur D, a quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; ſitque rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB: Dico DB, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod ſi DA,

[a] 17. tertij.



si D A, secans non transeat per cẽtrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, æquale est quadratũ rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E; & basis D E, communis: erunt anguli D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D F E, rectus est, quòd D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

a 36. tertij.
b 8. primi.
c 18. tertij.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ejecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.

IN priori figura huius propos. duæ rectæ DB, DF, circulum ABCF,

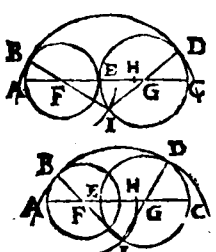
A B C F, tangant in B, F, punctis, qua ex 2. coroll. prædecimi propoſ. æquales erunt. Vel ducantur quæcunque duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, ſectum eſſe bifariam à recta D A. Cum enim iunctis rectis E B, E F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia ſint, baſisq; E B, baſi E F, æqualis; [a] erunt duo anguli ad D, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum. [a] 8. primi.

D I V I D A T iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum tranſire. Si enim in D A, non eſt centrum, ſit extra ipſam centrum E, iungaturq; recta E D, vt in poſteriori figura huius propoſ. Ergo, vt demonſtratum eſt, recta E D, angulum B D F, bifariam dimidiat; ac propterea anguli B D A, B D E, cum ſint dimidiatæ partes anguli B D F, æquales inter ſe erunt, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta D A, per centrum. Quod demonſtrandum erat.

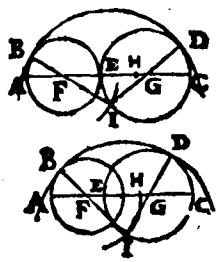
S E D & ſequens problema cum Ioan. Bapt. Benedicto abſoluemus, quod ad propoſ. 17. huius lib. promiſimus, debueramuſque ibidem demonſtrare, niſi memoria excidiſſet. Eſt autem eiuſmodi.

DATIS duobus circulis, quorum vnus non ſit totus intra alium, circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere.

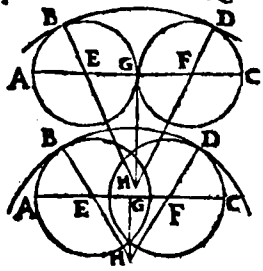
S I N T primum duo circuli ſe mutuò tangentes, aut ſecantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentijs in A, C, quæ, ſi circuli ſe tangant in E, [b] *per contactum E, tranſibit. Abſciſſa recta E H, ex ſemidiametro maioris circuli, quæ ſemidiametro minoris ſit æqualis, deſcribatur ex F, centro minoris ad interuallũ rectæ*



[b] 12. tertij.



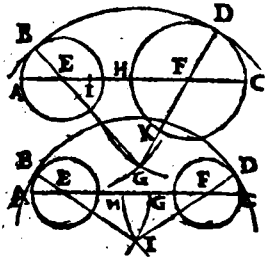
HC, quæ maior est, & semissem minoris, arcus secantium circumferentiam maioris in duo ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentijs in B, D. Eæquales CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, æqualis est, per constructionem, erunt totæ CE, IB, æquales. Cũ ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis sit, erit quoque IB, ipsi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra utrumque circulum cadat totus, tanget utrumque circulum in B, D. Quod est propositum.



SINT deinde duo circuli se mutuò tangentes, vel secantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariam in G, (Quãdo circuli se mutuò tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales, minimum rectos; [a] erunt & bases HE, HF, æquales: Et additis semidiametris æqualibus EB, FD, totæ lineæ HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, eadetq; extra utrumque circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. Quare utrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

[a] 4. primi.

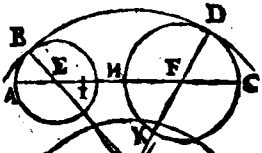
TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et si circuli sint inæquales, descri-



describatur ex E, centro minoris ad internallum diametri maioris CH, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad internallum rectæ FI, compositæ ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro minoris æqualis. Possumus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipsi FI, æqualis est: ablatis æqualibus FK, FH; reliqua æquales erunt KG, HI. Est autem HI, sumpta æqualis semidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipsi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, sit æqualis; erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumq; circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorũ distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, sumãtur rectæ æquales AG, CH, ita vt qualibet semisse ipsius AC, superet: & ex cẽtro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex cẽtro F, per H, descriptus: ac denique ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, positæ sint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod est propositum.

AT M. vero eadem arte describemus circulum data magnitu-



gnitudinis, qui datos circulos proposito tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectus æquales abscindam AG, CH, reliqua perficiemus, vt proximè dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex coroll. propos. 13 Ioannis lib.

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCL

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVARTVM

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides quarto hoc libro de variis inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M trianguli K L M, non



tangit latus MI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI: quamuis tamen illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.

II.

SIMILITER & figura circum figurã describi dicitur, cum singula eius, quę circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM proprie figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero aqualia, & angulos numero aquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

VI

VT ſe tangant anguli A, B, C. trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulũ in circulo eſſe inſcriptũ. Quod ſi vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum eſſe inſcriptum in circulo.



IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera eius, quæ circunſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero, ſi latera trianguli ABC, ſingula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

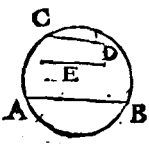
CIRCVLVS autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit eius figuræ, quam circunſcribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura deſcri-

tionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At vero circulus A B C, in figura definitionis 3. descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem inscribi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VIII.

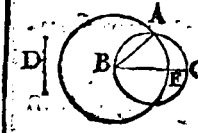
RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.



VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

1. **PROBL. 1. PROPOS. 1.**

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.



IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter a sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata cir-

a 15. tertij.

erit B C, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, [a] abscindatur B E, æqualis ipsi D; & centro B, interuallo autem B E, circulus describatur E A, secans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [b] Est enim B A, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidem B E, per constructionem. Quare A B, & D, inter se æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectâ lineâ accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

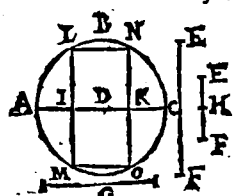
[a] 3. primi.

[b] 15. defin. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. [c] Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G, parallela. Quod si recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero E F, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur D I, ipsi H E, & D K, ipsi H F, æqualis, ut tota I K, toti E F, sit æqualis. [d] Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O; iungaturq; L N. Dico L N, accommodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, N O, æqualiter a centro distent, [e] ipsæ æquales inter se erunt: [f] quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta A C, per centrum D, transeunte; erũt & earum semisses L I, N K, æquales. [g] Quia vero L I, N K, parallelæ etiam sunt; [h] erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, [i] & ipsi G, parallela.



[c] 31. primi.

[d] 11. primi.

[e] 14. tertij.

[f] 3. tertij.

[g] 28. primi.

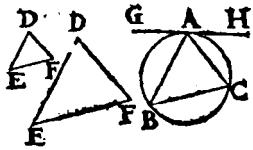
[h] 33. primi.

[i] 30. primi.

lela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



SIT in circulo ABC, dato describendum triangulo æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis & angulus HAC, angulo E, atq; extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quod [a] anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, [a] minores sint [b] duobus rectis. [b] Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, [c] æqualis angulo GAB, & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo HAC, & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, [e] erit quoque reliquus anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

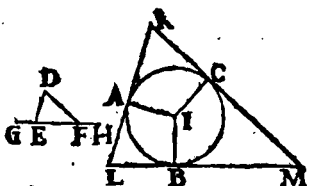
[a] 17. primi.
[b] 13. primi.
[c] 32. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 32. primi.

PRO

PROBL. 3. PROPOS. 3.

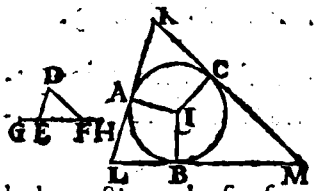
3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulũ æquiangulũ dato triãgulo D E F. Producto latere E F, vtrinq; ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I K, æqualis angulo D E G; & angulus B I C, angulo F H, Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibunteque in punctis K, L, M. Si enim ducerentur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; ac proinde A K, C K, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, faciet supra rectas A I, C I, quòd hę angulũ constituant. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, per coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad I F; sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis G, D F H, æquales; erit reliquum spatium A I C, reliquis duobus angulis D E F, D F E, æquale: Sed hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum C I, vnam rectã lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra I C. Cadit igitur necessario A I, producta infra C I; atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K. Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo D E F. Quoniam enim omnes anguli quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad

17. primi.



ad 32. propoſ. lib. 1. dictum fuit; & anguli IAL, IBL, ſunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur [a] & anguli DEG, DEF, ſint

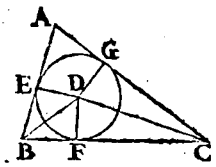
[a] 13. primi.

duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Patet ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo DFE. [b] Reliquus igitur angulus K, reliquo anguloD, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum &c. Quod efficiendum erat.

[b] 32. primi.

4. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere.



SIT deſcribendus circulus in dato triangulo ABC. Diviſis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum cocant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE. DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales ſunt duobus angulis DBF, DFB, trianguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; [c] erunt quoq; latera DE, DF, æqualia. Eademq; ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum DE, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

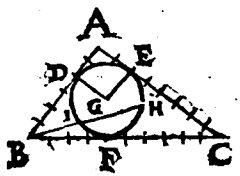
[c] 26. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

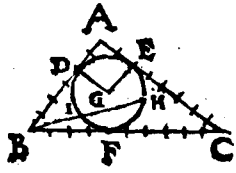
VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; a in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate. a 20. primi.

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in eandem peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



SIT triangulum ABC, b cui circulus inscribatur DEF, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, recta CE, & recta AD, recta AE, aquales sunt; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, aquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint aqualia; superabunt eadem latera BA, BC, latus AC, rectæ, quæ dupla est segmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et, quadratum rectæ BD, aquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, rectæ, cuius qua- b 4. quarti.

c 36. tertij.



quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub BH, BI. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi angulus A, rectus ſit, dico non ſolum duo latera AB, AC, ſuperare latus BC, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub rectis ex A, in circuli peripheriam ductis, & eius ſegmento exteriore, vt oſtenſum eſt: verum etiam exceſſus illum eſſe diametro circuli DEF, aequalem. Ducti enim ex centro G, ad puncta cõtactuum D, E, rectis GD, GE; [a] erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & anguli A, ſint recti, [b] erunt tam rectae AE, DG, quàm AD, BE, parallelae inter ſe: atque idcirco AG, parallelogrammum erit. [c] Quare tam recta AD, ſemidiametro EG, quàm recta AE, ſemidiametro DG, aequalis erit: hoc eſt, duae rectae AD, AE, ſimul totî diametro circuli erunt aequales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt oſtenſum eſt. Nam EC, ipſi FC, & DB, ipſi FB, aequalis eſt, ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, ſuperant latus BC, diametro circuli inſcripti. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE quauis duo latera ſuperant reliquum duobus rectis circulum triangulo inſcriptum tangentibus, quiuis angulum duobus illis lateribus comprehenſum, & circuli interiù tangunt. Oſtenſum enim eſt, latera AB, AC, ſuperare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

IAM vero his ita demonſtratis, ſi data latera trianguli cognita ſint, inuenientur nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inſcribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, AB, AC, ſuperare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quae quidem aequales ſunt: ſi detur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duae tangentes AD, AE, notae. Semiſis ergo huius exceſſus dabit vtrumque punctorum D, E. Reliquum deinde ſegmentum EC, dabit ſegmentum CF, vſque ad punctum tertiũ F: Vel reliquũ ſegmentũ DB, dabit ſegmentum BF, ad idem punctũ F. Si igitur ex duobus punctis D, E,

[a] 18. tertij.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.

erigantur

erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorũ. Dempto itaque latere BC, 10. palmorũ ex duobus lateribus AB, AC, hoc est, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD, quàm AE, duos palmos continebit. Segmentum ergo DB, continebit 4. palmos, totidemque segmentum BF, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere AB, 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id est, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumque ergo segmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE, AD, 2. palmorum, & vtrumque BD, BF, 4. palmorum. Postremo dempto latere AC, 8. palmorum ex lateribus AB, CB, hoc est, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo segmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque AD, AE, 2. palmos.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum describere.



SIT circulus describendus circa datum triãgulum ABC. Diuidantur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, cocuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta essent rectæ DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus

BD,

[a] 4. primi.



BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti: erit baſes FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, adinterualium FA, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, [b] *omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi vero ſit in latere BC,* [c] *angulum BAC, eſſe rectum, quia ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum,* [d] *angulum BAC, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.*

[b] 31. tertij.

[c] 31. tertij.

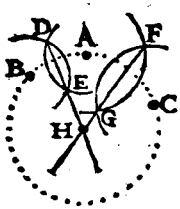
[d] 31. tertij.

CONTRA vero perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi vero extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti: ſi vero extra, eſſet angulus oppoſitus, obtuſus. Denique ſi in triangulo obtuſangulo caderet in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus: ſi vero intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius 17. coll. colligũntur, & pugnant cum hypotheſi.

SCHO-

SCHOLIVM.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quânam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, vt hac propos. tradiderimus est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis intervallo eodem duo arcus describantur se inter secantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio intervallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur secãtes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H. esse centrum circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.



PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere,



SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum

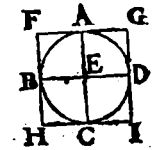


omnia sint ex centro; & anguli contacti sunt recti; [a] erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD; Item rectæ CD, DA; Et rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; [b] erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales; [c] ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autem, [d] & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD; propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 26. tertij.
[c] 29. tertij.
[d] 31. tertij.

7. PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.



SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, [e] erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. [f] Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, [g] erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur & AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse, & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera

[e] 28. primi.
[f] 30. primi.
[g] 34. primi.

latera FG,FH,HI,IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 8.

IN dato quadrato circulum describere.



SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. [a] Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI. IB, CI, ID; ideoque rectæ IE, IF, IG. IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH. AE: Sunt autem hę inter se æquales, cum sint semissęs æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. [b] quòd ængulr ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat. [a] 33. primi. [b] 29. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD.

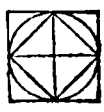


Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli A B D, æqualia sunt, [a] erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus BAD. rectus. [b] Quare A B D, A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; [c] erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 6. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



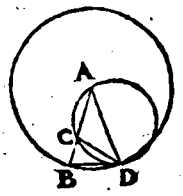
10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ [d] diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus

[d] 11. secunda.

circulus describatur, in quo [a] accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD; & recta AB, secat circulum DCA: tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, [d] æqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem [e] æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, [f] cum ABD, ADB, æquales sint: ac propterea [g] rectæ CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c Quod erat efficiendum.



[a] 1. quarti.
[b] 5. quarti.
[c] 37. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 32. primi.
[f] 5. primi.
[g] 6. primi.
[h] 5. primi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli ABD, æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres [k] æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

[i] 32. primi.
[k] 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quòd se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam, BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquū habeat quācunque proportionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib. 4. Quæ res hactenus desiderata est.

11. PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [a] Construatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G H, duplus sit reliqui F: & in circulo [b] inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & vterque angulorum ACD, ADC, [c] bifariam diuidatur rectis CE, DB; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico

[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. primi.

Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inscriptũ, esse equilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. [a] Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco, [b] & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. [c] Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit in dato circulo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.



[a] 26. tertij.
[b] 29. tertij.
[c] 27. tertij.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, *angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti.* [d] *Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant; sit autem CAD, per coroll. precedentis propos. quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti; erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.*

[d] 27. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD *si detur recta linea terminata CD, super eã constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo.* [e] *Fiat triangulum Isosceles FGH, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde*

[e] 10. quarti.

[a] 32. primi.

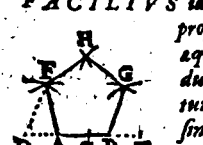


constituantur anguli ACD, ADC aequales angulis G, H, coeantq; vt CA, DA, in A, [a] quae efficient angulum CAD, aequalem angulo F ac propterea trianguli ACD, vtrique angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam

[b] 5. quarti.

vero circa triangulũ ACD, circulus [b] describatur ABCDE. In quo cum sit inscriptum triangulũ ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum aequilaterum, & aequiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta



proposita AB, supra quam pentagonum aequilaterum, & aequiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramq; partem, sintq; AD, BE, maiori segmento AC, aequales. Interuallo deinde data recta AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur rectae AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse aequilaterum, atque aequiangulum. Quòd enim sit aequilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineae ipsi AB, sumptae sint aequales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quòd autem sit & aequiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quòd basis AD, aequalis est maiori segmento AC, lineae AB, vtrumuis vero laterum aequalium ipsi AB, aequale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorũ rectorũ, nimirum, BAF, reliquas tres quintas duorum rectorũ continebit. Cũ ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni aequilateri, & aequianguli complectatur tres quintas duorũ rectorum; erit BAF, angulus pentagoni aequilateri, & aequianguli. Eademq; ratione erit AB G, angulus

pen-

pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessariò in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque ideirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non ferent. quod est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.

[a] 21. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

12.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [b] Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; [c] coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL; erunt quadrato rectæ FH, [d] æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quàm rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarū FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam constat

[b] 11. quarti.

[c] 13. prim.

[d] 47. primi.



constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, [a] æqualis, vt ostensum est; [a] erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur [b] & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cum igitur [c] anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentijs AB, BC, [d] quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur AB, BC, erunt & dimidij eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF; [e] erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Aequilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

[a] 8. primi.
[b] 4. primi.
[c] 27. tertij.
[d] 28. tertij.
[e] 26. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quacunq; figura aequilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum

netrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosq; conficere æquales; si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.



SIT inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF, sint minores duobus rectis; (Nam quia angulus BAE, duobus rectis minor est, erit eius semissis, nimirum angulus BAF, recto minor. Eodemque modo ABF, minor erit recto,) [b] coibũt necessario rectæ AF, BF: atque adeo intra pentagonum. Nam si ducerentur rectæ AC, AD, (quas tamen ducendas non censuimus, ne multitudo linearum confusionem pareret. Quilibet si vult, poterit eas ducere, vel saltem punctis notare.) [c] essent ipsæ inter se æquales, angulique BAC, EAD, æquales etiam, propterea quòd latera BA, BC, lateribus EA, ED, æqualia sunt, æqualesque continent angulos B, E. Hisce ergo angulis ablatis ex angulis æqualibus BAF, EAF, reliqui essent æquales anguli CAF, DAF. Quare recta AF, diuidens in Isoscele ACD, angulum CAD, bifariam, secabit producta basin CD, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. Non aliter demonstrabitur, rectam BF, productam

[a] 9. primi.

[b] 13. pron.

[c] 4. primi.

secare



secare bifariam rectam D E. Quocirca necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuo intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli C B F: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; [a] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli F A L; estque latus AF, subtensum vni æqualium angulorum, commune; [b] erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt. per corroll. propos. 16. lib. 3 eo quòd angulos rectos faciant cũ semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi.

[b] 26. primi.

SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, sic vt puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi.

PROBL

PROBL. 14. PROPOS. 14. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quòd toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT



SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrũ G, inscribendum hexagonũ equilaterũ, & æquiangulũ. Ducta diametro AD describatur circulus ex centro D, interuallo vero DG, qui secet circulũ datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F, quod dico esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim recta GC æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, DC æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare [a] tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum [b] æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, [c] æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales: quibus cum etiam [d] æquales sint ad verticẽ anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. [e] Quare circumferentiæ, quibus insistunt, ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia B C, æqualis est circumferentiæ A F; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ B C D E F, A F E D C, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, [g] æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, D E F, E F A, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui compositio ex quatuor arcubus æqualibus nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertij.
[f] 29. tertij.
[g] 27. tertij.

C C

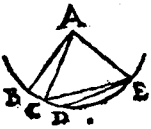
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus aquare semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, aquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, ut hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, dividenda erunt duo anguli proximi bifariã. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. traditur.

PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vterque laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. [a] Erit ergo subtensa D E, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hæc maior quàm D E, ex scholio propos. 29. lib. 3. hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare punctis duabus semidiametris A C, A E, erit triangulum A C E, Isosceles, cuius tertium latus C E, vtrouis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam [b] anguli A C E, A E C, æquales sunt, [c] & simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta A B, erit angulus B A E, quadranti B E, in centro insistens rectus, & scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde C A E, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum A C E, habens tertium latus C E, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.



[a] 15. quarti.

[b] 5. primi.

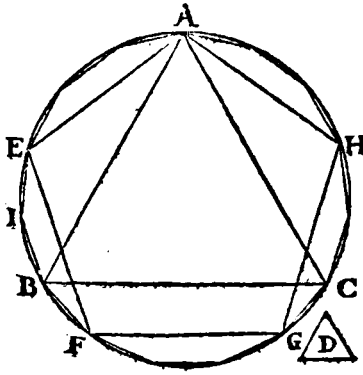
[c] 17. primi.

PROBL.

16.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.



SIT in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 6. lib. 1. erit etiam æquiangulũ; [a] inscribatur ei æquiangulum triangulum ABC, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1, [b] eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA æquales vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars est totius circumferentiæ. [c] Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum AEFGH, applicans vnum angulum ad punctum A; [d] eruntque quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. [e] Diuiso ergo arcu EB, bifariam in I, et arcus

[a] 2. quarti.
[b] 26. vel 28. tertij.
[c] 11. quarti.
[d] 28. tertij.
[e] 30. tertij.

arcus B I, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, [a] æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod [b] & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

[a] 1. quarti.
[b] 27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

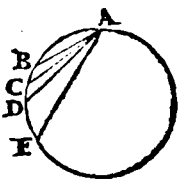
SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figura in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quòd ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quòd ea sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, à 5. binario. Igitur arcus BE, continet duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; diuiso arcu BE, bifariam in I, erit subtensa recta BI, latus figuræ 15. laterum, angulorumq; æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ

bendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulumque æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstratur. Qualium partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentia; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentia. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.



PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

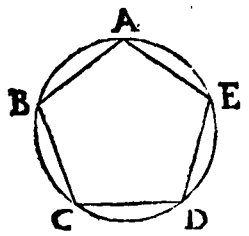
ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

NON

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessario æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimnm, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

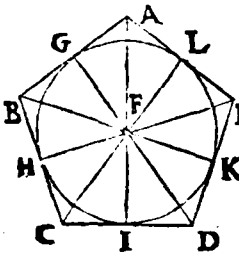
SIT enim figura aquilatera quotcunque angulorum A B C D E, *circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquiangulam. Cum enim latera* AB, BC, CD, *sint æqualia,* [a] *erunt arcus quoque* AB, BC, CD, *æquales; ac proinde & totus arcus* ABC, *toti arcui* BCD, *æqualis erit. Reliqui ergo* ADC, BED, *in eodem circulo æquales erunt. Quocirca* [b] *anguli* A B C, B C D, *illis insistentes æquales erunt: Eodemq; modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura* A B C D E, *æquiangula est, siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.*



[a] 28. tertij.

[b] 27. tertij.

SIT rursus figura aquilatera A B C D E, *quotlibet*



angulorum numero impar circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque aquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, [a] erunt ea ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo & [b] bases FG, FL, ex centro sint æquales; [b] erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, dimissus erit bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos omnes angulos figuræ factos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia sunt, angulique illis contenti, basis æquales; [c] erunt quoque bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoq; æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqualis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli imparium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt; cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ

[a] 18. tertij.

[b] 8. primi.

[c] 4. primi.

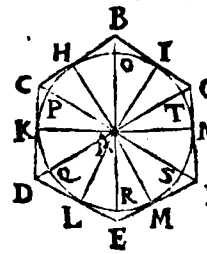
figura propoſita inter ſe æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

HÆC demonſtratio in figuris aquilateris circulo circumſcriptis, qua habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim ſolum concludetur, primum angulũ æqualem eſſe tertio, quinto, ſeptimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquàm autem probabitur, primum vltimo eſſe æqualem, eo quòd vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam ſolum ex eadem demonſtratione colligetur, angulum ſecundum æqualem eſſe quarto, ſexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquàm autem oſtendetur, ſecundum angulum eſſe primo æqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaque ſoli anguli imparium locorum inter ſe, & ſoli quoque anguli locorum parium inter ſe ſemper conuincentur æquales.

QVOD ſi duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnius eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus ſit, fuerint inter ſe æquales, tum demum per ſuperiorem demonſtrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam ſi primus angulus æqualis ſit ſecundo, (quando enim duo anguli proximi ſunt æquales, licebit vnum eorũ dicere primum, & alterum ſecundum,) cum oſtenſum ſit, primum eſſe æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupãtibus, ſecundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter ſe æquales. Si autem primus angulus æqualis ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi ſunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari exiſtat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, vel octauum, &c. prout ab illo diſtiterit, non autem ſecundum, quia ſecundus primo proximus eſt.) cum primus oſtenſus ſit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & ſecundo angulo; erit quoque primus ſecundo æqualis: hoc eſt, duo proximi inter ſe æquales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonſtrauimus, omnes anguli inter ſe erũt æquales.

VERVM ſi dicat forſan aliquis, quanquam ex ea demonſtratione colligi nequeat, omnem figuram aquilateram, cuius angulorũ numerus ſit par, circulo circumſcriptam, eſſe

quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ut proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo ut nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quæ simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis aliis asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, dividatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus CH. Arcui quoque OH, æquales sumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt sex arcus æquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum non proximorum, sed inter binas singulis relictus in medio, sumantur. Erunt que ad vtrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK; RL, RM; TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Cadent autem necessario recta HB, AB, propterea quòd duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia sunt, [a] angulosq; continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, insistentes; [b] erunt quoque bases BH, BI, & anguli HI, æquales. Cum ergo BHA, rectus sit ex constructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I. conueniet que cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio



a 27. tertij.
b 4. primi.

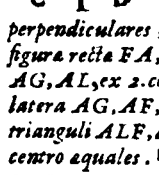
scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum T I, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli G A I, duobus angulis H, A, trianguli C A H, æquales sunt; (Nam I, H, recti sunt,) [a] & G A I, C A H, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus T I, P H.) lateraq; A I, A H, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt quoque latera G I, G A, lateribus H C, C A, æqualia. Cum ergo & B I, ipsi B H, ostensa sit æqualis; erit tota B G, toti B C, æqualis. Eadem ratione, ducta recta G N, tanget circulum in N, coibitq; cum semidiametro A F, producta in F, eritq; ipsi G B, æqualis. Item iuncta recta F M, circulum tanget in M, & cum semidiametro A R, producta conuenient in E, ipsiq; F G, æqualis erit. Similiter ducta recta E L, tanget circulum in L, & semidiametro A Q, protracta occurret in D, ipsiq; E F, fiet æqualis. Denique iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro A P, producta concurret in C, fietq; ipsi D E, æqualis. Quòd autem D K, in eodem puncto C, occurrat semidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta C K, circulum tangeret in K, vt demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, [c] Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumscriptum, æquilaterum. At idem esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura B C D E F G, æquilatera est, erunt quidem per ea, quæ paulò ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se æquales; omnesq; recti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, [d] tribus angulis trianguli A C H, æquales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Est autem B A H, maior quàm C A H, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus O H, maior sit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit: qui cum semisses sint totorum angulorum B, C, vt ostensum est; erit totus quoque C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo tots anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum B C D E F G, æquiangulum. Quod erat ostendendum.

[a] 27. tertij.
[b] 26. primi.
[c] 16. tertij.
[d] 32. primi.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fiet, si in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

QVOD si figura æquilatera quotcunque angulorum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta numerum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inscripta angulis, &c. vt factum est in pentagono propos. 12. tum necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdem propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parē quemcunq;, vt quartū, (si enim secundū occuparet, esset primo proximū, quod est cōtra hypothesim.) sextum, octauū, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.



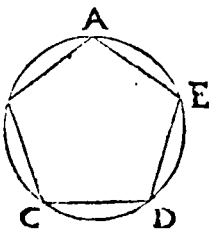
SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessariò æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FB, FI, FK, FL, [a] *quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos 36. lib. 3. æquales sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro æquales.* [b] *Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus com-*

[a] *18. tertij.*

[b] *8. primi.*

comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse: ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Est autem latus FG, uni æqualium angulorum oppositum, commune. [a] Igitur latera quoque AG, BG, æqualia erunt; atque ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eadem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidiæ æquales sunt, erunt quoque totæ lineæ AB, AE, æquales. Eademq; ratione AB, BC; & BC, CD; & CD, DE; & DE, EA, æquales erunt. Quamobrem figura ABCDE, æquilatera est, sive numerus laterum sit par, sive impar. Quod erat demonstrandum. [a] 26. primi.

SIT rursus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterũ numero impariũ circulo inscripta. Dico eã necessariò esse quoq; æquilaterã. Quoniã enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; [b] erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex cõi circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dempto ergo cõi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, æqualis erit; ac proinde [c] & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quod. q; latus ei, a quo tertiũ est, uno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (cõstituì autẽ quoduis latus potest primũ) æquale erit tertio, tertiũ quinto, quintũ septimo, septimũ nono, &c. atq; in hunc modũ omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, ut secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt; cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit ultimum primo, cui proximum est. Hoc autem ultimum:



[b] 26. tertij.

[c] 29. tertij.

vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod si vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus aliis secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

HÆC etiam demonstratio in figuras æquiangulas pariū laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & aliis loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quod vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & alijs loca paria possidentibus; at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eò quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium laterum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui loci parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ad illo dixerit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cum primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI

SI quis autem dubitet, dari posse figuram aquiangulam parium laterum circulo inscriptam, qua non sit aquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse aqualia, si omnes anguli aquales sint: contrarium tamen ex ea inferri non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior aquiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non aquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero sit hexagonum aquilaterum & aquiangulum ABCDEF, in circulo descriptum; sumaturque in arcu BC, quouis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus aqualis DH; Item in quinto ab eo arcus aqualis FI; iungantur q; rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, aquiangulum esse, at non aquilaterum. Quòd enim sit aquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] aquales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione aquales sunt anguli D, H, & F, I. Praterea quia arcus BG, DH, aquales sunt, per constructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, aquales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, aquales erunt; [b] ac proinde anguli BCD, GCH, illis insistentes aquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos DEF, HEI, & FAB, IAG, aquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sex angulis hexagoni ABCDEF; aquales sunt, singuli singulis: ideoq; cum hoc ponatur aquiangulum, erit quoque illud aquiangulum. Quòd autem non sit aquilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, aqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inaqualia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper uno in medio, aqualia



[a] 21. tertij.

[b] 27. tertij.

æqualia sint, vt supra ostendimus.

IDEM prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura æquilatera, atque æquiangula.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perfectum est.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam scimus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem contemur, qua tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24 laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figura inscribetur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulū æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isosceles habens

habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli aquales diuidantur in tres angulos aequales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin quadruplus est eius, quis ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos aquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hac angulorum ad basin in partes aquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli aquales ordine quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum aqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes aquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accommodentur recta aquales in circulo. Basis enim semper est vnum figura latus, vt in Pentagono patuit.

PARIVM vero laterum figura in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli aquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorū ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quarta parti circumferentia. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos aequales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidium insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentia, & circo angulus ad verticem vnam diuidat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sexta parti circumferentia, cum reliqui anguli simul compositi cōtineant ipsum quinquies; propterea quòd quilibet bis eum continet, & dimidium eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis vtrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad verticem, &c.

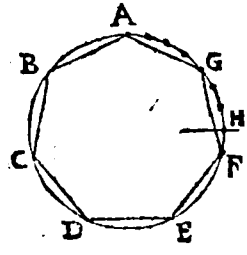
SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula construantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui

ad

ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figura omnes laterum imparium. Et si arcus earum dimidentur bifariam, inscribetur quoque omnes figura parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice dividetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desideratæ; de absoluta figurarũ rectilinearum omnium descriptione intra circulũ, &c. cum eius demonstrationes falsa sint, ac sophisticæ, vt Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figura æquilatera, & æquiangula in circulo describantur: verũ etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quæ etiam eiusdem linea inflexa beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

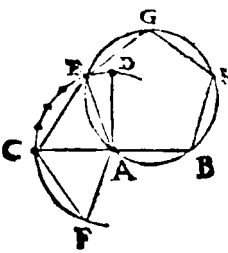
SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quælibet æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans AH, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulos figura inscribenda continebit: cabis autem quadrantẽ AH in propositas partes æquales ex ijs, quæ ad finem lib. 6. in de-



demonſtraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius
una modo magis, modo minus, donec reperias eorum diſtan-
iam partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim
uadrans in quotuis aequales diuidetur partes, quàm tota
ircumferentia, quòd ſæpius attentando, & quaſi repetendo
ou, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in ma-
na, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio
ircini accepta, ſi ea partem deſideratam non offerat. Secto
uadrante in ſeptem partes aequales, vel in plures, ſi figura
lurium laterum deſideretur, erit recta linea A G, qua qua-
uor eiuſmodi partes ſubtendit, latus figura inſcribendæ.

Quoniã enim in tota circumferentia quater tot partes aqua-
les continentur, in quot quadrans diuiſus eſt, continebitur ag-
gregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia,
quoties vna pars in quadrante: quia qualibet pars cum aliis
tribus, quarum ſingula in ſingulis aliis tribus quadrantibus
accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod
etiam ita perficiemus fiet. Quoniam partes eandem propor-
tionem habent, quam earum aequemultiplicia, vt ab Eucli-
de demonſtratur lib. 5. propoſ. 15. (Liceat enim hoc accommo-
dare eam propoſ. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.)
ita ſe habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum
vnius partis, hoc eſt, arcus AG, ad quadruplum quadrantis,
id eſt, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadran-
tis eſt vna illarum, in quas quadrans diuiſus eſt, talis erit ar-
cus AG, totius circumferentiæ. Atque ita ſi quadrans diuiſus
ſit in 7. partes, continebuntur eiuſmodi partes 28. in tota cir-
cumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius cir-
cumferentiæ. Ita quoque ſi quadrans ſectus ſit in 11. partes,
continebuntur eiuſmodi partes 44. in tota circumferentia: at-
que adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc eſt, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ:
& ſic de cæteris. Itaque ſi arcui A G, quatuor partium ab-
ſcindantur arcus continuè æquales, eiſdemque arculus rectæ
ſubtendantur, inſcripta erit circulo figura propoſita, vt ex de-
monſtratis liquet.

IAM vero ſi ſupra datam rectam lineam quauis figura
æquilatera, & æquiangula deſcribenda ſit, efficiemus id hac
ratione. Sit ſupra datam rectam A B, conſtituendum pen-
tagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad
C, ut



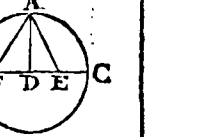
C, vt AC, ipsi AB, aequalis fit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaq; AD, perpendiculari ad AC, vt quadrans sit CD, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrãs CD, in quinque partes aequales, in tot videlicet, quot latera figura constituenda sit; quarum 4. sint CE, iungaturque recta AE, quae ipsi AB, aequalis erit. Dico angulum BAE, aequalem esse angulo pentagoni aequilateri & aequianguli. Sumpto enim arcu CF, aequali arcui CE, iungantur rectae CE, CF. Et quoniam CE, rectae subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni aequilateri & aequianguli, vt proximè demonstrauimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, aequalia sunt, & basis [a] item aequales AE, AF; [a] erunt anguli ECA, FCA, aequales. [b] Cum ergo, [b] & anguli ACE, AEC, sint aequales; erit & ACF, ipsi AEC, aequalis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, aequalis erit. Est autem [c] externus BAE, eisdem internis ACE, AEC, aequalis. Igitur & ECF, BAE, inter se aequales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis AB, AE, [d] rectae aequales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum aequilaterum & aequiangulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, aequales rectae possint in circulo accommodari, quae totam circumferentiam adaequant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiae, singula autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt. Si enim alia rectae maiores quàm AB, AE, vel minores subtenderent quintas partes, continerent ea angulum quoque pentagoni. quod ab-

[a] 8. primi.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 1. quarti.

bſurdum: cum minor foret, vel maior angulo pentagoni BAE. Eadem ratio eſt de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui ſupra datam rectam lineam deſideramus conſtituere ſimilem, ſiue ea in circulo aliquo deſcripta ſit, ſiue non: ſatis erit vni eius angulo æqualem angulum conſtituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namque, poſita recta AE, æquali ipſi AB, per tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, perficiemus figuram propoſitam, vt antè diximus.

QVONIAM verò longa eſt, atque difficilis ea inſcriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ conſtructionis, in circulo dato inſcribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, biſariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF. Itaque ſi ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni in dato circulo inſcribendi, vt ipſe demonſtrat. Caterum cum demonſtratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco ſcribenda, ſed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.



NON erit etiam præter inſtitutum noſtrum, aut ab hoc libro alienum, ſi ſequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

SI bifariæ ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiãgula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figura æquilatera, & æquiangula æqualatur punctum illud, è quo circulus figura inscribitur, aut circumscribitur: ita vt idem sit centrum circuli, & figuræ.



SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subtendant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium, [a] *æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF, quam tres FLM, MLK, KLE,* [b] *duobus sunt rectis æquales: Sunt autem AMG, LMF; FLM, KLE,* [c] *inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli GML, MLK, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura GHIKLM.*

[a] 4. primi.
[b] 13. primi.
[c] 8. primi.

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iungantur quoque rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; sunt & bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: [d] *Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoque recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemque modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD, &c. Quocum ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium à centro N;* [e] *æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.*

[d] 8. primi.
[e] 14. tertij.

NEQVE vero & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triangulum, quadratum,

dratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, vt inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo aequilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono aequilatero, & aequiangulo, aequales sunt quatuor rectis, quantum numerum est spatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli aequilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni aequilateri, & aequianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quòd omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in aliis figuris planis aequilateris, & aequiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono aequilatero, & aequiangulo aequales sunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor aequales sunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinq; aequivalent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcirco vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti. &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum aequales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni aequilateri, & aequianguli aequales sunt $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt aequales, hoc est, complentur $\frac{70}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & praterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori

neque quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria vtique aquilatera, & aquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulũ, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

CAETERVM, benigne Lector, ad finem lib. 6. reperies propositionem ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectantem, quæ omnino necessaria est, vt intra quamlibet figuram, & circà circulus describatur ex doctrina propos. 13. & 14. huius libri. Reiecta autem est ea propos. in lib. 6. quia per in curiam ante propos. 13. huius libri non apposita fuit.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCL

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVINTVM

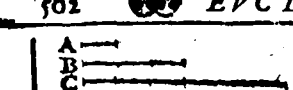
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT *in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & alia figuræ planæ. Ne igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ in demonstrationes proportionum adhibentur.*

ITAQVE *ait magnitudinem illam minorem, quæ*



maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cũ 6. 7. 9. 10. 18. 31. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Pol etarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam ma-

tudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hac vtramque illarum metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hac neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, qua perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CÆTERVM quando dua magnitudines minores duas alias maiores aque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur dua ha maiores duarum illarum minorum aquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores aquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QVANDO dua quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, dua linea, dua superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod vna maior est, quam altera, vel minor, vel aqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quòd neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c.

quamuis amba ſint eiuſdem generis, non dicetur ea eſſe ratio proportio, quia non ſit ſecundum quantitatem.

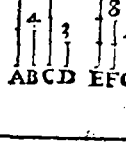
QVANQVAM autem in ſolis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam ſapiunt quantitatis, cuiuſmodi ſunt tempora, ſoni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, ſi eorum habitudo conſideretur ſecundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore eſſe maius, vel minus, vel duo tempora eſſe æqualia, &c. appellabitur eiuſmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc conſiderantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, conſequens proportionis dici ſolet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis conſequens. Quod ſi e contrario conſideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum; conſequens vero linea 6. palmorum, & ſic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero eſt rationum ſimilitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, Græcis ἀναλογία, pleriſque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel pluriũm proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Vt ſi proportio quantitatis A, ad quantitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G,



appellabitur hac similitudo proportionalitas. Multa autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, qua est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, qua est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi.

intelligi. Vt autem maior vtilitas, at voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi posſit, inſtituemus paulò vberiorem tractationem in hac poſteriori editione, quàm in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici poſſent, in pleniorem noſtram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentiſſimè perſequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide deſinita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi. Qualis eſt proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris 20. & 10. oſtenditur. Irrationalis vero proportio ea eſt, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis eſt proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiuſdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non poteſt, vt in 10. lib. ab Euclide demonſtratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam eſſe, quam habent quælibet duæ quantitates commenſurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommenſurabiles. Dicuntur autem quantitates commenſurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, ſeu quas eadem menſura communis metitur. Cuiuſmodi ſunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum eſt vtriuſque pars aliquota, ſimiliter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum menſurat. Non aliter omnes numeri, commenſurabiles dicentur,

centur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 10. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus recte à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen

tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisve, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt a nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio rectè posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; si in vtraque diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrique harum subdivisionum prætulerim, supra exposui in responsione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius subdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales, siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quando

maior

maior quãtitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis & ſuperuacanea, vt multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. ſed multum interſe differunt, cum valde diuerſus ſit vſus vtriuſque, vt perſpicuum eſt ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ ſunt verſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartiẽtem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modo ſingulis vocabulis præponatur præpoſitio (ſub) vt in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularẽ, & ſubmultiplicem ſuperpartiẽtem. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora vero duo ex illis tribus compoſita, vt manifeſtum eſt. Cur vero tantum ſint quinque hæc

genera

genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium horum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. Qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc eſt, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad unitatem habet primam proportionem multiplicem, qua inueſtigatur: hoc eſt, numerus ille, & unitas ſunt primi ac minimi numeri, inter quos propoſita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque unitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, qua proponitur. Inuentis hiſce terminis, inter quos prima proportio multiplex propoſita reperitur, ſi vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes ſecundam proportionem multiplicem propoſitam: ſi vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propoſitæ: ſi vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæſitę. Atque ita ſi idem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propoſitæ, qua eum locum inter omnes proportiones multiplices illius ſpeciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, ſi multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centeſimum locum inter omnes numeros propoſitam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quarantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini ſi ducantur in 2. reperietur ſecunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si idem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertia proportionis quintuplæ: Et ſic deinceps. Itaque ſi decima proportio quintupla quaratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. ſi vero milleſima reperienda ſit, multiplicandi erunt iidem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiuſque proportionis multiplicis reperiuntur hoc modo. Conſtituantur duæ ſeries numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per ſeriem naturalem numerorum progrediatur; ſuperior autem ab eo numero, qui ſignificat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturq; per continuum additionem eiuſdem numeri, primum

mum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Eam superioris ordinis numeri ad numerosordinis inferioris, primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciem positæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintupla.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.

Proportiones septupla.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decupla.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE Superparticulari.

PROPORTIO superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2 semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedũ, quæ tertia pars est lineæ 9. pedũ, &c.

HAE

HAEC quoque proportio in infinita genera diditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maori quantitate, eſt dimidiata pars minoris quantitas, conſtituitur proportio ſeſquialtera; Si eſt tertia rs, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiuarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c.

VNDE ex ipſomet vocabulo faciles erunt deitiones omnium proportionum ſuperparticularium. rit enim proportio ſeſquioctaua, quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam artem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. Item inter 5. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quas proportio ſuperparticularis quacunque reperitur hoc modo: Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Adeum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum una ſola vnitate ſuperat, habebit primam proportionem ſuperparticularem propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini data proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum ſecundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI cauſa. Si quarantur omnes proportiones ſeſquiſeptima; quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum ſuperans: atque inter 8. & 7. prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Qui duo termini ſi duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centeſima proportio eadem quaratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq; oēs cuiuſq; proportionis ſuperparticularis

cõperientur, si constituantur duo ordines numerorũ, quorũ inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, superior vero à numero proximè maiore: vterque vero per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialtera.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.

Proportiones sesquiseptima.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	&c.

Proportiones sesquidecima.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	&c.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quelibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, nõ est pars vna aliquota numeri

numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quamquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8 non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quòd si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus

superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas. Quòd si decem illæ partes sint decimatertiæ, vocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore superſint; alter verò, quotæ partes eæ sint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque syllaba illa [tri] quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem [octauas] expressus ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, (quæ quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter i

prin-

rimi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam liam partem aliquotam communem admittunt, di-uat Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex ib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in ſuperiori proportione ſupertripartiente octauas expreſſi. Nam ſola vnitas, vt conſtat, eſt vtriuſque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio poſterior inter 22. & 16. ſuperſextupartiens ſextas decimas, quamuis maior minorem contineat ſemel, & inſuper ſex vnitates, quarum quælibet decimaſexta pars eſt minoris: Non, inquam, recte ſic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expreſſi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda eſt, ſupertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem menſuram, videlicet 3. Nam ternarius ſemel ſumptus, ſe ipſum, & bis repetitus, ſenarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cum maior quantitas contineat ſemel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. ſuperquadripartiens ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6 habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio ſuperbipartiens tertias,

cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. præterentes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri proposíti habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonstraturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes tertios, vel alios, vt suprà dictum est. VERBI gratia, si inquirenda sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, a

propor-

oportione ſupertripartiente decimas. Dupli eorum, qui inimi-um ſecundam proportionem conſtituunt, ſunt 26. & 20. Tri-li, 39. & 30. Centeſima autem eiuſmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli ſint terminorum 13. & 10. mi primo loco inuenti ſunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum ſuperpar-tientium reperies, ſi ſtatuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, ſupe-rior autem à numero, qui numero partium nominatarum riorem illum ſuperat: vterque denique ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeip-ſum., & ad numeros conflatos, vt ſupra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum ſuperbipartientium quintas, ſu-peroctupartientium nonas, & ſuperſeptupartientium decimas.

Proportiones ſuperbipartientes quintas.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.

Proportiones ſuperoctupartientes nonas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.		
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	&c.		

Proportiones ſuperſeptupartientes decimas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.		
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	&c.		

DE PROPORTIONE multiplici ſuperparticulari.

PROPORTIO *multiplex ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando*

maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla.) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quater, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatã eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus exacte denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adijciamus vnitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem

pro-

partis aliquotæ primam proportionem ſpeciei propoſitæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum ſecundos, tertios; vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in aliis dictum eſt. EXEMPLI gratia, ſi inueniendi ſint omnes numeri proportionis ſextuplæ ſeſquinonæ; ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expreſſa habet primam proportionem ſextuplam ſeſquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Duplibentur numerorum 110. & 18. erunt ſecundi numeri in eadem proportione: Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centeſimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices ſuperparticulares inuenies, ſi conſtituas duas ſeries numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, ſuperior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiuſdem in denominatorem proportionis multiplicis expreſſæ: Vtraq; ordo per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in ſuperioribus dictum eſt. Exempla hic vides proportionis duplæ ſeſquialteræ, triplæ ſeſquiſeptimæ, & decuplæ ſeſquitertiæ.

Proportiones duplæ ſeſquialteræ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	&c.

Proportiones triplæ ſeſquiſeptimæ.

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	&c.

Proportiones decuplæ ſeſquitertiæ.

31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	&c.

DE PROPORTIONE multiplici ſuperpartiente.

PROPORTIO denique multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis eſt proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quæ vocabitur proportio tripla ſeſquitertia.

DISTRIBVITVR autem hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem; triplam ſuperpartientem, &c.

DEINDE quælibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c.

POSTREMO quæuis iſtarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile eſt cuiuis ex dictis depromere, &c.

OM-

OMNES proportiones multiplices superpartientes postremæ diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numerodq; producto 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij, 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem, primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoque diximus. Exempla hic vides in proportione duplæ superbipartientis tertias, duplæ superquintupartientis sextas, & quintuplæ supertripartientis quintas.

Proportiones duplæ superbipartientes tertias.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	&c.

Pro-

Proportiones duplæ superquintupartientes sextas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187 &c.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66 &c.

Proportiones quintuplæ supertripartientes quintas.

28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308 &c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55 &c.

DE PROPORTIONIBVS rationalibus minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus sunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoque de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub,) vt dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100. est subcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda insignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap 4. nostræ Arithmeticæ construximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: qua eiusmodi est. Constructa tabula Pythagorica,

(Et

Est autem constructio facillima, cum numeri in sinistro latere constituant seriem numerorum naturalem, in infinitum usque progredi possint; quilibet autem linea in transuersum protenditur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsum, & ad numerum constitutum, & sic in infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentia sint primi numeri earundem linearum.) primùm omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad unitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub unitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncuplæ erit inter 9. supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1; tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9. descendentis; & 3. in sinistro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum est.

DEINDE omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctauæ erit 9. ad 8. alia vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ in linea, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322

rtientis undecimas desideret, sumat in latere supremo de-ominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Ultimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superpartientem undecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam, 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. er rectam lineam descripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressa habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proximè insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus posiri. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proximè insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primam proportionem triplam sesquiquintam. Alias proportiones eiusdem speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum est.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo. In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerum multiplicem

cem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum ſi mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies ſub illa prima, vt de alijs diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20. inuentum numeret in ſupremo latere tres hos numeros, 21. 22. 23. quòd tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in alijs traditum eſt.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE vero ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ ſic ſe habet. Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensq; per id ſæpe eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius proportionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter ſecundos verò, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atque ita deinceps. Exempli grat. a, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſint 2. & 1. conſtituatur progreſſio incipiens ab 1. (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensq; per cõtinuam additionem vnitatis.

nitatis, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros duplæ proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus; Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet unus medius nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt, 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula appareat, vbi numeri extremi cuiuslibet linea habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmetica.

							2.	1.		
						4.	3.	2.		
					6.	5.	4.	3.		
				8.	7.	6.	5.	4.		
			10.	9.	8.	7.	6.	5.		
		12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.		
	14.	13.	12.	11.	10	9.	8.	7.		
16.	15.	14	13.	12.	11.	10.	9	8.		
18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	
20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.

QVOD si superiori proportionalitati Arithmetica superponas seriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quoslibet duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, què locũ duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportionũ duplarũ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter undecimus numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus una unitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. & inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

						10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3

RVRSVS detur proportio quacunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola unitate, quæ nadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, ita so-

nant:

uient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

					9.	8.			
				18.	17.	16.			
			27.	26.	25.	24.			
		36.	35.	34.	33.	32.			
	45.	44.	43.	42.	41.	40.			
54.	53.	52.	51.	50.	49.	48.			
63.	62.	61.	60.	59.	58.	57.	56.		

OFFERATVR quoque proportio superquadripartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. & 7. Differentia eorum est 4. Progressio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. vt hic patet, vna cum serie naturali ei superimpositâ.

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

Igitur inter primos numeros proportionis superquadripartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atque ita de cæteris, vt hic vides.

											11.	10.	9.	8.	7.						
									22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.				
							33.	32.	31.	30.	29.	28.	27.	26.	25.	24.	23.	22.	21.		
44.	43.	42.	41.	40.	39.	38.	37.	36.	35.	34.	33.	32.	31.	30	29.	28.					

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiet ergo progressio à 6. habebitq; differentiam 7. inter eius numeros, ut hic cernitur, unà cum serie naturali numerorum.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. medij numeri; inter secundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19.

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, una cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarú super bip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9

32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12

MANI-

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inaqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de numeris inaqualitatis proportionibus, cum ijdem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex ijs, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inaqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inaqualitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inaqualitatis. Recte ergo proportionem rationalem tum maioris inaqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM rationalium Denominatoribus

QVONIAM vero non exiguus est vsus Denominatorum proportionũ rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, a quibus nam numeris singulæ proportiones denominẽtur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quod Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius; quæ denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quacunque ea sit, est numerus integer tot cõtinens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, de-

nomina

ominata. Vt denominator proportionis ſubdu-
la, eſt $\frac{1}{2}$; ſubquintupla, $\frac{1}{5}$. ſubnoncupla, $\frac{1}{9}$:
ubcentupla, $\frac{1}{100}$: ſubmillecupla, $\frac{1}{1000}$. Eodem mo-
do denominatores aliarum proportionum ſubmul-
iplicium reperiemus. Itaque denominator cu-
uſcunque proportionis ſubmultiplicis eſt numerus
ractus, cuius numerator perpetuò eſt vnitas, deno-
minator autem, numerus proportionem multiplicem
correſpondentem denominans, vt ex prolatis exem-
plis patet. Neque vero vlla difficultas eſt in cuiuſque
proportionis multiplicis, vel ſubmultiplicis denomi-
natore reperiendo, ſi ea quæ dicta ſunt, rectè intel-
ligantur: quippe cum ipſa prolatio proportionis deno-
minatorem offerat, vt ex datis exemplis manife-
ſtum eſt.

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis ſu-
perparticularis eſt vnitas cum parte illa aliquota,
quam maior quantitas debet vltra minorem com-
prehendere. Vt proportionis ſeſquialtere denomi-
nator eſt $1\frac{1}{2}$; ſeſquioctauæ, $1\frac{1}{8}$; ſeſquimilleſi-
mæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem
cuiuſque proportionis ſuperparticularis inuenire;
cum ipſa proportionis prolatio denominatorem ex-
primat per ſuam partem aliquotam, vt ex datis
exemplis perſpicuum eſt. Denominatores autem pro-
portionum ſubſuperparticularium correſpondentiũ,
ſunt fractiones, quarum numeratores vna tantum
vnitate minores ſunt earundem denominatoribus.
Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt $\frac{2}{3}$;
ſubſeſquioctauæ, $\frac{8}{9}$; ſubſeſquimilleſimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c.
Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportio-
nis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractio-
nis ſumatur denominator partis aliquotæ in propor-
tione expreſſa, & pro eiuſdem fractionis denomina-
tore, numerus vnitate maior. Vt denominator pro-

portionis subsesquidecima, est $\frac{10}{11}$. cum huiusfractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorẽ correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quàm denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis subsesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt supra docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator vero, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habentis proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7. si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis subsesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportio-

nis

nis ſuperpartientis eſt vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis ſupertripartientis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$; ſupertripartientis vigeſimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque vlla difficultas eſt in huiuſmodi denominatoribus inueniendis: propterea quòd prolatio ipſa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex ſuperioribus exemplis liquidò conſtat. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores ſunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt $\frac{7}{10}$; ſubſupertripartientis vigeſimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partiũ aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui ſi addatur numerus earundem partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadripartientis vndecimas, eſt $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus eſt numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiuſdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator eſt numerus denominans partes quintas, nimirum 5 Denominator autem 8. eiuſdem fractionis conflatus eſt ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque ſuperpartientis correſpondentis

ad

ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus, cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{10}{13}$. qui ad hanc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur formatis, si reperiatur primi vel minimi numeri habentis proportionem superpartientem correspondentem; vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus indicans multiplicem proportionem expressam denominanti cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distincte exprimat & denominatorem

minatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratorus numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtripla sesquiseptimæ, est $\frac{7}{22}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{46}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturque vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdē fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq; ductus sit in 4. denominatorem proportionis quaruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuoceur ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadruplæ sesquisextæ est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4, id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroq; producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis,

nis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. reuocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius terminis si inter se ordinem permutent, fiet hac fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilium fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimosue numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, vt supra traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi siue minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hac $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, atque ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionẽ multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$. quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. & c. Nihil enim difficultatis habet hac inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quæ aperte, & distincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contenta, quàm partes aliquotæ, vt perspicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ super-

ſuperquincupartientis octauas, eſt $\frac{8}{29}$ *; ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $\frac{5}{22}$ *, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimastertias, eſt* $\frac{11}{34}$ *; quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui ſi ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, producto numero 6. adijciatur numerus 8. octo partium, conficietur iuſdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſita reſpondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiuſdem fractionis. Nam hius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinem, dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubquintuplæ ſupertripartiens decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartientis decimas, hoc eſt,* $5\frac{1}{10}$ *. ad hanc fractionem* $\frac{53}{10}$ *. quod fit ducendo 5. in 10. producto numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas,* $\frac{10}{53}$ *. &c. Sed forſitan facilius denomina-*

nominatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisq; fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiès decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla supertripartiente decimas sunt 53. & 10. constituetur ex ipsis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$ *& sic de cæteris.*

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuò est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea. quod quidem vnitas significat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, siue nomine denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquidò constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. *hoc est, tria integra, & quatuor nona parte, re & verbo denominat eam proportionem, cum distincte, atque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem contineri ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum* $\frac{9}{31}$. *id est, nouem trigesimas primas, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum verè significet, maiorem quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessarium est, vt minor quantitas maiorem habeat proportionem subtriplam superquadripartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem*

negat.

nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$. hoc est, nouem partes trigesimaprima cum nomine proportionis subtripla superquadripartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inaqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fracticnem, vt dictum est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam quotiens denominabit proportionem, quam denominater fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inaqualitatis pronunciabis, praeposita tantum syllaba, sub, quo illa denominatore fractionis ad numeratorem appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{20}{327}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem 20. fit Quotiens 16 $\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptuapartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{20}{327}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cateris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones propriis nominibus appellari possunt, (quis enim proportionē, verbi gratia, 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometra plerunque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quia aliàs diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, qua est 10. ad 13. quæ pro-

prio

prio nomine diceret sub-supertripartiès decimas, & sic de cæt.

QVANQVAM autem proportio quælibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: perneccessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, qua est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quanam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerū continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quod si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facilè possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoslibet duos numeros, sint minimi vel sint, siue non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multò commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{10}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimasnonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{19}{24}$. atq; ita de reliquis: quæ videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinē vnius numeri ad aliū, vt dictū est.

DENOMINATOR porrò proportionis inter duos quoslibet numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit ea proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 3. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quòd si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{1}{13}$. vel $\frac{10}{130}$. Nam quando minor numerus per maiorē diuiditur, Quotiens semper

eſt fractio, cuius numerator eſt minor numerus, & denomina-
tor, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtra-
que fractio, ſi eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur
ad hanc $\frac{1}{11}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39.
vel 30. ad 390. eſſe $\frac{1}{11}$. Rurſus data proportione 52. ad 40.
ex diuiſione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio re-
ducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad
40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inue-
nietur denominator ſiue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc eſt, in minimis nu-
meris, $\frac{10}{13}$. Praterea proportio 100. ad 20. denominatorem
habebit 5. Diuiſis enim 100. per 20. Quotiens eſt 5. Proportio-
nis vero 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd di-
uiſis 20. per 100. Quotiens eſt $\frac{20}{100}$. id eſt, in minimis nume-
nis, $\frac{1}{5}$. Denique denominator proportionis 48. ad 10. erit
$4\frac{4}{5}$. quòd diuiſis 48. per 10 Quotiens ſit $4\frac{8}{10}$. hoc eſt, in
numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48.
erit $\frac{10}{48}$. id eſt, in minimis numeris, $\frac{5}{24}$. Et quia denomi-
nator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem
quadruplam ſuperquadrupartientem quintas (quòd diuiſis
24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$. appellabitur proportio 10. ad 48.
ſubquadrupla ſuperquadrupartiens quintas. Vt enim ritè ef-
feratur proportio minoris inaqualitatis, denominanda prius
eſt proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt ſu-
pra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum nu-
merorum in minimis numeris, vt dictum eſt, eoq; reducto ad
vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum eſt, erunt nu-
merator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter
quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione,
quando nimirum denominator inuentus non habet annexam
fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi
numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator propor-
tionis 348. ad 120. eſt $2\frac{9}{10}$. ſi reducatur ad hanc vnam fra-
ctionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in de-
nominatorem fractionis 10. productoq; numero 20. eiuſdem fra
ctionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi
numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120.
Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. eſt
$\frac{8}{11}$. erũt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133.

Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt ea proportione minimi numeri 7, & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, & quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum est, ique ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Qui reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

I AM vero si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem vero eam, cuius denominator est minor. Quòd si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctipartiens decimasquartas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{14}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{14}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an vero æquales sint, traditum est in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{10}{101}$. dicemus priorem esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, una 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facilè, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior

est.

ſt: Et ſi duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter ſe æquales erunt. Vt ſi proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem eſſe, quia illius antecedens 17. in huius conſequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in conſequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rurſus ſi dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in poſterioris conſequentem 72. quàm ex antecedente poſterioris 108. in conſequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipſæ æquales inter ſe erunt. Ratio huiuſce operationis eſt: quia hac ratione, propoſitis quatuor numeris, multiplicantur inter ſe tam extremi duo, quàm duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur ſi procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 19. Hinc fit, ſi primus in quartum producat maiorem numerum, quàm ſecundus in tertium, maiorem eſſe primum, quàm vt eandem habere poſſit proportionem ad ſecundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor eſſe deberet, vt eundem numerum poſſet producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, ſiue ij primi ſint, ſiue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum aſſumptum, vel diuidemus, per propoſitæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad aſſumptum, qui multiplicatus eſt, vel aſſumptus, qui diuiſus eſt, ad Quotientem habebit proportionem propoſitam. Verbi gratia, ſi ſint inuenienda duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuiſus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoq; datam proportionem quintuplam. Ita quoque ſi inueniendæ ſint duo numeri in proportione dupla ſeſquitertia, cuius denominator eſt $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habebit proportionem denominatã à $2\frac{1}{3}$. Item ſi numerũ 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$.

habebit diuisus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam sesquitertiam. Sed vt fractiones tollantur, si quidem per multiplicationem rem expedire libet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur a denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in propprtione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad assumptū numerū 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupias quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3. numerum integrum, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si vero per diuisionem agendum sit, & fractiones vitandæ, sumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In alijs autem proportionibus, remouendus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusque sumendus à numeratore numeratus. Vt si quæratur proportio quintupla, sumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem desideretur proportio, cuius denominator sit $4\frac{1}{7}$. remoto eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. sumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiso per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quē acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam supertripartientem septimas. Cæterum si duo numeri proponantur, cupiatq; quis alios duos in eadem proportione reperire, satis erit, si vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datā, vel ad quem is datam habeat proportionem, assequeris primum, si propositum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at secundum obtinebis, si eundem per denominatorem

minatorem proportionis diuidas. Quòd si proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quispiam numerus; si quidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eam dem habeat proportionem, quam proximus datus ad secundũ: si quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quarimus. Vel certe, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum, hoc est, per consequentem terminum data proportionis, productusque numerus per primum, siue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator est $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quæsitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri: si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gignetur quæsitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20 habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem esse maiorem, cuius denominator maior est, sit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non item maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium est minimus, maximus autem dari non potest, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominatã à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denomi-

natorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt, minimus autem dari non poteſt, cum denominatores fractionum progredi poſſint in infinitum. Conſtat autem ex ijs, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior eſt, minorem eſſe, ſi idem ſit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor eſt, ſi idem ſit numerator, maiorem eſſe. Cum ergo denominator 2. ſit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales ſunt fractiones denominatorum proportionum ſuperparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque maximam poſſe dari, neque maximam. Quod intelligendum eſt de vltimis ſpecieb⁹. Nam ſi de vltimis ſpeciebus non ſit ſermo, erit ſuperbipartiens inter ſuperpartientes, minima; ſuperpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem ſuperparticulares maxima erit multiplex ſeſquialtera; minima vero, dupla ſuperparticularis. Inter multiplices denique ſuperpartientes maxima erit multiplex ſuperpartiens tertias; minima vero, dupla ſuperbipartiens. E contrario in proportionibus ſubmultiplicibus datur maxima, nimirum ſubdupla, non autem minima: In ſubſuperparticularibus autem reperitur minima, vt ſubſeſquialtera, non autem maxima: In alijs denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari poteſt. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi denominatores proportionum inter ſe conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc eſſe connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt qualibet proportio maioris inæqualitatis maior ſit proportione æqualitatis, qualibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quamcunque minimus, maior eſt vnitate, quæ denominator eſt proportionis æqualitatis, cum ille minor eſſe nequeat, quàm vnitas ex vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis ſemper minor eſt, quàm vnitas, cum ſit fractio cuius numerator à denominatore ſuperatur, vt ex ijs, quæ ſupra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media eſt inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduerſione dignum eſt. Proportionem

maior-

maioris inaqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni aqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inaqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem aqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsque ad duplam, qua omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quatunque, in qua cum minima non possit dari, omnisq; proportio eiusmodi maior sit proportione aqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inaqualitatis ad aqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inaqualitatis minor sit proportio ne aqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inaqualitatis attingere non posse proportionem aqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt vtrumq; exemplo etiam discatur, sciendum est, si inter duos numeros quoslibet non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositũ, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorẽ diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. qua dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3 quarum vtraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. qua subdupla est, diuisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quàm proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tam proportio subsuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus pro-

bari possunt. Verum utrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & idem minore, habebit maior datus ad minorem datum maiorem proportionem, quàm idem maior ad medium, & quàm medius ad minorem. At verò minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quàm idem minor ad medium, & quàm medius ad maiorem, vt manifestum est vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicabimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inæqualibus, maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionem, quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quàm ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. maiorem: Itẽ maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorem esse proportionẽ eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad maiorem 6. Itẽ maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3. ad eundem 6. Eademque in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. qua eadem est, qua 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quàm proportio 6. ad 4. qua eadem est, qua 3. ad 2. hic, 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. qua eadem est, qua 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. qua eadem est, qua 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. qua eadem est, qua 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. qua eadem est, qua 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. qua eadem est, qua 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. qua eadem est, qua 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. qua eadem est, qua 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. qua eadem est, qua 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. qua eadem est, qua 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. qua eadem est, qua 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis.

Idem,

Lemma experiri licebit in quibuſuis alijs proportionibus. Vt ſexpartio decupla *10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10. 6. 1. in duas mi-*nores: Et proportio *ſubſuperſeptupartiens undecimas 11. ad 8. diuiſa hic 11. 15. 18. in duas maiores, &c.*

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS *ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica ſiue Harmonica.*

ARITHMETICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri per eandē differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreſſione numerorum nulla ſit interruptio, ſed quilibet cum proximè antecedente conferatur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreſſione interruptio fit, ita vt bini tantum inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, ſiue Analo-

gia

gia: alię vero improprie, cum non ſit eadem ſemper inter earum terminos proportio, ita vt rectiùs Mediętates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2.6.18.54. quoniam quilibet ad ſuum antecedentem eandem habet proportionem triplam, conſtituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque eſt, continua, & diſcreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, diſcreta autem in hiſce ſex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantum 2.3. & 12.18. & 20.30. eandem habent proportionem ſeſquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA ſiue Harmonica proportionalitas, ſiue Mediętas eſt, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimũ, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos ſit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3.4.6. quoniam eadem eſt proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id eſt, ad 1. (cum vtrobique proportio ſit dupla.) conſtituunt proportionalitatem, ſiue Mediętatem Muſicam, ſiue Harmonicam: Ipſi verò neque eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri, 42.12.7. Harmonicam proportionalitatem conſtituunt, quia eadem proportio eſt maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc eſt, numeri

30.

0. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quę Diapason consonantiam, siue Octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque alijs idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT trium proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musica, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic videre 3.4.6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometrica, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetq; in hisce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Quare Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores; Contra vero in Harmonica

Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

I I.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones verò eorundem æquales.

HARMONICA denique neq; differentias, neq; proportiones terminorum æquales habet. Patet hoc ex superioribus exemplis.

I I I.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3.7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15.20.25. medius 20. superat minorē 15. quinq; vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoq; vnitatibus, quæ itidem sunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4.6.9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{2}{3}$. medij, superaturque à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic. 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat,

uperat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, qua est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturque à maiore 6. bina rio, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, qua sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, qua sunt $\frac{10}{4\,2}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3.7.11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometrica, quàm Harmonica, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4.6.9. & 3.4 6. tam summa 13. extremorum 4.9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorũ, quàm summa 9. extremorum 3.6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, qua est 1. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9.25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differẽtiam minorum, superat. Itẽ in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3.7.11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4.6.9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonica proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 42. 12.7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Quæ in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica verò plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometrica proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 4.6.9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonica, ex summa extremorū in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3.4.6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmeticè, cum eundem habeant excessum 3. vides 6. 8. 12. Harmonicè proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentia maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmeticè esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

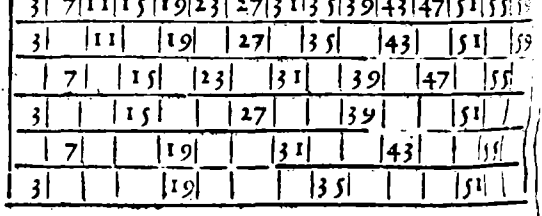
ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

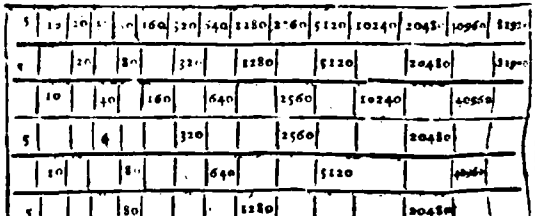
PROPOSITIS quotquot numeris continuè proportionalibus sive Arithmeticè, sive Geometricè, sive Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis ibus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiusmodi

cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Praterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

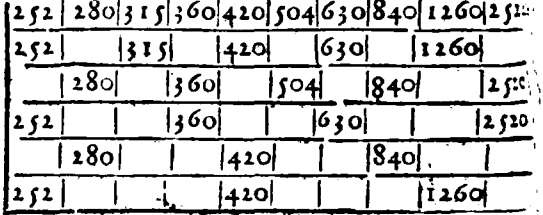
PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.



Proportionalitates Geometricæ.



Proportionalitates Harmonicæ.



QVOT

IX.

QVOT QVOT numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proportionalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica prop.		
20	28	36
Producti		
80	112	144
Quotientes		
5	7	9

Geometrica prop.		
20	40	80
Producti		
80	160	320
Quotientes		
5	10	20

Harmonica prop.		
60	84	140
Producti		
240	336	560
Quotientes		
15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem speciem proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentia multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia. n. inter 20, & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientium vero differentia ad differentiam numerorum diuisorum habet proportionem submultiplicem à diuisore denominatam, praeposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosque diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. item numerorum 240. 336. 560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquadruplas.

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica utroque dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur haec proportionalitas Arithmetica, quae extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quòd si eandem differentiam à minori subtrahas, quoties subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate vtroque minorem. Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps inuenies alios minores, si differentiam ab vltimo inuento semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur haec proportionalitas Arithmetica vsque ad 2. qua vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato proximè precedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet. 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus utroque minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, reliquus quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus erit tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides.

27. 20. 13. 6.

II.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic,

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus,

sive semissis summa extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino aqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum ⌣.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summa extremorum 6. & 30. tanto, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summa extremorum, sive ad medium terminum, proportionem habebit nonuplam. Eademque in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est, facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum ⌣.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. qui à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atque hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantium, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorum ab extremis

tremis æqualiter distantium æqualis sit summa extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum cõtinetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summã omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cũ $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atque differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo.

Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus; & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur; hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, minorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæsito erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponitur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quòd si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI duo extremi termini noti sint, vnà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressio, proposita totum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, elicimus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Num si Quotienti adiiciamus 1. constabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè

in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat eas conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto a maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

V I.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summã 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit. Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extr-

xtremorũ ſummam, Quotiens ſit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. t minimum duplicatus efficere poſſit numerum terminorum ntegrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: ſi vero extremorum proportio maior ſit quàm dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla: Si denique minor ſit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. eſt dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. eſt dupla ſeſquialtera, minimi maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla ſeſquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionẽ habent ſupertripartientem quartas, quæ minor eſt quam dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam ſuperbipartientem tertias, hoc eſt, maiorem quàm tripla.

VIII.

INTER quoſuis duos numeros conſtitues medium proportionalem Arithmeticè, ſi eorum ſumma accipias ſemiſſem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. ſumma eorum eſt 36. Huius ergo ſemiſſis 18. medio loco proportionalis eſt Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifeſtum eſt, 6. 18. 30. Itaque ſi medius terminus conſtituendus ſit numerus integer, neceſſe eſt, vtrumque numerorum datorum eſſe vel parem, vel imparem, vt videlicet ſumma extremorum ſemper ſit par, hoc eſt, vt poſſit habere dimidium ſine fractione vnitatis. Nam quando ſumma extremorum impar eſt: quod accidit cum alter extremorum par eſt, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum ſemiſſe vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. ſumma eorũ eſt 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

INTER

I 25

INTER quoſuis autem duos numeros conſtitues, quot quis iuſſerit, medios proportionales Arithmetice, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam ſi minori numero propoſito adijcias, conſtabit primum medium. Huic ſi eandem differentiam addas, conficies ſecundum, & ſic deinceps. Vel ſi eā differentiam à maiori numero propoſito ſubtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo ſi eandem differentiam demas, remanebit pēnultimus, & ſic deinceps. Veluti ſi inter 6. & 114. conſtituendi ſint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo ſe habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non poſſunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non ſemper numerus integer eſt; ſi fractiones vitare velis, neceſſe eſt, duos propoſitos numeros eſſe eiuſmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum, numeretur: quos ea facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt ſi velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem ſit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius (qui proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum eſt, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. dividendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quemplam maiorem numerum constituere 9 terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis collocabis, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primo quemque ad ipsum, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illis, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medietates. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque datorum per 3. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

EX

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsque, in secundo vero ab infimo ad supremum vsque ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor à maior subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certè inuestigandos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiàsi eos numerus numero mediorũ proximè maior non numeret: quia minor Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer reliquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius cõtinua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: eosdem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines

In-

nſtituantur aſcendentes, vt dictum eſt, per ipſorum Quotien um additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propoſitum diſtribuemus in artes, quotquot quis inſſerit, proportionalitatem Arithmetiam ſeruantes, hac ratione. Diuiſo dato numero per ſemiſm numeri terminorum, ſecabimus Quotientem in duas par es inequales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati ſunt duo termini extremi, cum umero terminorum, detrahemus minus extremũ ex maiore, artiemurq; reliquum numerum per numerum proximè miorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quoiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hæc differentia addatur minori extremo aſſumpto, deinde ad numeum conflatum, atque ita deinceps, conſtituetur numerus ter minorum datus, quorum ſumma propoſito numero æqualis ſt: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeicè proportionalium ſectus erit. Exempli cauſa, ſi numerus 830. diſtribuẽdus ſit in 10. partes proportionales Arithmeicè; partiemur eum per 5. ſemiſſem terminorum, Quotiemq; 166. ſecabimus in 20. & 146. terminos extremos proortionalitatis conſtituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. gula dictum eſt) differentia erit proportionalitatis. Vt ic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rurſus ſi numerus 10. diuidendus ſit in 10. partes proporonales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. ſemiſſem terminum: Quotientem vero 2. in duas partes inæquales ſecamus $\frac{3}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. o empto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquum 1. per 9. numerum proximè minorem numerum partium conſtituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia ix continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c.

to, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus primum tremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. secunda $\frac{9}{18}$. vltima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem est, hac ratione variis modis datum numerum diuidi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum. Quotiens in alias partes binas inæquales prioribus extremis fictus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, qui esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatum summam extremorum: propterea quod huius extremorum summa semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summã omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in secunda regula ductum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minorem detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adiiciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, qua imperatur. Veluti, si numerus 154. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, genetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifestum est, variis modis datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atque alias partes binas sectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED longè facilius (quamquã operatio aliquanto longior sit) idẽ hac absolues hac ratione. Cape tot numeros Arithmeticè quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, precreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quaris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Duc autem singulis in datum numerum 525. creabuntur. hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur ha 10. partes, quas quaris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quaris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eadem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis accepta multiplicare per datum numerum, productosq; numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri, vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur prima duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Li-

quido

quidò autem hic quoque constare puto, datum numerum variis modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atque alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quas inter terminos proportionalitatis assumptæ eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem singuli numeri accepta proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem enim habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem superbipartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITAQVE, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebunt prima partes duplam quoque proportionem, atque ideò prima erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes concurrentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3, 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicassesq; primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem $9\frac{6}{11}$. qua eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuslibet duobus numeris, si denominatrix proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore

hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, ignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quòd diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, qua in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quòd si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quòd diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quòd diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuidas 8. per 2. Idemque cum producto numero facias, constituetur haec proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoque eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, &

productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus utroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productumq; per proximè præcedentem terminum diuidas, habebit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quod diuiso per 6. fit 24. quartus terminus: atque ita in infinitum, ut hic vides. 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datu duobus numeris, si minorem in se duxeris, productũq; per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum utroque minorem. Quem si rursum in se duxeris, productumque per proximè præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6 in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2 tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quod diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$. sive $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, ut hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM vero si quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quoslibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partẽ, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos quæsitos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2 sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet, 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo a 64 incipias

incipias, constitues 7. terminos proportionalium sesquialtera, & non plures, hos minimos.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inueniuntur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6 termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum, qui est 5. videlicet. 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione duplæ superbipartientis quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

Nam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continue sint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant unam eandemq; inter se proportionem, hoc est, dummodo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quique non continuè proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper aqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis aqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à sesquialtera diuersa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet aqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerum ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum vero ex tribus inter se multiplicatis

tiplicatis productum, quorum duo ſint vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, eſſe cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in ſeipſum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in ſe ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, ſiue radix cubica appellatur.) cuius latus, ſiue radix eſt medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in ſe cubice ducto, hoc eſt, primum in ſe, deinde in productum ex alijs duobus inter ſe multiplicatis. In ſe enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando ſunt 4. numeri ſiue continuè, ſiue non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri ſe mutuò multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & ſic deinceps, donec omnes numeri ſint multiplicati.) eſſe quadratum, cuius latus, ſiue radix eſt numerus ex primo in quartum, vel ex ſecundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter ſe idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, ſi in productum ex ſecundo in tertium multiplicatur. Quando autem ſunt 6. numeri ſiue continuè, ſiue non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes ſint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter ſe, cuius radix, latuſue eſt numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter ſe multiplicatis, in ſe cubice multiplicato: hoc eſt, ſemel in ſe, nimirum in productum ex duobus, qui ſunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti ſint inter ſe æquales.

III.

SI, propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliqui numerus per numerum una unitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) dividatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, constabitur summam omnium terminorum. Vt hoc in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet una unitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{7}{5}$. (qui numerus una unitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addo ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vnà cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt ſo pernecessarium sit, ea hoc loco repetere.

IIII.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuò æqualiter

ter *ſuperantibus*, *id eſt*, *Arithmeticè proportionalibus*; *ſi* eciidem *alij numeri ſumantur habentes eaſdem proportiones*, quas *illi*, *eodem ordine ſumpti*; *ſuperabunt ſe quoque poſte*riores *hi numeri æqualiter*, *hoc eſt*, *erunt Arithmeticè pro*portionales, *ſicut illi*. *Vt ſi ſex hi numeri*, 4. 7. 10. 13. 16. 19. *Arithmeticè proportionales proponantur*, *ſumanturque alij* ſex *cum ijſdem proportionibus*, *cuiuſmodi ſunt hi*, 20. 35. 50. 65. 80. 95. *comperies ipſos quoque Arithmeticè eſſe proportio*nales; *quippe cum habeant differentiam* 15. *Sed cæue putes*, *hanc proprietatem poſſe conuerti: Neque enim ſi dentur quot*cis *numeri Arithmeticè proportionales*, *& totidè alij Arith*meticè *quoque proportionales ſumantur*, *etiamſi vtrobique eadem ſit differentia*, *neceſſario hi illis proportionales erunt*. *Id quod perſpicuum eſt in hiſce duabus proportionalitatibus Arithmeticis*.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. *habent proportionem du*plam, *at poſterioris duo primi* 3. 5. *ſuperbipartientem tertias*. *Item primus numerus* 3. *in poſteriore ordine ad primum nu*merum 2. *in ordine priore habet ſeſquialteram proportionem*, *ſecundus autem* 5. *ad ſecundum* 4. *ſeſquiquartam*. *&c*.

V.

DVOBVS quibuſuis numeris datis, *ſi eorum alterum* re *in quotlibet partes diſtributo*, *ſingula partes in alterum* ducantur, *& ſinguli numeri producti per priorem numerum* diuidantur, *conſtituent omnes Quotientes ſimul ſumpti po*steriorem *numerum*, *habebuntq; ordine eaſdem omnino pro*portiones *inter ſe*, *quas partes prioris numeri inter ſe eodem* ordine *habent*: *at ſinguli Quotientes*, *ſuas partes poſterioris* numeri *ad ſingulas partes prioris*, *vt prima ad primam*, *ſecunda ad ſecundam*, *&c. vnam eandemque prorſus ha*bebunt *proportionem*. *Veluti*, *datis duobus numeris* 57. 285. *prior ſecetur in partes*, *quæ ſimul addita ipſum conficiant*,

2. 5. 10. 40. & earum qualibet in posteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentque easdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, ni mirum quintuplam.

EASDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemque factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hae, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris aequales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticae praescripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singula ha partes in datum numerum ducantur, & productis numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri positi in eisdem proportionibus. Quare Arithmetice quotuis proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

V I.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentia continuè quoque in eadem

proportione proportionales. Vt in appoſito exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentiæ.	32.	48.	72.	108.	162.	243.	
	64.	96.	144.	216.	324.	486.	729.

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum ſunt differentiæ. Id quòd ſoli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in eâ quilibet numerus maior proximè præcedentem minorem ſuperat ipſomet numero proximè antecedente, cuius duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differẽtiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et ſi Quotientum ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorſus Quotientes ordine conuerſo: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æquáliter diſtantium, vel denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſeipſum ducto. Quod ſanè incredibile videri poſſit. Exempli cauſa,

Si

Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla. 3. 6. 12. 24. si eorum summa 45. per singulos dividatur, erunt Quotientes 15. 7 1/2. 3 3/4. 1 7/8. conversò ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et si per hosce Quotientes dividatur eorum summa 28 1/8. prodibunt ordine conversò ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa verò summa 28 1/8. aqualis est numero, qui fit ex 15. in 1 7/8. vel ex 7 1/2. in 3 3/4. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes. 121. 40 1/3. 13 4/9. 4 13/27. 1 40/81. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa 180 61/81. producitur vel ex 121. in 1 42/81. vel ex 40 1/3. in 4 13/27. vel denique ex 13 4/9. in seipsum. Vbi duo considerationè sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreatur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes figi ex divisione summa quotcunq; terminorum proportionis eiusdem continuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Velut, si sint tres termini continuè dupli, sive magni, sive parui, erunt perpetuò hi Quotientes, 7. 3 1/2. 1 3/4. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt. 15. 7 1/2. 3 3/4. 1 7/8. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. 40 1/3. 13 4/9. 4 13/27. 1 40/81. At denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. 13 3/10. 8 19/24. 5 11/16. 3 49/144. 2 49/81.

EX hac proprietate inuenietur quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa aqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus medijs quibuslibet aqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inuenientur sint, sive magni, sive parui, eorumque summa per eosdem sursum dividatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quòd si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero ter-

erminorũ impari æqualis, &c. Qua res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotcunque quis inſſerit, terminos continuè proportionales, quorum ſumma ex multiplicatione primi termini in vltimũ gignatur cum contrario huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini ſine numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, niſi hi numeri Quotientes ſint producti ex diuiſione ſummæ alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipſos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo ſatisfaciemus quæſtioni, ſi quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum ſumma, æqualis ſit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterũ procreato. Nam ſi ſumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum ſumma per eoſdem ſigillatim diuidatur, ſatisfiet quæſtioni propoſitæ per Quotientes inuentos. Vt ſi cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla ſuperbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios ſimiles. Summa etenim priorum 38. diuiſa per 29. & 9. vel poſteriorum ſumma 114. per 87. & 27. diuiſa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerſo, & quorum aggregatum eſt $5\frac{119}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoſcunq; numeros conſtituemus mediũ geometricè proportionalem, ſi eos inter ſe multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum ſit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque ſi inter datos duos numeros conſtituendus ſit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi poſſit, neceſſe eſt, vt numerus ex vno in alterũ productus ſit quadratus. Niſi enim quadratus ſit, non habebit radicem in numeris, ſed eius radix

erit

erit numerus, quem Arithmetici ſurdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, eſſe medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior eſt, quam 7. cum huius quadratum ſit 49. minor vero quam 8. cum huius quadratum ſit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius eſt inter 7. & 8. radix eſſe poteſt, etiamſi vnitas in infinitum cogitetur eſſe diuiſa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonſtrabimus, cuiuſmodi non eſt numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

I X.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos ſinguli cadant medij Geometricè proportionales, aſſequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum ſecundus primi ſit quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus. Quadrati enim numeri erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in ſecundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & ſecundum, in proportione primi aſſumpti numeri ad ſecundum: ſecundus vero numerus aſſumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter ſecundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter ſe habent ſecundus, ac tertius numerus aſſumptus. Id quod perſpicuè in hoc exemplo apparet.

Tres nu aſſump	Primus. 8.	quintup. pri. 40	Septup. pri. 56
Quadr. Arit p.	64	1600	3136
Medij Geomet.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum eſt 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HI NC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui ſe æqualibus differentijs mutuò ſuperent, ſi pro radicibus eorum ſumentur tres numeros, quorum ſecundus ſit primi quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato; reperientur alij duo maiores cum illo conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati ſtatuatur primus numerus, & alij duo numeri ſumantur, quorum alter illius radicis ſit quintuplus, & ſeptuplus alter, erunt quadrati numerorum duorum numerorum, quos quærimus. Vt ſi detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; ſecundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, ſi eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, ſi quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos ſinguli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, ſi nimirum medij inter quadratos inuenti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt ſi ſuperiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272	
Medij Geometr.		640		4480		

Si vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (ſunt autem qualibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	8		200		392	
Medij Geometr.		40		280		

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti eaſdem ſemper proportiones, quas quadrati, eorumque medij inter ſe habent.

Quòd

Quòd si hos 8. 200. 392. dividas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometrici medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, sint quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundi ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmetica proportionalis tatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & sic de cæteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunq; medios continuè proportionales, iucunda sanè, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atque in se ipsam ducta producit tertium terminũ, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, qui quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiunt 4. quorum ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero cruenda sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agitur,

gimus, notanda sunt tres infrascripta proportionalitates continuæ, quarum duæ prima sunt Arithmetica, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium usum habeat series numerorum naturalium in re proposita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. proport.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de aliis. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc facto, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum. Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. &

ex

ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus aliis, quisque numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex utroque numero dato extrahenda est radix, quæ totics ordine posita, & continuè multiplicata utrumque producat, quot unitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris collocа, quamque sub suo, & ab eisdem ascende per continuam utriusque multiplicationē, (ducendo primum quamque radicem inuentam in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita vt duæ proportionalitates Geometricas multiplices instituas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quærentur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos, & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius; proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsque, in altero vero ab infimo vsque ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex utroque numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationē utrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt instituenda proportionalitates Geometrica à radicibus incipientes, quæ plures terminos habent, sed ipsæ radices inter se multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hic vides. 9. 36. 144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniā hi numeri radices quadratæ

uadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R.q.18. posteriorem autem sic. R.q. 288. Ha autem radices inter se multiplicata faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R.q.18. & R.q. 288. docebimus in Algebra.

RVRSVS si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex utroque dato numero extrahenda est radix, qua quater posita, & continuè multiplicata utrumque producat, qua quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines triũ terminorum sub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, qua inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarũ,

multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medij termini ijdem, etiamsi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertiũ medium.

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales, sed plerumque innumeros terminos esse irrationales: propterea quod dati numeri non habent eam per illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratiquadratas, hoc est, quæ quater positæ eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. quos illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet.

48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quemcunque datam habentes proportionem. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. sumendos duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem

rtientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc mo-
o,6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim
ominum vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. in-
er quos constitues quatuor medios numeros proportionales,
vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in
0. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel
x denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbipartientis tertias
n minorem numerum inuentum 7776. & iterum in nume-
um productum, &c.

XI.

NVMERVM quemcunque datum distribuemus in
quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione
hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data
roportione siue minimos, siue non minimos, in quot partes da-
um numerum distribuendum est, & per eorum summam datum
umerum partire. Quotiens namque per singulos terminos in
ata proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati
umeri seruantes datam proportionem inter se. Veluti si datus
umerus 756. secandus sit in 6. partes continuè proportionales
n proportione dupla; si sumantur 6. termini continuè dupli,
3.6.12.24.48.96. quorum summa est 189. & per hanc sum-
am datus numerus 756. diuidatur. Quotiens autem 4. per
ingulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6.
umeri continuè dupli, conficientesque simul in vnam sum-
am collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi a'ij 6. numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}\cdot\frac{2}{100}\cdot\frac{4}{100}\cdot\frac{8}{100}\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{32}{100}$. *quorum summa est* $\frac{63}{100}$. *Vel hi 6. a'ij,* 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. *quorum summa est* 6300. *Nam datus numerus* 756. *diuisus per summam priorem* $\frac{63}{100}$. *facit* 1200. *qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum* $\frac{1}{100}$. *dabit primam partem* 12. *vt prius, &c. At idem numerus datus* 756. *diuisus per posteriorem summam* 6300. *facit Quotientem* $\frac{756}{6300}$ *qui ductus in primum numerum assumptum* 100. *producit eandem partem primam* 12. *& sic de cæteris.*

QVOD si cupias numerum, qui secari possit in quotcunque partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit diuidi in 5. *numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis* 5. *terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunque, vt* 64. 96. 144. 216. 324. *quorum summa est* 844. *accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum* 8440. *Hic enim per præceptum traditum secabitur in* 5. *numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessario sit numerus integer.*

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, quæ inducitur in data proportione continua reperire quotuis numeros, qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcumque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. *numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit* 100. *secandus erit hic numerus* 100. *in* 4. *numeros proportionis triplæ, vt in* $2\frac{1}{2}\cdot 7\frac{1}{2}\cdot 22\frac{1}{2}\cdot 67\frac{1}{2}$. *Hi enim conficiunt datum numerum* 100. *Quod si conficere debeant summam* 400. *erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi.* 10. 30. 90. 270. *Horum enim summa est* 400. *Si denique summam conficere debeant non superantem* 1. *erunt huiusmodi numeri,* $\frac{1}{40}\cdot\frac{3}{40}\cdot\frac{9}{40}\cdot\frac{27}{40}$. *Summa enim horum est* $\frac{40}{40}$. *hoc est,* 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmetica quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1.2.3.	3. 7.11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2.3.6.	21.33.77.	24.32.48.	600.1100.6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmetica proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonica, & secundus: ex secundo vero in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmetica proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonica: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonica. Vt in ijsdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonica proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmetica, ex qua orta est, habent: nimirum videlicet extremi Arithmetica per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonica extremos.

QVAPROPTER si reperiends sint tres numeri proportionalitatis Harmonica, quorum extremi, atque adeo & differentia, datam habeant proportionem, sumends sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmetica proportionalitatis constituendus: ac denique ex iisce tribus terminis inueniends tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quarantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumemus 3. & 4. inter eos ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè

proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales. 42.48.56. quorum extremi, atque adeo & differentia, proportionem sesquitertium datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex quibus ita est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia numerum primum duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonica procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmetica; duo vero extremi Harmonica inter se multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2.3.6. gigni hanc Arithmeticam, 6.12.18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertiũ 6. Item secundũ 3. in tertiũ 6. produces 6.12.18. siue ducas medium 3. in extremos 2.6. facies extremum 6.18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos, siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo alij constituentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadẽ omnino proportione. Deinde vltimo, qui quartus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, qui septimo, alij duo; & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2.3.6. Harmonicè proportionalibus, si posteriores duo, 3.6. ducantur in 3. denominatorem pro-

proportionis 6. ad 2. sient 9. 18. atq; ita erunt iam quinq; termini, 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales: Et si posteriores 9. 18. dividantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, & ut semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos librorum imparium, ut per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, dividendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inventi iterum dividendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. & minores duo, 9. 6. dividantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. sient 3. 2. atque ita erunt tam quinque termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inventi 3. 2. dividantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt, ultimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$. atq; ita deinceps progredietur in infinitū.

ALIO modo, & quidem magis proprie, continuatur proportionalitas Harmonica, sive ad maiores numeros progrediendo, sive ad minores, quando primitiues numeri sunt Harmonicè proportionales; Item, relictis primo, alij sequentes tres; & relictis duobus, sequentes alij tres &c. ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, qua inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6. 12. Harmonicè proportionales sunt: sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorū 4. 12. triplam. Item continua esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinq; terminis 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in utramq; partem hoc modo continuanda sit, quādo continuari potest, (neq; enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo exemplis) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, ut exposuimus, reperiri possint, ex ijs, quæ sumuntur, constabit.

II.

INTER quoſuis datos duos numeros conſtituere medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem ſummam, Quotienſemque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem ſummam. Si enim Quotienſem ex maiore dato ſubtrahas, reliquus fiet medius terminus quæſitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenire medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotienſem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſario integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inuenienda ſit media, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. addatur eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quam differentia maiorum $1\frac{12}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotienſem, qui fit ex diuiſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum

inuentum

numerorum minori dato adijci : Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato subtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel his reliquus dabit medium terminum, qui quaritur. Vt si inter 20. & 30. sit inueniendus medius : minimi numeri proportionis inter 20. & 30. sunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum summam 5. fit Quotiens 2. quem si ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur semper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, una vnitate superat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; si eorum differentia 30. diuidatur per 3. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. constituet medium terminum 16. hoc modo. 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortasse commodius, (licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non fuerint impares, vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem, qui semper erit semissis summæ eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quare ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter se proportionem habent, quam dati duo extremi. Quòd si fiat, vt primus inuentus ad secundum, ita primus datus ad aliud; hoc est, si per primum inuentum diuidatur numerus ex secundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius; duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par est, cuius semissis 17. est medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus

inuenimus 238. ad secundum 280. ita primus datus 7. ad tertium inuenietur numerus 8 6/17. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS *duobus numeris, reperiemus tertium utroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest. (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum ductum partiemur per numerum qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quod si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 4. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quòd si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quòd si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos vero duos, 10. 11. apponetur tertius 12 2/9. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At vero ad 3. 6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta à minore 3. relinquit 0. Atque eodem modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino æqualis. Multò magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis pro-*

proportionalis Harmonicè, quia differentia amborũ tunc semper maior est minore termino, atque idcirco subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumque productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem deniq; maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITA QVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum duplam minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertiũ procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertiũ numerũ, vt diximus. Constat autẽ numero per unitatẽ diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri. 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris. 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorũ duorũ sola vnitate.

EX posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adjiciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c.

Vt

Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. detur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi sint, sive illi minimi sint & integri, sive non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$, collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. in-

minorum semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{1}{7}$. unitatis superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{1}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{1}{7}$. $2\frac{1}{7}$. $4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. si prius quilibet ad unicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritque extremorum proportio, ut proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, qua videlicet data est.

CAPVT IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium utroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo[1]. Numerum ex uno in alterum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens tum erit is, qui quaeritur. Vt si dentur duo numeri 6. 12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum; per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertiũ 4. minorem utroq; illis proportionalem, ut hic cernis, 4. 6. 12. Hanc extẽdemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4. 6. minorẽ tertium adiungamus 3. hoc modo. 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. insenietur, dividendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{7}$. Atque in hunc modum decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animadvertere licet admirabilem sanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; qua varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. *ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.*

II. *HARMONICA contra, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, ut quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam. Hoc est, ut primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in utramque*

vtramque partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſupra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decreſcit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter ſe comparati præcipuas perfectas q; conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. eius baſes quadratæ; 8. anguli ſolidi; 12. latera; & 24. anguli plani conſtituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. eſt ſeſquitertia, qua conſonantiam Diateſſaron, ſiue Quartam, conſtituit. Proportio verò 12. ad 8. ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſiue Quintam. Proportio deindè 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla eſt, explicans conſonantiam Diapaſon, ſiue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla exiſtit, exhibens conſonantiam Diſdiapaſon, ſiue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmetica proportionalitatis, ſi quicunque numerus, ſiue minimus, ſiue non minimus, ab eis numeratus per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine Harmonicè proportionales. Et vicißim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, ſi numerus, quem metiuntur, per ſingules diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerſo Arithmeticè proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmeticè proportionales, 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, qui metiuntur, eſt 720. ex eorum continua multiplicatione inter ſe procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per 12. qua in Arithmetica practica cap. 10. ſcripſimus. Priore ergo per ſingulos datos diuiſo, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Poſteriore autem per eoſdem datos diuiſo, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque

Atque hi numeri inuenti eas dem proportiones habent, quas dati numeri Arithmetica proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si ultimus numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: Et si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt idem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in una proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam 4 ex 2. in 12 fiunt ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, aequalis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentia	2	4	
Propor Har.	6	8	12

Differentia.

Differentiæ.	30	10	5	3	2
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, quos dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentiæ commutatæ ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producanque vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac denique primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	1 $\frac{1}{2}$.	1.
9	6.	3.	$\frac{9}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hos diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens 1 $\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia

quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. *vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.*

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis. 1. 3. 9. subtriplis hos qnq; 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicã; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2	3.	4 $\frac{1}{2}$	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè, $7\frac{1}{2}$. *vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem* $\frac{15}{2}$. *vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducãtur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factũ est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens* $9\frac{3}{5}$. *in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum* $9\frac{3}{5}$. *reuocabimus ad hanc vnicam fractionem,* $\frac{48}{5}$. *vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri*

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
80.	75.	60.	48.	40.

quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

SI minores numeri cum maioribus comparandi sint, nitentur in proportione data sesquialtera *quinque terminis numeros vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.*

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{36}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

POTES quoque, si placet, primo ordine omnes quinque numeros constituere. & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem. Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si fuerit quadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres numeri 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidium 2$\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4. per 2$\frac{1}{2}$. fiet quotiens 6$\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducêtur ad minimam denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituentur termini ordinis. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinq; minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permista sunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	2$\frac{1}{2}$.	4.	6$\frac{2}{5}$.	16.
1.	2$\frac{5}{10}$.	4.	6$\frac{4}{10}$.	16.
1.	$\frac{21}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	26.	40.	64.	160.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi per Geometricè proportionales non continuè, vnus autem medius cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris inter

tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè constituatur 7. hoc modo 12.7.2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84.24.14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84.14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84.49.24.14. Nã extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 14. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84.49.14. Arithmetica. Ac denique inter 84.24.14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres propor-	84.	49.	24.	14.	tionalitates simul.
Geometricè pp.	84.	49.	24.	14	Vel 84. 24. 49. 14.
Arithmet. pp.	84.	49.	14.		
Harmonicè p.	84.	24.	14.		

Rursus sit data proportio, qua 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorũ dupli 6.4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6.5.4.

Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30. 24. 20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30. 25. 24. 20. cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometricè proport.	30	25	24	20	*Vel*	30	24	25	20
Arithmet. proport.		30.		25.			20.		
Harmon. proport.		30.		24.			20.		

EOSDEM 4. numeros maxima harmonia reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt supra diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admista sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regula 7. scripsimus. Vt si proposita data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius, Quare sic stabunt 4. numeri maxima Harmonia, 12. 9. 8. 6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15. & Harmonicè 13 $\frac{1}{3}$. in minimis numeris hoc modo, 20. 15. 13 $\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vocam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. in denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alii, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides. 60. 45. 40. 30.

MINO-

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas mediũ in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quærimus. Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$, Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros. 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumãtur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales,

quot quæruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numerati summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunq; numeros Arithmeticè proportionales, 3.6.9.12. & 1.2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2.3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3.4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntque tres summæ binorum minimorū 3.5.7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3.6.9.12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315.630.945.1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. ut hic cernis.

Arith. proport.	315	630	945	1260
Medij Harm.	420	756	1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16.24.48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factique essent hi duo numeri 4.12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sumetur minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desid-

ſiderantur, & ſingulos multiplica per ſummam duorum eadem proportione minimorum: Et ſi quidem producti fuerint omnes pares, ipſi erunt, quos quarimus; ſin minus, eorum dupli dabunt quaſitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione ſeſquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 3. Horum ſummam 5. duc in ſingulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares ſunt, dupla, habebiſque propoſitos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum eſt, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum mediũ eſt, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40			60			90	
Medij Harmo.		48			72			
Medij Arithm.			50			75		

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intertipiantur duo medij, alter ſecundum proportionalitatem Arithmeticam, & ſecundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis data proportionis, ſi eorum ſummam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoſcunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, ſi pares ſunt, quaſiti: ſi vero vterque non eſt par, erunt eorum dupli, quos quarimus. Vt ſi data ſit proportio ſeſquitertia, cuius minimi numeri ſunt 3. 4. eorum ſumma, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non ſunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quarimus. Poſteriores autem duo, quia pares ſunt, erunt quaſiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quarimus, vt hic manifeſtum eſt.

Numeri inuenti.	42		56		84		112	
Medij Harmo.		48		*Vel*		96		
Medij Arithm.			49				98	

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alij in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alij, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetici proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos sit medius Geometricè, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturque ordine sic. 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares; vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quærentur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt constat ex 5. regula, cum sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quàm hi, sint Quotientes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Cæterum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmeticè proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quòd si non omnes sint pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim eosdem proportiones, quas eorum subduplí habent. ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quàm inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè, constat propositum. Exemplum superius ob eam hic positum esse vides.

Tres

Tres Har. pp. inuẽti.	1225			49		25	
Medij Arithm.		637			37		
Medij Geometr.			245			35	

XII.

RVRSVS si quarantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturq; duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summa. 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri, 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices, 2. 50. 98. fit, vt quemadmodum inter binos horum singuli cadant medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè sunt proportionales) numerant minimũ numerũ 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arit. pp. inu.	1924			48100			94276
Medij Har.		3700			63700		
Medij Geo.			9620			67340	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros propor-

proportionales sive Arithmeticè, sivè Geometricè, sivè Harmonicè, inter quorum binos cadant terni medij, unus Arithmeticè, alter Geometricè, & reliquus Harmonicè. Sint eam primum inueniendi tres Arithmetica proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmetica proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, unus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arithm. proport.	1924			48100			96276	
Medij Harmon.		3700			63700			
Medij Geometr.			9620			67340		
Medij Arithmet.				25012			72128	

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quæ medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, numerum si squialtera. Cape quinque numeros minimos data proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos maximos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eandem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti erunt numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; aliàs non essent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicè, & Arithmeticè alter, ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricè, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. ductum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab eisdem acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geome-

Geo.prop.	416				936				2106		
Med.Ha.		576				1296					
Med.Geo.			624				1404				
Med.Ar.				676				1521			

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuētis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorū minimi duo numeri 49. 25. quorum summa 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quaesitos 1178450. 47138. 24050. Nā inter binos cadēt bini medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, quemadmodū inter eorum submultiplices 1225. 49. 25. minimum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicè, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har.prop.	1178450				47135				24050		
Med. Arit.		612792				35594					
Med. Geo.			235690				53670				
Med. Har.				90650				31850			

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datae proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 5. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1 eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel

vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Productí autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non fuerint pares, vel impares. Dupla enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuẽti.	120				30
Medius Arithmet.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO *si lubeat numerum quemcunq; propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos sunt, erũt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonicè proportionales; si sumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem ducas in singulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Constituunt ergo datum numerum 130. suntque Harmonicè proportionales, & cuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{13}$. $3\frac{1}{13}$. $4\frac{8}{13}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio est de pluribus partibus.*

QVO

QVO PACTO EX PROPORTIONE aqualitatis omnes inaqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis aqualibus, siue vnitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quàm facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inaqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruato ordine. DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie. SESQVIALTERI inuersi exhibent superbipartientes: Sesquitertij inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijsdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: Tripli sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes: DVPLI superbipartientes triplos superbipartientes: TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoq; parium

pariunt duplas ſupertripartientes ; DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes : TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplas ſuperquadrupartientes : DVPLI ſuperquadrupartientes, triplos ſuperquadrupartientes: TRIPLI ſuperquadrupartientes, quadruplos ſuperquadrupartientes : atque ſic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt vnicus, iſque facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex ſub oculos ponitur hoc appoſito typo, vbi liquido conſtat, qui termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis conſtituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus conſtituitur, ita ſumuntur termini datæ	Semel	Bis.	Semel
Secundus conſtituitur, ita ſumuntur termini datæ		Semel	Semel
Tertius conſtituitur, ita ſumuntur termini datæ			Semel

SEQVI-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex aqualitatis proportione. Proponimus autem duas aqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Aequalitatis proportio.	1	1	1		2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1		8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1		18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1		32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1		50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICularium.

Dupli inuerso ordine.	1	2	4		2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	9	6	4		18	12	8
Tripli ordine conuerso.	1	3	9		2	6	18
Sesquiter. ex triplis inuersis.	16	12	9		32	24	18
Quadrupli ordine cõuerso.	1	4	16		2	8	32
Sesquiquar. ex quad. cõuersis.	25	20	16		50	40	32

GENERATIO SVPERPARTientium.

Sesquialteri inuersi.	4	6	9		8	12	18
Supb. ex sesquial. inuersis.	25	15	9		50	30	18
Sesquiter. ordine inuerso.	9	12	16		18	24	32
Super. ex sesquiter. inuersis.	49	28	16		98	56	32
Sesquiquar. cõuerso ordine.	16	20	25		32	40	50
Super quadrupartiens sesquiquartas conuersus.	81	45	25		162	90	50

GENE-

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	0	6	4		18	12
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	25	10	4		50	20
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	49	14	4		98	28
Quadrupl. sesqal. ex tripl. sesqal.	81	18	4		162	36

Sesquitertij ordine recto.	16	12	9	32	24
Dupli sesquiter. ex sesquit.	49	21	9	98	42
Tripli sesqt ex dup. sesqt.	100	30	9	200	60
Quadr. sesqt. ex trip. sesqt.	169	39	9	338	78

Sesquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40
Dupli sesqqua ex sesqqua.	81	36	16	162	72
Trip. sesqq. ex dup sesqq	169	52	16	338	104
Quad. sesqq ex trip. sesqq	289	68	16	578	136

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	25	15	9	50	30
Dupli superbip ex supbip.	64	24	9	128	48
Tripli supbi ex dup supbi.	121	33	9	242	66
Quadr. supb. ex trip supb.	196	42	9	392	84

Suptripart. directo ordine	49	28	16	98	56
Dupli suptrip. ex suptrip.	121	44	16	242	88
Trip suptrip. ex dup. suptr.	225	60	16	450	120
Quad. suptr. ex trip. suptr.	361	76	16	722	152

Supquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90
Dupli supquad ex supqua	196	70	25	392	140
Trip supqua ex dup supq.	361	95	25	722	190
Quad. supqua. ex trip. supq.	576	120	25	1152	240

HIC

HIC enim perſpicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tri bus proximè antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto tripli cis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti ſunt ex tribus antecedentibus. 361. 95. 25. Primus 576. concernatur eſt ex primo 361. ſemel, & ex ſecundo 95. bis, & ex 25. ſemel. Secundus autem 120. conflatus eſt ex ſecundo 95. ſemel, & ex tertio 25. ſemel. Tertius denique 25. eſt tertius 25. ſemel ſumptus, vt ac appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis æqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO PACTO VICISSIM *Omnis proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.*

PROPOSITIS rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, reſtituetur viciſſim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quàm facili ratione, per variam ſubtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum ſtatuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem ſubtracto ex medio, reliquus numerus cõſtituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex conſtituto iam extremo ſemel, & medio termino bis ſumpto, ſubtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quauis proportio trium terminorum inæqualiũ reuocabitur ad aliam proportionem, conſerẽdo ſemper

maiores numeros cum minoribus; & hæc rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quòd si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem revocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio supertripartiens quartas.	49	28	16
Sesquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet

ntinet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc aequalitatem, 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150.30.6. sextum locum inter omnes tres numeros continua proportionis quintupla, propterea aequalitas inuenta est inter hos tres senarios, 6.6.6. Minimi istum siue primi numeri quintupla proportionis sunt, 25.5.1. secundi, 50.10.2. Tertij, 75.15.3. Quarti, 100.20.4. Quinti 125.25.5. Sexti autem, 150.30.6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hac enim illam genuit, & sic de cateris vsque ad aequalitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt supra diximus. Item sesquiquarta hac, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, reducta est ad duplam, & hac ad aequalitatem, &c.

NEQVE vero silentio praetereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometricae, siue ea aequalitatis sit, siue inaequalitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatum, quas supra explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur; pro secundo autem secundus, & tertius semel, pro tertio deniq; ipse tertius semel, perspicuè constat ex ijs, quae paulò ante scripsimus de ortu omnium proportionum inaequalitatis ex aequalitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc praeceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & secundo terminis bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS Proportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus hic ex datis terminis ita coacervatis.	Bis.	Bis.	Semel
Secundus vero sic.	Semel	Semel	Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ Proportionalitatis ex Geometrica.

Geometr. propor.	1	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arithm. propor.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9	

CONSIDERATIONE autem dignissimum est differentium constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. in secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in alijs.

ITAQVE

ITAQVE *si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione aqualitatis, erit differentia dupla vnius termini aqualis : vt perspicuè est in prioribus duobus exemplis.*

DENIQVE *Harmonicam proportionalitatem oriri neque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.*

SVMMAM collectã ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Harmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

O proportionalitatis Harm.	Primus	Secundus	Tertius
Summa terminorum omnis secundi collecti	Bis	Ter	Semel
Secundus vero fit.		Bis	Semel
Tertius denique hoc modo.		Semel	Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quacunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento ſublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus ſemel, & medius inuentus bis in vnam ſummam collecti, & ex maximo dato ſubtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semiſsis ergo huius erit ipſum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, qua ad æqualitatem redigetur, vt ſupra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas profecta oritur ex illa Geometrica, ſi ſuperius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata eſt. Exempla hic vide.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

A L I A E X E M P L A

Harmon. proport.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Aequalitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocatur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo et medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio conſtituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur ſi hic numerus reliquus duplus eſt minimi, ſecto eo bifariam, erit dimidia pars tam medius terminus, quàm alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas

as Arithmetica ad æqualitatem, ex qua or-
m traxit.

VT si detur Arithmetica proportionalitas, 3|9|15
9.15.si in Geometrica constituenda facias vnum 3|3|3
extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arith-
tica data, & hunc eundem numerum demas ex dato me-
9. supererũt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur
o data proportionalitas ad æqualitatem hã 6.3.3.3. ex qua
tur secundum superius præceptum.

SI vero reliquus ille numerus non est duplus
inimi, secandus erit in duas partes, quæ cum
inimo constituant proportionalitatem Geo-
metricam continuam. Ad hanc enim illa reuo-
ata erit.

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 14|19|24
4.19.24. Facto in Geometrica extremo vno, 4. 9|6|4
nimo data Arithmetica proportionalitatis, eo
bducto ex medio 19. relinquitur numerus 15.
us non est duplus minimi. Quare facto eo in 6. & 9. reduce-
ur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9.6.4. ex qua
rsus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper di-
idi in tales duas partes, quæ cum minimo constituant conti-
uam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem
e diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, de-
bimus ad propos. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalesue
discissantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem
rithmeticam statim ad æqualitatem, ex qua ortum du-
it, si termini æquales cum differentia proposita coaceruen-
ur; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex
uobus extremis. Differentia autem proportio-
alitatis subducta ex medio, reliquus nume-
us fiat medius: & eadem differentia duplica-
a, atque ex maximo termino sublata, fiat re-
quus numerus alter extremorum.

20	27	34
20	20	20

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si illa unum extremorum, & differentia 7. demas ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cuius differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica. hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, ut fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, ut efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo, conflabitur maius extremum 34. Eo dempto data hac proportionalitate 15. 15. 15. si ex eo constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hæc differentia ad 15. unum terminorum æqualium, ut habeas secundum terminum 35. Quòd si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem est 15. unus terminorum æqualium, ut hic vides.

Differentia 20.	15	15	15
	15	35	55

AT QVE pauca hæc prælibasse hoc loco sufficiat ex multis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu perjucunda in plura nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

RATIO-

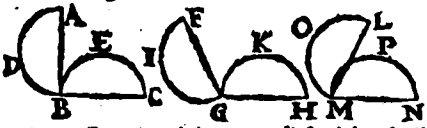
V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnã requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Nequeenim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ast igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet; adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, qua nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, [2] *erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est. sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eadē modo multa curuilinea cũ rectilineis proportionē habebūt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cũ & Hippocrates Chius Lunulam quandam, qua figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius*

[2] 20. primi.

maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula parabola maior eo quadrato. Hinc accidit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectã esse circumferentia circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describuntur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorũ A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; necnon curuilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis semicirculorũ L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur rectã lineã L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quæ proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quotcunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob rem habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionẽ angulus cõtactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexeris, voluit hanc definitionem ex intelli-



telligi, qua hanc conditionem habeant, vt alterutra multicata alteram possit superare, aliàs verò non, etiamsi in eo quantitatis genere videãtur cõprehendi, quales sunt linea nita, & infinita; angulus rectilineus, & angulus cõtactus, &c. anc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionũ, bet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, a proportionem ponuntur habere inter se, donec alterã exdat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs opositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudies eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclies Rationem dixit, intelligendas esse, qua sub eodem genere roximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset roportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineasq;, cum non sub eodẽ contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus, Sileant quoq; ui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici quuntur; ita vt satis sit, vt dua quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel linea, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulũ rectilineũ, & angulũ contactus, cũ in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere linea existant: quorũ vtrumq; ma falsum esse, liquidò ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quàm falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionẽ dua quacunque proposita quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & amba multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarũ sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quã multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A & B, eam inter se proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hæc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magni-



tudines

tudines eandem habere proportionem, quàm earũ æquemultiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, qua illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem apposuimus, vt liquidò constat ex verbis Euclidis.

V I.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumq; ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eædem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima, B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque prima, & tertia æquemultiplicia quæcunque, illa quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secunda, & quarta alia quæcunque æquemultiplicia, G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, sive hæc posteriora sint ita multiplicia secunda, & quarta, vt priora duo multiplicia sunt prima, & tertia, sive non. Quòd si iam inter se conferantur æqua multiplicia ea, quæ inter se respondent,



ultiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuò, ea ita inter se se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiã multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H: (& quod est vtrumque ab vtroq; vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique vt nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quauis accepta, perpetuo se ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G, non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem perdiligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis seruatur) quæcunque æque multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque æque multiplicibus secunda, & quarta, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet æque multiplicia prima, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secunda, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus

exceſſus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonã pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandem proportionẽ habentibus: quarũque multiplicia prima, & tertia magnitudinis, a quibuſlibet æque multiplicibus ſecunda & quarta magnitudinis, utrumque ab utroq; una deficiant; alia vero una æqualia ſint; alia denique una excedant, ſi ea ſumantur, quę inter ſe reſpondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. ſumantur q; primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item ſecundi & quarti ſumantur alij æque multiplices, vt ſeptupli 14. & 28. Videtur igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice ſecundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti. Rurſus primi, & tertij ſumãtur alij æque multiplices, nimirum ſexcupli, 18. & 36. Item ſecundi, & quarti ſumantur alij æque multiplices, vt nonupli 18. & 36.



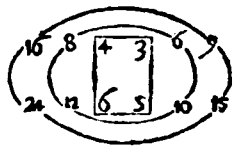
Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem eſſe 18. multiplici ſecundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Poſtremo primi, & tertij ſumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item ſecundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem ſecundi, quam 18. multiplicem tertij; ſuperare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunque ſumantur multiplicatione, ſemper deprehendatur, vnum trium horum verum eſſe, dicetur eadem eſſe proportio 3. ad 2. quæ eſt 6. ad 4. alias non.

CAMPANVS vero atq; Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidẽ velle, tantum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, primã, & tertia æque multiplicia, a ſecunda & quarta æque multiplicibus, vtrumque ab utroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc eſt, in eadem proportione, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedũt proportionaliter, ſi ea ſumãtur, quæ inter ſe reſpondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æqui

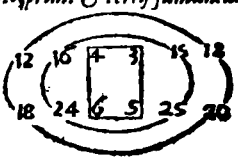
que multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex prima ad multiplex secũda, quam multiplex tertia ad multiplex quarta. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Praterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum aque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum aque multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem stabilitur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quin huius lib. non posse demonstrari, vt propriis locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex prima deficit a multiplici secunda, vel aquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertia tunc deficiat à multiplici quarta, vel aquale sit, vel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secunda deficere, multiplicem vero tertiæ nõ deficere à multiplici quarta: aut multiplicem primæ æquale esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quarta non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem esse multiplice secunda, at multiplicem tertiæ multiplice quarta non maiorem. Propositis inquam, quatuor magnitudinibus, quarum aque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, aqualitate, & excessu seruant; dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum aque multiplicium proportione, qua nunc non consideratur: sed quarto posteà theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumue esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nã si de quocunque intelligeretur, essent ait, quatuor hi numeri

4. 3. 6.



4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Nam enim primi & tertij, vtpote 4. & 6. sumantur aque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. aque multiplices, vt dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplex secundi, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplex quarti. Idemque cernitur si primi, & tertij sumantur quadrupli 16 & 24 secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Sicutur sufficit, vt aque multiplicia accepta vna excedant se quomodocunque, & non requiritur, vt proportionalia mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus aque multiplicium, proportionalium: Non enim sic, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod eorum aque multiplices non se se excedant proportionaliter, vt constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri aque multiplices ab eo prolati se se vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. At secundi & quarti, quincupli sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quamvis primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet æque multiplicia duorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque necessario multiplex quarti, quamuis id in nonnullis æque multiplicibus



probatu-

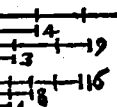
liciбus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius constabit ex 8. definitione.

CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, si modo secunda ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque sumpta ad 9. & 6. vel una deficiunt ab æque multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel æqualia sunt, vel una excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales sunt non continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum est in 4. definitione.

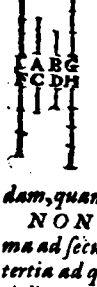


VIII.

CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicē secundæ; At multiplex tertiæ

non exceſſerit multiplicem qnartæ; ita prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si ſumpta ſint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehenſumque fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex prima maius eſſe multiplice ſecundæ, multiplex autem tertiæ non eſſe maius multiplice quartæ, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam: vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumptæ ſunt triplicia E, & F; ſecundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem eſt quam G, multiplex ſecundæ. At F, multiplex tertiæ maius non eſt quam H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam.

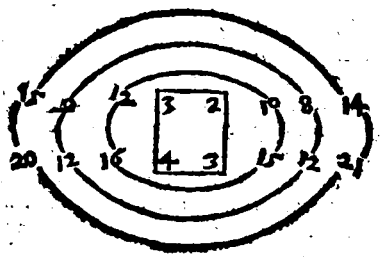


NON eſt autem neceſſe, vt quatuor magnitudines, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quã tertia ad quartam, æque multiplicia ſecundam quamvis multiplicationem ſic ſe habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri vt tam multiplex primæ maius ſit multiplice ſecundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex primæ ſuperat quidem multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ vel minus eſt, vt æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quam tertia ad

quartam

uram, non autem eandem, ut perſpicuum eſt in appoſi-
xemplo.

ITAQVE quatuor ma-
gnitudines di-
cuntur proportio-
les, neceſſe
eſt, ut æquemul-
tiplicia earũ,
ixta quaſuis
multiplicatio-
nes accepta, uel
nà excedant,



t in 6. deſin. fuit expoſitum: Vt autem maiorem dicatur ha-
re proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quar-
tam, ſatis eſt, ut ſecundam aliquam multiplicationem, mul-
plex prima excedat multiplex ſecunda, multiplex uero ter-
a non ſuperet multiplex quarta; quamuis tuxta innumeras
lias multiplicationes, æque multiplicia prima, ac tertia unà
xcedant æque multiplicia ſecunda, & quarta.

QVOD ſi quando è contrario multiplex prima deficiat
a multiplici ſecunda, non autem multiplex tertia a multiplici
quarta; dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem ha-
bere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis ſe-
cundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia pri-
ma & tertia unà deficiant ab æque multiplicibus ſecũda, &
quarta. Vt in eiſdem numeris propoſiti exempli, minor dicetur
proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri poſſit, cur Euclides
tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere
proportionem, hoc eſt, ita eſſe primam ad ſecundam, ut eſt
tertia ad quartam, cum æquemultiplicia prima ac tertia tux-
ta quamcunq; multiplicationem, & æquemultiplicia ſecunda

ac quarta iuxta quamcunq; etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescunque multiplex prima maior est quàm multiplex secunda, multiplex quoque tertia maior sit quàm multiplex quarta; quotiescunque vero multiplex prima æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertia æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex prima minus est quàm multiplex secunda, multiplex etiam tertia minus sit quàm multiplex quarta: Item quare tum demum quatuor magnitudinum prima ad secundam eandem esse proportionem voluerit, quàm tertia ad quartam, cum æqua æquemultiplicia prima ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non maius sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniã, inquàm, mirũ alicui videri hoc possit, quòd illis cessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorũ nõ statim appareat similitudo proportionũ, dissimilitudove: aperiendũ videtur hoc loco, quare ita magnitudines tũ proportionales, tũ nõ proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita se habent, vt dictum est; quia non habuit quid magis, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, vt ratio quæratur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur; sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulũ quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi lineis effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam 4. fin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarũ æquemul-

tiplicia

plicia eam conditionẽ habent. quam explicauit, ita vt nunquàm ea credẽdum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionẽ, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus cõuenire. Sed quamquam responsio hac vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione nõ videtur colligi posse, verè magnitudines, quarum aque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus multò accuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales, & non proportionales, atq; adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, verè eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandũ ad memoriã est, duplicem esse proportionẽ; Rationalẽ, qua inter quantitates cõmensurabiles existit, atq; adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalẽ, qua inter quantitates incommensurabiles existit, nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de irrationalibus dũtaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defi. 20. proportionales quatuor numeros definit, nimirum. Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, aquemultiplex est, vel eadẽ pars, vel eadem partes; Vel certè (vt nos ad eam defi. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, aqualiter continet, eanq; insuper illius partẽ, vel easdẽ partes. Nõ proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines non proportionales sunt, hoc est, prima ad secundã habet maiorem proportionẽ, quàm tertia ad quartã, cũ prima secunda magis multiplex est, vel maior pars, maioresue partes, quàm tertia quarta: Vel certè cũ prima secundam sapius cõtinet, q̃ tertia quartã, siue eadẽ pars, aut partes vtrobiq; supersint, siue non: cũ prima secũdã toties continet, quoties tertia quartã, sed non maiorẽ insuper partẽ, maioresve partes secunda inclusa tertia quarta. Potuisset, inquã, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac nõ proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinũ exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum

rerum proportiones eadem, vel diuersa, vt diximus. In proportio numerorum (vt ex Campano, aliisque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quadam vnius numeri ad alterum, secundum quòd illius est multiplex, vel pars, partesve: Vel certè secundum quod illum continet, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis quàm minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus; tum ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM verò Euclides non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est se se convertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum. cum omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilium, sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquod, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris, siue magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quælibet quatuor magnitudines commensurabiles eâdem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscunque, vel magnitudi-

nitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodũ quia quando in circulorum segmentis anguli aquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli aquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem pars, vel eadem partes circulorũ, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quod tunc segmenta neque eadem pars, neque eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existãt. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentiũ aqualitatem, vel inaqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabiliũ colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hac similitudo in segmentis, qua circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, qua circulis sunt commensurabilia; ita non recte fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hac proportionum similitudo nõ tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij aquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti aquemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoq; esse necessario multiplice quarti; Et si ille aqualis est, hunc quoque esse aqualem; & si minor, minorem:

Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptisq; aquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item aquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamcunque etiam multiplicationem, si multiplex primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit, quàm multiplex quarti; Et si illo existente aquali, hic quoq; aqualis sit, & si illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuò verum est, quatuor illos numeros esse proportionales: Rursus quia, propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quàm tertius ad quartum, sumptisque aquemultiplicibus primi ac tertij, item aquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra quia, quatuor propositis numeris, sumptisque aquemultiplicibus primi ac tertij, item aquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet in numeris, at & adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium nunquàm inueniatur, non immeritò dicentur quacunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis aquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item aquemultiplicibus secundæ ac quartæ secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex primæ maior est multiplice secundæ; multiplicem vero tertiæ aqualem esse multiplici quartæ, quando multiplex primæ aqualis est multiplici secundæ; multiplicem denique tertiæ minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quòd multiplex primæ minor est multiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quacunque magnitudines tam commensurabiles, quàm incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam, cum, sumptis aquemultiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice

secundæ

cunda, multiplicem verò tertia non maiorem multiplice uarta: quãdoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumq; aliud ndicium habere possumus, quo magnitudines incommensurales cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales: æsertim cum magnitudines incommensurabiles, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices inter se habent, vt in 6. defi. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquãdo absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur, verissima esse plerunque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt postea etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquido constare existimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometricè demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissimè ante lib. 5. possint demonstrari; atque adeo hic assumi, vt iam demonstrata. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationẽ, tem secũdi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secũdi, erit quoq; multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi,

erit

erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti: si denique multiplex primi sit multiplicis secundi minor, erit & multiplex tertij multiplicis quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturq; primi A, & tertij C, aquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, aquemultiplices G, H, qualiscunque hæ multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quàm G, multiplex secundi B, maiorem quoq; esse F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualē quoq; esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoq; esse F, quàm H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D, erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D:

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18,	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

[a] 13. septimi.

[b] 17. septimi.

[c] 13. septimi.

[b] *Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex æquali propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H: Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quàm G, erit quoque F, maior quàm H, vt in primo exemplo: Si æqualis F, æqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoque minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.*

11.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad

mi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fiatque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronun. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium; erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G; fietq; idcirco

K, 56.	H 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.	O, 60.	I, 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 30.

a 19. septimi.

idcirco ex B, in FG, numerus, quem B, metitur per FG, a pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in FG, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad FG, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita FG, ad E. Quoniam ergo est, vt FG, ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicuè consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

a 19. septimi.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D. Eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æquemultiplices L, MN, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proximè maior quàm I; hoc est, tales æquè multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel æqualis, vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex constructione, quòd I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

b 14. septimi.

K, 56.	H 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 14	N, 6.	P, 20.	L, 50.
K, 160.	H, 440.	O, 60.	I, 220.
F, 8.	5, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 330.

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutãdo quoque D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad MN; quòd idem numerus ipsi

ōs D, E, multiplicans fecerit L, M, N, quippe cum L, MN, mpti ſint ipſorum D, E, aquemultiplices: Et eadem de cau- , vt C, ad F, ita eſt I, ad K. Igitur ex lemmate propoſ. 14. .7. erit quoque, vt L, ad MN, ita I, ad K, & permutando, L, ad I, ita MN, ad K.

QVIA ergo eſt, vt totus L, ad I, ita totus MN, ad K: vt D, ex L, ablatus ad eundē I, ita E, ex MN, ablatus ad ndem K; erit quoque ex theor. 6 ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt liquus ex L, ad I, vt reliquus ex MN, ad K: Eſt autem re- quus ex L, non maior quàm I, ſed vel minor, vt in priori xemplo, vel aqualis, vt in poſteriori; propterea quòd reliquus x L, cum D, facit ipſum L, multiplicem ipſius D, proximè aiorem ipſo I, ex conſtructione. Igitur & reliquus ex MN, aior non erit quàm K; atque idcirco ſi ex MN, detrahatur ipſi E, aqualis, erit reliquus M, vel minor ipſo K, ut in prio- ex emplo, vel aqualis, vt in poſteriori. Cum ergo H, multi- ex ipſius G, ſit maior quàm E, vel N, ex conſtructione; erit tus K H, toto MN, maior.

DENIQVE ſumpto O, ita multiplici ipſius A, vt KH, ultiplex eſt ipſius FG, vel I, ipſius C; Item P, ita multiplici ſius B, ut MN, multiplex eſt ipſius E, vel L, ipſius D: quoniā ſtenſum eſt, ita eſſe FG, ad E, vt A, ad B, ſumptiq; ſunt ipſo- um FG, & A, primi ac tertij, aquemultiplices KH, & O, itē ſorum E, & B, ſecundi ac quarti, aquemultiplices MN, & , ſequitur ex antecedente propoſ. ſi KH, maior eſt quā MN, ſum quoque O, maiorem eſſe quàm P. Cum ergo KH, oſten s ſit maior quàm MN, erit quoq; O, maior quàm P. Quo- rca cū O, L, ſint aquemultiplices ipſorum A, C, primi ac ter- ; & P, L, aquemultiplices ipſorum B, D, ſecundi ac quarti, emonſtratumq; ſit, maiorem eſſe O, quàm P, ſit autem I, mi or quàm L, ex conſtructione; fieri poteſt, vt exiſtente maiore oportione primi A, ad ſecundum B, quàm tertij C, ad D, tantum, ſumptiſq; aquemultiplicibus, vt dictum eſt, multi- x primi nimirum O, maior ſit quàm P, multiplex ſecundi, ultiplex autem tertij, nimirum I, maior non ſit quàm L, ultiplex quarti. Quod demonſtrandum erat.

QVOD ſi minor ſit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, ſumanturq; aquemultiplices primi ac ter- , item aquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri quoq; poteſt,

vt

vt nunquàm multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, demonstratum est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quàm L, multiplicem secundi D, at O, multiplicem tertij A, minorem esse quàm P, multiplicem quarti B.

I P I.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiã multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quàm multiplex quarti; & si illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuo minor sit: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices quotlibet, E, F; item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualescunque etiam hæ sint multiplicatio. Dico E, F, multiplices primi ac tertij semper fore vel maiores, quàm G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores; si fuerit A, primũ ad B, secundum, vt C, tertium, ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad

C, ad D; fuerit posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, ut E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesim. Est ergo A, ad B, ut C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando cõtingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex secũdi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cum illa sit proportio maioris inaqualitatis, hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inaqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoq; permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H. [a] *Est autem, ut E, ad F, ita A, ad C; nam idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauerit E, & F, quippe cum E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C; Eademque de causa est, ut G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat.*

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

[a] 17. septimi.

QVOD

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 3.	D, 2.	H, 20.

EADEM enim omnino demonstratio est, si proportione maiore vbique minor proportio, aut alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus incommensurabilibus, quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam planè reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: alioquin verè proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus eo sensu sumptis uerum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò ante demonstraturos nos esse recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, recta CD, in plana, & super ipsas rectas describantur quadrata ABEF, CDGH; cuius diametri BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quàm quadratũ diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum sit maior quàm 5. minor autem quàm 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione quæ unitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior

quàm 2. minor autem, quàm 3. &c. ita vt proportio tam
B, ad BF, quàm C D, ad D H, sit irrationalis, diameter q̃
o pere a BF, lateri AB, & diameter D H, lateri C D, in-
mmensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vlti-
a lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus
portionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt,
diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse
omnemensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem
alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri BF, D H, diuidunt an-
los rectos quadraterum bifariam, vt in scholio propos. 34.
b. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli
BE. AEB, CDH, CHD, semirecti, ideoq̃ inter se æquales.
um igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula
ent triangula ABF, CDH. Quare a erit, vt A B, ad BF, a 4. sexti.
C D, ad D H; Et permutando vt AB, ad C D, ita BF,
d DH. Est autem posita recta AB, rectæ C D, dupla. Igitur
BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius
b. eò deducti simus, vt credamus diametrum B F, diametri
DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus
habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex
ua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt C D, ad D H, per-
x propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autem propos.
b. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permuta-
a proportio, qua hic etiam usi sumus, sine eadem defin. 6. de-
onstrari non potest in magnitudinibus incommensurabili-
us, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde
g noscere possimus, diametrum BF, diametri D H, verè du-
lam esse, vt ex defin. 5. conclusum est, hoc ipso, quòd latus
AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tam lateris
A B, ad diametrum BF, quàm lateris C D, ad diametrum
D H, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita
ognoscemus. Quoniam latus AB, lateris C D, duplum est, erit
x scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, qua-
druplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1.
Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati AE, quàm
uadratum diametri DH, quadrati C G, ex scholio propos.
7. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & qua-
dratum diametri DH, 2. atq; idcirco illud huius quadruplum

erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex fin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubium non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præscribit. Porrò ex regulis quoq; numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionē ad diametrum DH, id est, ad R. 8. Nam sive R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens sit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; sive R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum communesurabilium proportionibus demonstrantur ex definitione huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Qua res argumento rursum est, magnitudines, quas definitio 6. huius lib. comprehendit, verè esse proportionales: quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea definitione pendent, perpetuò conuenire comperitur, vt iis, qui in Algebra præceptis versati sint, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum secetur, gignere possit integrum numerum 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. renocetur que, vt in Arithmetica traditum est, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem est denominatorem 7. nō metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multi-

plicetur

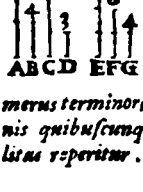
olicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusque ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quàm denominator 7. in se ducatur.) gignaturque fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7 non metitur latus 38. vt ostendimus, [a] non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metietur quadratum 1444. cuius contrarium demonstrauimus. Atque eadem ratione demonstrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in ipsum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiam minor est denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem data fractionis numerator minor denominatore; erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaque quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{100}{25}$. quæ 4. integras unitates constituit.

[a] 16. octaui.

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

QVONIAM omnis Analogia, ſeu proportionalitas quam interpres, vt dictum eſt, proportionem nominat, ſumitudo eſt duarum. vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum duos terminos antecedentes, ac dues conſequentes. Quam proportionalitas fuerit non continua, reperiuntur ſaltem quatuor termini, ſiue magnitudines; At vero ſi fuerit continua, tum cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunque ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationẽ habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI

VELVTI *si sint magnitudines A, B, C, D, E, continuo proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & ad D; & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiã, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: eorum inter A, & C, duæ proportiones reperiuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionẽ A, ad B, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quæ inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.*



QVOD *si è contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.*

INTERPRETES *nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continuæ proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eò quòd Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplã proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quãtitatem, ac tertiam reperitur*

quodammodo proportio prima quantitatis ad secundam explicata; quippe cũ inter primã quantitatẽ, ac tertiã interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, vt diximus. Non enim intellexit, illam duplam esse huius, ne Theorema proponeret, quod meritò quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit esse quincuplam? At vero, illam in huius duplicatam ad sensum expositum, nemo inficiabitur; eò quod bis sit posita, & continue, propertio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cũ illa minor sit, hæc autem maior? Nam per propos. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatẽ 25. propterea quòd 25. maior est, quàm 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare etsi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdem duplæ. Quemadmodum etiam proportio octuplæ duplæ est proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, qui fieri potest, vt proportio primi ad tertium duplæ sit proportionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? Duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quòd hæc ordine bis posita est continuè inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac definitione requiri terminos inæquales, primamq; debere esse maiorem, ita vt definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionem

rtionē repetiri in proportione minoris inaqualitatis. Locus
larissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi de-
monstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse
iametrorum, qua in basibus. Nam si conferatur maior co-
nus, vel cylindrus ad minorem; necessario in secunda parte
ius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse pro-
f. 8. eiusdē lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maio
m referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratio-
; vt eo in loco annotauimus. Hinc accedit, propositiones il-
, in quibus figura aliqua demonstrantur habere rationem
uorum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmo-
di est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11.
& 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportio-
e maioris inaqualitatis essent intelligenda. Explicanda ergo
hac definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam
telligendū sit nomine proportionis duplicata, triplicata, &c.
demonstrationes sequentiū librorū percipiātur, rebusq; pos-
t materialibus accommodari. Nō autem determinat, quā-
am proportio sit alterius dupla, uel tripla, uel quadrupla, &c.
xempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. cōstat, pro-
rtionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportio-
is, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, col
gendum erit, si continuatur proportio laterum in tribus termi
is, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, qua est
unii termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fue-
trium palmorū, posterioris autem vnius palmi, prius qua-
atum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita
illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. qua
nonupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata pro-
rtionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris
. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportio-
em quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportio-
lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius
oportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona
rs, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata propor-
nis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est.
milli ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur,
haras inter se rationem habere suarum diametrorū tripli-

earum, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter est trium palmorum, ad sphæram, cuius diameter est unius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio cuplata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam habebunt sphæra ipsa proportionem millecuplam, cum hæc sit decupla triplicata, vt hic patet. 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, milleccuplam proportionem esse duplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius vigecuplam decupla esse duplam?

CÆTERVM proposita quacunque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurgit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatoris subquadruplæ proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio decuplæ, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt habetur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicitur portio subsedecuplæ, duplicatæ proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis quæ quadruplæ dicitur triplicatæ, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inueniretur denominator proportionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerum denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis posito, hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At denominator proportionis triplicatæ gignetur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atque ita multiplicando, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata existens ex

ix denominatore quater posito ; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud est, quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, qua propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout vel liet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatã à 64. qua proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas interextremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadruplæ, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. qua proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: qa denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quò minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{16}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione

Denominatores.	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

Denominatores	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4}$.	
Num. proport.	3	12	48	192

ne subquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{1}{4}$. atque ita proportio sesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sic etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio decuplæ, est proportionis quadruplæ triplæ; propterea quòd denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, sive maiores cum minoribus, sive minores cum maioribus conferãtur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5 lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c, ita vt proportio decupla sit duplæ quintuplæ, & sextupla sit triplæ duplæ, &c. ostendemus ad prop. 3. lib. 8. tractatumq; est hoc argumẽtum copiosè à Rodulpho Volumnio in Disputatione de Proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mẽte captus erit, qui nõ statim intelligat, si idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorẽ habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centuplæ, vt auctores contrariæ sententiæ volunt: sed tamen hæc proportio centuplæ dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplũ proportionẽ habentes interponuntur, vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiã si è contrario, Agẽs aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, at rudi qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdẽ Patientis 10. quàm Agens 1.? Cum ergo Agens ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. cõstatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profecto proportio subquintuplæ proportionis subdecuplæ dupla, non autẽ illa, quæ subcentupla est, vt prædicti auctores volunt.

volunt, cum hæc longè minor sit, quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicatæ, propter causam sapius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionẽ duarum quantitatum, quibus nullum interponitur mediũ, sæpe naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates interpositum vnicũ medium in continua proportionalitate, habere ordinationem superficiei quadratæ, quoniã gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodũ & quadratũ ex duabus lineis æqualibus cõficitur. Deniq; proportionẽ, cuius quãtitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturã solidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies ad Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionũ esse similitudinem. Docet iam, nõ solum in proportionalitate quatuor proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam verissimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quanam consequẽtia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, qua C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramq; magnitudinem antecedentem vel æquale esse vtriq; cõsequenti, vel eodẽ modo maiorẽ, aut minorẽ:



Alias

Alias non haberet vtraq; antecedēs ad vtramq; consequē proportionem eādem. Exemplū habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tā E. & F, homologa sunt, quam F, & G, vt constat. Atq; hanc causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi aque multiplicia prima & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia aque multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus verò non proportionalibus dissimiles.

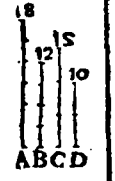
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe alter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem dicere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue conuersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex aqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A,

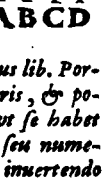
d B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse
roportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumen-
ari à permutata proportione. Græci scriptores in hac argu-
mentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B,
ta C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque
, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huius-
di illationem, demonstrabitur propos. 16. lib.
uius. Caterum in hoc modo argumentandi,
eciſſe eſt, omnes quatuor magnitudines esse eius-
em generis, vt inter binas vt ut assumpeas pro-
rtio esse possit. Non enim recte infertur. Vt li-
ea A, ad lineam B, ita numerus C, ad nume-
um D; ergo permutando, vt linea A, ad nume-
um C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio
ea ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5.
alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt
se priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & po-
riores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationi-
us huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, ferramus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc , consequentes ad antecedentes referamus; cemur argumentari ab inuersa proportione. n hac argumentatione sic fere loquuntur au-tores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur con-ertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, t D, ad C; Quem quidem modum argumen-di certum esse, ostenditur in coroll. propos. 4. huius lib. Po-na priores magnitudines possunt esse vnius generis, & po-riores alterius. Recte namque licebit inferre; vt se habet nea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu nume-us C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo t linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad



D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. prop. 1. constabit.

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum cõsequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequentem, quam habet ipsa DF, antecedens nimirum cum eiusquente, ad EF, consequentem; datur huiusce modi argumentatio compositæ rationis, ex quatuor antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores peries in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DI, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 11.



HVIC modo argumentandi per compositionem rationum addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimus ; Ergo vt AC, ex antecedente & consequente constata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionẽ rationis conuersam.

ALTER modus dici potest, Compositio rationis conuersa quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si sit AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimus & per compositam rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 11. huius lib. ostendemus.

DIVI

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, qua proportio est totius AB, ad CB, ea est
ius DE, ad FE; Igitur erit &
C, excessus, quo antecedens con-
quentem superat, ad CB, conse-
uentem, vt DF, excessus, quo



nsequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In uisona autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diui ndo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.

POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi j duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere pos- nus; quando nimirum consequens ad excessum, quo conse- entem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt AB, ad CB, DE, ad FE, concludimus, per diuisionem rationis conuer m; Ergo erit, vt CB, consequens ad AC, excessum, quo an- cedens consequentem superat, ita FE, consequens ad DF, :cessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autē anc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum ar- mentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimi m & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse ma em consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.

ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contra- ; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo nsequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se ha- t AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoque per diui- nem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, ex- ssum, quo consequens antecedentem superat, ita DF, ante- lens ad FE, excessum, quo antecedentem superat conse- ens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à is ad propos. 17. huius lib.

PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis con- ria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt su- possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

CON-

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam eadem AB, ad AC, excessus, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

A 6 C 4 B
D 12 F 8 E

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est A, &

d B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur infera-
propterea eam esse proportionem A, ad
rima ad vltimam in primis magnitudi-
s, qua est D, ad F, prima magnitudi-
d vltimam in secundis magnitudinibus;
ur huiusmodi argumentandi formula
mpta ex aquo, siue ex aqualitate, in qua
cet extrema magnitudines, subductis me
colliguntur habere vnam, eandemque
se se proportionem, vt in altera defini-



e exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex aqualitate
t argumentari in proportionibus, vno quidem, quando
imus binas ac binas magnitudines in eadem proportione,
natè procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; ex-
at Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Or
ta proportio, & quid proportio Perturbata.

XVIII.

ORDINATA proportio est, cum
ierit, quemadmodum antecedens ad
onsequentem, ita antecedens ad con-
quentem; fuerit etiam, vt consequens
l aliud quidpiam, ita consequens ad
iud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E;
rsus vt B, consequens ad aliud quidpiam,
ad C, ita E, consequens ad F, aliud quid-
m; dicetur talis proportio, Ordinata: quia
m ordo tam in primis tribus magnitudini-
, quàm in secundis seruatur; cum vtrobiq;
seruatur primum prima cum secunda; dein-
secunda cum tertia. Quando ergo in'modo

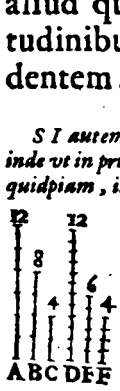


umentandi ex aqualitate seruatur Ordinata proportio, de-
nstratur propos. 22. huius lib. eã argumentationẽ esse bonã.

XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem ſit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; non cupabitur huiuſcemodi proportio, Perturbata: quòd non ſeruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Perturbata proportio, demonſtratur, eam argumentationem eſſe bonam, propoſ. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, per infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem. etiam ſi plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propoſ. 22. & 23. huius lib. perſpicuum fiet.

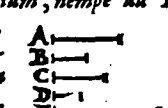


VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam

dam, quod vt hic subijcere mus, non inutile fore iudicaui-
. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo qua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiã alia magnitudo ad quamlibet magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit gnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. em eandem habebit quapiam alia E, propositam C. Quamuis enim ignore- s interdum, quanam sit quarta illa gnitudo, dubitandum tamen non est, esse posse in rerum natura, cum id ntradictione non implicet, vt Philosophi, loquuntur, neque sudi aliquid ex eo consequatur.

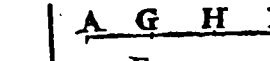


THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinũ E, F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinũ E, F, quam multiplex est multiplex AB, ipsius E, vel C D, ipsius F. Sumatur enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & ipsi AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi



E, æquales, & C, quoq; in magnitudines CI, IK, KD ipſi F, æquales; Dico autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus, conſtat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam rurſus AG, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales CI, & F, [2] erunt AG, CI, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul; Necnon HB, & KD, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, ſimul, in AB, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſtripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[2] 2. pron.

SCHOLIVM.

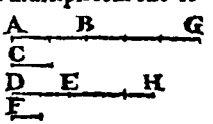
HOC idem demonſtrabitur vniuerſe propoſ. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare; quia ex eo alia proportiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari. 2

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SI

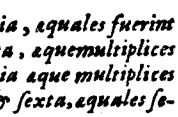
SIT magnitudo prima A B, tam multiplex ſecundæ ,quam eſt multiplex DE,tertia,quartæ F; Rurſus tam t multiplex BG,quinta ipſius C, ſecundæ,quam multiplex eſt E H, ſexta ipſius F, quartæ. Dico A B, primam im B G, quinta compoſitam,tam multiplicem eſſe ſeidæ C,quam multiplex eſt D E, rtia compoſita cum ſexta E H, ſius F, quartæ. Cum enim A B, E, ſint æque multiplices ipſaim C, F; erunt in A B, tot maitudines ipſi C,æquales,quot ſunt in DE, æquales ipſi . Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipſi C, uot ſunt in EH,æquales ipſi F.Si igitur æqualibus multudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines G,EH; [a] erunt totæ multitudines A G. D H, æquales. uare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in H; Ideoque tam multiplex eſt A B, (prima compoa cum quinta) ipſius C, ſecundæ, quam multiplex t D H, (tertia compoſita cum ſexta (ipſius F,quartæ. i prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod at oſtendendum.

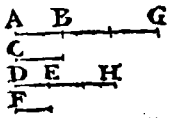


[a] 2. pron.

SCHOLIVM.

QVOD ſi prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint nda, & quartæ; Quinta vero & ſexta, æquemultiplices unda, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices erint ſecunda, & quarta; At quinta & ſexta, æquales ſenda, & quartæ: Erit eadem ratione, ta A G, (*prima & quintæ*) *tam multiplex ſecundæ C, quam multiplex eſt* ta D H, (*tertiæ ac ſextæ*) *ipſius F, uartæ. Semper enim A G, multitudo agnitudinum æqualium ipſi C, oſtenſtur æqualis eſſe ipſi D H, multitudini agnitudinum ipſi F, æqualium, vt perſpicuum eſt in appoſitis figuris. Si vero tã rima & tertia, quam quinta, & ſexta* ſuales ponantur ſecundæ, & quartæ, luce clarius eſt, primam





& quintam simul, atque tertiam & sextam simul, multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur in omni generis proportionis vniuersè propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundę æquemultiplex, atq; tertia quartę; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumantur autem I, F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM; erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æquemultiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL; Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertiæ quartæ



uartæ D; Item GH, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ecundæ B, quam multiplex eſt KL, ſexta eiuſdem quar- æ D, [a] Erit & EH, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FL, compoſi- a ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cum ſit EH, pri- a tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt FL, ertia quartæ D, vt proximè demonſtratum eſt; ſit au- em & HI, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt . M, ſexta multiplex quartæ D; [b] Erit & EI, compoſi- a ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam ſt FM, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & . Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque ter- ia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 2. quinti.

[b] 2. quinti.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propoſ. 22. non ſolum in magnitudinibus æque multiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ bina ſumpta eandem habent proportionem, ſiue rationalem, ſiue irrationalem, ſed neceſſarium fuit, ipſum ritus hic in proportione multiplici demonſtrare, vt inſequens ropoſ. 4. demonſtrari poſſit.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumantur primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, ſecundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, quamuis multiplicationem: ſiue E, F, multiplices ſint ipſarũ A, C, ſicut G, H, ipſarum B, D, ſiue non. His poſitis, conſtat ex defin. 6. huius lib. ſi E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et ſi E, æqualis eſt ipſi G, etiam F, æqualem eſſe ipſi H. Et denique ſi E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non eſſet, per defin. 6 eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſi earum æquemultiplicia non ſemper ita ſe haberent. Dico iam, multiplices primæ ac tertiæ non ſolum vnà deficere à multiplicibus ſecundæ ac quartæ, aut vnà æqualia eſſe, aut vnà excedere, vt diximus, ſed eandem quoque inter ſe proportionem habere, nimirum ita eſſe E, multiplicé primæ A, ad G, multiplicem ſecundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc eſt, ſi rurſus E, ſtatuatur prima magnitudo; G, ſecunda; F, tertia; & H, quarta ſumanturq; ipſarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; item ipſarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia: Multiplicia ipſarum E, F, á multiplicibus ipſarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt vult definitio 6. Idem namque eſt, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia ſumpta, vt diximus, vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere. Capiantur enim rurſus K, ipſarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipſarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex eſt E, prima ipſius A, ſecundæ, quam F, tertia ipſius quartæ; ſumptæ ſunt autem & I, K, æque multiplices ipſarum E, F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo K, æque multiplices ipſarum A, C, ſecundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipſarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, ſecundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; oſtenſæque ſunt I, K, æque multi-



[a] 3. quinti.

multiplices primæ & tertiæ, A, C; Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ, B, D; [a] fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsam L, etiam K, excelat necessario ipsam M: Idemque ostendetur in quibusunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec ion magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [b] æquemultiplicia quoq; erunt nagnitudinum A, C, & B, D. Itaq; cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoq; esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in uacunque multiplicatione: [c] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

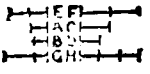
[a] 6. definit. quinti.

[b] 3. quinti.

[c] 6. definit. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & conuersa, seu inuersa ratione, proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse cõuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarũ A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quòd A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [d] necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem



[d] 6. definit. quinti.



minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationē sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior, quam vtraque E, F: & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quàm vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaque quoniam prima B, & tertia D, sumpta sunt æquemultiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F, ostensum q, est, G, H, vna excedere E, F, vel vna æqualia esse, vel vna deficere, secundum quamcunque multiplicationem multiplicia sumantur; [a] erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.

a 6 definit. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, sine duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersam 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio inuersa est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstrat idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus pro-

pro-

ertionalibus, aquemultiplices prima ac tertia ad aquemultiplices secunda & quarta eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, aquemultiplices prima ac tertia ad aquemultiplices secunda & quarta eandem habent reportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim a principio licuisset illi inferre, c esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine ceperione nouarũ magnitudinũ aque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, nam in his. Reijcienda est ergo huius scemo-i demonstratio, una cum expositione 6. definitionis, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat falsum, si I, minor est, quam L, vel qualis, vel maior, etiam K, minorem esse, el aqualem, vel maiorem, quam M; quemdmodum & idem constat in aque multiplibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, sumantur, pro vt inter se respondent. Vnde x 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 5. definitio conuenit.



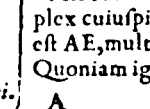
THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatæ CF, siue AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, vt in prima figura, siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Item siue AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figuræ, siue non ex eisdem, vt in posteriori figura.

Dico

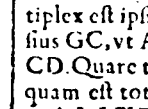
Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ FD, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, vt est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; [a] erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; [b] atque idcirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt AE, ipsius CF, hoc est, vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.



[a] 1. quinti.

[b] 6. pron.

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, vt est AE, ipsius CF, vel vt tota AB, totius CD: quoniam AE, GA, æque multiplices sunt ipsarum CF, FD; [c] erit tota GE, sic multiplex totius CD, vt AE, ipsius CF: Sed ita quoque multiplex est AB, eiusdem CD, vt AE, ipsius CF, ex hypothesi. Æque multiplices sunt igitur GE, AB, ipsius CD; [d] atque adeo inter se æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipsius FD; cum GA, sit multiplex posita ipsius FD. Atqui ita est multiplex posita GA, ipsius FD, vt AB, ipsius CD. Igitur & EB, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, vt AB, tota totius CD; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.



[c] 1. quinti.

[d] 6. pron.

SCHO-

SCHOLIVM.

VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic eſt factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

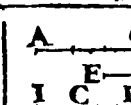
SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cũ enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoq; AG, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; aliàs inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quam CH, tertia multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecũdæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartæ F; [a] erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, vt HI, tertia cum ſexta, multiplex eſt quartæ F: Atqui CD, ipſius F, erat quoq; tam multiplex, quam AB, multiplex eſt ipſius E. Aeque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F. [b] Ideoq; æquales inter ſe. Quare, dempta CH, communi, remanebũt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoq; HD, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitum.



[a] 2. quinti.

[b] 6. pron.

SIT



SIT deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; [a] erit, vt prius, AB, ita multiplex ipsius E, vt HI, multiplex est ipsius F. [b] Quare iterum æquales erunt HI, CD; ablata adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, vt GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, ita multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quinti.

[b] 6. pron.

SCHOLIVM.

HOC quoque ostendemus vniuerse propos. 24. in omni genere proportionis.

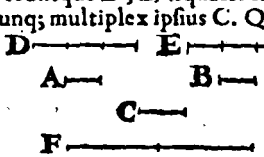
BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD, sunt ipsarum E, F, æquemultiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, æquemultiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoque HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, existit, vt ostensum est.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT

INT duæ magnitudines A,B, æquales inter se, & a quęuis C. Dico A,& B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D,E, æque multiplices rum æqualium A,B; [a] eruntque D, E, æquales inter Capiatur rursus F, vtcunq; multiplex ipsius C. Quoniam igitur D,E, æqua- unt, fit vt vtraq; vel or sit, quam F, vel alis, vel maior, iuxquamcunque multi-



[a] 6. pron.

rationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D,E, ue multiplices primæ A,& B, tertiæ, minores sint ipsa multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar rum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; it in proportio primæ A, ad C, secundam, quæ ter B, ad C, quartam.

[b] 6. definit. quinti.

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse aque D,E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur m F, multiplex primæ & tertiæ C, vna deficiat à D, & æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vna ualis sit, vel maior; [c] Erit quoque ea proportio primæ ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est opositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per roll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostenn iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habit rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonndum.

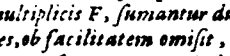
[c] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neque m per demonstrationem constat, vtramque multiplicem & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed m, cum illa sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel ualem, vel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in ibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem proposin colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM

EODEM fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi eo multiplicis F, ſumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam C, & D, inter ſe. Dico A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum A, & B,



prima, & tertia. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum C, & D, ſecunda, & quarta; [a] erunt tam E, & F, inter ſe æquales, quam G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex primæ deficit à G, multiplice ſecundæ, etiam F, multiplex tertiæ, deficiet à H, multiplice quartæ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit. [b] Eadem ergo eſt proportio A, primæ ad C, ſecundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod propoſitum.

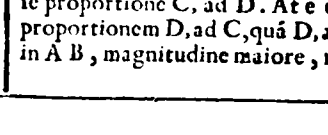
[a] 6. pron.

[b] 6. definit. quinti.

8

THEOR. 8. PROPOS. 8.

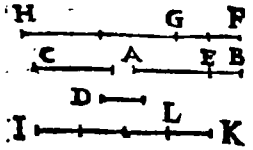
INAEQVALIVM magnitudinũ maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, AB maior, & C, minor. Tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem eſſe proportione C, ad D. At e conuerſo, maiorem eſſe proportionem D, ad C, quã D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis

m nc

minori C, vt sit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura

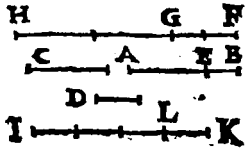


ecesse fuit sumere GF, HG, riplas ipsarum EB, AE; quia upla ipsius AE, esset minor, quàm D. Loco triplarum po-uissent accipi quæcunq; aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est, quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunq; aliæ maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarum E, EA; [a] erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E. Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quam H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est I K, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm H G, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, nõ erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quam H G; sed & I L, maior quoque esset quam H G. Quòd si I K, dupla sit ipsius D, perspicuum est, I L, non esse maiorem, quàm H G, cum H G, posita sit non minor quàm D, hoc est, quàm I L,) & id circo H G, erit vel æqualis ipsi I L, vel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K. Cum ergo H G, non minor sit quam I L, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior, erit tota F H, maior quam I K. Itaque cum F H, H G, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; atque I K, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem F H, multiplex primæ, maior quam I K, multiplex secundæ; At H G, multiplex

[a] 1. quinti.

tertiæ non ſit maior, quam I K, multiplex quartæ, imo minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt I K, multiplex ipſius D, maior quam H G,) [a] erit maior proportio A B, primæad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

[a] 8. definit. quinti.



QVONIAM vero è cõtrario I K, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda, & A B, quarta) maior eſt quã H G, multiplex ſecundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quã F H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior ſit, quam I K, vt oſtenſum eſt; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de Proportione agens, per hanc propoſ. 8. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionẽ ad quemuis alium angulum, quam angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam F G, multiplex exceſſus E B, ſuperare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi non dicitur proprie habere proportionem cum eum excedat angulo contactus, qui non eiuſdem naturæ eſt cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet vnum punctum, vt fiat linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa compoſita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ;

Item

ne quemadmodum ſi ad figuram planam quamcunq; ap-
eratur linea vnius palmi, non diceretur hac magnitudo ex
erſis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam
bere propriè proportionem maioris inaqualitatis: quòd ex-
ſus non ſit eiuſdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq;
habet angulus rectus propriè ad angulum ſemicirculi pro-
nem maioris inaqualitatis; quippe cum angulo ſemicir-
adiectus ſit angulus contactus, vt efficiatur angulus re-
s, atque adeo rectus angulus angulum ſemicirculi exce-
quantitate diuerſæ naturæ, vt dictum eſt. Itaque non ſo-
n eæ magnitudines proportionem proprie non habent, quæ-
m alterutra multiplicata alteram ſuperare nequit, vt ad
m. 5 huius lib. diximus: ſed neque eæ proprie dicentur ha-
e proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum
ceſſus diuerſam ab eis naturam habet, cuiuſmodi ſunt an-
us rectus, & angulus ſemicirculi. Adeo vt tunc ſolum
orie magnitudines dicantur habere proportionem inter ſe,
endo & alterutra multiplicata alteram ſuperare poteſt, &
ceſſus earum multiplicatus ſuperare queque poteſt; vtram-
e. Fateor rem hanc eſſe perobſcuram, & qua vix recte in-
ligi poſſit: Verum hoc prouenit ex indiuiſibilitate anguli
ctus per lineam rectam. Huius generis ſunt alia nonnul-
in rebus Geometricis, quæ veriſſima quidem ſunt propter
monſtrationem euidentem, ſed alia ex parte talem indu-
ne difficultatem, vt ab ea non facile intellectus ſe expediat.
rbi gratia, Veriſſimum eſt, ſpharam tangere planum in pun
, vt à Theodoſio demonſtratur propoſ. 3. lib. 1. Sed qua ra-
ne fiat, vt hinc non ſequatur, ſi globus continuò moueatur
per planum, lineam rectam deſcribi compoſitam ex punctis,
mo ad hunc vſq; diem ſic explicauit, vt omni ex parte dif-
cultas ſit ſublata.

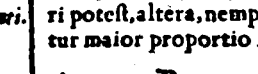
THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE ad eandem, eandem habent
ationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad
quas eadem eandem habet rationem,
æ quoque ſunt inter ſe æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor. [a] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeant deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; [b] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur inæqualis erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. quinti.



[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propositio 9. vtramque pars theorematis 7. vt manifestum est.

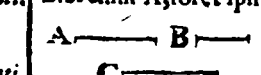
10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [c] haberent A, B, eandem proportionem ad C: si autem A, minor esset, quam B, [d] haberet B, maior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est cõtra hypothesin. Non est igitur A, æqua-

[c] 7. quinti.

[d] 8. quinti.



equalis vel minor quam B, ſed maior. Habeat ſecun-
C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico
minorem eſſe, quam A. Non enim æqualis erit B, ipſi
alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & [a] 7. quinti.
quod eſt contra hypotheſin. Neque vero B, maior
quam A; [b] aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem [b] 8. quinti.
portionem quam ad B, maiorem: quod magis eſt con
hypotheſin. Minor igitur eſt B, quã A; quod eſt pro-
itum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem ha-
itium, &c. Quod erat demonſtrandum.

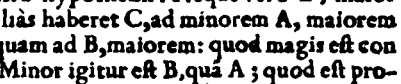
SCHOLIVM.

*HÆC quoque propoſitio conuertit vtramque partem theo
matis 8. vt perſpicuum eſt.*

THEOR. 11. PROPOS. 11. 11.

QVAE eidem ſunt eædem rationes, inter ſe ſunt eædem.

SINT proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem pro-
rtioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad
eaſdem eſſe



er ſe ſecun-
m definitio-
m 6. hoc eſt,
mptis æque-
ultiplicibus ipſarum A, C; Item æque multiplicibus ip-
rum B, D; ſemper contingere, vt multiplices ipſarum
, C, à multiplicibus ipſarum B, D, vel vna deficiant, vel
a æquales ſint, vel vna excedant. Sumantur enim ad
nes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcun-
e G, H, I; & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæ-
mque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur poni-
r eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt E, tertia ad F, quar-
m; [c] fit, vt ſi G, multiplex primæ deficit a K, multiplice [c] 6. definit. quinti.



secundæ, ita sit quoque multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ. Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque est I, ipsi M, vel maior: [a] Sed (vt eodem modo ostenditur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quam L, vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque multiplicibus. [a] Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

[a] 6. definit. quinti.

[b] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D; sit autem E, ad F, vt A, ad B. & A, 3. B, 2: C, 6. D, 4. G, ad H, vt C, ad D: erit quoque E, 9. F, 6: G, 12. H, 8. E, ad F, vt G, ad H. Quæ enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B; [c] erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D. [d] erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

[c] 11. quinti.

[d] 11. quinti.

RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se; sit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam vt proximè in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad

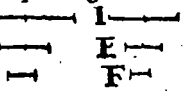
ad K, ita L, ad M. Quare cum proportiones G, ad H, & L, M, eadem sint proportioni I, ad K; [a] erunt & ipsa eadem inter se; ac prorsunde omnes inter se eadem erunt. Eadem ratio de pluribus proportionibus. [a] *11. quinti.*

THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

SI sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, siue rationalis siue irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, G, H, I, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F, sitq; K, ipsius A, & L, ipsius C, & M, ipsius E, multiplex quotcunque.



Dico vt est vna antecedentium ad vnam cõsequentium, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, [b] erunt omnes G, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna quæque, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirũ K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [c] sit vt si G, multiplex primæ desinat ab K, multiplice secundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis fuerit ipsi K, vel maior, æqualis quoq; sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Quare si G, minor est, vel æqualis, vel maior quã K, erũt & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores, vel æquales, vel maiores. [d] Quocirca vt est A, prima

[b] *1. quinti.*

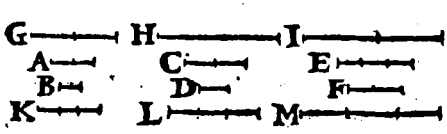
[c] *6. definit. quinti.*

[d] *6. definit. quinti.*

A, prima ad B, secundã ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.



SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, E: Item æquemultiplicibus ipsarum B, F, cõtingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumpt. enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam; [a] sit G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, [b] necessario I, excedit ipsam M; sed æqualis aliquando erit, vel minor, quod maior ponatur proportio C, primæ ad D,

[a] 6. definit. quinti.

[b] 8. definit. quinti.

D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartem. Igitur ſi excedit K, non neceſſario I, excedit M. [a] Maior eſt er- [a] 8. definit. quinti.
proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Nam cum proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, primæ ad F, ſecundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [b] fit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqualis ſit. Sed ſi H, deficit ab L, vel ei æqualis eſt, etiam G, deficiet a K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K; [d] atque idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F; Quod eſt propoſitum. [b] 8. definit. quinti. [c] 6. definit. quinti. [d] 8. definit. quinti.

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quam prima ad ſextam.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam;

tam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque esse B, ipsi D. Sit prima A, maior quam C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris eandem B. Quoniã igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam; [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. [c] Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.

[a] 8. quinti.

A
B
C
D

[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipsi C; [d] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti. 9. quinti.

A
B
C
D

[f] 8. quinti.

SIT tertio A, minor quam C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; [i] Ideoque B, minor erit, quam D. quod est propositum. Si prima igitur

[g] 8. quinti.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.

tur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D; vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cum enim B, maior ſit quàm D; [a] erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam; [b] erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam: [c] ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum. [a] 8. quinti. [b] 13. quinti. [c] 10. quinti.

DEINDE ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi C, eſſe æqualem. Cum enim B, ipſi D, ſit æqualis; [d] erit C, ad B, vt C, ad D: Eſt autem quoque A, ad B vt C, ad D. [e] Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B; [f] propterea A, ipſi C, æqualis erit. quod eſt propoſitum. [d] 7. quinti. [e] 11. quinti. [f] 9. quinti.

TERTIO ſit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem eſſe, quàm C. Cum enim B, minor ſit quàm D; [g] erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam, [h] erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam. [i] Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod eſt propoſitum. [g] 8. quinti. [h] 13. quinti. [i] 10. quinti.

NON demonſtrauit autem Euclides, ſi prima maior eſt, vel æqualis vel minor, quam ſecunda, tertiã quoq; maiorẽ eſſe, vel æqualẽ, vel minorẽ, quàm quartam; (quæ tamen argumentandi modo pleriq; Geometrarũ tũ veterum, tum recentiorũ vtuntur) quia id perſpicuũ eſt ob ſimilitudinẽ proportionum. Hinc enim fit, ſi vtraq; eſt proportio maioris inæqualitatis, vtramq; antecedentẽ magnitudinem, id eſt, primã ac tertiã, maiorẽ eſſe vtraq; magnitudine conſequẽte, hoc eſt, ſecũda ac quarta: Si vero vtraq; proportio eſt æqualitatis, vtrãq; magnitudinẽ antecedentem vtriq; conſequenti æqualem eſſe.

Si

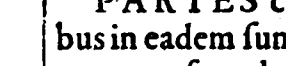
Si denique vtraq; proportio eſt minoris inæqualitatis, vtrumque antecedentem magnitudinem vtraque conſequente ſe minorem.

VERBI gratia, ſi eſt vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quæ circa ſi A, prima maior eſt quàm B, ſecunda, erit & C, tertia maior quàm D, quarta: Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum. Quod tamen Geometricè oſtendemus cum Federico Commandino, licet id non ſit neceſſarium, ad propoſ. 16. huius lib.



15. THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.



SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita eſſe CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, ſint æque multiplices ipſarum A, & B; continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipſi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipſi B; [a] eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quòd CG, & A, æquales inter ſe ſint, necnon EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK; & HD, ad KF, vt A, ad B; [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quo circa vt CG, ad EI, hoc eſt vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, ſimul, ad omnes EI, IK, KF, ſimul. quod eſt propoſitum. Partes itaq; cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 12. quinti.

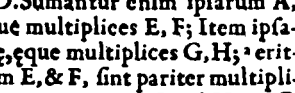
THEOR.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æquè multiplices E, F; Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ, æque multiplices G, H; [a] eritque E, ad F, vt A, ad B; cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; [b] erũt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; [c] erunt & ipsæ eædem inter se: hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [d] Quare si E, prima maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunq; multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [e] Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.



[a] *15. quinti.*

[b] *11. quinti.*

[c] *11. quinti.*

[d] *14. quinti.*

[e] *6 definit. quinti.*

SCHOLIVM.

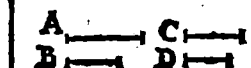
PORRO demonstratio huius propositi locũ solũ habet, quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B,

A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibent in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionum ostendimus, recipimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notum sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior fuerit, quam B, secunda, & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.



[a] *Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* [b] *Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*

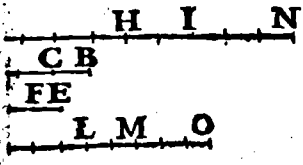
[a] 16. quinti.
[b] 14. quinti.

SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, in quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius fuit illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14 factum est. Ita enim verũ erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

THEOR.

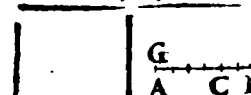
THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quã defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines A B, C B, & D E, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad C B, vt D E, ad FE. Dico diuisas easdem proportionales esse, hoc est; vt est AC, C B, ita esse D F, ad F E, in eo sensu, quem definitione 5. expositum. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; sitque G I, ita multiplex ipsius A B, vt est G H, ipsius C, hoc est, vt K L, ipsius D F. Sed vt est multiplex L, ipsius D F, [b] ita quoque multiplex est K M, ipsius E. Æque multiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum B, D E. Capiantur rursus I N, M O, æque multiplices ipsarum C B, F E. Quoniam igitur sic est multiplex I, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item est multiplex I N, quinta secundæ C B, quam multiplex est M O, sexta quartæ F E; [c] erit & H N, sic multiplex secundæ C B, vt L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cum sit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ, AB, DE; Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, [d] si fit, vt GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundę CB, etiam KM, multiplex tertię DE, deficiat ab LO, multiplicę quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit,

[a] 1. quinti.
[b] 1. quinti.
[c] 2. quinti.
[d] 6. definit. quinti.



excedit, excedat. Q
Si deficiat tam GI
HN, quã KM, ab
ablatis cõmunibus H
LM, deficiet quo
GH, ab IN, & KL
MO. Et si GI, æqua
fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO; ablatis communi
HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL,
MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & K
ipsam LO; ablatis communibus HI, LM, excedet qu
que GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob re
cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices prim
AC, & tertiæ DF; Item IN, MO, æque multiplices
secundæ CB, & quartæ FE; ostensumque sit, in qu
cunque multiplicatione illę æque multiplices forma
ceptę) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque mu
tiplicibus secundæ & quartæ, vel vna deficere, vel
æquales esse, vel vna excedere; [a] Erit AC, prima ad
secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam. quod est pro
positum. Si compositæ igitur magnitudines proportio
nales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

EX his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationum conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, ipsa quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [b] erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.



[b] 17. quinti.

NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quã ad eandē defi. 15. Diuisionis rationum conuersam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus

æsimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Di-
ſe quoque per Diuiſionem rationis contrariam, vt A C,
C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim eſt, vt A C, ad
B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C,
D E, ad D F. [a] *Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita*
E, ad D F: Ac proinde conuertendo rurſus, vt A C, ad
B, ita D F, ad F E. Quod eſt propoſitum.

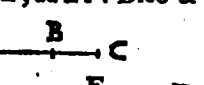
[a] 17. quinti.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

18.

SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint iam diuiſæ magnitudines A B, B C, & D E, E F, proportionales hoc eſt, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compoſitas proportionales eſſe: hoc eſt, vt eſt A C, ad B C, ita eſſe D F, ad E F. Si enim non eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, habebit D F, ad aliquá magnitudinem minorem ipſa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipſa E F, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; [b] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad G F: Sed vt A B, ad B C, ita poſita quoque eſt D E, ad E F. [c] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad G F, ſecundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D G, prima maior ſit, quàm D E, tertia, [d] erit quoque G F, ſecunda maior quàm E F, quarta, pars quàm totum. Quod eſt abſurdum.



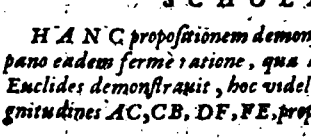
[b] 17. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 14. quinti.

HABEAT deinde, ſi fieri poteſt, D F, ad H F, maiorem ipſa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur eſt, vt A C, ad B C, ita D F, ad

HF; [a] erit diuidẽdo quoq; vt AB, ad BC, ita DH, ad
[b] 11. quinti. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiã est DE, ad EF. [b] Ig
erit quoque, vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE
tia ad EF, quartã. Cum ergo DH, prima minor sit qu
[c] 14. quinti. DE, tertia, [c] erit quoque HE, secunda minor q
EF, quarta, totum quàm pars, quod est absurdum. Ne
igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad ma
rem, eandem proportionem, quam AC, habet ad B
Ergo DF, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC. quod
propositum. Itaque si diuisæ magnitùdines sint prop
tionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem demonstrant nonnulli eam Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eam etiam esse proportionalem, vt AB, quidẽ ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM; Item ipsarum CB, FE, alia æque multiplices IN, MO; [d] eruntque quæ ipsarum GI, KM, ipsarum AB, DE, æque multiplices. [e] Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in præcedenti Theorema ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam; sumptæ sunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF. Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO. Dico vt si GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficere a MO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quam KL, ab MO; additis cõmunibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL,



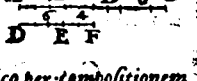
[d] 1. quinti. [e] 2. quinti.

[f] 6. definit. quinti.

K L, ipſi M O; additis communibus H I, L M, erit & I, ipſi H N, aqualis, & K M, ipſi L O. Et denique ſi G H, exceſſerit ipſam H N, & K L, ipſam M O; additis communibus H I, L M, excedet quoque G I, ipſam H N, & K M, ipſam L O. Quoniam ergo ſi G I, multiplex prima A B, deerit ab H N, multiplice ſecunda C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiet ab L O, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit; [a] erit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. Quod erat propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 6. definit. quinti.

VERVM hæc demonſtratio non recte colligit propoſitum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non ſunt ita multiplices ipſarum G B, F E, vt multiplices acceptæ ſunt I N, M O, earundem C B, F E. Vnde merito dubitare quis poſſet, an eadem quamcunque multiplicationem æque multiplices ferant eam conditionem defectus, æqualitatis, atque exceſſus, quam Euclides in 6. defin. poſtulauit; quandoquidem in hac demonſtratione liberum non eſt aſſumere ipſarum C B, F E, naſcunq; æquemultiplices, ſed tales duntaxat, quales conſurgunt ex H I, I N, & ex L M, M O, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propoſitionis demonſtratione obijci non poteſt: quippe cum I N, M O, ſumpta ſint ipſarum C B, F E, æquemultiplices qualeſcunq;, ipſæq; eadem remanent æquemultiplices earundem C B, F E, in diuiſa proportionalitate. Quam rem præferenda eſt Euclidis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare; ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. deſcripſimus. Priorem diximus eſſe compoſitionem rationis conuerſam. Sit enim vt A B, ad B C, ita D E, ad F F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam, eſſe quoq; vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. [b] Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod eſt propoſitum.



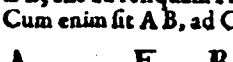
[b] 18. quinti.

POSTERIOREM modum vocaminus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, & quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: erit conuertendo, vt BC, ad
a 18. quinti. AB, ita EF, ad DE. a Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVOD in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD.
b 16. quinti. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF, b erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. c Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. d Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD; cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.



c 17. quinti.
d 16. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, erit quoque diuidendo, AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

A 6 C 4 B
D 12 F 8 E

[a] 17. quinti.
[b] 18. quinti.

SCHOLIVM.

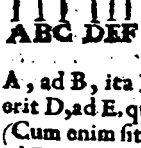
OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE: [d] igitur vt tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF. Et proinde permutando rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

[c] 16. quinti.
[d] 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alternando, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ moderni hunc argumentandi à conuersione rationis abhorreant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus conuenit. Ea vnum locum habet, trianesi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quòd in ea non assumpta fuit alternata, siue permutata proportio.

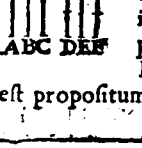
20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.



SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E, & B, ad C, vt E, ad F, sit autem prima A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorē F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [b] Maior igitur proportio quam erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. [c] Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.



SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, [d] erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E. [f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

[d] 7. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 9. quinti.

S

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [a] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. [b] Vt autem A, ad B, ita est D, ad E. Minor ergo & quoq; proportio est D, ad E, quàm C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est & quoque proportio D, ad E, quam F, ad E; [c] proportionaliq; D, minor erit quam F. Quod propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 8. quinti.
[b] 13. quinti.
[c] 10. quinti.

SCHOLIVM.

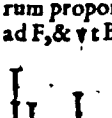
PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æquo: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit manifestum.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

21.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, quàm maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim A, sit maior quam C, a erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. b Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D: c Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.



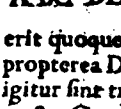
a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, d erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. e Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem, ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; f atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.



d 7. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cũ enim A, sit minor quam C, g erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. h Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt antea, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D: erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Sigitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



g 8. quinti.
h 13. quinti.
i 10. quinti.

SCHOLIVM.

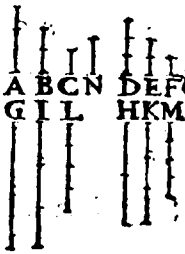
CÆTERVM propos. 23. ostendit Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F; sed etiam ad

es eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem ſine auxilio huius theorematis demonſtrare non poterat, vt ex propoſ. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio eſt extraordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipſarum B, E, æquemultiplicibus I, K; item ipſarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur; [c] fit vt ſi G, prima ſuperat tertiam L, ſuperet tertiam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna



[a] 4. quinti.

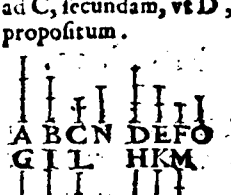
[b] 4. quinti.

[c] 20. quinti.

vna

vnà æquales sint, vel vna excedant in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [a] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod erat propositum.

[a] 6. definit. quinti.



DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit vt C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur autem C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostenderur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquàm à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem. Item æque multiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ

rtiæ. Item prima ac tertia ad æque multiplis secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq; E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices; Item G, H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita C, ex constructione, cum vtrobique sit eadem proportionis multiplex; ponunturque vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quòd vtrobique sit eadem proportio multiplex, constructione; estque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.) [b] erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F; quòd ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [c] erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quòd ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex; erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissimè vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoque erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

[a] 22. quinti.

[b] 22. quinti.

[c] 22. quinti.

[d] 22. quinti.

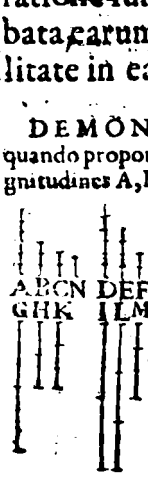
THEOR.

23.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M; [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F; [b] Igitur vt G, ad H, ita quoque est E, ad F; [c] Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binę in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata; cũ ostensum sit esse vt G, ad H, ita ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; [f] sit vt si G, prima superat tertiã K, superet quoq; quarta I, sextã M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cũ G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant; vel



[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 15. quinti.
[d] 11. quinti.
[e] 15. quinti.
[f] 21. quinti.

æquales sint, vel vna excedant; erit vt A, prima C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est pro situm. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod de- onstrandum erat. a 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritquo- rum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, O, & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico hunc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam propotio ex aualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras usu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. a causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de equot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat osuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus, quod ita pro- ur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse ad C, vt E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, a bina in eadem sumuntur proportione, & earum proportio perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magni- dinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque do idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per qua- or, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic pluribus. Quod est propositum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI prima ad secundam eandem ha- uerit rationem, quam tertia ad quar- m; habuerit autem & quinta ad secun m eandem rationem, quam sexta ad artam: Etiam composita prima cum nta, ad secundam eandem habebit ionem, quam tertia cum sexta, ad uartam. 24.

QVOD

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quarta; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, *ita* tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH; & BG, ad C, vt EH, ad F; erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



a 22. quinti.
b 18. quinti.
c 22. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostenditur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detractæ AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem

ta vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas
)G, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc
ſ, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C,
'a DE, ad F; erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE.
Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad E; & C, ad AB, vt
, ad DE; [a] erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad
) E. [b] Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH,
d DE. Itaque cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE;
r AB, ad C, vt DE, ad F; [c] erit ex æquali BG, ad C, vt
H, ad F. Quod est propositum.

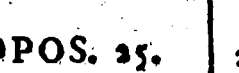
[a] 22. quinti.
[b] 17. quinti.
[c] 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT enim AB, ad CD, t E, ad F, sitq; AB, omniū maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi E. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt B, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH; [d] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quā CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



[d] 19. quinti.

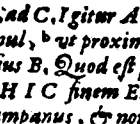
SCHO-

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, reliquorum alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E ad F; & A B, prima maior quam tertia E; erit quoque C D, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est E, quam C D, erit quoque E, maior quam F, ob eandem portionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si e contrario antecedens vnius proportionis erit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo comparari ex omnium & minima; immo neque ex reliquis duabus. Alibi in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 21. non multum dissimile, videlicet.

a 14. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, b vt proxime demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum.

b 25. quinti.

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, quæ fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre.

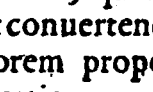
rre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc est.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

26.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

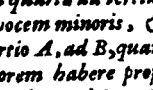
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B. [a] ac propterea A, maior erit quam E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod propositum.



[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem secundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.



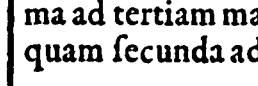
SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] ac propterea [c] 10. quinti.

[a] 8. quinti. *A, minor erit, quã E. Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior erit, quam D, ad C. Quod est propositum.*

ALITER. Quoniã minor est proportio A, ad B, quam C, ad D; [b] 26. quinti. *erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quàm B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod est propositum.*

27. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.



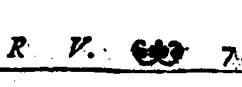
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam quã E, ad B: [c] Ideoque A, maior erit quam E. [d] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [e] Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.

[c] 10. quinti. [d] 8. quinti. [e] 16. quinti.

SCHOLIVM.

SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionẽ, quam tertia ad quartã, vicissim primam ad tertiam minorẽ esse proportionẽ, quam secunda ad quartã.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quam

quam B, ad D. Intelligatur


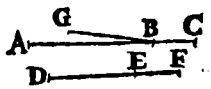
m esse E, ad B, vt C, ad D;
risque proportio A, ad B, mi-
r quoq; quam E, ad B; [a] Ac
[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.
[c] 16. quinti.
[d] 27. quinti.
[e] 26. quinti.

ptereà A, minor erit, quam E. [b] Quare minor erit propor-
A, ad C, quàm E, ad C. [c] Sed permutando, vt E, ad C, ita
ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio
, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est proposituꝫ.
ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quã
, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] Ergo
componendo, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D,
l B: [e] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C,
àm B, ad D. Quod est propositum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

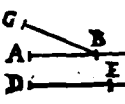
28.

SI prima ad secundam habuerit ma-
orem proportionem, quã tertia ad quar
am: Habebit quoque composita prima
um secunda, ad secũdam maiorem pro-
ortionem, quam composita tertia cum
uarta, ad quartam.

SIT maior proportio AB, ad


C, quam DE, ad EF. Dico &
omponendo maiorem esse pro-
ortionem AC, ad BC, quam
DE, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE,
d EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque,
uam GB, ad BC; [f] Ideoque AB, maior quam GB. Ad-
lita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; [g] ma-
orque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC,
d BC. Sed componendo, [h] vt est GC, ad BC, ita est
DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.)
Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF,
ad EF. Quod est propositum.
[f] 10. quinti.
[g] 8. quinti.
[h] 18. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione oſtendemus, ſi proportio prima ad ſecundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque eſſe proportionem primæ & ſecundæ ſimul, ad ſecundam, quam tertiæ & quartæ ſimul, ad quartam.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC; [a] ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC. [b] minorque properea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF. (quod poſita ſit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. quinti.

[b] 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC. [c] Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod eſt propoſitum.

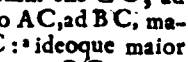
[c] 28. quinti.

29. THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem eſſe proportionem AB, ad BC, quam

C, quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad C, vt D F, ad E F; eritque proportio A C, ad B C, maior quoque proportione G C, ad B C: [a] ideoque maior erit A C, quam G C. Ablata ergo communi B C; maior erit A B, quam G B: [b] Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quam G B, ad B C. [c] Sed diuidendo, ut est G B, ad B C, ita est D E, ad E F.



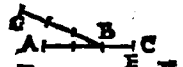
(Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur maior quoque erit proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quod est propositum.

[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.
[c] 17. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartã; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, vt D F, ad E F; eritque proportio A C, ad B C, minor quoque, quam G C, ad B C: [d] *ideoque minor erit A C, quàm G C. Ablata ergò communi B C; minor erit A B, quàm G B:* [e] *Ac propterea minor erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C:* [f] *Sed diuidendo est, vt G B, ad B C, ita D E, ad E F. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur minor quoque proportio erit A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.*



[d] 10. quinti.
[e] 8. quinti.
[f] 17. quinti.

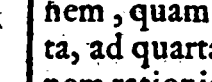
ALITER. Quoniam minor proportio est A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. [g] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C: atque idcirco minor erit proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quod est propositum.*

[g] 29. quinti.

30.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

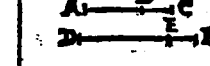


SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quã DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF; [a] erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

[a] 29. quinti.
[b] 26. quinti.
[c] 28. quinti.

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secunda ad primam, quam tertia & quarta ad tertiam.



SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim sit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [d] erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare con-

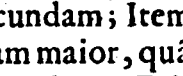
[d] 29. quinti.

conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad [a]*E: [b] Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.* [a]26. quinti. [b]18. quinti.

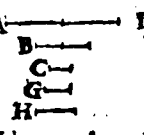
ALITER. Quoniam minor eſt proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm C, ad BC. [c] Ergo diuidendo quoque, maior erit proportio E, ad EF, quàm AB, ad BC. [d] Igitur conuertendo, mi- erit proportio EF, ad DE, quàm BC, ad AB. [e] Componendo ergo minor quoque erit proportio DF, ad DE, quàm C, ad AB: Hoc eſt, maior proportio erit AC, ad AB, quàm F, ad DE. Quod eſt propoſitum. [c]17. quinti. [d]26. quinti. [e]18. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſæquales numero, ſitq; maior proporo primæ priorum ad ſecundam, quam rimæ poſteriorum ad ſecundam; Item ecundæ priorum ad tertiam maior, quã ecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit uoque ex æqualitate maior proportio rimæ priorum ad tertiam, quam primæ oſteriorum ad tertiam.



SINT tres magnidines A, B, C, & aliæ es D, E, F, ſitq; maior roportio A, ad B, quã), ad E; Item maior B, d C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoue eſſe A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe i, ad C, vt E, ad F; eritq; ꝓpterea proportio B, ad C, ma r quã G, ad C; [f] Ideoq; B, maior erit quã G. Quare maior erit ꝓportio A, ad G, minoré quã A, ad B, maio é. Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quã D, ad E. lulto ergo maior erit proportio A, ad G, quã D, ad E. [f]10. quinti. [g]8. quinti.

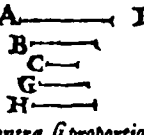


Intelligatur rursus se H, ad G, vt D, ad F; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 22. quinti.

, Ideoque A, maior erit, quam H. [b] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: [c] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



EADEM ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quam D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vicissim, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C: [d] Ideoque B, maior erit, quàm G. [e] Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm B, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [f] Ideoque I, maior erit, quàm H. [g] Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C. [h] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

[d] 10. quinti. [e] 8. quinti. [f] 10. quinti. [g] 8. quinti. [h] 22. quinti.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: [i] Ideoque B,

[i] 9. quinti.

ſi G, æqualis erit. [a] Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [b] Ideoque A, maior erit, quã I. [c] Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C: [d] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

[a] 7. quinti.
[b] 10. quinti.
[c] 8. quinti.
[d] 22. quinti.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, uel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinũ; siue vna tantum maior, quàm vna, vel duæ, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem prima priorum ad vltimam, quam prima posteriorum ad vltimam, eadem methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis: Item vsurpando hoc scholium; quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H: erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; erit quoque ex æquo, maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

[e] 31. quinti.
[f] 31. quinti.

QVOD si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, propor-

proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quàm ad H; [a] erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H. [a] 22. quinti.

SI vero maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sint tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H; erit ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: Et rursus maior A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

SI autẽ maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F; sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac prò inde rursus maior A, ad D, quàm E, ad H &c.

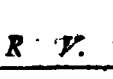
IDEM cõcludes, si omnes proportiones vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna, vel dua. Item si sint plures magnitudines, vt proposuimus 22. diximus.

32. THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secũdæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item sit B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoq; maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio

ortio B, ad C, maior, quam
G, ad C: [a] Ideoq; maior erit
B, quã G. [b] Quare maior erit
roportio A, ad G, minoré,
uam eiuſdem A, ad B, ma-



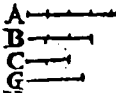
[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

rem: Eſt autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F.
ulto ergo maior eſt proportio A, ad G, quam E, ad F.
telligatur rurſus eſſe H, ad G, vt E, ad F; Eritque pro-
erea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; [c] ideoq;
aior erit A, quam H. [d] Quocirca A, maior ad C, maio-
m habebit proportionem, quam H, minor ad eandem
: [e] At vt H, ad C, ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (Quo-
iam vt D, ad E, ita eſt G, ad C; & vt E, ad F, ita eſt H, ad
.) Maior ergo etiam eſt proportio A, ad C, quam D,
d F. Quod eſt propoſitum.

[c] 10. quinti.
[d] 8. quinti.
[e] 23. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, ſi fuerit
oportio A, ad B, qua E, ad F;
t B, ad C, maior quam D, ad
. Vel contra, propotio A, ad
maior, quam E, ad F; At B,



d C, eadem, qua D, ad E; oſtendemus, ex aqualitate maio-
m eſſe proportionem A, ad C, quam D, ad F, vt in propoſita
gura perſpicitur.

HAVD ſecus oſtendemus, ſi proportiones priorum magni-
dinum minores fuerint, etiam extremarum proportionem
ſe minorem, &c.

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, demonſtra-
mus, maiorem quoq; vel minorem eſſe proportionem prima
iorũ ad vltimã, quam prima poſteriorũ ad vltimã, ea arte,
ua vſi ſumus propoſ. 23. &c. Qua omnia perſpicua ſunt, ſi di-
geter demonſtrationes ſcholÿ præcedẽtis propoſ. conſideretur.

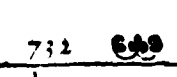
THEOR. 33. PROPOS. 33.

33.

SI fuerit maior proportio totius ad
totum, quam ablati ad ablatum: Erit &
reliqui ad reliquum maior proportio,
quam totius ad totum.

SIT

SIT maior proportio totius A B, ad totam C D, ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem esse, quam totius A B, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B ad C D, quam A E, ad C F; a erit quoque permutando maior proportio A B, ad A E, quam C D, ad C F; b ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quam C D, ad F D. c Permutando igitur, & minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. Quod est propositum.



a 27. quinti.
b 5. quinti.
c 27. quinti.

SCHOLIVM.

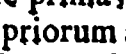
QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, eodem modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce, maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

34. THEOR. 34. PROPOS. 34

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores

ſteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam poſteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam poſteriorum.

SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres, D, E, F; Sit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E; Itẽ maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionẽ ipſarum A, B, C, ſimul, ad ipſas D, E, F, ſimul maiorem eſſe proportione ipſarum B, C, ſimul ad ipſas E, F, ſimul; minorem vero, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B, ad E; [a] erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E; [b] Igitur componendo, maior erit proportio ipſarum A, B, ſimul ad B, quam ipſarum D, E, ſimul ad E. Permutando ergo rurſus, maior erit proportio A, B, ſimul ad D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ſit totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; [d] habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad C, quam totius B, C, ad totam E, F. Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; [f] & componendo ergo maior eſt proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. [g] Et rurſus permutando, maior proportio omnium A, B, C, ſimul ad omnes D, E, F, ſimul, quam B, C, ad E, F. quod eſt primum.



[a] 27. quinti.
[b] 28. quinti.
[c] 27. quinti.
[d] 33. quinti.
[e] 27. quinti.
[f] 28. quinti.
[g] 27. quinti.

ITAQVE cum ſit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quã ablatæ B, C, ad ablatam E, F; erit maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F. quod eſt ſecundum.

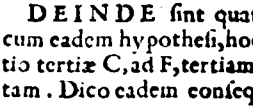
[h] 33. quinti.

QVO-

QVONIAM vero maior est proportio B, ad quam C, ad F; [a] erit permutando maior quoque B, ad quam E, ad F; [b] & componendo, maior totius BC, ad quam totius E, F, ad F; [c] & rursus permutando, maior B C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F; quod est tertium.

[a] 27. quinti.
[b] 28. quinti.
[c] 27. quinti.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. [d] Permutando ergo, maior erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H; [e] & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H; [f] & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.



[d] 27. quinti.
[e] 28. quinti.
[f] 27. quinti.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H; [g] erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod est secundum.

[g] 33. quinti.

QVONIAM vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quatuor magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus a quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEXTVM.

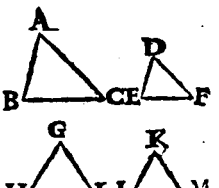
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

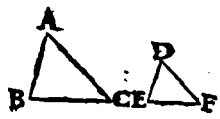
VT triangula ABC, DEF, ſimilia dicentur, ſi fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit; Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

QVOD ſi anguli vnius æqua-
les fuerint angulis alterius, ſinguli
ſingulis, at latera circa æquales an
gulos non proportionalia, aut con-
ra; non dicentur tales figuræ ſimi-
es: cuiuſmodi ſunt quadratum, &
gura altera parte longior. Hæ ete-
im figuræ habent quidem angulos
quales, vtpote rectos, at latera



vnius

vnius latoribus alterius proportionalia non sunt; quæ
latera quadrati circa quemuis angulum rectum hab
proportionē æqualitatis; latera uero figuræ alterę partis
ris circa quemuis angulū rectū, proportionem inæqualem



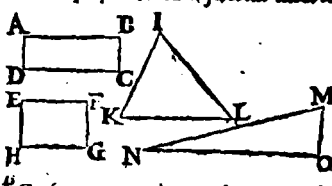


Ex quibus constat, omnes figu
rectilineas æquiangulas, & æqui
teras, quæ & angulos & latera
bent numero æqualia, esse simi
quamquam inter se maxime di
inæquales. Cuiusmodi sunt tri
gula æquilatera GHI, KLM; ni
pter laterum enim æqualitatem, e
GH, ad GI, vt KL, ad KM; item
GH, ad HI, vt KL, ad LM; & GI, ad IH, vt KM, ad M
cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum e
quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, ne
hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus
rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB,
BC, vtæ proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vnique
sit & antecedens
& consequens duo
rum proportionum
est, vt sit ea propo
AB, ad EF, qu
ad BC; seu ad H
ad FG, qua H, ad



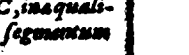
C; (vtroque enim modo AB, est antecedens vnius pro
tionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD; sim
admodum & primo modo EF, est consequens vnius, &
mo

ecedens alterius ; vel ſecundo modo F G , conſequens , & , antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiuſmodi parallelogramma reciproca, quamuis ſimilia non ſint . Similiter xt triangula I K L, M N O; reciproca, ſi fuerit vt I K , ad N, ita M O, ad I L ; vel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L. que memini me inueniſſe apud Geometras vſum reciproum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis & triangulis .

III.

SECVNDVM extremam, & meam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit .

SI linea recta quauis A B, ita diuidatur in C, ina qualiter, vt ſit, quemadmodum tota A B , ad maius ſegmentum A C, ita A C, maius ſegmentum ad C B, minus ſegmentum ; dicetur diuiſa eſſe ſecundum extremam , & media rationem . Quam quidem diuiſionem docebit Euclides propoſ. 30. huius lib. eamque ſub his verbis iam docuit lib. 2. propoſ. 11. vt fiet perſpicuum propoſ. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumerae dignitates, atque proprietates linea hoc modo diuiſa, vt ex libris Stereometrica conſtabit, praſertim lib. 13. vt non immerito à quibuſdam dicta ſit diuina proportio, in quam linea eo modo eſt diuiſa .

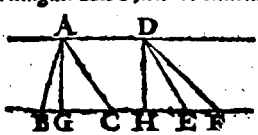


IIII.

ALTITVDO cuiuſque figuræ eſt linea perpendicularis a vertice ad baſin ducta .

SIT a vertice A, trianguli A B C, ad baſin B C, perpendicularis

cularis ducatur A G; dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D vertice trianguli D E F, ad basin EF, ad partes E, protracta, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaque similium figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (sive hæ protractæ sint, sive non) demissæ, fuerint æquales, eæque dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tum autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales; cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint paralleli, ac in quibus sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; [a] erunt recta AG, DH, parallela. Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eò quòd ponantur anguli in eisdem esse parallelis constituti. Igitur parallelogrammum erit ADHG; [b] ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quòd si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin DE, protractam æqualis nō est perpendiculari ex C, ad basin AB, deducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis posita constituti, vt manifestum est.



[a] 28. primi.

[b] 34. primi.

RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusvis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de dimensione, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, quas vocat Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, solæ perpendiculares certa est, determinataque longitudine, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque. Quæ de re diximus scripsimus ad initium commentariorum, quos in librum Ioan. de sacro bosco edidimus.

RATI

V.

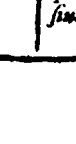
RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exmit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; denominator quadrupla proportionis, nempe 4. ostendit, in uis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem uter continere consequentem; denominator vero proportiosubquadrupla, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedẽtem esse parquartam consequentis, &c.) dici solet propterea denomitor a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet antitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus portionibus componi, quando harum denominatores, seu antitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionẽ, (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla comi dicitur ex dupla, & sextupla; quoniam denominator portionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duoupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodepla proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla compoditur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denoinatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominaem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator $\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ, gignit 2. deminatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componex sesquiseptimæ, & superbipartientis quartas. Nam hom proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multricati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ

proportio componi dicetur ex ſubſeſquiquarta, & dupla ſeſquialtera; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{3}$, $2\frac{1}{2}$, inter ſe multiplicati producunt quoque eandem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis aliis proportionibus componi dicetur duplæ proportio: quod etiam de quavis alia proportione dici poteſt, ut paulò poſt patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio prima ad vltimam componi dicitur ex proportione prima ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs conflata: illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, vt quinto libro defi. 10. expoſuimus: ita ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur cõponi, dicatur proportio prima magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad ſecundam; ſit res, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuſcunque ordinatis, proportio prima ad vltimam dicetur componi ex proportione prima ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiteris proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurget ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod quidem primum inducitione qualem Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmamus. Deinde vero idem duabus demonſtrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Aſcalonita lib. 2. Archimedis de ſphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi conicis elementis, propoſ. 11. Altera autem a Vitellione lib. 1. propoſ. 13. ſua perſpectiua, comprobabimus.

THEON igitur rem propoſitam ita conatur oſtendere. Habeat AB, ad CD, rationem datam, vtcunque duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam: & CD, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipſius AB, ad EF, ratio conſtat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF; vel quod ipſius AB, ad EF, rationis quantitas multiplicata in ipſius CD, ad EF, rationis quantitatem, efficit ipſius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim prima AB, quam CD, maior; & CD, quam EF: & ſit quidem AB, ipſius CD, dupla, & CD, ipſius EF, tripla. Quoniam igitur CD,



D, ipſius EF, tripla eſt, ipſius autem CD, dupla eſt AB; AB, ipſius EF, ſextupla. Quoniam ſi triplum alicuius plicamus, fit ſextuplum; hoc enim eſt propria compoſitio. ſic. Quoniam AB, dupla eſt ipſius CD, dimidiatur AB, ipſius CD, aqualia, hoc eſt, AG, & GB: & quoniam CD, us EF, tripla eſt; aqualis autem eſt AG, ipſi CD; & AG, ur ipſius EF, tripla eſt: Id propterea & GB, ipſius EF, pla eſt. Tota igitur AB, ipſius EF, ſextupla eſt. Ipſius ur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limites, mpoſita ex ipſius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & ſi minor fuerit CD, utra- ipſarum AB, & EF, idipſum colligitur. Sit enim rur- AB, ipſius CD, tripla; At CD, ipſius EF, dimidia. Et quoniam CD, ipſius EF, di- dia eſt; Ipſius autem CD, tripla eſt AB; t AB, ſeſquialtera ipſius EF. Si enim ali- us dimidium triplicamus, habebit ipſum ſe- l, & dimidium. At quoniam AB, ipſius CD, pla eſt; & CD, ipſius EF, dimidia: qualium



B, aqualium ipſi CD, trium, talium eſt EF, duorum. uare ſeſquialterum eſt AB, ipſius EF. Igitur ratio ipſius B, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, compoſi- ex ipſius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SED iam rurſus ſit CD, utraque ipſarum AB, & EF, ior; & ſit quidem AB, ipſius CD, dimidium, CD, ipſius EF, ſeſquitertium. Quoniam igitur, alium eſt AB, duorum, talium eſt CD, qua- or; qualium autem CD, quatuor, talium EF, ium. Et qualium igitur AB, duorum, talium F, trium. Connectitur igitur rurſus ratio ipſius B, ad EF, per CD, medium limitem, qua



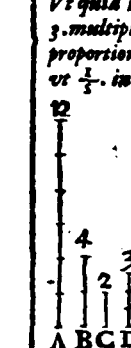
erum eſt ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in liquis caſibus. Et manifeſtum eſt, quod ſi a compoſita ra- ne quauis una compoſitarum auferatur, uno ſimplicium cto, reliqua compoſitarum aſſumetur.

Hac ad verbum deſumpſimus ex Theone, iuxta interpre- ionem Zamberti.

EVTOCII vero demonſtratio ita ſe habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem

A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Id quidem facile demonſtrabitur, aſſumpto prius hoc principio. Quantitatem, ſeu denominatorem cuiuſuis proportionis multiplicatum in conſequentem magnitudinem proportionis eandem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad conſequentem, neceſſe eſt conſequentem ſumptam ſecundum denominatorem, hoc eſt multiplicatam in denominatorem, reſtituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, ideo 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 10. habent proportionem ſubquintuplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{5}$. vt $\frac{1}{5}$. in conſequentem 10. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator ſit E: & D, multiplicans E, producat F. Dico F, eſſe quantitatem, ſiue denominatorem proportionis A, ad C, hoc eſt, ſi multiplicetur F, in C, producet A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipſi A, aqualem eſſe, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, denominator proportionis A, ad B; ſi multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, ſi E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B, [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita oſtenſum eſt G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; aqualis quantitas A, & G. Quam ob rem cum G, producatur in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea quæ F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod eſt propoſitum.



SIMILIS ratio eſt in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componetur ex proportionibus prima ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam, & tertia ad

[a] 18. ſeptimi.

[b] 17. ſeptimi.

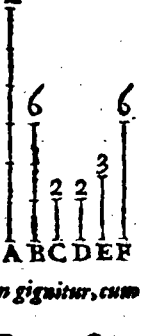
A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex portionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. um si intelligantur tres magnitudines A, C, D, nponetur proportio A, ad D, ex proportionibus ad C; & C, ad D, ut ostensum est: At vero lem ratione proportio A, ad C, componitur ex portionibus, A, ad B, & B, ad C. Igitur propor- A, ad D, componitur quoque ex proportioni- A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem nes in 5.6.7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusce modi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem ad C, componi ex proportionibus A, ad B; B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum magnitudinem consequentem proportionis, ducere antecedentem magnitudinem. Sit mque D, denominator proportionis A, ad & E, denominator proportionis B, ad C; t F, denominator proportionis A, ad C. emonstrandum est igitur F, produci ex D, E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, pri- quantitate in C, quartam producitur, uale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum nper producatur A; (nam ex , denominatore in C, conse- entem producitur A, antece- ns; similiter ex D, denomi- tore in B, consequentem pro- citur antecedens A,) [a] erit ut F, prima ad D, secundam, B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator portionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, pret antecedentem F. Quod est propositum. Hac Vitellio.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
E, 20.

[a] 19. septimi.

IDEM ostenderur in pluribus magnitudinibus, ut prius Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F,

componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B, & B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Sit A. B. C. D. E. F. vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F. Hæc autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hæc eadem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

EX his liquidò constat id, quod ad fin. 10. lib. 1. dicimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus eiusdem proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio cuiusue proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita inter se multiplicatur; triplicata vero, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita multiplicatur, primùm inter se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Eadem enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, D, sint continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E, & F, erit denominator proportionis duplicata, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quam Clauij propriè quadret in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen ea, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoque

uoque magnitudinibus incommenſurabilibus, hoc eſt, proportionibus irrationalibus, dici poteſt vtraque demonſtratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamſi non conſtaret, propoſitis pluribus magnitudinibus, denominatorum proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter ſe, vt demonſtrauimus, non tamen propterea demonſtrationes, in quibus compoſitio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis ne denominatorum multiplicatio nõ vſurpetur. Nam quemadmodum, propoſitis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quàm prima habet ad ſecundam; nimirum compoſitam ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primam vero ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad ſecundã habet, hoc eſt, compoſitam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & ſic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, ſi ponantur ordine plures magnitudines eiuſdem generis non continuè proportionales, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compoſitam ex omnibus proportionibus intermedijs, licèt inter ſe non ſint omnes æquales, ſiue aliqua ſint maioris inæqualitatis, & aliqua æqualitatis, & aliqua minoris inæqualitatis, ſiue omnes eiuſdem generis ſint, ſolum eam ob cauſam, quòd illæ proportiones intermediæ ſint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio prima ad tertiam dicebatur duplicata, hoc ſolo nomine, quia duæ proportiones æquales interpoſitæ ſunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionem proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. quæ lib. 5. explicata eſt, quàm quòd in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales, in compoſitione vero proportionum non neceſſe eſt, interpoſitas proportiones æquales eſſe. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis eſt, vt ſciamus, quanam ſit illa proportio, quæ deinceps dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propoſitis proportionibus compoſita eſſe dicitur.

VERBI gratia. Vt ſciamus, quæ proportio ſit illa, quæ

dicitur

dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorē decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominat eſt proportionis, quæ decuplæ eſt duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiuſdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10. 10. 10. & primum in ſecundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum eſt. Sed hoc etiam diſcemus abſque denominatorum multiplicatione. Nam ſi continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: ſi vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem eſt maior cum minore, quando data proportio eſt maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minoris inæqualitatis eſt. Velimus ſi libet conſideretur proportio decuplæ proportionis duplicatæ, continuabimus tres numeros in proportione decuplæ hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centuplæ eſt, dicetur decuplæ duplicatæ. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ ſubcentuplæ eſt, dicetur duplicatæ proportionis ſubdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoſcamus, quanam ſit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, ſtatuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eoſque inter ſe multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rurſus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & ſic deinceps, ſi plures eſſent denominatores. Vltimus enim productus 12. eſt denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecuplæ componi dicatur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia. Ita autem intelligemus etiam ſine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad ſecundum habeat primam proportionem componentem, ſecundus ad tertium ſecundæ, tertius ad

ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartum, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, compoſita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1$\frac{1}{2}$. 1. Vbique enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartum ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla eſt, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ ſint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propoſ. 4.

ITAQVE cum Euclides demonſtrat hoc lib. propoſ. 3. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm ſi duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt ſi proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus ſecundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud eſt intelligendum, quàm ſi ſumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad ſecundum eſt, vt 8. ad 3. & ſecundus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad ſecundum eſſe eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ eſt ſeſquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum eſt, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc eſt, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera eſſe diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè eſſe maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem eſſe intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falſum eſſe ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compoſitione proportionum

tionum, extremorum proportionẽ, quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additis omnium intermediarum proportionũ inter se, ac proinde omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnat, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. præmissus, perspicuum est. Nam propositis tribus lineis rectis, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, nempe latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammũ eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multo minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est sesquialtera tertias? Sed de hac re plura scribemus ad propos. 5. lib. 1.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, statuẽdi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; si alios numeros statuamus medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vnus hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem cõponitur ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quòd si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, qua etiam omnes datæ sint priores, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis quotcunque proportiones componentes ordine. Hæ enim cum priorem, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat sibi mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem

ortionem ſeſquialteram inter 9. & 6. ſtatuemus hos quatuor
umeros medios, 9. 4 1/2. 1 1/2. 1. 1/10. 6. ita vt 9. ad 4 1/2. ha-
beant proportionem duplam, & 4 1/2. ad 1 1/2. triplã; & 1 1/2.
ad 1. ſeſquialteram: & 1. ad 1/10. quintuplam ſeſquitertiam.
Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione 1/10. ad 6. qua
adem eſt, qua 1. ad 32. compoſitur proportio ſeſquialtera
. ad 6. Idem euenit, ſi data quatuor proportiones continuen-
r à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt
2. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplã;
54. ad 36. ſeſquialteram; & 288. ad 54. quintuplam ſeſ-
uitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem eſt, qua
ius 1/10. ad 6. qualis eſt 1. ad 32.

EX his nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua quiſpiã
ſtulat ſibi dari quotuis numeros, qui inter ſe multiplicati
ocreant datum quemcunq; numerum. Si namque ſumanr
r duo numeri habentes proportionem à dato numero deno-
inatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunq;, minus
no, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores propor-
ionum intermediarum, quæ quarumtur. Nam ij inter ſe mul-
iplicati producunt denominatorem proportionis extremorum,
t demonſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Veluti ſi quis
etat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignã-
ur 100. ſtatuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam pro-
ortionem habentes, duos medios numeros quoſcunque, hoc
odo, 500. 250. 50. 5. eruntque tres quæſiti numeri, 2. 5. 10.
imirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250.
d 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10.
iunt 100. Quòd ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vnà cũ
uotlibet alijs datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datũ
quemcunque numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri
roportionem habentes à dato numero, qui produci debet, de-
omĩnatam, & ab alterutro eorum continuanda proportiones
dat is alijs numeris denominat a. Denominator enim propor-
onis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum
it numerus, quem quarimus. Vt ſi dentur hi quatuor nume-
, 2, 3. 1 1/2. 5 1/3. quaratusque quintus alius, qui in numerum
x illorum mutua multiplicatione productum datus gignat
atum hunc numerum 1 1/3. accipiemus duos numeros 9. & 6.
roportionem ſeſquialteram habentes à dato numero 1 1/2. de-

nomi-

nominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportionis 2. 3. 1 1/3. 5 1/3 denominatus, hoc modo, 9. 4 1/2. 2. 1. 1/2. 1/4. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis 3/16. ad 6. nimirum 1/32. Nam quinque hi numeri, 2. 3. 1 1/2. 5 1/3. 1/32. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum 1 1/2. Idem quintus numerus 1/32. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. est 1/32. vt prius. Sic etiam inuenti sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. statuemus inter quoslibet duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominator proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. numerum, 2. 2. 1/3. 3/4. sunt quatuor numeri, qui quæsitum, nempe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tres numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerorum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri verbi gratia. 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. quo produci debet, fiet Quotiens 1/120. Quatuor igitur numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. 1/120. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in 1/120. fit 1.

POSTREMO neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunq; numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentijs inter medios numerorum. Vt hic. 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentiæ inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ, 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt

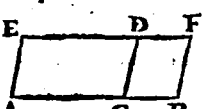
nficiunt 710. differentiam extremorum.

AT QVE hac dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurimæ aliæ decimi libri. Ea autem est eiusmodi:

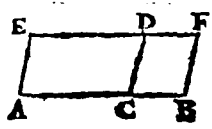
VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quã applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum unum parallelogrammum.

SIT data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totũ parallelogrammũ A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius



maius recta data AC; & data CD, ipsi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum secundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DI, ita vt DB, vocetur excessus.

HIC autem defectus DB, vel excessus, in rectangulis eadem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides vt perspicuum est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, inter se habent inter se, vt bases.



SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ vel vna deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula quàm parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN. Nam vt in defin. 4. dictum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares

culares a verticibus ad baſes demiſſæ æquales erũt,) &
x BL, ſumantur quotcunq; rectæ BI, IK, KL, ipſi BC,
quales; Item ex FN, abſcindãtur quotcunq; rectæ FM,
lN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducãtur re-
æ AI, AK, AL; DM, DN. [a] Erũt igitur triangula ABC, [a] 38. primi.
IB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem pa
llelas cõſtituta, inter ſe æqualia. Eadẽ ratione æqualia
unt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt
go recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit
angulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex
recta EN, rectæ EF, tam quoq; multiplex erit trian-
lum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula
ualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot
tas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quo-
am vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, [b] neceſſa [b] 38. primi.
) triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac
oinde ſi CL, maior fuerit quã EN, neceſſario ACL,
aius eſt quã DEN, & ſi minor, minus; deficient pro-
terea vnà CL, recta, & triangulum ACL, æque-
ultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC,
) EN, recta, & triangulo DEN, æquemultiplicibus
cundæ EF, & quartæ DEF, vel vnà æqualia erunt,
el vnà excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpon-
ent. [c] Quare quæ proportio eſt primæ BC, ad ſecundã [c] 6. defin.
F, baſis ab baſin, ea eſt tertiæ ABC, ad quartã DEF, quinti.
ianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita
t triangulum ad triangulum. quod eſt propoſitum.

QVONIAM autem [d] vt triangulum ABC, ad [d] 15. quinti.
iangulum DEF, ita eſt parallelogrammũ CG ([e] quod [e] 34. primi.
uplum eſt trianguli ABC.) ad parallelogrammũ EH;
[f] quod eſt duplum trianguli DEF) perſpicuum eſt, [g] ita [f] 34. primi.
uoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, [g] 11. quinti.
t eſt baſis ad baſin. Quod tamen eodem argumento cõ
rmari poteſt, quo vſi ſumus in triangulis, ſi prius ex
unctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi BG; nec
on ex punctis M, N, parallelæ ipſi FH, &c. Triangu-
igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit al-
tudo; ita ſe habent inter ſe, vt baſes. Quod erat de-
onſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogramma AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basim EF. Dico eorum altitudines, earum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaq; LM, ipsi BC, parallela, quæ [a] AC, secet in N, coniunctaq; recta BN; [a] erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basim EF, eas altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed [b] vt ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. [b] Igitur triangulum NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; [c] Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, æquales dicantur, & LI, DK, æquales.

[a] 1. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 9. quinti.

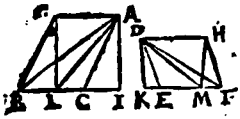
ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuitas demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, quæ habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF.

Dico

co esse triangulum ABC, ad
angulum DEF, & parallelo-
ammum AGBC, ad paralle-
rammum DEFH, vt alti-
lo AI, est ad altitudinem



K. Si enim sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF,
æales, ducanturque rectæ LA, MD; [a] *erit triangulum*
LI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases aqua-
LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem
do æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF.
ut are erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM: [c] *Est*
em, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam
ases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM,
itudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad
K. Quod est propositum.

QVONIAM vero est, [d] *vt ABC, ad DEF, ita pa-*
llelogrammum AGBC, [e] *quod trianguli ABC, duplum*
, ad parallelogrammum DEFH, [f] *quod trianguli DEF,*
duplum: [g] *Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI,*
d DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ
icantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & pa-
llelogramma eandem habuerint basim.

HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

[a] 38. primi.

[b] 7. quinti.
[c] 1. sexti.

[d] 15. quinti.
[e] 34. primi.
[f] 34. primi.
[g] 11. quinti.

TRIANGVLA, & parallelogramma, iæ ita se habent inter se, vt altitudines, æqua- s habent bases, si vnam & eandem non ha- ant.

SIT triangulum ABC, ad
angulum DEF; & parallelo-
ammum AGBC, ad paralle-
rammum DEFH, vt altitu-
AI, ad altitudinem DK. Di-



eorum bases BC, EF, æquales esse. Si enim non sunt æqua-
, sit BC, si fieri potest, maior, quam EF. Abscissa igitur
, ipsi EF, æquali, ductaq; recta LA; erit, vt proxime de-
onstrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK; Sed



[a] 11. quinti.

[b] 9. quinti.

vt AI, ad DK, ita pontus ABC, ad DEF. [a] Igitur AIL ad ABC, ad DEF, eandem habet proportionem; [b] Ac proinde inter æqualia sunt, pars & totum. Quod [c] est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Eadem erit ratio de parallelogrammis. Simili modo argumento, ducta LM, ipsi GB, parallela, ostendemus parallelogramma MGBL, AGBC, æqualia esse, si bases EF, dicantur inæquales, & BL, EF, æquales.

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. In cæteris demonstratio maiore indiget nunquam constructione.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

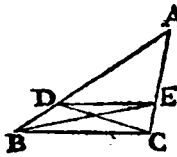
SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primùm recta DE parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, erit triangula DEB, DEC, super eandē basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. [c] 37. primi.

[d] Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita [d] 7. quinti.

triā-

langulum idem A D E, ad triangulum D E C: [a] Atqui triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt baſis A D, ad baſin D B; (cum hæc triangula ſint eiſdem altitudinis, vt conſtat, ſi ducatur E, agatur parallela recta ipſi B.) & eadem ratione, vt triangulum A D E, ad triangulũ D E C, eſt baſis A E, ad baſin E C. [b] Vt igitur A D, ad D B, eſt A E, ad E C (cum hæ duæ proportiones eædem ſint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, eiuſdem trianguli A D E, ad triangulum D E C.) quod propoſitum.



SECET deinde recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam eſſe reliquo lateri B C. Ductis enim rurſum rectis C D, B E, [c] erit vt baſis A D, ad baſin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum ſint eiuſdem altitudinis: Ponitur autem vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. [d] Igitur erit vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E, ad E C: [e] rurſus vt baſis A E, ad baſin E C, ita eſt triangulum A D E, ad triangulum D E C, cum ſint altitudinis eiuſdem. [f] Igitur vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt triangulum idem A D E, ad triangulum D E C. [g] Aequalia ergo ſunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea, cum eandem habeant baſin D E, inter eaſdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela eſt D E, ipſi B C. quod eſt propoſitum. Si itaque ad latus trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 21. ſex. i.

[b] 11. quinti.

[c] 1. ſexti.

[d] 11. quinti.

[e] 1. ſexti.

[f] 11. quinti.

[g] 9. quinti.

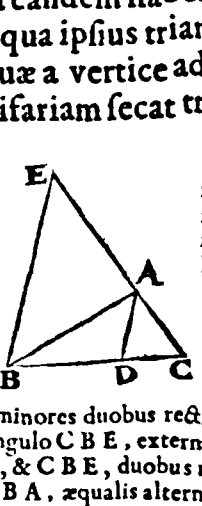
[h] 39. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem

habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea quæ a vertice ad sectionem producitur bifariam secat trianguli ipsius angulum.



IN triãgulo A B C, recta linea secet primò angulum B A C bifariam. Dico esse vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; (coibunt autem omnino B E, C A, propterea quod trianguli C, & C B E, minores sint duobus rectis. Cum enim C, & C D A, [a] minores duobus rectis sint; [b] sit autem angulus C D A, angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & C B E, duobus rectis minores.) [c] eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales; [d] Ideoque & rectæ B A, E A, inter se æquales. [e] Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C. [f] Atqui vt E A, ad A C, ita est B D, ad D C; cũ in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E. [g] Igitur vt B A, ad A C, ita est B D, ad D C. quod est propositum.

SIT deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad C D, D rectam A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela, cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt B D, ad D C, ita ponitur B D, ad D C. [h] Vt autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela.) [i] Erit vt B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. [k] Æquales igitur sunt B A, & E A,

[a] 17. primi.
[b] 29. primi.
[c] 29. primi.
[d] 6. primi.
[e] 7. quinti.
[f] 2. sexti.
[g] 11. quinti.
[h] 2. sexti.
[i] 11. quinti.
[k] 9. quinti.

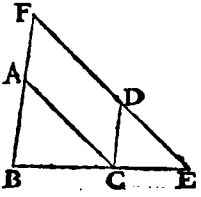
E A, inter se, ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt. b Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus t, &c. Quod erat demonstrandum.

a 5. primi. b 29 primi.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 46

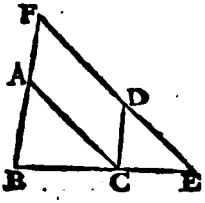
AEQVIANGVLORVM trianulorum proportionalia sunt latera, quę ircum æquales angulos, & homologa ınt latera, quæ æqualibus angulis sub:nduntur.

SINT æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; :quales anguli ABC, DCE; & \C B, D E C; & B A C, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt D C, ad :E; & BC, ad C A, vt C E, ad :D; & A B, denique ad A C, vt)C, ad DE: Ita enim latera cir- æquales angulos sunt proporonalia, homologaque sunt ea ıtera, quæ æqualibus angulis



ıbtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales espiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita t angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; ariterque externus A C B, interno D E C. Et quia uo anguli A B C, A C B, c minores sunt duobus rectis: st autem angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt : anguli B, & E, duobus rectis minores. d Quare rectæ : A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Produantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus xternus D C E, æqualis est interno opposito A B C;

c 17. primi. d 13. prom.



[a] 28. primi. [a] parallelæ erunt CD, & BF. Rursus, quia æqualis est angulus A C D ipsi A C B, & communis A C F, erit angulus A F C æqualis angulo A C B. Quare & reliquus F A C reliquo C A B æqualis erit. Ergo & angulus F A C æqualis est angulo A D F. Quare & angulus A D F æqualis est angulo A C B. Ergo & angulus A C B

remus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, qua vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra eam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum includsæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.



SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, ad BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F, puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; [a] erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, [b] vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE. [c] Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: [d] Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.

[a] 4. sexti.
[b] 16. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

RVRSVS si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, ut in secunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propos. triangula BAD, BCF, similia sunt; [e] erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; [f] & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad

[e] 4. sexti.
[f] 16. quinti.

a 11. quinti. b 9. quinti.

ad BC, ita quoque erat A D, ad C E. Igitur erit, vt A D ad CF, ita A D, ad C E: b Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud in easdem rationes.



IN triangulo A B C, ducta sit D E, lateri B C, parallela, & ex puncto quocunque ad angulum A, recta ducatur F A, secans D E, in G. Dico esse, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quoniam enim triangula A F B, A G D, ex constr. huius Propos. similia sunt; c erit vt A F, ad B F, ita A G, ad D G, d & permutando, vt A F, ad A G, ita B F, ad D G. Atque eodem argumento concludemus esse, vt A F, ad A G, ita F C, ad G E. e Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E, & permutando, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod erat propositum.

c 4. sexti. d 16. quinti. e 11. quinti.

ALITER. Quoniam triangula A B F, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per eiusd. huius propos. f erit, vt B F, ad F A, ita D G, ad G A: Item vt F A, ad F C, ita G A, ad G E. g Ex æquo igitur, vt B F, ad F C, ita erit D G, ad G E. Quod erat demonstrandum.

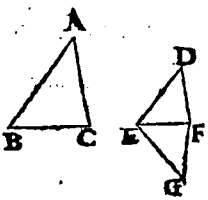
f 4. sexti. g 22. quinti.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, ſitque AB, ad BC, vt DE, ad EF; & BC, ad CA, vt EF, ad FD; & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula eſſe æquiangula, angulum ſcilicet A, æqualem eſſe angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales reſpiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C; conueniantque rectæ EG, FG, in G: [a] eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur ſunt triangula ABC, GEF. Quare [b] vt AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [c] Igitur vt GE, ad EF, ita eſt DE, ad EF, eandem: [d] propterea æquales erunt GE, DE. Rurſus, [e] quoniam vt BC, ad CA, ita eſt EF, ad FG; Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; [f] erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; [g] ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia ſint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & baſis communis EF; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis anguli DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis ſit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod eſt propoſitum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod oſtendendũ erat.



a 32. primi.
b 4. ſexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. ſexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 8. primi.
i 4. primi.

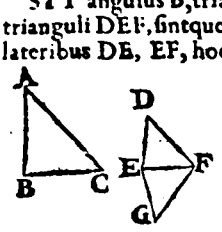
THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesq; habe-

habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF.



Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. Igitur vt DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (Nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, propterea que æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF,) erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales angulo D, EFD; & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF. quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

5. sexti.

11. quinti.

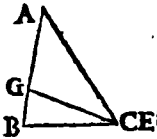
9. quinti.

4. trini.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant: reliquo-

liquorum vero ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.



SIT angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF; & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc eſt, ſit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, ſit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet ACB, & F, circa quos ſunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales eſſe. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo poſito, ſi anguli ACB, & F, non ſunt æquales, ſit ACB, maior, quam F; fiatque ipſi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [a] erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF. æquiangula erunt. Quare [b] vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. [c] Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB; [d] ac propterea æquales erunt CG, CB; [e] & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; [f] cum AGC, CGB, ſint duobus rectis æquales: Eſt autem oſtenſus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto eſt quoque angulus E: Sed poſitus eſt etiam recto minor. Quod eſt abſurdum.

[a] 32. primi.
[b] 4. ſexti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.
[e] 5. primi.
[f] 13. primi.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis; ideoq; & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, ſed vel maiores, vel æquales duobus rectis.

quod

[a] 17. primi. quod est absurdum. [a] Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æqua-
[b] 32. primi. les, [b] atque idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque trianguli vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumque angulorum rectorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, (quod fieri potest, quando angulus B, minor est, & maior angulo A. Sic enim [c] *erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad internallum C B, circulus describatur, secabit is rectam A B, prius quam rectam A C, quæ longior est, quàm C B, fecet. Secabit autem ille circulus necessario rectam A B, propterea quòd ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum ipsi contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituat cum C B, vt patet ex propos. 10. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, vt AC, ad C B, ita erit eadem AC, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula A E C, A G C, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, vel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor; A G C, vero recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint,* [c] *& ideo anguli C B G, C G B, æquales;* [f] *erit vterque eorum recto minor, ac propterea A G C, recto maior.*

[c] 19. primi.

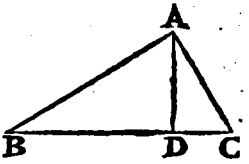
[d] 7. quinti.

[e] 5. primi.
[f] 17. vel 32. primi.
[g] 13. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta

t: quæ ad perpendicularem triangula, um toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſi- nilia ſunt.



IN triangulo A B C, an- lus BAC, ſit rectus, à quo baſin perpendicularis aga r AD. Dico triâgula ADB, DC, ſimilia eſſe & toti triâ lo ABC, & inter ſe. Cum im in triangulis A B C, BA, anguli B A C, & ADB, ſint recti, & angulus B, mmunis; [a] erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æqua- . Aequiangulum eſt igitur triangulum D B A, trian- lo ABC; [b] ac propterea habebunt latera circa æqua- ; angulos proportionalia, &c. hoc eſt, erit vt C B, ad A, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita B D, ad D A; vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homo- ga æqualibus angulis opponuntur, vt vult propoſ. 4. uius lib. Quare ſimile eſt triangulum A D B, toti trian- ulo ABC. Eodem modo oſtendetur triangulum ADC, nile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & D C, ſunt recti, & angulus C, communis; [c] ac propte- a reliqui anguli A B C, & CAD, æquales. Quare [d] vt C, ad CA, ita eſt C A, ad C D; & vt C A, ad A B, ita D, ad D A, & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. Sic im opponuntur quoq; homologa latera angulis æqua- ous, ex præſcripto propoſ. 4. huius lib. Non ſecus de- onſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula A D B, & D C, cum anguli A D B, A D C, ſint recti, & angu- A B D, C A D, oſtenſi æquales, nec non anguli BAD, CD; Atque idcirco ſit [e] vt B D, ad D A, ita D A, ad C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt AB, ad D, ita CA, ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, &c. uod erat demonſtrandum.

[a] 32. primi.
[b] 4. ſexti.
[c] 32. primi.
[d] 4. ſexti.
[e] 4. ſexti.

COR-

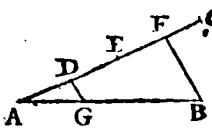
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei latus adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse medium proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcirco BA, medium esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; idemque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

9. PROBL. 1. PROPOS. 9.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.



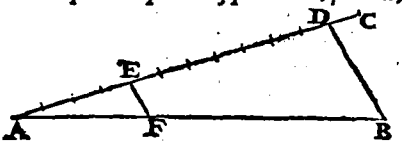
IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC vtcunq; faciens angulū CAB: & ex AC, abscindantur tres æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars deprehenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur

[a] 2. sexti.
[b] 18. quinti.

gitur & B A, ipſis A G, erit tripla, ideoque A G, tertia ars erit ipſius A B, quæ imperabatur. A data ergo re-a linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex A B, auferenda ſit pars non aliquota, ſed a plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, minima quæ contineat quatuor vndecimas ipſius A B, ſumenda erit ex A C, vndecim partes æquales vſque ad D, punctũ, quo ad B, cta ducatur B; & huic rallela E F, E, termino atuor par-

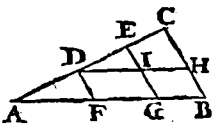


um. Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rurſus vt D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & conuertendo vt A E, ad A D, ita A F, ad A B: Eſt autem A E, pars continens quatuor vndecimas ipſius A D, ex conſtructione. Igitur & A F, eadem pars erit rectæ A B. Quod eſt propoſitum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipſius aliquotas non facientes vnam.

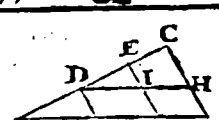
PROBL. 2. PROPOS. 10. 12.

DATAM rectam lineam inſectam imiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

SIT recta AB, ſecanda ſimiliter, vt ſecta eſt recta AC, in D, E, hoc eſt, in partes, quæ ſint artibus AD, DE, E C, proportionales. Coniungãtur datæ duæ



neæ ad A, facientes angulum quemcunq; BAC, & con-



nectatur recta BC. Deinde ex E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB similiter esse sectam in F, & G, ut secta AC, in D, & E. Nam ut AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; [b] erit rursus, ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quæ FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

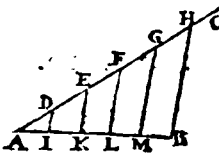
[a] 2. sexti.

[b] 2. sexti.

[c] 34. primi.

SCHOLIVM.

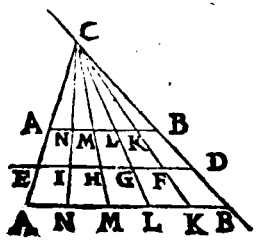
EX hoc problemate colligi potest facilis admodum ratio dividendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. factures recepimus, & alia iam via idem ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta AB, dividenda in quinque partes æquales.



Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunq; angulum CAB, sumantur ex ea quinque partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, adiungatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, similiter diuisa, vt AH, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur AH, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & AB, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur data recta AB.

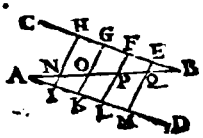
HVIC rationi dividendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt alia non iniucunda. vt propos. 10. lib. 1. fumus pollicitti, atq; ad propos. 40. lib. 1. dem-

t enim rursus data linea recta
B, dividenda in quinque par-
es aequales. Ducatur ex B, recta
C, utcunque faciens angulum
um AB; Deinde ex assumpto
cto D, sive supra B, sive infra,
atur DE, parallela ipsi AB,
qua abscindantur quinque
quales partes DF, FG, GH,
I, IE, ea lege tamen, ut, si D,



st supra B, recta DE, ex quinque partibus aequalibus con-
tans, minor sit, quàm AB, maior verò, si D, existit infra B.
Postremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipsi BC,
in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK,
CL, CM, CN, quas dico dividere rectam AB, in quinque
artes aequales. Cum enim DE, sit parallela ipsi AB, divi-
antur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex
scholio propos. 4. huius lib. Cum ergo EH, secta sit bifariam
in I, secta quoque erit AM, bifariam in N. Eadem ratione
recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo
CMK; & recta LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam.
Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi ML; & ML, ipsi LK; &
LK, ipsi KB, aqualis; ac proinde AB, secta erit in quinque
partes aequales. Quod est propositum.

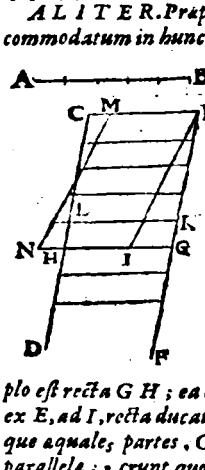
ALITER. Ab extremis pun-
ctis A, & B, educantur duæ rectæ
BC, AD, inter se parallelæ; hoc est,
constituentes angulos A, B, aequa-
les: Et ex BC, abscindantur qua-



tuor partes aequales BE, EF, FG, GH, ut sint tot partes, una
minus, in quot est linea dividenda; His autem ex AD, to-
tidem aequales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur
rectis EM, FL, GK, HI, secantibus rectã AB, in N, O, P, Q,
dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes aequales. Cum
enim aequales sint, & parallelæ GH, IK, erunt & HI, GK, 33. primi.
parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt GK, FL, EM.
Quare cum AM, secta sit in quatuor aequales partes, erit &
AQ, similiter in quatuor partes aequales divisa, ut constat
ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione divisa erit

& BN, *in quatuor partes aquales, eò quòd* BH, *in totidem eſt partes aquales diuiſa. Quare cum tam* AN, *quam* BN *aqualis ſit ſingulis partibus* NO, OP, PQ; *erunt omnes quinque partes* AN, NO, OP, PQ, QB, *inter ſe aquales. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Præparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis utcunque parallelis CD, EF, *& utraque abſcindantur partes inter ſe aquales quotcunque, ſaltem tot quot partes dividenda proponitur linea, & bina puncta correſpondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo recta* AB, *dividenda, eaque à quolibet puncto lineæ* CE, *vt ex* E, *tranſferatur in inſtrumentum ad punctum I, illius lineæ tranſuerſæ, quæ vtrumque latus terminat, in quot partes linea proponitur dividenda, qualis in exemplo eſt recta* GH; *ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremo ex* E, *ad* I, *recta ducatur* EI, *quam dico diuiſam eſſe in quinque aquales partes. Cum enim* GK, HL, *aquales ſint, & parallelæ;* [a] *erunt quoque* GH, KL, *parallelæ. Eodem modo omnes lineæ inter rectas* CD, EF, *inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10. propoſ. liquet, quemadmodum* EG, *diuiſa eſt in quinq; partes aquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit* EI. *Nam ſi punctum* E, *ſumptum non fuerit idem quod* E, *vel* C, *producendo tamen* IE, *donec cum* FE, *vel* DC, *coeat. Tunc enim vt in hac 11. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ* EI, EG, *ſimiliter diuiſæ. Quòd ſi forte* IE, *nec cum* FE, *nec cum* DC, *concurrat, ſed vtrique ſit parallela,* [b] *erunt ſingulæ partes rectæ* EI, *ſingulis partibus rectæ* EG, *aquales, ob parallelogramma & parallelas incluſa. Cum ergo omnes partes rectæ* EG *ſint aquales; erunt quoque omnes partes rectæ* EI, *aquales. Fiet beneficio circini ſingulæ partes lineæ* EI, *tranſferendo ad rectam propoſitam* AB, *ipſi* EI, *aqualem diuiſa erit* AB *in quinque partes aquales. Quod eſt propoſitum.*



[a] 33. primi.

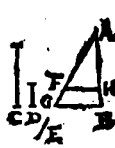
[b] 34. primi.

EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab d, vsque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque dN, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur c M, ipsi EG, parallela, vsque ad rectam GH: Vel si N M, oducatur, donec cum GE, productæ conueniat. Quod si linea uidenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes rallelarum CD, EF, minores, &c. Si vero linea sit longiusla, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri potein duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel quadruplo era, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt nam partem. Vt si diuidenda sit in tres partes, transferatur-e in sex spatia, dabunt duo spatia vnam partem: si transratur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnam rtem, propterea quòd quinque spatia conficiunt tertiam par m quindecim spatiorum. Sic si linea diuidenda in duas uales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt nouē atia vnam partem; quippe cum nouem spatia constituant missem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, libebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à ometris adhibetur, demonstrare. quod est eiusmodi.

DATAM rectam secare in duas partes, quę habeant proportionem quamcunq; datam.

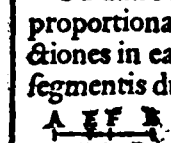
SIT secanda recta AB, in duas partes, quæ abeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea AE, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, æqualis: Deinde ducta GB, ducatur ei per F, parallela H. Dico AB, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, * cum sit, AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB.



* 2. sexti.

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddā de linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.



SECENTVR rectæ AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD. Item AF, ad FB, vt CH, ad HD. Item sectiones inter medias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cum duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EH, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cum enim sit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD; erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD; erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD; & conuertendo, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD. Item cum sit, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB, ad EB, ita CD, ad GD; [a] Erit ex æquo, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD; Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD; Et per conuersionem rationis, vt EB, ad EF, ita GD, ad GH. Et diuidendo, vt FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est primum.

[a] 22. quinti.

RVRSVS, quia est, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD: Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt ostensum est; hoc ex æquo, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Commune duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus BCD, sitque BAD; iungantur rectæ DB, HF, GE. Quia igitur proportionales sunt AE, ad EB, ita CG, ad GD; [b] Parallela erit GE, ei DB. Rursus, cum ponatur, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD; [c] Parallela erit quoque HF, ipsi DB. [d] Quare & GE, ei inter se parallelæ erunt: Ac propterea [e] erit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

[b] 2. sexti. [c] 2. sexti. [d] 30. primi. [e] 2. sexti.

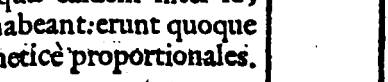
EODEM modo, si puncta extrema B, D, communia in vnum, &c. ostendemus esse, vt BF, ad EF, ita HD, ad GH; & conuertendo, vt EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod est primum.

SED

SED *neque omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.*

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se habeant proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineę Arithmeticè proportionales.

RECTA *linea AB, secta in partes AC, CD, DB, Arithmeticè proportionales, hoc est, habentes eundem excessum. Secetur autem recta EF, in totidem partes EG, GH, HF, illis pro-*



portionales. Dico has partes eundem quoq: habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales. Sit enim CI, ipsi AC; & DK, ipsi CD, æqualis: vt ID, sit excessus inter CD, & KB, excessus inter DB, CD, atque adeo ipsi ID, æqualis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, æqualis: vt LH, excessus sit inter GH, EG; & MF, excessus inter HF, & LH. Probandum est, excessus LH, MF, æquales esse. Quoniam igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH; erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF; erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes totius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cum sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL; [b] erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM; [c] erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH. [d] Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, æqualis. [e] Igitur & LH, ipsi MF, æqualis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè

[a] 10. sexti.

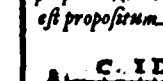
[b] 19. sexti.

[c] 19. sexti.

[d] 11. quinti.

[e] 14. quinti.

proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.



HOC theorema nullo modo converti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ secta fuerint partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere eas proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ EF, secunda pars statuatur GM, ut excessus inter EG, GM, sit LM: Deinde ipsi GM æqualis sumatur portio ipsi GM, æqualis, eique adjiciatur idem excessus LM; fient tres partes Arithmeticè proportionales totius EF, & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: quippe cum minor sit proportionalis ad GM, quàm EG, ad GH; hoc est, quàm AC, ad CD.

a 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc est, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; ostensum est itaque esse excessum ID, ad excessum LH, vt CD, ad GH. Itaque si AC, CD, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, vel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

SIT enim recta EF, secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quotcunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, secetur similiter ut

b 10. sexti.

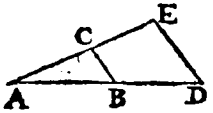
,H, vt AB, in C, D, secta est; erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.

HÆC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibusvis aliis magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Itque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmetica posteriorem rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmetica: cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum ad datū numerū, ita singuli numeri assumpti ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum fuit, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duę rectæ AB, AC, ita ispositæ, vt efficiant angulum quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sit quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequés esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi per D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cū enim in triangulo ADE, uni laterī DE, parallela sit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, qualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE. Quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



[a] *4. sexti.*
[b] *7. quinti.*

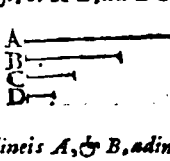
SCHO-

SCHOLIVM.

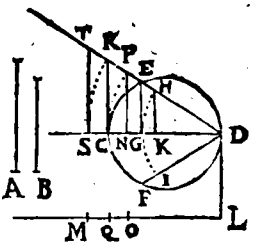
ALITER idem demonſtrabimus, hoc modo. Dan̄ rectæ data AB, BC, conſtituantur ad angulum rectum ABC, & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur CD, ad AC, perpendicularis CD, occurrens ipſi AB, producta in D. Dico BD, eſſe tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, ſit rectus, & ab eo ad baſim AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. prop. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc eſt, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod eſt propoſitum.



INVENTA autem tres lineæ continuæ proportionales, ſi primam omiſeris, & alias duas tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continuè proportionales. Vt ſi lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continuè proportionales. Eadem arte reperitur quinta proportionalis, ſexta, ſeptima, octaua, & ſic in infinitū.



EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectum CD, ipſi A, æqualem deſcribatur circulus CEDF, cui applicentur DE, DF, ipſi B, æquales. Applicata autem rectis punctis E, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum tranſiens circulum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus rectis DE, DF, ex ſemicirculis æqualibus DEG, DFC, reliquæ CE, CF, æquales erunt.) ſecabit eadem & rectam EF, bifariam, per ea, quæ in ſcholio propoſitionis 3. oſtendimus.[a] Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam data recta EC,[b] angulus ad E, in ſemicirculo rectus eſt, erit ex



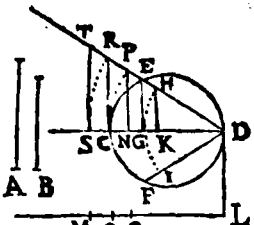
a 3. tertij.
b 31. tertij.

c coroll. propos. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicata & regula ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (quia ob aequales arcus EC, FC, aequales sunt) arcus HG, IG, aequales erunt; ac propterea, ex scholio propos. 27. lib. 3. recta ducta per I, bifariam secabitur in K; ideoq; & ad angulos rectos. Ergo parallela ergo sunt EG, HK. Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineae CD, DE, DG, DK, continuè proportionales. Quòd si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

a 27. tertij.
b 26 tertij.
c 3. tertij.
d 28. primi.
e 2. vel 4. sexti.

DEINDE sit data proportio lineae B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus, abscindantur rectae DN, LO, minori B, aequales; applicata & regula ad puncta O, N, ducatur recta NP, quae ad DC, perpendicularis erit, & cum sit parallela ipsi DL. Sumpta deinde recta DC, aequali ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectam NP, in P, extendaturq; ex D, per P, recta DPT, eritq; DP, ipsi DC, hoc est, ipsi A, aequalis. Abscissa quoque LQ, ipsi DC, aequali, applicataque ad puncta Q, C, regula, ducatur recta CR, quae eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi NP, parallela. Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipsi B, A, acceptae sint aequales) ita CD, ad DR, hoc est, ita DP, ad DR; erunt tres rectae ND, DP, DR, continuè proportionales; ideoq; DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & recta DS, aequalis auferatur LM; applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit ST, ipsi CR, parallela, & ad DC, perpendicularis. Quare erit, vt CD, ad DR, hoc est, vt A, ad DR, ita SD, id est, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor lineae ND, DP, DR, DT, continuè proportionales. Quòd si ex D, per T, alius arcus describatur secãs rectã DC, protractã, inuenietur eadẽ arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitũ.

f 29. primi.
g 33. primi.
h 2. vel 4. sexti.
i 2. vel 4. sexti.



EX his fine magno labore inter duas rectas datas reperimus duas medias proportionales, nõ quidem Geometrico ingenio, sed quasi attentis, & praxim ipsam ita eorum repetendo, dicere quod quærimus, assequimur. Vt si inter CD, DK, inuenienda sint duæ media proportionales. Describatur circa maiorem CD, circulo CED, erigatur ex K, ad CD, perpendicularis KH, ducaturq; DH, extra ipsum in puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, describendo transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex corell. propos. 8. huius libri. Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continuè proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quòd si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si uero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.

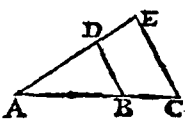
* 2. vel 4. sexti.

10.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia uero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde BC, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto.



Dico

Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit parallela B D; [a] erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat. [a] 2. sexti.

SCHOLIVM.

HINC facile elicimus, quenam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim data sit dua recta linea A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei tertia proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum bina semper eandem habeant proportionem.



OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ A B, B C, C D, oportet inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, vt A B, prima ad B C, secundam. Disponantur primæ duæ A B, B C, in directum, vt faciant rectam A C: tertia vero C D, cum secunda B C, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse E D, ad D C, tertiam, vt est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est, cum A C, E C, proportionaliter secentur in B. D, punctis. [b] 2. sexti.

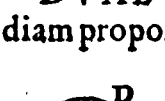


ALI-

[a] 12. sexti. *ALITER. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat secunda, atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.*

9. ## PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ AB, BC, quarum media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus describatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; [b] erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cũ igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

[b] 31. tertij.

SCHOLIVM.



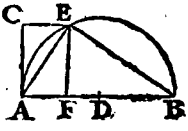
PERSPICVVM hinc fit, rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri

iametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpen dicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalem mediam in er AD, & DC: Id quod liquido constat ex demonstratio e huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB: fiet ngulus A B C, rectus. Quare per coroll. propos. 8. constat opositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media oportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG, GC, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum , quæ ex quibuslibet punctis diametri ad ipsam diametrum rpendiculares ducentur.

[a] 31. tertij.

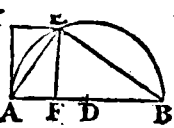
EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ mi or non sit, quam dupla illius) ita secare, vt ata recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



SIT data recta AC, & diuiden a proponatur recta AB, (quæ mi or non sit quam dupla ipsius AC, id vel dupla, vel maior) ita vt in r huius segmenta, media propor onalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum ctum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, ntervallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur E B. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, se ans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit utem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si inor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quàm imidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circum erentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqua is sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex), ad angulos rectos educta. Cum ergo positum sit, AC, non sse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, cir umferentiam, aut tanget.) a quo demittatur ad AB, erpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportiona-

lem



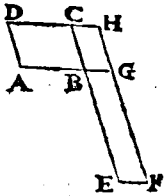
lem inter segmenta AF, FB. Iis enim rectis AE, BE, erit vt ea est demonstratum, ex coroll. prop. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [a] *Cum igitur EF,* [b] *qualis sit ipsi AC, eò quod parallelogrammum sit ACEF; Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem,* [b] *& AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA;) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propos.*

31. primi.

b 28. primi.

13. THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habẽtium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habẽtium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG. sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF: erit vt DB, ad BH, ita BF, ad eandem BH: Sed vt DB, ad BH, [d] ita est AB, basis ad basin BG,

[c] 7. quinti.
[d] 1. sexti.

G, quòd parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; ſimiliter vt BF, ad B H, ita eſt baſis E B, ad baſin BC. igitur vt A B, ad B G, ita eſt E B, ad B C. Quod eſt opoſitum.

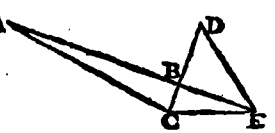
E CONTRARIO, ſint iam latera circa æqua- angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, vt A B, ad G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, A B, ad B G, ita E B, ad B C: [a] Vt autem AB, ad B G, D B, ad B H; & vt E B, ad B C, ita B F, ad idem BH; t quoque vt D B, ad B H, ita B F, ad idem BH; [b] Atqui idcirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium gulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 1. ſexti.

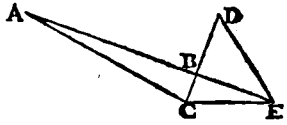
[b] 9. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 15. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqua em habẽtium angulum, triangulorum, eciproca ſunt latera, quæ circum æqua- es angulos. Et quorum triangulorum num angulum vni æqualem habentiũ eciproca ſunt latera, quæ circum æqua- es angulos; illa ſunt æqualia.



SINT duo triangula qualia A B C, D B E, ha- entia angulos, qui ad B, quales. Dico latera cir- hoſce angulos eſſe re- iproca, hoc eſt, eſſe vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. oniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita t A B, B E, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, um anguli A B C, D B E, ſint æquales; erunt & D B, C, vna recta linea, ut demonſtratum eſt ad propoſ. 15.



lib. 1. ex Proclo. Ducatur recta C E; quorum æqualia sunt triangula A B C, D B E; [a] erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum B C E, [b] ita est basis A B, ad basin B E, quòd hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt D B E, ad B C E, ita est basis D B, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Quod est propositum.

[a] 7. quinti.

[b] 1. sexti.

I A M vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt A B, ad B E, ita D B, ad B C; vt autem A B, ad B E, [c] ita triangulum A B C, ad triangulum B C E; & vt D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; [d] propterea que æqualia erunt triangula A B C, D B E. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 1. sexti.

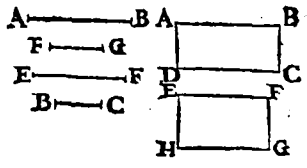
[d] 9. quinti.

15. THEOR. 11. PROPOS. 16.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, C D,

C, vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectanulum A B C D, comprehensum sub extremis AB, BC; ectangulum vero E F G H, comprehensum sub medijs F, FG. Dico rectanla AC, EG, esse æqua . Cum enim anguli ti B, & F, sint æqua-, & sit vt AB, ad FG, EF, ad BC; erunt la- circa æquales anos B, & F, reciproca. [a] Quare parallelogramma A C, , æqualia erunt. Quod est propositum.



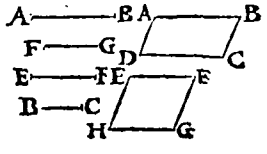
[a] 14. sexti.

CONTRA vero, sint iam æqualia rectangula E G. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, proportionales, hoc est, esse vt AB, ad FG, ita EF, ad . Cum enim æqualia sint rectangula A C, E G, haque angulos æquales, nempe rectos B, & F; [b] erunt ra circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, F G, ita E F, ad B C. Itaque si quatuor rectæ lineæ oportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 14. sexti.

SCHOLIVM.

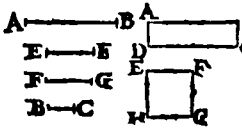
IDEM verum est, etiam- arallelogramma AC, EG, sint rectangula, dummodo æquiangula, ita vt anguli is rectis lineis comprehensi æquales. Veluti manifeum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.



THEOR. 12. PROPOS. 17. 16.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub ex-

tremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC; & rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC; & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æquale esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor hæc AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. [a] Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso: Quod est propositum.

[a] *16. sexti.*

SED sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; [b] erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: [c] Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] *16. sexti.*
[c] *7. quinti.*

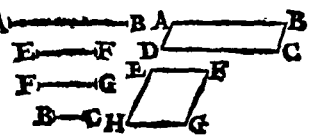
COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte constat, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æqua-

uale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt B, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est oportionalis inter AB, & BC.

SCHOLIVM.

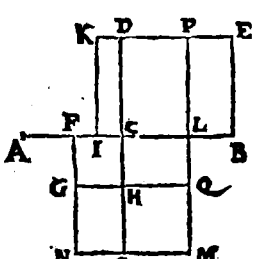
EADEM omnino
sequuntur, etiamsi
allelogramma non
rectangula, dum-
do sint aquiangula,
vt EG, sit Rhōbus,



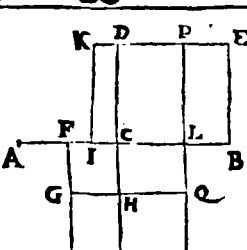
AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demon-
atio, vt figura indicat.
LIBET *hoc loco cum Peletario demonstrare problema*
inutile ad lineas proportionales spectans: quod est ejus-
di.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.

SIT recta AB, divisa in C,
cunque, vtcunque partem
B, ita secare in duas alias
rtes, vt omnes tres partes con-
nuè proportionales sint. Secet
r AC, bifariam in F; &
C, iterum bifariam in I, vt
I, quarta pars sit primæ par-
s AC: & ex B, I, erigantur
æ perpendiculares BE, IK,
ima parti AC, æquales, du-



turq; recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit
b AC, primæ parte, & rectæ IB, compositæ ex altera par-
BC, & ex CI, quartæ parte primæ partis. Et quoniam AC,
uisit est bifariam in F, eique addita in rectum CB; erit [a] 6. secundi.



rectangulum sub AB, BC, cum quadrato ex CF, aequale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, cum quadrato ex CF. (Nam cum CD, ad AB, perpendicularis, erit rectangulum CL, contentum sub AC, CB, aequale rectangulo sub AB, BC: Et rectangulum CK, quarta

[a] 1. sexti. CF, aequale, cum utrumque quarta pars sit quadrati AC: rectangulum quidem CK, [a] quia sic est rectangulum CL, ad quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, vt CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta tertiae AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; Atqui quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati AC, ex

[b] 14. secundi. scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit rectum ex BF. Si igitur [b] fiat quadratum rectangulo IE, aequale eius latus minus recta FB. Sit ergo illud FL. Dico iam CB, ita sectam esse in L, vt tres partes AC, CL, LB, sint continuè proportionales. Describatur enim ex FL, quadratum FM, rectaque DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P: sumptisq; duabus FG, LQ, ipsi CF, aequalibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Eritq; CG, quadratum rectae CF, aequalitatem rectarum CF, FG. Et quia ablatis aequalibus FC, FG, ex aequalibus FL, FN, reliquae CL, GN,

[c] 34. primi. sunt; [c] & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, aequalis; aequales quoque erunt HQ, HO; ideoq; H M, quadratum rectae CL. Rursus quia tam rectangulum CQ, comprehensum sub CL, & CH, siue CF, semisse ipsius AC, quam rectangulum GO, sub GN, siue CL, & GH, siue CF, semisse rectae

[d] 1. secundi. AC, siue CD; [d] erunt duo rectangula CQ, GO, simul aequalia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL, & CD, ipsis CH, GH, simul aequalis est. Itaq; cũ rectangulum quadrato FM, aequale sit; & rectangulum CK, quadrato FM, & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, hoc est AC, & BL, reliquo quadrato H M, aequale. Quocirca, cum ita

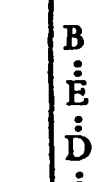
s tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis omprehensum æquale sit quadrato HM, media CL; erunt a 17. sexti.
ſa tres lineæ AC, CL, LB, continuè proportionales. Quod t propoſitum.

IN numeris idem problema ita perficietur. Poſteriori parnumeri propoſiti adijciatur prioris partis pars quarta, & nſtatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinproducti numeri quadrata radix eruatur. Nam ſi ex raie inuenta dematur ſemiſſis prioris partis, reliqua fiet ſecun pars proportionalis, quam ſi ex poſteriori parte dati numeri ſtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti ſi linea AB, pona- 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adijciemus CI, hoc ,9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id eſt, ad 40. eriorem partem, & conſtatum numerum 49. lineam ſciliIB, in priorem partem 36. ſiue in lineam AC, ducemus, ue ex producto numero 1764. hoc eſt, ex rectangulo IE, licem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua ſi dohemus CF, ſemiſſem partis AC, nimirum 18. reliqua erit rs CL, 24. Hac ablata ex tota poſteriori parte CB, 40. reanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, B, numeri AB, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportiona. Ex quo conſtat, quando radix quadrata extrahi nequit eo producto, problema effici non poſſe in numeris. Atq; hinc elligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prepem ſcripſimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ Arithmeticæ proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus diſputauimus, non alienum erit a noſtro inſtituto, de idem quoque cum Pappo Alexandrino diſſerere, qui datis obus terminis ex tribus cuiuſcunq; Medietatis, ſiue Arithmeticæ, ſiue Geometricæ, ſiue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum eſt. Hoc autem exequemur ſequentibus propoſitionibus, quarum prima hæc ſit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT data duæ rectæ AB, C, (quæ per vnitates in longum dispositæ repræsentantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Manet C, ponatur æqualis FH, & ex maiori AB abscindatur alia æqualis AD: Diuisi autem segmento BD, bifariam in E, fiat ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, ipsi mediam Arithmeticè proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE, & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquidò constat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, sit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. [a] *Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, dimidia erit summa extremarum. Quod est propositum.*

[a] 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, ipsi AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi FH, ponatur æqualis C.

Dein

Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui eisdem duo excessus BE, GH, ex constructione, aquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura, data dua recta C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, aqualis, eiq; addatur EB, excessui H, quo FG, ipsam C, superat, aqualis. Dico AB, esse tertiã proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cũ ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint aquales, patet propositum.

ITAQVE datis duobus numeris inaqualibus 30. 16. & semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, constabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

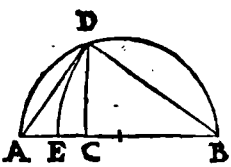
SI vero ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adijciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT



SINT data rectæ AB, & eiusdem terminum B, habentes inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitata C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus circumferentia secans AB in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis AD, BD; [a] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.

[a] 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ AB, BE, eandem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor extremitas Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; [b] erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis inter AB, BC. Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.

[b] 31. tertij.

VI.

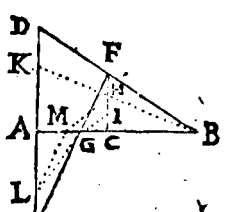
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ CB, BE, eandem termi-

erminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, descri tus secet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam D, perpendicularis D A, secans BE, productam in A. Di- A B, tertiam proportionalem esse ipsis C B, B E. Quoniam im angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius . B D, hoc est, BE, ipsi aequalis, media proportionalis inter C, & A B: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate uenire.



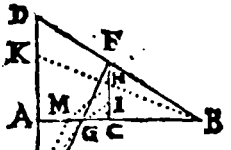
SINT datae rectae AB, BC, indem terminum B, possidētes, uter quas inuenienda sit media armonicè proportionalis. Du- a per A, ad AB, perpendicula- D E, ponantur aequales A D, E, quamcunq; . Excitetur oque ex C, ad A B, perpendi- laris C F, secans ductam re- am B D, in F, puncto, ex quo d E, recta ducatur F E, secans AB, in G. Dico B G, esse me- iam Harmonicè proportionalem inter AB, BC: Hoc est, esse E, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primã B, ac mediam BG, ad G C, excessum inter mediam B G, tertiam BC. Quoniam enim [a] C F, parallela est ipsi D E, rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius lib. trian lum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt A B, ad D, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinē trian lorum AEG, CFG, [b] erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem

[a] 28. primi.

[b] 4. sexti.

vt

vt AE, ad CF, ita AB, ad BG. Igitur erit quoque AB, ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG & tertiam BC. Quod est propositum.



NON determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, vel media BG, inuenietur semper alia aequales AK, AL. Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, tangatque recta LH: quam dico per G ire sine. Si enim transeat aliud punctum, vt per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim vtrobique singula aquiangula ALM, MHC, si recta est HML. Et ut AB, ad BC, ita AG, ad GC, vt ostensum est. Igitur vt AM, ad MC, vt AG, ad AC. quod est absurdum. Nam minor est proportio AM, ad GC, quàm AG, ad GC: Sed etiam minor est proportio AM, ad MC, quàm ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quàm AG, ad GC. Non ergo ita est AM, ad MC, vt AG, ad GC: ac proptereà HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transibit igitur per G: atque ideirco eadem media BG, innumerosque rectas AK, AL, aequales.

* 8. quinti.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura, data recta AB, BG, angulum possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor extremitas Harmonicè proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur aequales AD, AE, quantacunque: ducta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in I, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico FC.

BC, ipsis AB, BG, esse Harmonicè proportionalem: Hoc est, esse AB, primam ad BG, secundam, vt AG, excessus inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ quales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perendicularem CF, in H, iungaturque recta LG; quam ico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I; ostendeus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AK, ad CH, c est, ita AL, ad CH. Vt autem AB, ad BC, ita at AG, ad GC. Erit igitur quoq; vt AG, ad GC, ita AL, d CH. Et quia, si recta linea est LGI, ob similitudinem iangulorum ALG, CIG, [a] est vt AL, ad AG, ita CI, d GC, erit permutando, vt AL, ad CI, ita AG, ad C. Cum ergo ostensum sit, esse vt AG, ad GC, ita L, ad CH; erit AL, ad CH, vt ad CI. [b] Æquales unt igitur CH, CI, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo ostendemus on cadere supra. Cadit ergo in H, vbi BK, perpendiculaem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis IC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proortionalem Harmonicè.

[a] 4. sexti.

[b] 9. quinti.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proortionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, d GC; sit autem AB, prima maior quàm AG, excessus nter primam AB, & mediam BG; [c] erit quoque BC, tertia maior quàm GC, excessus inter mediam BG, & minimam BC.

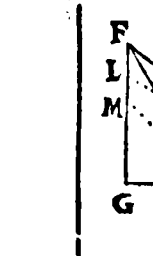
[c] 14. quinti.

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica nuenire.

SINT datæ rectæ AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis.

Ducta



Ducta per D, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales A D, A E, quam centro A, ducaturque recta B D, quæ producta secet E C, quæ ipsi in F, puncto, (quòd non conuenire BD; EC, ut esse ostendimus) ex quo ad A, producta demittatur perpendicularis F G. Dico G B, CB, BA, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, ut G B, primam ad B A, tertiam, vt G C, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad C A, excessum inter mediam C B, & tertiam BA.[a] Quoniam enim G F, ipsi AD, [illegible] ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius trigulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit G B, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, ut G B, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad A E. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC; [b] erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad A E, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad A E, ita G B, ad B A. Igitur erit quoque vt G B, prima, ad B A, tertiam, ita GC, excessus inter primam G B, & mediam BC, ad C A, excessum inter mediam BC, & tertiam B A. Quod est propositum.

[a] 28. primi.

[b] 4. sexti.

QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probatur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, sitque maxima tertia BA, tertia, quàm CA, excessus, quo media BC, superat maximam BA, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset A B, quàm AC, non posset reperiri tertia maior. Cum ea inuenta, semper demonstrauimus tertiæ A B, maiori excessu A C, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, æqualis, connectaturque recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales, utpote ad verticem A; [c] erunt & anguli ACE, AHD, æquales. Cum alterni sint; [d] erunt rectæ EC, HD, parallelæ. Quare [illegible] anguli interni DHC, HCF, duobus rectis æquales. [e] Cum ergo angulus DHC, maior sit interno angulo [illegible]; erunt duo anguli B C F, C B F, duobus rectis minores. [f] Quare

[c] 4. primi.

[d] 27. primi.

[e] 29. primi.

[f] 16. primi.

[g] 13. pron.

BD, EC, coibunt. *Quod est propositum*.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE: *quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia* BG, *reperietur. Sint enim alia aquales* A I, A K: *Ducta autem recta* BI, *qua producta secet perpendicularem* FG, *in* L, *ducatur* K C, *quam productam dico cadere in* L. *Si enim cadat infra, vt in* M; *ostendemus eodem modo, esse vt* GB, *ad* BA, *ita* GL, *ad* AI, *id est, ad* AK. *Vt autem* GB, *ad* BA, *ita erat* GC, *ad* CA. *Erit igitur, vt* GB, *id est* BA, *ita* GL, *ad* AK. *Et quia, si recta linea est* KCM, *similitudinem triangulorum* GMC, AKC, [a] *est vt* GM, *id est* GC, *ita* KA, *ad* AC: *erit permutando, vt* GM, *ad* KA, *id est* GC, *ad* CA. *Cum ergo ostensum sit, esse vt* GB, *ad* BA, *id est* GC, *ad* CA; *erit quoque* GM, *ad* AK, *vt* GL, *ad* AK. *Equales sunt igitur* GM, GL, *pars & totum, quod est absurdum. Non ergo cadet* KC, *infra* L: *eademque ratione neque supra cadet. Cadit ergo in* L, *vbi* BI, *producta perpendicularem* FC, *secat; ac proinde ex* L, *demissa perpendicularis* LG, *ad* GB, *cadet in* G, *exhibebitque eandem tertiam* GB, *maiorem, Harmonicè proportionalem*.

[a] 4. sexti.

EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel duplam maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonica diximus. Quia enim ostendimus, BA, *minimam lineam vel maiorem excessu* AC, *quo media* BC, *minimam* AB, *superat; erit* AB, *maior semisse ipsius* BC; *ac proinde* BC, *ad* AB, *media ad minimam, minorem proportionem habebit, quàm duplam. Quòd si* BC, *ad* AB, *esset dupla, vel maiore quàm dupla, esset* AB, *vel aqualis ipsi* AC, *vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate*.

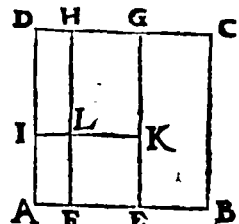
[b] 9. quinti.

SED demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, ea ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonica in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam axium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicamus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

EX

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant quam dati duo numeri, reperire.



EX *qualibet rectis AB, deſcribatur quadratum ABCD. Sumptiſque duabus partibus æqualibus BE, EF, rectæ AB, ducantur EG, FH, ipſis AD, BC, parallelæ; tum ſumpta recta AI, æqualis BE, vel EF, agatur IK, ipſi AB, DC, parallela ſecans EB in L.*

Erit *rectangulum AG, tantum ſub AB, (id eſt, ſub ſumma rectarum AE, EB, ipſi EG, ſit ipſi BC, ideoque ipſi AB, æqualis) & AE, (nempe ſcilicet parte ſummæ AB.) Rectangulum verò EC, continetur ſub AB, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiuſdem ſummæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quàm GL, ſuis partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quòd AI, ſumpta eſt ipſi EB, æqualis; & HL, LK, ipſis AE, EB, æquales.* [b] *Cum enim FH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi AB; & FI, ipſi AI, hoc eſt, ipſi EB, ſit æqualis: erit reliqua HI, reliquæ AE, æqualis:* [c] *At KL, ipſi EF, ſiue ipſi EB, æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, ſimul contineri ſub partibus eius, quod ſub partibus AE, EB, continetur. Dico reſtangulum AG; & ſummæ duorum rectangulorum AK, KH, rectangulum EC, conſtituere proportionalitatem Harmonicam: hoc eſt, vt eſt AG, primum, ad EC, tertium, ita eſſe, excеſſum inter primum AG, & ſecundum HLIAE, ad AL, excеſſum inter ſecundum HLIAEG, & tertium EC, ſiue FG,* [d] *quod ipſi EC, æquale eſt. Nam cum HL, ſit ipſi AE; & LF, ipſi EB, æqualis ſit, vt oſtendimus;* [e] *erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB,* [f] *ita eſt AG, ad EC*

34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
36. primi
7. quinti
1. ſexti.

Et vt HL, ad LF, ita est HI, ad AL. Igitur erit quoq; AG, primum ad EC, tertium, vt HI, excessus inter primum ac medium, ad AL, excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.

ITA QVE si AE, ponatur 6. & EB, 4. erit summa AB, 10. quam si ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & LC, 40. Duplum autem eius, quod fit ex AE. in EB, hoc est, HL IAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10, ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrũq; 6. 4. duxerit extremos 60. 40. erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. Est enim AG, id est, 60. ad EC, id est, ad 40. vt AE, id est, 6. ad EB, id est, ad 4.

[a] 17. septimi.
[b] 1. sexti.

HAC arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; seorsum, gignentur extremi terminni proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quẽ extremi inter se multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, vt perspicuum est: erit quoq; tã excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quàm excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. vt ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonicè

60. 48. 40.
30. 24. 20.

proportionales, vt in præcedenti problemate demonſtratum eſt: eorum quoque eorum ſemiſſes, 30. 24. 20. [a] eaſdem habent proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem exceſſus eandem proportionem habent, quam exceſſus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum exceſſus numerorũ 30. 24. 20. ſemiſſes ſint horum numerorum 60. 48. 40. exceſſus, vt dictum eſt.

[a] 15. quinti.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. *quorum inueniendus ſit medius proportionalis* Harmonicè. *Deinde ex maiore* AB, 15. *numerus* BD, *minori* BC, 10. *æqualis, &*

A ... E .. D ..... B C

reliquus numerus AD, 5. *nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem* BC, 10. *productus numerus* 50. *diuiſus per* AC, 25. *ſummam datorum numerorum, faciat Quotientem* DE, 2. *qui additus minori* BD, 10. *faciat* BE, 12. *Dico* BE, *eſſe medium proportionalem* Harmonicè *inter* AB, BC, *hoc modo*, 15. 12. 10. *Quoniam enim numerus, qui ex* AD, *in* BC, *fit, diuiſo per* AC, *Quotiens eſt* DE: *producetur idem numerus diuiſus ex* DE, *Quotiente in diuiſorem* AC, *vt conſtat ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus ſit ex* AC, *primo, in* DE, *quartum, qui ex* BC, *vel* BD, *ſecundo, in* AD, *tertium*; [b] *erit* AC, *primus ad* BC, *ſecundum, vt* AD, *tertius ad* DE, *quartum: Et diuidendo* AB, *ad* BC, *primus datus ad tertium datum, vt* AE, *exceſſus inter primũ* AB, *& medij inuentũ*, BE, *ad* DE, *exceſſum inter medium* BE, *& tertium* BD, *ſiue tertium* BC. *Sunt ergo* AB, BC, *nimirum* 15. 12. 10. Harmonicè *proportionales. Quod eſt propoſitum.*

[b] 19. ſeptimi vel 16. ſexti.

ITAQVE ſi differentia datorum numerorũ ducatur in minorem, numerus ſic productus diuidatur per datorum nume-

rum

rum summam, ac denique Quotiens minori adjiciatur, orietur medius terminus Harmonica proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica invenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12. *quibus inveniendus est minor Harmonicè proportionalis. Addatur* BD,

A ..... E .. C ... B ... D

tionalis ipsi BC, *excessui inter datos numeros. Per hanc summam* AD, 18, *colligitur ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, dividatur numerus 36. factus ex minore dato* AC, *in* BC, *differentiam datorum numerorum; & Quotiens* CE, *ex minore dato* AC, *detrahatur. Dico relinquam* AE, 10. *esse terminum tertium minorem quaesitum, hoc modo,* 15. 12. 10. *Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BC, *fit, divisio per* AD, *Quotiens est* CE; *producetur idem numerus divisus ex* CE, *Quotiente in divisorem* AD, *multiplicato, ut ex Divisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex* AD, *primo, in* CE, *quartum, qui ex*

A ..... E .. C ... B ... D

BC, secundo in AC, *tertium;* [2] *erit* AD, *primus ad* BC, *secundum, hoc est, ad* BD, *ut* AC, *tertius ad* CE, *quartum. Et dividendo,* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC, *ut* AE, *ad* CE: *Et permutando,* AB, *primus datus ad* AE, *tertium inventum, ut* BC, *excessus inter primum* AB, *& medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* AC, *& tertium* AE. *Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *id est,* 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod est propositum.*

[2] 19. *septimi vel* 16. *sexti.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collecta dividatur numerus

ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus. Quotiens ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AB, 15. & AC 12. *quibus inuestigandus sit minor in* Harmonica *Mediet. Maiori* AB, *addatur* BD, *aqualis differentiæ* BC, 3.

A ..... E .. C ... B ... D

numerorum: Et per summam AD, 18. *diuidatur numerus* 180. *ex multiplicatione datorum numerorum* AB, AC, *hoc est,* 15. 12. *inter se procreatus, sitq; Quotiens* AE, 10. *Dico* AE, *minorem extremum esse in Medietate* Harmonica. *Quoniam enim numero, qui ex* AB, *in* AC, *gignitur, æqualis est numerus qui ex* AD, *Quotiens sit* AE; *producetur idem numerus ex* AD, *in* AE, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato, vt ex 19. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex* AD, *primo in* AE, *quartum, qui ex* AB, *secundo in* AC, *tertium,* [a] *erit* AD, *primus ad* AB, *secundum, vt* AC, *tertius ad* AE, *quartum; ac proinde cum* AD, *maior sit, quàm* AB, *erit quoque* AC, *maior quàm* AE. *Quare erit & diuidendo* BD, *id est,* BC, *ad* AB, *vt* CE, *ad* AE: *Et conuertendo* AB, *ad* BC, *vt* AE, *ad* CE: *Et permutando* AB, *primus ad* AE, *tertium inuentum, vt* BC, *excessus inter primum* AB, *& medium* AC, *ad* CE, *excessum inter medium* AC, *& tertium* AE. *Sunt igitur tres numeri* AB, AC, AE, *hoc est,* 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. *Quod est propositum.*

[a] 19. *septimi vel* 16. *sexti.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicè *in Medietatis.*

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT

SINT dati duo numeri AB, *10.* & AC, *12. quibus inueniendus sit tertius in Medietate Harmonica. Ex minore*

A ..... D .. B .. C ... E

B, *detrahatur* BD, *aqualis differentia* BC, *2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum* AD, *8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero* AC, *12. in differentiam datorum numerorum* BC, *2. vel* BD. *Quotiens autem* CE, *3. maiori numero* AC, *12. adijciatur. Dico summam* AE, *15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros* AE, AC, AB, *nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex* AC, *in* BD, *fit, diuiso per* AD, *Quotiens fit* CE; *producetur idem numerus diuisus ex* CE, *Quotiente in diuisorem* AD, *multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex* AC, *primo in* BD, *quartum, qui ex* CE, *secundo in* AD, *tertium; erit* AC, *primus ad* CE, *secundum, vt* AD, *tertius ad* BD, *quartum: Et componendo* AE, *ad* CE, *vt* AB, *ad* BD, *hoc est, ad* BC: *Et permutando* AE, *primus ad* AB, *tertium, vt* CE, *excessus inter primum* AE, & *medium* AC, *ad excessum* BC, *inter medium* AC, & *tertium* AB. *Sunt ergo tres numeri* AE, AC, AB, *nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.* *19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensque maiori numero adijciatur, cõstabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonica.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, *10.* & AC, *12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore* AB, *dematur* BD, *aqualis excessui* BC, *datorum numerorum: Et per reliquum numerum* AD, *8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum* AB, *10.* & AC, *12. procreatus, Quotiensque sit* AE, *15. Dico* AE, *esse terminum maiorem in proportionalitate Har-*

A ..... D .. B .. C ... E

monica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, in AC, diuiso per AD, Quotiens est AE; producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, ex defin. Diuisionis. Quia igitur idē numerus gignitur ex AB, primum AC, quartum, qui ex AD, secundo in AE, tertium; [a] erit primus ad AD, secundum, vt AE, tertius ad AC, quartus: proinde cum AB, maior sit quàm AD, erit & AE, maior quàm AC. Et cū sit, vt AE, ad AC, ita AB, ad AD; erit per conuersionē rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC. Et permutādo AE, primus numerus ad AB, tertium, vt CE, excessus inter primum AE, & medium AC, ad BC, excessum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15. AC, 12. AB, 10. Harmonicè proportionales sunt. Quod est propositum.

a 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum totum numerus ex multiplicatione datorum numerorum interceptus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Mediatatis Harmonica.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionū ex aequalitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inaequalitatis proportione qualibet aequalitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, Arithmeticam, & Harmonicam, oriri docuimus. Sit ergo ex proportionalitate Geometrica tam aequalium terminorum, quàm inaequalium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inaequalium terminorum.

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus siue æqualibus, siue inaequalibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa constata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

SINT

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A,B,C: ſitque D, ſumma ex A, ſemel, & B, bis, & C, ſemel collecta: At E, ſumma ex B, & C, ſemel conflata, ac denique

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.	D, 27.	E, 9.	F, 3.

F, ipſi C, æqualis. Dico D, E, F, Geometricè quoque proportionales eſſe. Cum enim ſit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, ſimul ad B, vt BC, ſimul ad C.[a] Igitur omnes antecedentes ſimul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc eſt, B, C, ad vnam conſequentem C. Eſt autem D, æqualis ipſis A, B, & B, C: Et E, ipſis B, C: ac denique F, ipſi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè ſunt proportionales. Quod eſt propoſitum. [a] 12. quinti.

HINC manifeſtum eſt, ſi termini A, B, C, ſint æquales; D, E, F, eſſe duplos. Nam B, C, ſimul dupli erunt ipſius C; ac propterea & E, ipſius F: quòd E, ipſis BC; & F, ipſi C, ſit æqualis. Cum ergo D, E, F, ſint continuè proportionales, ipſi erunt in dupla proportione. Quod ſi termini æquales A, B, C, ſint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, æqualis eſt ipſi C, hoc eſt, vnitati.

A.	B.	C.
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

SI verò A, B, C, ſint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam ſi B, ipſius C, duplus eſt; erit ſumma ex B, C, collecta, id eſt, E, ipſius C, hoc eſt, ipſius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & ſic in infinitum.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

AT ſi termini A, B, C, ſint dupli inverſo ordine, erunt D, E, F, geniti, ſeſquialteri. Nam ut B, ſic ſemiſſis ipſius C; erit ſumma ex B, C, collecta, hoc eſt, E, ipſius C, ſiue ipſius F, ſeſquitertia. Eodem modo, ſi A, B, C, ſint converſa ordine tripli, erunt procreati D, E, F, ſeſquitertij. Nam B,

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.

A. B. C. erit ipſius *C*, tertia pars. Igitur ſumma ex *B, C.*
1. 3. 9. conflata, id eſt, *E*, continebit *C*, ſiue *F*, ſemel, & inſuper eius partem tertiam: ac proptere
D. E. F. *D, E, F*, habebunt continuam proportionem ſe-
16. 12. 9. quitertiam. Pari ratione ex quadruplis nascentur ſeſquiquarti, & ex inuicem quintuplis ſeſquiquinti, atque ita in infinitum. Non alienum abstrahimus, aliarum proportionum generationes ex alijs portionibus rectè eſſe præſcriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inaqualitatis ad aqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retineamus quodammodo operationem, qua inaqualitatis proportionem ex aqualitate gigni tradidimus.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis inæqualibus, ſiuè inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata: ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C, ſit D, ſumma collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, ſemel: ac E,

A, 1. *B*, 1. *C*, 1. *A*, 12. *B*, 6. *C*, 3.
D, 5. *E*, 3. *F*, 1. *D*, 39. *E*, 21. *F*, 3.

ſumma conflata ex A, B, C, ſemel: ac deniq; F, ipſi C, æqualis. Dico D, E, F, eſſe Arithmeticè proportionales. Quoniam enim ſumma ex A, bis, & B, bis, & C, ſemel, hoc eſt, terminus D, ſuperat ſummam ex A, B, C, ſemel, hoc eſt, terminum E, aggregato ex A, B, ſemel collecto: Item ſumma ex A, B, C, hoc eſt, terminus E, ſuperat terminum C, ſiue F, eodem aggregato ex A, B, ſemel collecto; erit idem exceſſus inter D, & E,

qui

qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum. A. E. C. 3. 20. 1.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est. D. E. F. 47. 24. 1.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conlata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacernata, Harmonicè proportionales sunt.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam.

A, 1.	*B*, 1.	*C*, 1.	*A*, 12.	*B*, 6.	*C*, 3.
D, 6.	*E*, 3.	*F*, 2.	*D*, 45.	*E*, 15.	*F*, 9.

Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C. [a] *Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum termi-*

[a] 12. quinti.

terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt unitates; vt ex allatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt unitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquidò constat ex his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis

A, 9. B, 6. C, 4. | A, 1. B, 4. C, 16. | A, 9. B, 12. C, 16.
D, 40. E, 16. F, 10. | D, 30. E, 24. F, 20. | D, 72. E, 48. F, 32.

sesquialterę, & in secundo ex minimis terminis subquadruplę proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertię proportionis, gignuntur tres in proportione non Harmonica non minimi. Quod si termini intercantur, non demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonicę procreabuntur, vt hac exempla demonstrant.

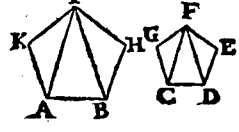
A, 4. B, 6. C, 9. | A, 16. B, 4. C, 1. | A, 16. B, 12. C, 9.
D, 35. E, 21. F, 15. | D, 45. E, 9. F, 5. | D, 77. E, 33. F, 11.

19. PROBL. 6. PROPOS. 18.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad reliquos angulos oppositos, rectæ lineæ, quæ rectilineum resolvant in

in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cũ æquales sint duobus angulis FCD, FDC, qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus DIH:



[c] Et quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; sunt quoq; duo anguli HBI, IBA, duobus rectis minores; proinde rectæ BH, IH, coeant. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo CGI, angulus IAK: Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis; erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoq; AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse. similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo CGI; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt cõstat ex constructione; cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius æquales sint. Quare æquiangulum erit rectilineũ BHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero [e] ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF; & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE; erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, [g] quemadmodum & latera circa æquales angulos A, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI,

[a] 17. primi.
[b] 32. primi.
[c] 17. primi.
[d] 17. primi.
[e] 4. sexti.
[f] 22. quinti.
[g] 4. sexti.

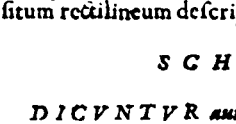
BHI, DEF. [a] Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD; & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC; & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. [b] Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG; & ideo latera quoque circa angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. Data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque situm rectilineum describimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. sexti.

[b] 22. quinti.

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli eandem constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam rectorum angulorum quàm latera proportionalia semper ordine consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli B, C, aequales fuerint angulis E, F, & sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At super rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quamquam similia sint.) cum anguli B, C, non sint aequales angulis D, E.



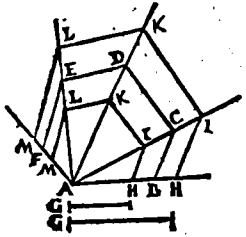


Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At vero rectangula ACrIG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.

CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super rectas AB, & CD, descriptis. Item omnes aequilateræ figuræ, & aequiangulæ, sunt quoque posita similiter super aequalium rectarum latera.

FORTASIS autem expeditius Problema proponemus cum

conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, & omnes alios angulos recta IC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur



BH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, ulterius producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per H, ducatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF; Factumque erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, per rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterque posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB, constitutæ. Cum enim angulus HAM, sit communis; & anguli ABC, AFE, æquales sint anguli AHI, AML; Item anguli ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemmodo angulis CDE, DEF, æquales sint anguli IKL, KLM: Æquiangula erũt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK. AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, [b] vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, vt BC, ad CA, ita HI, ad IA; Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: Ac proinde, ex æquo, vt BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea, quæ proxime hoc scholio scripsimus.

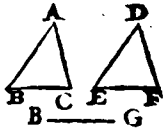
[a] 29. primi.

[b] 4. sexti.

THEOR. 13. PROPOS. 19. 17.

SIMILIA triangula inter se sunt in uplicata ratione laterum homologorũ.

SINT

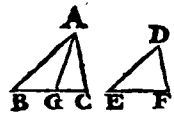


SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationē habere eiusdē rationis eius, quā habent latera homologa BC, & EF; vel AB, & DE, vel AC, & DF: Hoc est, quod si tribus lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG; ita esse triangulū ABC, ad triangulū DEF, vt recta BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defi. 10 lib 5 proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF; proportionem trianguli ad triangulum eandem quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas, habere proportionem duorū laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione eorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continuè proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, [a] quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: Proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magni-

[a] 26. primi.

agnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem qualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus E F. Quod erat propositum.

SIT deinde BC, latus latere EF, ius; & ex BC, [a] abscindatur rectis C, EF, tertia proportionalis BG, caturque recta AG. Quia igitur est AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem BC, ad, ita est per constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, DE, [b] ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, EF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, [c] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, [d] ita erit triangulum BCG, ad triangulum ABG: Vt autem triangulum BC, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis, [e] ita est basis BC, ad basin BG. Igitur vt triangulum ABC, ad angulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint cõtinuè proportionales, proportio primæ BC, ad tertiã BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secũdam. Igitur & triangulũ ABC, ad angulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 11. sexti.

[b] 11. quinti.

[c] 15. sexti.

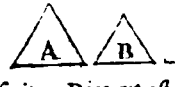
[d] 7. quinti.

[e] 1. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse angulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT



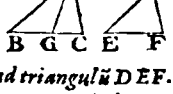
SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. [a] Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

a 19. sexti.

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum secundum ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B. [b] Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

b 19. sexti.

SCHOLIVM.



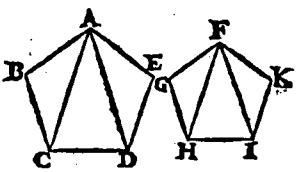
ITAQVE si proportio laterum BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. cōstituatur ex minimis numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionē, cuius denominator est $1\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa habere: Habent autem & triangula proportionem eandem homologorum duplicatam, vt hoc theorema ostendit; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem

triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, numerum $1\frac{1}{1}$. in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{9}{1}$. id est, $1\frac{11}{2}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.

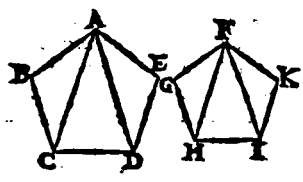
SIC etiam, figura homologa haberent proportionem, quæ 9. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ centupla duplicata est.

THEOR. 14. PROPOS. 20. 18.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia [a] 6. sexti.



angulos B A C, G F H æquales; Item angulos A C B, F H G, lateribus homologis oppoſitos: [a] Ideoque latera ſubtendunt circa æquales angulos proportionalia; ac propterea inter ſe ſimilia erunt: Eadé ratione erunt ſimilia triangula A E D, F K I, habentia angulos E A D, K F I, & angulos A D E, F I K, æquales. Deinde [b] quia eſt vt A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, F G H; vt autem C B, ad C D, ita eſt, ex hypotheſi, H G, ad H I, ob ſimilitudinem polygonorum: [c] erit ex æquo vt A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; [d] erit reſtans & ablatus A C B, oſtenſus æqualis ablato F H G; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. [e] Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoq; ſimilia. Eadem ratio eſt de alijs omnibus triangulis, ſi plura fuerint.

[a] 4. ſexti.

[b] 4. ſexti.

[c] 22. quinti.

[d] 6. ſexti.

DICO præterea, triangula hæc eſſe homologa totis polygonis, hoc eſt, ita eſſe quodlibet triangulum in vno polygono ad ſuum reſpondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula A B C, F G H; [f] erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H. Atque eodem argumento proportio triangulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I, cum vtraque hæc proportio triangulorum ſit duplicata eiuſdem proportionis lateris A C, ad latus F H. Neque diſſimili ratione concludetur quoque eſſe triangulum A D E, ad triangulum F I K, vt A C D, ad F H I: Atque ita deinceps, ſi plura fuerint triágula. Sunt igitur proportionalia triágula cuiuſq; polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius ſint antecedentia, & triangula alterius cõſequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum conſequens, [g] ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia.

[e] 9. ſexti.

[f] 20. quinti.

[g] 12. quinti.

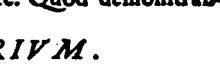
quentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

DICO postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa: hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiã inuentã: ac proinde, cum proportio AB, ad illã tertiã, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG; dicã quoq; proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, habeat [a] proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG. hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiã inuentã; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quã habet AB, ad illã tertiã inuentam. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 19. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.



HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quã postea fuis corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, similia esse. Quoniã anguli ACB, FHG, aquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui aquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: aquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademque ratione aquales ostendentur anguli ACE, FIH: ac propterea, [a] & reliqui CAD, HFI, aquales erunt. Igitur cum aquiangula sint triangula ACD, FHI, [b] habebunt latera circa angulos aquales proportionalia, ac proinde similia erunt.

[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.

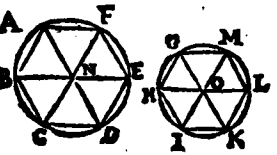
AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex aquationi propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quoniam ostensum est probari anguli aquales, praeter vnum, qui videlicet praecedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest aquale angulo FIH; quòd tunc alia adhuc triangula superessent ostendenda ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc idem dicemus, si quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex aqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; idcirco cum anguli ACD, FHI, sint aquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hac enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; nam omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob similitudinem polygonorum; erit ex aquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, aqualis positus est HIK: Est autem & ablatus ADC, ostensus ablato FIH, aqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, aqualis. Quare triangula ADE, FIK, similia erunt. Atque itaremus, si fuerint plura triangula.

[c] 6. sexti.

QVOD si polygona similia, fuerint aquilatera, & aqui-

angula,

angula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero aqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, aquilatera, & aquiangula ABCDEF, GHIKLM, qua circumscribantur a circulis circa centra N; O, ex quibus recta ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis. Quoniam enim anguli CND, IOK, aquales sunt; (quòd aque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N, & O, quatuor rectis aquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine aquales. Cum enim anguli in centro N, insistant aqualibus arcubus,[a] ipsi inter se aquales erũt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vtrobique sit proportio aqualitatis;[b] Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum aque multiplicia, vt patet;[c] habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem.



[a] 27. tertij.
[b] 6. sexti.
[c] 15. quinti.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theoremа illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; qua cum inter se proportionem



tionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est dupla proportionis, vt hic patet. 1. 2. 4.

SIT deinde quadratum A quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, qua ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, vt dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis dupla, vt in exemplo adducto superius apparet.

ITA QVE si proportio lateris AB, ad latus FG, non sit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonstratum est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, vt polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{25}{16}$. id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, qua duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cum hæ sint etiam duplicatæ eiusdem proportionis laterum homologorum.

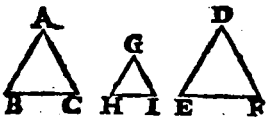
SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cum hac illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel cum quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decupla duplicata dicitur.

THEOR.

THEOR. 15. PROPOS. 21.

20.

QVAE eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.



SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Cum enim propter ſimilitudinẽ, anguli rectilinei ABC, æquales ſint angulis rectilinei GHI; item eadem de cauſa anguli rectilinei DEF, æquales anguli eiuſdem rectilinei GHI; [a] erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rurſus cum ob eandem ſimilitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia ſint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales ſunt angulos: Item eandem ob cauſam, latera rectilinei DEF. proportionalia lateribꝰ eiuſdem rectilinei GHI; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, ſimilia exiſtent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.

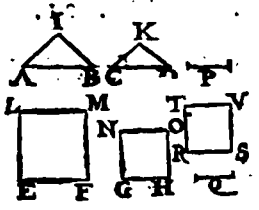
[a] 1. prop.

[b] 11. quinti.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

21.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi a rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidē AB ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterq; descripta, EFML, GHON. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quæ ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. [b] eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint trium gula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. [c] Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

[a] 11. sexti.
[b] 12. quinti.
[c] 11. quinti.

DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, & quoque proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; positum; [e] & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. [f] Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO, [g] Atque idcirco æquales erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, cōsistent necessario, vt mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quatuorcunque igitur si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 12. sexti.
[e] 21. sexti.
[f] 11. quinti.
[g] 9. quinti.
[h] 7. quinti.
[i] 11. quinti.

LEMMA

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, quadrata sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV; Tonatur autem GH, maior quam RS; erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. Quod est propositum. *14. quinti.

ALITER.



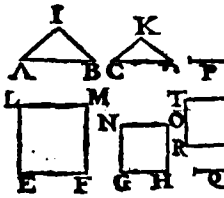
Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non fuerint æqualia, sit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G; Est autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; at propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior sit, quam G; erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta, quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus

minus ostenderetur rectilineo DEF: quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

SCHOLIVM.



EODEM modo, si sint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, immo eidem, manifestum est, quod proponitur.



BREVIVS vno hoc propositio demonstrabitur, in modo. Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Cum enim sit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH; erunt proportiones ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB, ad CD; & EF, ad GH. Quod est primum.

[a] 19. vel 20. sexti.

PONATVR deinde esse, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. [b] Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportionum duplicatæ ABI, ad CDK; & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod est secundum.

[b] 19. vel 20. sexti.

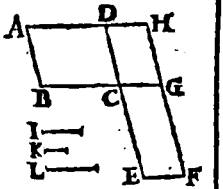
THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 23.

24.

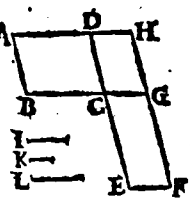
AEQVIANGVLA parallelogrâ-ma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æqui-gula AC, CF, habentia angulos CD, ECG, æquales. Dico pro-rtionem eorum eſſe compoſitã duabus proportionibus, quas bent duo latera vnius circa an-lum æqualem, ad duo latera al-ius circa angulum æqualem, ita antecedẽtia proportionum ſint



vno parallelogrammo, & conſequentia in altero; hoc proportionem AC, parallelogrammi ad parallelo-ammum CF, compoſitam eſſe ex proportionibus re-e BC, ad CG, rectã, & rectæ DC, ad rectam CE: l etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, rectæ DC, ad rectam C G. Id eſt, ſi ſumantur tres li-æ I, K, L, ita vt I, ad K, ſit, ſicut BC, latus ad latus CG; K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita eſſe parallelo-mmum AC, ad parallelogrammum CF, vt eſt recta d rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. pro-rtio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi C, ad parallelogrammum CF, dici compoſitam eſſe ex dem proportionibus, hoc eſt, ex proportionibus BC, CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelo-mma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant m lineam rectam: Quo poſito, cum anguli BCD, G, ſint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producã deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaq; vt imus, recta I, quacunq;, a inueniatur tribus BC, CG, , quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta

a 12 ſexti.



quarta proportionalis L. Quoniam igitur eſt, a vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita poſita eſt I, ad K; b erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento oſtendes eſſe vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, c ita eſt HC, ad CF. Conuergo poſita ſit K, ad L, vt DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L. d Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammũ CF. Eademq; ratione oſtendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.

a 1. ſexti.
b 11. quinti.
c 1. ſexti.
d 22. quinti.

SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; e Cum ſit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG: & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE, Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad GH, & CH, ad CF; componetur quoque eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BG, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermixtæ ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.

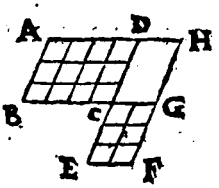
e 1. ſexti.

HANC porrò propoſ. demonſtrat etiam Euclides numeris lib. 8. propoſ. 5.

ITAQVE ſi proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ ſint in numeris, veniemus quoque ex hac propoſ. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE,

E, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. vt 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterũ, erit vt 77. ad 55. parallelogrammum AC, ad parallelogrammũ CF, quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{2}{5}$. Continuabuntur autem duæ dictæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certè hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inueniturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quòd si tertius vocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{1}{7}$. & alij duo numeri denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus. 23. sexti.

SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 2. 2. 3. vel in hisce minimis 2. 1. 3. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammum proportio dupla. Id quod



hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem habeat duplam, at DC, ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF, solum 6. quæ adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione composita, & minorem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CE, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominator

minator sit 1 $\frac{22}{51}$. In posteriori vero exemplo proportio lineæ BC, ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis ipse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione; quod ijdem interpretes ajunt. In exemplo namque prioris proportio lateris DC, ad CL, est minoris inæqualitatis, in posteriori vero, æqualitatis. Latius de re plura scribemus in propos. 5. lib. 8.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.



SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF. Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquangula; [a] atque adeo eorum proportio ex lateribus componitur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis, [b] quorum sunt dimidia, [c] eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF.

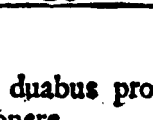
a 23. sexti.
b 34. primi.
c 15. quinti.

PRO-

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligi-
r ex demonſtratione huius propoſ. 23.
nt enim tres proportiones A, ad B; C,
l D; & E, ad F, in lineis exhibitæ.
portet iam ex ipſis unam proportionem
mponere. Fiat vt A, ad B, ita G, ad
; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E,
l F, ita I, ad K. Dico proportionem G,
l K, compoſitam eſſe ex tribus datis



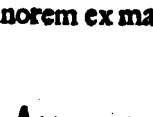
a 12. ſexti.

portionibus. Cum enim ea compoſita ſit ex proportionibus ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. compoſita am erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; ùd bis illa ſumptâ ſint æquales.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maore auferre.

SIT proportio A, ad B, minor aufeda ex proportione maiore C, ad D.
ins, vt A, ad B, ita C, ad E; ſtatuatur- E, terminus medius inter C, & D.
hico ablatam eſſe proportionem A, ad B,
proportione C, ad D, reliquamque eſſe
oportionem E, ad D. Cum enim propor-
C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad
Si propor C, ad E, hoc eſt A, ad B, auferatur, relinque-
proportio E, ad D.



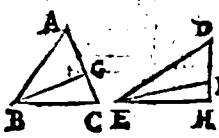
b 12. ſexti.

VERVM hæc compoſitio, & detractio proportionum non additio, & ſubtractio proprie, quia alias tum totum eſſet uale parti, & minus, & maior proportio poſſet detrahi ex nore, vt ad propoſ. 5. lib. 8. oſtendemus.

TRIAN-

IIII.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ latéribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.



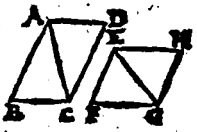
SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Ducantur enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH; erunt rectangula ABG, DEH, aquiangula, vt constat ex coroll. 1. prop. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, sint æquales. [a] *Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED:* [b] *Vt autem GB, ad BA, ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GA, BA, erit eorum eadem altitudo AC) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF.* [c] *Rectangulum igitur sub BG, AC, rectangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF,* [d] *ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF,* [e] *quòd hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eadem cum illis bases AC, DF, altitudinesque easdem, scilicet EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.*

[a] 4 sexti.
[b] 1. sexti.
[c] 11. quinti.
[d] 15. quinti.

PARA-

V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.



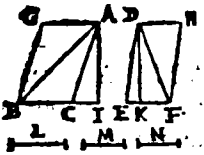
SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, ut parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. [a] *Cum ergo parallelogramma BD, FH, eadem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG;* [b] *quòd hæc ipsorum sint dimidia;* [c] *erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.*

[a] 15. quinti.
[b] 34. primi.
[c] 11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habẽt compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma G, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint iam primum altitudines æquales, bases vero vel æquales iam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M;

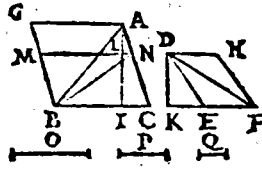


[a] 7. quinti.

[b] 1. sexti.

[c] 11. quinti.

Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N: Quo facto erit M, ipsi N, aequalis, quòd & AI, ipsi DK, aequales ponantur; [a] Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt BC, ad EF. [b] At vero, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. [c] Igitur quoque vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEI, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed portio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.



SINT iam duo parallelogramma AI, DK, quorum basis AI, maior; bases verò BC, EF, vel aequales, vel etiam inaequales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, aequali ipsi DK; ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, & iungatur recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad triangulum NBC, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, aqualem, hoc est, vt O, ad P, per 1. huius propos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quod triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Erit triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, ita est, basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q. vt ex aequo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK, & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF.

[d] 1. sexti.

[e] 22. quinti.

EF: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod est propositum.

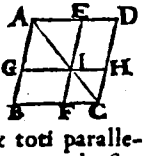
EODEM pacto ostendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor est, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, composita esse ex proportione basis EF, ad basin BC, & proportione altitudinis K, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; [a] erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, ad BC, hoc est, vt Q, ad P. Item triangulum NBC; ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, vt LI, seu DK, ad AI, hoc est, vt P, ad O; ex ijs, quæ ad propos. 1. huius lib. ex Commandino demonstrauimus. [b] Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin BC; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eisdem propoetionibus. Quod est propositum.

[a] 1. sexti.

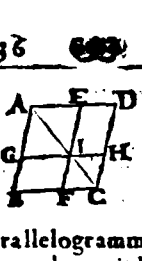
[b] 22. quinti.

PROBL. 18. PROPOS. 24. 22.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.



EST O parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui



[a] 29. primi.

angulus B A D; [a] & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus A G I, externus interno ABC; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est E G, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC; & triangulum A E I, triangulo ADC, vt perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. relictam ex coroll propos 4. huius lib. [b] erit vt A B, ad BC, ita AG, ad GI; atque ita latera circa æquales angulos B, & G proportionalia sunt, Rursus [c] erit vt BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad I E; ac proinde & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, ipsi parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; [e] atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

[b] 4. sexti.

[c] 4. sexti.

[d] 22. quinti.

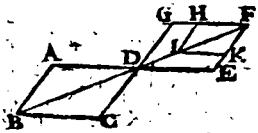
[e] 21. sexti.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo commune, vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi producta consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo eius latera recta duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa huc sint parallela, ijsdem ipsa metiri ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad F, circa quam consistit parallelogram-

lelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas esse statuimus cum AD, DC, lateribus parallelogrami AC. Dico parallelogrammum GE,



mile esse parallelogrammo AC. Quod enim anguli inter se æquiangula, facile ostendetur. Nam quia angulus A, qualis est angulis alterno ADG; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare bis oppositi C, & E, æquales quoque erunt. Rursus quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt æquales, erunt is quoque oppositi ABC, GFE, æquales. Igitur æquiangula unt GE, AC, parallelogramma. Quòd autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet rspicuum. Cum triangulum BAD, æquiangulum sit triangulo DGF; & triangulum BCD, triangulo DEF, vt constat : propos. 29. lib. 1. Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad GF. ur sus vt AD, ad DB, ita GF, ad FD; & vt DB, ad DC, a FD, ad FE, ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis æquales ent. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma AC, GE.

a 29. primi.

b 34. primi.

c 15. primi.

d 34. primi.

e 4. sexti.

f 22. quinti.

QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD, GD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & erit HK, simile ipsi GE, vt Euclides demonstravit: Atqui idem GE, simile est quoque AC, vt nunc ostendimus. Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum.

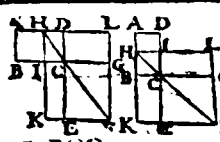
g 24. sexti.

h 21. sexti.

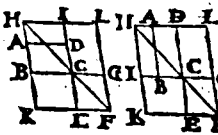
SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum lteri simile resecare.

DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint

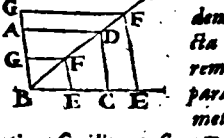


ABCD, CEFG, & ex ABCD, abſcindendum ſit parallelogrammum ipſi CEFG, ſimile. Conueniantur ambo ad angulum communem BCD, ECG, ita vt ſint in eadem recta BCG, & propterea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtratum eſt, ECD, quoque vna recta linea. Deinde ſecetur diameter FC, producatur, donec in H, ſecet vel latus AD. vel latus AB; (Neque enim in punctum A, cadet: quia AC eſſet ſimile ipſi CF, vt demonſtratum eſt, quod eſt contra theſin) & per H, ducatur HI, parallela ipſi AB, vel ipſi AD. Dico parallelogrammum abſciſſum HC, ſimile eſſe ipſi CF. Si enim totum parallelogrammum KL, conuertatur, erunt HC, CF, circa diametrum, Quare inter ſe ſimilia erunt, vt Euclides demonſtrauit in hac propoſitione.



EADEM autem arte fere alterutrum operum aperiri poterit, vt ſint ſimilia tota. Sit enim angendum ABCD, ipſi CEFG, ſimile. Conuertantur vti prius, & diameter FC, producatur, donec in H, ſecet vel latus BA, protractum, vel latus DA, protractum. Neq; enim in punctum A, cadet: quia AC eſſet ipſi CF, ſimile, vt demonſtratum eſt, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipſi AD, vel ipſi AB, donec ſecet vel latus CD, protractũ, vel CB, protractũ in I. Dico parallelogrammũ auctum HC, ſimile eſſe parallelogrammo CF. Nam ſi cõpleatur totum parallelogrammũ KL, conſiſtent HC, CF, circa diametrũ; Quare ſimilia inter ſe erũt.

* 24. ſexti.



PERSPICVVM autem eſt in demonſtratione huius theorematis ſacta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis propoſiti in hoc ſcholio, parallelogramma circa eandem diametrum non ſolum eſſe ſimilia, verum etiam ſimiliter poſita. Vnde propoſito quouis parallelogrammo ABCD, ſi maius debeat deſcribi illi ſimile ſimiliterque poſitum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipſi CD, parallela EF, ducenda, ſecetur

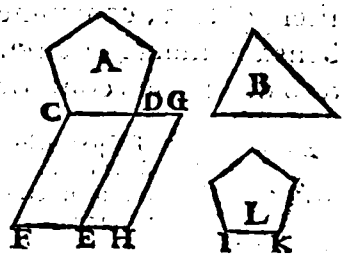
secans diametrum BD, producatur in F, & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, producta in G. Erit enim parallelogrammum GE, simile similiterque positum ipsi AC, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.

PROBL. 7. PROPOS. 25.

25.

DATO rectilineo simile, similiterq; positum; & alteri dato æquale idem constituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; ipsique constituendū aliud rectilineū, qđ illi quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, [b] cōstituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis est angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B; vtriq; tam CDG, quàm FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. [c] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; [d] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim tres proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterq; descriptum: [e] Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammū CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis.



[a] 24. sexti.

[b] 44. vel 45. primi.

[c] 13. sexti.

[d] 18. sexti.

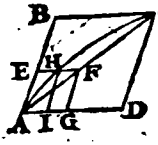
[e] 1. sexti.

[a] Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. [b] Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quòd parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. [c] Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; [d] propterea quæ æqualia erunt rectilineis B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale constituimus. Quod erat faciendum.

[a] 11. quinti.
[b] 7. quinti.
[c] 11. quinti
[d] 9. quinti.

23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

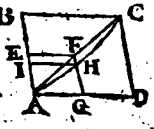


EX parallelogrammo BD, ablatum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterq; positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AH, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrũ AFC, totius parallelogrammi. Quòd si AF, CF, non ducantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H. puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogrammũ BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHG; [e] ipsa erunt similia, similiterque posita. [f] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG; quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. [g] Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG. [h] Ac propterea æquales erunt

[e] 24. sexti.
[f] 1. definit. sexti.
[g] 11. quinti.
[h] 9. quinti.

erunt rectæ A I, A G; pars, & totum: quod est absurdum.

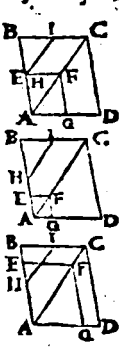
QVOD si dicatur recta A HC, secare alterum latus F G; Tunc ducta H I, parallela ipsi E F; [a] erunt rursus similia parallelogramma B D, I G, similiterq; posita. [b] Quare erit vt D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed vt D A, ad A B, ita quoque est G A, ad A E, ob similitudinem parallelogrammorum B D, E G. [c] Igitur erit vt G A, ad A I, ita G A, ad A E; ideoque æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum: [d] Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ A F, F C, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter A C, transit per punctum F; & ducta diameter A F, cadit in punctum C. Itaq; si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 24. sexti.
[b] 1. definit. sexti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.

SCHOLIVM.

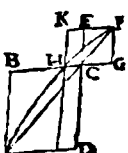
ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiuè, hoc modo. Diuisis lateribus A B, B C, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autem tota A B, ad totam B C; [e] ita est dimidia H B, ad dimidiam B I; [f] Erit vt H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cum habeant circa angulos B, E, (g qui æquales sunt, internus, & externus.) latera proportionalia, [h] erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos B H I, E A F, externum, & internum inter rectas H I, A F: Quare parallelæ erunt rectæ H I, A F. Quoniam vero rectæ, qua ex puncto A, ad punctum C, ducitur concipitur, [k] parallela quoque est recta H I; propterea quod latera A B, B C, trianguli tunc constituti A B C, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta A C, eadem fiat, quæ A F, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum vna linea



[e] 15. quinti.
[f] 11. quinti.
[g] 29. primi.
[h] 6. sexti.
[i] 28. primi.
[k] 2. sexti.

nea parallela rectæ H I, possit duci, vt manifestum est. Consistunt ergo B D, E G, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum A F C. Quod erat propositum.

QVOD si duo parallelogramma similia similiter posita non habeant angulum communem, sed vnum extra alind, hæc tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere mediis, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungantur, vt lineæ B C, C G, in directum ceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. manifestum, lineæ D C, C E, vnam quoque lineam rectam componant.



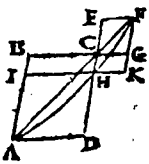
Dico parallelogramma B D, E G, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametros A C, cum diametro F C, vnam rectam lineam conficere. Si enim A C, F C, non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad lineam rectam secans B C, in H, punctum, per quod agatur H I, parallela ipsi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, producta consistunt, efficiuntque duo rectæ B H, H I, cum duobus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterque posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit vt H B, ad B A, ita F K, ad K E. [a] Habet autem C B, maior ad B A, maiorem proportionem, quam H B, minor ad eandem B A; & est vt C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & F E, ad E C, id est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quare si F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H; [b] erit E F, maior quam F K; pars quàm totum: Quod est absurdum.

[a] 8. quinti.

[b] 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B G, parallela H I, quæ occurrat re-

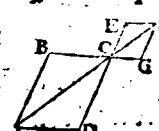
ta FG, protracta in K, erunt rursus similia similiterq; posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendemus. Quare erit vt HD, ad DA, ita FK, ad KH. Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et est vt CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogrammum BD, EG, simili similiterq; posita sunt conclusa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam FK, ad KH; b ideoque FG, maior erit, quam K, pars quam totum: Quod est absurdum.



a 8. quinti.

b 1. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli B, E, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; c atq; idcirco æquiangula erunt, habebuntq; angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, æquales: d Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales; e Ac propterea AC, FC, vnam component rectam lineam. Quod est propositum.



c 6. sexti.

d 29. primi.

e 14. primi.

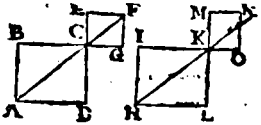
RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a tota ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum consistens, f erit EG, simile similiterque positum. At vero in rectangulo IL, quod sit æquilaterum & æquiangulum ipsi BD, sumatur HM, æqualis ipsi EF, & IN, æqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum MO, quale & simile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, quæ sunt recti; & ob id simile rectangulo IL;



f 24. sexti.

lo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistit circa eandem cum toto I L, diametrum.

IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angulo



eorum ita inter se coniuncti, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus EG, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At vero MO, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum possit sit aequale ipsi EG. Nam KM, aequalis est ipsi EI, & MN, ipsi F C, &c.

26. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrāmis similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur; maximū id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C. super eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum C D, E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundum A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens



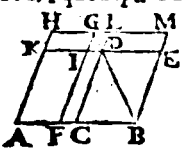
exiſtens ſimile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensque parallelogrammo C E, maximum eſſe omnium, quæ ſecundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis ipſi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ ſint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum F K, ſecundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, [a] quod ipſi C E, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem cum C E, diametrum. [b] Quoniam vero complementa C G, G E, æqualia ſunt; ſi addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E. [c] Eſt autem C I, æquale ipſi C F, propter baſes æquales AC, CB. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoque communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius ſit gnomone LM, (continet enim C E, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc D G,) erit quoque A D, [d] æquale exiſtens ipſi C E, propter baſes æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo oſtendetur A D, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, cadat inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupant maiorem lineam ſemiſſe A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus ſimiles ſint ipſi C E.

ALITER demonſtrabitur A D, maius eſſe parallelogrammo A G, hoc modo. [e] Parallelogramma F D, D I, ſunt æqualia, cum baſes H D, D E, ſint æquales: Eſt autem D I, maius quam G E, hoc eſt, quam complementum C G, ([f] quod ipſi G E, æquale eſt,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atque idcirco addito communi C F; maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

QVOD ſi punctum G, ſumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta H M, quæ ſit parallela ipſi A B, occurratq; rectis A K, B E, protractis in H, & M; Item ducta G F, parallela

[a] 24. ſexti.
[b] 43. primi.
[c] 36. primi.
[d] 36. primi.
[e] 36. primi.
[f] 43. primi.

rallela ipſi A H; erit parallelogrammum A G, applicatum ſecundum rectam A B, deficiens parallelogrammo FM, [a] quod ipſi CE, eſt ſimile ſimiliterq; poſitũ, cum ſit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc maius eſſe AD, ipſo AG. Protracta enim CD, ad L, [b] erunt æquales rectæ HL, LM, [c] ideoque æqualia parallelogramma HD, DM. [d] Cum igitur DM ſit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipſi DF. Eſt autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL; Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iiſdem argumentis concludes AD, maius eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam AB, vt punctum G, ſit vltra D, in diametro BD, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectã lineam applicatorũ, &c. Quod erat demonſtrandũ.



[a] 4 ſexti.
[b] 34. primi.
[c] 36. primi.
[d] 43. primi.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidiata AC; qualis eſt AK, in priori figura; vel minorem cuiuſmodi eſt AF, in figura poſteriori: prout punctum G, demittitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

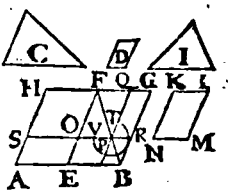
27. PROBL. 8 PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiẽs figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato.

Oportet

Oportet autem datũ rectilineũ, cui æqua
le applicandum eſt, non maius eſſe eo,
quod ad dimidiam applicatur, cũ ſimiles
fuerint defectus & eius, quod ad dimidiã
applicatur, & eiꝰ, cui ſimile deeſſe debet.

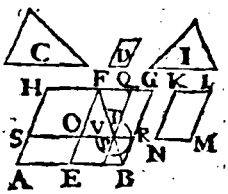
A D datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, ap
plicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens pa-
rallelogrammo, quod ſit ſimile dato alteri parallelo-
grammo D. Secta A B, bifariam in E, ſuper medietatem
E B, [a] deſcribatur parallelogrammum E F G B, ſimile [a] 18. ſexti.
ipſi D, ſimiliterque poſitum; & compleatur totum pa-
rallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale eſt
ipſi C; cum ſit applicatum ad A B, deficiens parallelo-
grammo E G, ſimili ipſi D; factum erit, quod iubetur.
Si autem A F, maius eſt quam C. (Neque enim minus
eſſe debet. Nam cum per propoſ. præcedentem, ipſum
ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defe-
ctus ſint ſimiles, non poſſet applicari vllum ad A B, quod
eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia
eſſent minora. Propterea adiun
xit Euclides; Oportet autem
datum rectilineum, &c.) erit
quoque ſibi æquale E G, maius
quam C. Sit igitur maius re-
ctilineo I. (Qua vero ratione
exceſſus duorum rectilineorum
ſit inquirendus, docuimus ad



propoſ. 45. lib. 1.) [b] & conſtituatur parallelogrammum [b] 25. ſexti.
K L M N, ſimile quidem ſimiliterq; poſitum ipſi D, ſeu
ipſi E G, æquale vero exceſſui inuẽto I; vt ſit E G, æqua-
le rectilineo C, & parallelogrammo K M, ſimul; & ob id
maius quam K M. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit vt
E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F,
F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent
æqualia, vel minora, eſſet etiam E G, æquale ipſi N L,
vel minus, vt conſtat. Quare abſciſsis rectis F O, F Q,

quæ

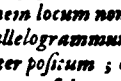
quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi L N, æquale, & eidem simile similiterq; positum, & propterea ipsi E G: atque circa eandem diametrum cum EG, consistet, quæ sit R. Productis iam rectis Q P, O P, ut parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, quod simile est ipsi E G, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. Nam cum P G, æquale sit complemento P E; si addatur commune P R, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, (quod quidem est ipsi E R, propter bases æquales E A, E R. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C, (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.



a 26. sexti.
b 24. sexti.
c 43. primi.
d 36. primi.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quadrat, si placet, consule eorum commentarios.

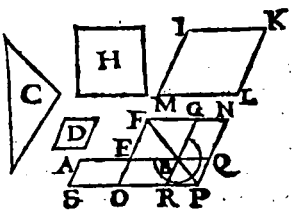


PERSPICVVM autem est rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum aquale esse rectangulo, quod sub segmentis linea per applicationem factæ continetur. Vt si ad AB, applicetur AC, deficiens quadrato

C B, erit AC, applicatum, rectangulum, contentum sub A D, & DC. Cum ergo DC, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum CB; continebitur quoque AC, sub segmentis AD, DB, per applicationem factis.

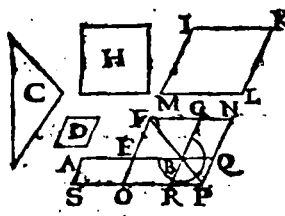
PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

A D datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



A D datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; [a] super dimidiam EB, constituatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterq; positum. [b] Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; [c] cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile vero ipsi E G, similiterque positum; erit que propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cũ parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem M K, EG, sit vt M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque M K, vel æquale ipsi E G, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cum sit æquale ipsi M K, & simile. [d] Quare O N, E G, circa eandem

[a] 18. sexti.
[b] 14. secũdi.
[c] 25. sexti.
[d] 26. sexti.



diametrum consistat, quæ sit F P. Producta iam A B, G B, ad Q, & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniant in S; erit parallelogrammum A P applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. Nam cum A O, E R, sint æqualia, & E R, æquale complemento B N; erit & A O, ipsi B N, æquale. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon E P G, æqualis est rectilineo C. Nam cum M L, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, vna cum E G; si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon P G, & rectilineum C. Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, applicatum est parallelogrammum A P, excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

a 24. sexti.
b 36. primi.
c 43. primi.

29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

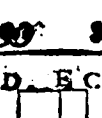
PROPOSITAM rectam finem terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIT recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato A B C D; d ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato vt sit A F, quoque quadratum, cum quadrato sobyquadratum sit simile. Secet autem recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint D F, & A C; si dematur com-

d 29. sexti.

mune

munq; AE, remanebunt æqualia GH, HC; quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos, [a] erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, vt segmentum AH, ad segmentum HB; secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.



[a] 14. sexti.

ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, fiatque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; [b] erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

[b] 17. sexti.

ALITER totum problema conficiemus. [c] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale fit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. [d] Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.



[c] 11. secundi.

[d] 17. sexti.

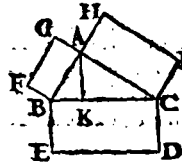
SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac mediæ ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac mediæ ratione insignes vtilitates, proprietatesque, vt in libris Stereometria manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, & admirabilem vim vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab aliis vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

31. THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ simili illi similes, & similiter positæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectum; describaturque super BC, quæcunq; figura rectilinea BCDE, cui similes similiterq; positæ super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per corollarium propos. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam, similem similiterq; positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Nō secus ostendetur, esse quoque vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH, cum sexta BG, ad BD, quartam. Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est propositum.

[a] 18. sexti.

[b] 24. quinti.

[c] 8. sexti.

ALITER. Cum triangulo ABC, simile sit triangulum KAC, sintq; homologa latera ipsorum BC, CA;

(Nam

(Nam est vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) [a] habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. [b] Habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. [c] Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum KBA, ad triangulũ ABC, ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergò rursus est, vt KAC, prima quantitas ad ABC, secũdam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; [d] erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, ita composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod est propositum.

[a] 19. sexti.
[b] 19. vel 20. sexti.
[c] 11. quinti.
[d] 24. quinti.

ALITER. Vt quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem; cum vtraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundã quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quantitatem. [f] Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD: [g] Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. quod erat ostendendum.

[e] 19. vel 20. sexti.
[f] 24. quinti.
[g] 47. primi.

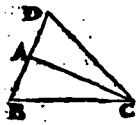
SCHOLIVM.

VIDES igitur, longe esse vniuersaliùs theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. meminimus.

Videtur tamen & theorema illud, quod ab ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, quum illud de omni triangulo, parallelogrammis inter se similibus; hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figuris, similibus, & similiter positis, propenatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc eo modo non aliter, quam 47. propositionem primi lib. nostrorum conuertimus.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus simiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum ABC, cuius quadratum super latus BC, describatur duabus figuris sibi similibus similiterque descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ sit ipsi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, [a] erit figura super CD, (quæ similis sit ei, quæ super BC, similiterque posita) descripta æqualis figuris super AD, AC, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque posita: Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super CD, æqualis erit figuris super AB, AC. Cum igitur figura super BC, eisdem figuris super AB, AC, æqualis ponatur, erunt figura super CD, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis DC, ostensa est quoque æqualis basi BC; [b] erunt anguli DAC, BAC, æquales. Quum autem DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC. Quod est propositum.

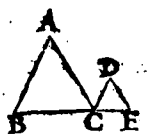
a 31. sexti.

b 8. primi.

THEOR.

THEOR. 22. PROPOS. 33. 30.

SI duo triangula, quæ duo latera duo bus lateribus proportionalia habeant, ecſidum vnum angulum compoſita fue int, ita vt homologa eorum latera ſint tiam parallela: tum reliqua illorum riangulorum latera in rectam lineam ollocata reperientur.



HABEANT triangula ABC, CE, latera AB, AC, lateribus DC, E, proportionalia, vt quidem AB, ad C, ita DC, ad DE; componanturque ad gulum ACD, ita vt latera homologa B, DC; Item AC, DE, inter ſe ſint pa allela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cononere lineam. Cum enim parallelæ ſint AB, DC, [a] erit ngulus A, alterno ACD, æqualis: Eademque ratione ngulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, D, inter ſe quoque exiſtent æquales. Quoniam igitur riangula ABC, DCE, habent latera circa æquales anulos A, & D, proportionalia; ipſa [b] erunt inter ſe equiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Addis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, uobus angulis DCE, ACD, hoc eſt, angulo ACE, æquales. Rurſus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque ideirco BC, CE, vnam rectam lineam conſtituent. Itaque ſi duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 29. primi.

[b] 6. ſexti.

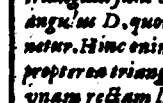
[c] 32. primi.

[d] 14. primi.

SCHOLIVM.

DEBENT autem predicta duo triangula ita ſecundū

vnum angulum esse compositum, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alterum se illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura adiecta formatis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse aequales, & propterea triangula esse aequiangula; atque adeo ex E. C E, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratum fuit.

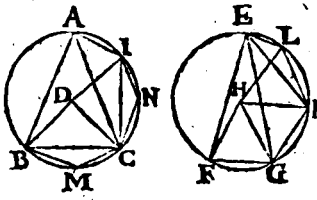


QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliqua hypothesis theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam dentur triangula ABC, DBE, habentia duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaque sint ad angulum CBD, ex vtraque parte: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituent vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis hic cum non habet.

32. THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN aequalibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vtro & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli aequales ABC, EFG, eorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC,



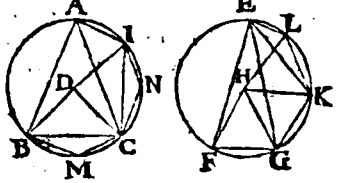
BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcũ FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG; & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehẽdunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, [a] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC; At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, [b] erunt quoque æquales arcus BC, CI; [c] ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione equales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, [d] necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est; Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [e] Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC,

[a] 1. quarti.
[b] 28. tertij.
[c] 27. tertij.
[d] 27. tertij.
[e] 6. defin. quinti.

BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

QVONIAM vero, vt angulus BDC, ad angulum FHG, [a] ita est angulus BAC, ad angulum FEG; [b] cum illi horum sint dupli; perspicuum est, [c] ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centrum constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC I, angulI BMC NI, [d] qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus BAC, CMI. Quare similiter segmenta BMC, CNI, [e] atque adeo mixta æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur [f] triangulis BDC, CDI, quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vna æqualia erunt; vel vna excedent; si ea sumantur, [g] quæ inter se respondent. [h] Quamobrem quæ proportionis est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent



[a] 15. quinti.
[b] 20. tertij.
[c] 11. quinti.
[d] 27. tertij.
[e] 24. tertij.
[f] 4. primi.
[g] 6. definit. quinti.
[h]

bent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM. I.

HINC manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, vt eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. Quare & inter ſe eadem erunt. [a] 11. quinti.

COROLLARIVM. II.

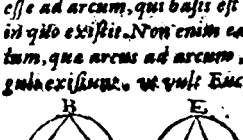
PERSPICVVM quoque eſt, vt eſt angulus ad centro ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circumferentiam. Et conuerſa, vt ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circumferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum.

NAM vt eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro, [b] ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propoſ. lib. 5. demonſtrauimus. Quod eſt primum. Quoniam igitur eſt vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur. [c] Cum ſit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum; erit quoque, per ea, quæ ad propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitum. [b] 33. ſexti. [c] 33. ſexti.

SCHO-

SCHOLIVM.

CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum, qui circumferentiæ alicui insistit, rectum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad eum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumamus arcus, in quorum gradibus existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate.



Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ABC, E circumferentiam insistunt AC, DF; maior quidem B, minor autem E. Quæ posita, vt arcus AC, maior arcus DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. proportio reliqui arcus ABC, minoris reliquo arcui DEF, proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos insistunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in definitione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

NON obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similibus, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definitus per angulos æquales insistentes segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vnius circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque pars est alius circumferentiæ similis totius suæ circumferentiæ; vtcunque positione prædictæ definitionis dicimus. Sint enim primum circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad centrum constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, segmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere

habere eãdem proportionem ad integras circulorum circumferẽtias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt: Atq; idcirco, qua pars est arcus BAC, totius circũferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.

[a] 26. tertij.

[b] 7. quinti.

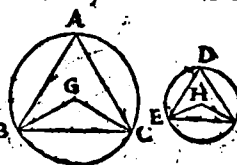


SINT deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, dicitur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis definitione, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales; [c] cum bi illorum dupli existant. Quare quatuor rectis ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam [d] ad angulum H. Atqui ut quatuor recti ad angulum G, ita est tota circumferentia ABCA, ad arcum BC: Et ut quatuor recti ad angulum H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuersionem ergo rationis erit quoq; ut tota circumferẽtia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcũ EDF. Et conuertendo ut arcus BAC, ad totã circũferẽtiã ABCA, ita arcus EDF, ad totã circumferentiã DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD. Quod est propositum.

[c] 29. tertij.

[d] 7. quinti.

[e] 11. quinti.

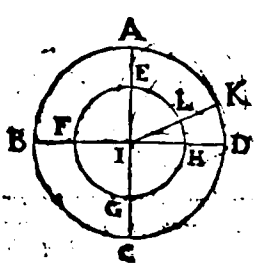


CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in Spharam, & ad propos. 22. lib. 3. sua propertionibus esse indimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



SINT duo circuli ABC, BFGH, circa idem centrum I, descripti. Sit igitur quotlibet e centro I, ducantur I B, I D, efficientes quoslibet rectos BD, quadrantes ofcirculorum BAD, FEH. Quoniam ergo fi, cum sint semicirculi, auferatur ex I, egrediatur quælibet IA, ID, constituent angulum rectum AID, peripheria quoque est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex simili propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

EMITTANTVR enim ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunque angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK ad totam circumferentiam ABCD, vt est arcus HL ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex corol. 2. huius propos. tot arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quotes angulus HL, ad totam circumferentiam EFGH; [a] erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH: ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum. [a] 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HL, insistunt in centro I, anguli æquales inter se; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

SED

SED placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad prop. 6 lib. 3. Theodosij proposuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris.



SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, descripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunque EA, EB, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntque arcus AB, CD, similes, vt proximè demonstrauimus. Et quoniam rectæ EA, EB, secta sunt in C, D, proportionaliter, quòd tam EA, EB, quàm EC, ED, inter se æquales sint; [a] erunt ductæ rectæ AB, CD, parallelæ; atque ideo triangula EAB, ECD, ex Coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. [b] Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quàm EC. Igitur & AB, maior erit quàm CD. Accommodetur ergo ipsi CD, in circulo AB, æqualis BF; erit [c] ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quàm vt similis sit ipsi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maior [d] est arcus CD, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.

[a] 2. sexti.

[b] 4. sexti.

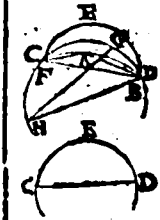
[c] 14. quinti.

HINC perficuum est, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quàm vt similis sit ei, quam ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipsi BF, auferat arcum CD, maiorem, quàm vt similis sit arcui FB; multò magis linea maior quàm CD, auferet maiorem arcum, quàm vt similis sit arcui FB; cum illa maiorem arcum abscindat, quàm CD, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HÆC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores; quales sunt BF,

BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, modo maneat esse arcum semicirculo maiorē circuli minoris, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quòd facilè contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semiculum, vt quando est diameter circuli; liquidò constat, circulum minoris circuli maiorem esse, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neque opus est alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, aequales rectas lineas ex circulis inaequalibus auferre arcus similes, & absolutè inaequales, ita vt arcus minoris circuli simplicem maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quàm vt similis sit. Sint enim rectae lineae CD, BF, aequales, auferatq; CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim rectâ CD, rectae FB, cadet necessario arcus CED, extra arcū FGB; atq; idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra se continet, sintq; ambo arcus in eadem parvum cauis, atq; eadem extrema punctа habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de Sphaera & cylindro. Neq; vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferētia circuli CED, toti circumferentiae circuli FGB, atque adeo aequales erunt circuli, quod est absurdum, cum inaequales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcū FGB, cuiusmodi est arcus CAD, quoniam vt paulò ante ostendimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm vt supponitis sit arcui FGB; sumatur arcui BFH, arcui CAD, similis, utique ideo maior arcu FGB. Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtcunque, ducantur rectae AF, AB, productaeq; rectae FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectae GH, GB. Itaque quoniam arcus CAD,



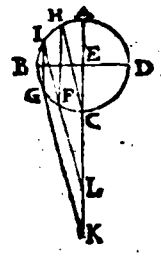
CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes æquales. [a] *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multò maior angulus CAD, angulo HGB. quod est absurdum. Ostensus enim æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo ex-; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum Quod est propositum.* [a] 16. primi.

EX quo liquidò constat, multò magis maiorem lineam circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, tem minor linea ex circulo maiore abscindit.

NEQVE verò omittenda videtur eximia quædam proetas circuli, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat, & quam 3. demonstrare debueramus, nisi memoria excidisset. Est eiusmodi.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelogrammum diuidentes vtrumque Quadrantem partes æquales, ac denique ex puncto extreo alterius diametri per extremum punctum oximæ parallelæ recta ducatur conueniens m diametro producta: Erit tota recta inter unctum concursus, & concauam peripheriam rculi, omnibus parallelis vnà cum diametro, uæ producta est, simul sumptis, æqualis.

IN circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri C, BD, & AC, producatur versus C, quantumlibet. Diuiutem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, , & Quadrante BA, in totidem, tungantur rectæ FH, GI, ex scholio propos. 27. lib. 3 ipsi AC, parallelæ erunt, cum ius æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur



recta B G, occurrens A C, productæ in K. Dico rectam A K, æqualem esse omnibus parallelis A C, H F, I G, simul sumptis. Ductis enim rectis H C, I L, & productis, donec cum A K, conueniant;

[a] *quoniam anguli C H F, H F L, sunt æqualibus C F, H I, insistêtes, æquales;* [b] *erunt rectæ H C, I L, parallelæ. Sed aut ē & F H, ipsi C L, parallela. Parallelogrammum ergo est C H F L; ergo & recta C L, rectæ F H, æqualis. Eadem ratione erit K L, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi A C, fiet tota A K, æqualis A C, H F, I G, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.*

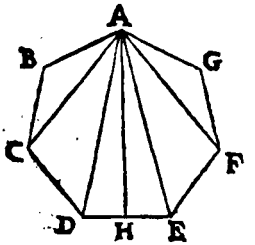
[a] 27. tertij.
[b] 27. primi.
[c] 34. primi.

H V C quoque referenda est propositio sequens, de æquilatero, & æquiangulo spectans, quæ propter ea in lib. 4. demonstrata non est, vt ad finem eius diximus. Nimirum.

IN figura æquilatera, & æquiangula, siquidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoque latus oppositum bifariam. Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum recta secat vtrumque angulum bifariam; Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaq; numerum laterum A B C D E F G, & ex angulo A, demissa recta A E, secet latus oppositum D E, bifariam. Dico angulum quoque B A G, secari esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad

mnes angulos non proximos i
rcunsam duo latera BA, BC.
duobus lateribus GA, GF,
qualia sunt, angulosq; conti-
ñt aequales, ex hypothesi, erit
& bases AC, AF, aequales, &
um anguli BAC, GAF, quā
CA, GFA: ac proinde cum
ri anguli BCD, GFE, ponan
er aequales; erunt quoque reli-
ui ACD, AFE, aequales.



[a] 4. primi.

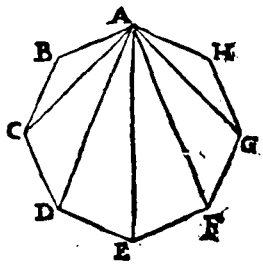
Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, aequalia sunt, continentq; angulos aequales, vt ostensum est; [b] erunt & bases AD, AE, aequales, & tam anguli ADE, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum est, donec ad latus oppositum perueniatur sit. Vbi quia rursus reliqui anguli CDE, FED, aequales sunt, erunt quoque reliqui HDH, AEH, aequales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, aequalia sint, angulosque aequales contineant, [c] erunt etiam anguli DAH, EAH, aequales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint aequales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, aequalis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

[b] 4. primi.

[c] 4. primi.

SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam ostendimus. Duae igitur rectae eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cum vna medietas maior esset quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

SIT deinde figura aequilatera & aequiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare angulum BAH, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, vt in antecedente



figura, quotuis anguli BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, æquales, singulus singulis; utique totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem est, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Itaque igitur anguli BAH, DEF, secatur bifariam. Quod propositum.

SED recta iam AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumq; similiter bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, sit ea AL ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, ut iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta igitur AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatque reliquum, ut demonstratum est proximè, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

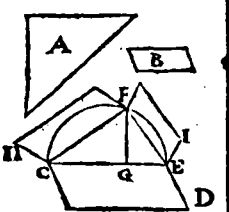
HOC demonstrato, perspicuum est, rectas lineas, quæ duos angulos proximos figuræ æquilateræ & æquiangulæ secant bifariam, se mutuò secare intra figuram, antequam ad opposita latera, vel angulos oppositos perveniunt: ac proinde rectè demonstrari posse, punctum illud sectionis esse centrum circuli intra, vel circa figuram describendi, ut factum est prop. 13. & 14. lib. 4.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de connexione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium: necessitatione nobis persuasit; non absre me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa huiusmodi superficierum proportionalium versantur, scitu non inutilia, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim inventis propriis, huic sexto libro annectam; quippe quæ demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur. Hinc igitur exordium capiemus.

A DATO

I.

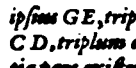
A DATO rectilineo imperatam partem uferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod elinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, si-iliterque positum.



SIT ex rectilineo A, auferenda ertia pars, qua similis sit, similiter-ue posita rectilineo B, relinquatq; Tilineum eidem B, simile, & simi-er positum. [a] *Constituatur rectili-um CD, aquale quidem ipsi A, si-le vero, & similiter positum ipsi superq; vnum eius latus CE, se-circulus describatur CFE.* [b] *De-le ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, atur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, F,* [c] *super quas constituantur rectilinea FH, FI, similia si-militerque posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod iube-r.* [d] *Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semi-culo existat;* [e] *erit rectilineum CD, aquale rectilineis HF, I, atque adeo, si auferatur rectilineum FI, simile similiterq; situm ipsi B, ex rectilineo CD, hoc est, ex aquali A, relin-etur rectilineum HF, simile quoque ipsi B, similiterq; posi-m. Quod autem rectilineum ablatum FI, sit tertia pars re-linei CD, ita ostendetur.* [f] *Quoniam est vt recta CG, ad F, ita recta CF, ad FE;* [g] *quod triangula CGF, CFE, ut similia: Habet autem CG, ad GE, proportionem dupli-tam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales nt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. huius lib.* [h] *Ité ilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque ha-e duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; st vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineũ I; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium pro-tionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, GE, ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineum D, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE,*

[a] *25. sexti.*
[b] *9. sexti.*
[c] *18. sexti.*
[d] *31. tertij.*
[e] *31. sexti.*
[f] *4. sexti.*
[g] *8. sexti.*
[h] *19. vel 20. sexti.*

ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei F I: Ac propterea hac ilium tertia pars existit. Quod est propositum.



[a] 45. primi

QVOD si pars imperata, reliqua tertia, simpliciter sit auferenda, fat ut in iisdem, hac arte. [a] Rectilineum istum A, reuocetur ad parallelogrammum GD, aequale; & ex latere BD, auferatur DE, numero imperata; & per E, agatur ipsi BG, parallela EF. Dico DF tertiam esse partem ipsius DG, hoc est rectilinei dati. Cum enim sit [b] ut DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autem per constructionem DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.

[b] 1. sexti.

II.

DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionalem inuenire.



[a] 25. sexti.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum sit tertium proportionale. [c] Constituatur ipsis A, rectilineum aequale EFG, simile vero similiterque positum ipsi BCD. Deinde lateribus homologis EF, BC, [d] inueniatur tertia linea proportionalis HI; [e] super quam constituatur rectilineum HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectae EF, BC, HI; [f] erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, aequale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.

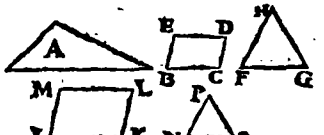
[c] 11. sexti.
[d] 12. sexti.
[e] 18. sexti.
[f] 22. sexti.

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

TRI

TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale. [a] Constituatur rectilineũ IKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterq; positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, [b] inuenta quarta proportionali NO; [c] constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterque positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales; [d] erunt & rectilinea similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod fit propositum.

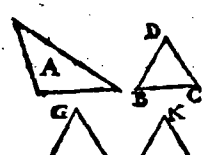


[a] 25. sexti.
[b] 12. sexti.
[c] 18. sexti.
[d] 22. sexti.

IIII.

DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniẽdum est proportionale. [e] Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC, [f] inuenta media proportionali HI; [g] constituatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, mediũ esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI, BC; [h] erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HIK, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod fit propositum.



[e] 25. sexti.
[f] 13. sexti.
[g] 18. sexti.
[h] 22. sexti.



ALITER. *Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale.* [a] *Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammũ quadratum CDEF,*

[a] 45. primi.

[b] 25. sexti. [b] *Ipsi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, similique similiterque positum ipsi CDEF. Connectanturq; huiusmodi parallelogramma ad angulos æquales, vt DE, EI, efficiantur lineam rectam, ac propterea, per ea, quæ ad propos. 25. demonstrauimus, vna quoque linea recta comprehendatur a FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammũ KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc est, ita*

[c] 34. primi. *EI, ad EG;* [c] *quòd recta EI, EG, rectis GH, HI, æquales sint.*

[d] 1. sexti. *Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG: Vtrumque DE, ad EI, ita est DF, ad EK; & vt FE, ad EG, hoc est, EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.*

[e] 26. sexti. *QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DF, GI, similia sint, similiterque posita,* [e] *constituunt ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, æqualia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI,* [f] *quod cuique proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod est propositum.*

[f] 1. sexti.

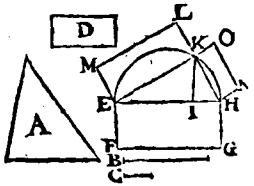
V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio recti ad C, oporteatque constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantque proportionem, quam B, & C; ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis D. [g] *Constituatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positum*

[g] 25. sexti.

ipſi D. Diuiſo deinde latere eius EH, in I, ſecundum proportionẽ B, ad C, ex ijs, quæ ad propoſ. 10. huius lib. demonſtrauimus: deſcribatur circa EH, ſemicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ EK, HK. [a] Deſcribantur iam ſuper EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipſi EG, vel ipſi D, ſimilia ſimiliterq; poſita; quæ dico æqualia etiam eſſe ipſi EG, ſeu ipſi A, habereq; proportionem datam B, ad C. [b] Cum enim angulus EKH, in ſemicirculo exiſtens rectus ſit; [c] erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum ſint ſimilia inter ſe, ſimiliterq; deſcripta. [d] Quoniam vero eſt, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, cum triangula EIK, EKH, ſimilia ſint; Eſt autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK; quòd tres EI, IK, IH, ſint, ex corollario propoſ. 8. huius lib. proportionales: [e] Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologum KH; erit vt EI, ad IH; hoc eſt, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo ſimul æqualia EL, HO, quæ ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita dato rectilineo D, habentiq; proportionem inter ſe datam B, ad C. Quod eſt propoſitum.



[a] 18. ſexti.
[b] 31. tertij.
[c] 31. ſexti.
[d] 4. ſexti.
[e] 19. vel 20. ſexti.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatque conſtituere duo rectilinea ipſi A, æqualia, & ſimilia ipſi D, propoſito, ſimiliterq; poſita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. [f] Inuentis ipſis B, C, tertia proportionali E; [g] fiat rectilineum FGH, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diuiſoque latere FH,

[f] 11. ſexti.
[g] 25. ſexti.

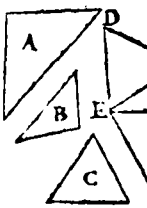


FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; inscribatur circa FH, semicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturq; rectæ FK, HK. Inscribantur iam super FK, HK, rectilineæ FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D similia, similiterq; posita. Dico hæc rectilinea aequalia esse ipsi FGH, vel ipsi D, quæ latera homologa FK, HK, proportionem habent lateris B, ad rectam C. Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit; erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque & rectilineo A, aequalia. Quoniam vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem rectanguloru FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (aequalis proportioni FI, ad IH, ex constructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, aequales sunt. Constat ergo propositum.

a 18. sexti.
b 31. sexti.
c 31. sexti.
d 4. sexti.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.



DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit constituendum, simile similiterque positum ipsi C. Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterque positum ipsi B, æquale constituatur FEH, simile vero eidem C, similiterque positū. Deinde rectilineum DEF, GFH,

c 25. sexti.

GFM, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta EH, [a] *super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C.* [b] *Per ſpecuum autem eſt EHI, aquale eſſe duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B. Quod eſt propoſitum.*

BREVIVS. Conſtituatur parallelogrammum aquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propoſ. 45. lib. 1. docuimus. [c] *Si enim huic parallelogrammo cõſtruxerimus aquale rectilineum EHI, quod ſimile ſit, ſimiliterq; poſitum alteri dato rectilineo C; conſtitutum erit rectilineum EHI, aquale duobus rectilineis A, B, & ſimile, ſimiliterq; poſitum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

[a] 18. ſexti.
[b] 31. ſexti.
[c] 25. ſexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint: Erunt ſegmenta vnius ſegmentis alterius reciproca.



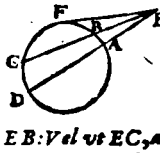
IN circulo ABCD, ſe mutuo ſecent recta AC, BD, in E. Dico ſegmenta AE, EC, eſſe reciproca ſegmentis BE, ED: Hoc eſt, eſſe vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. [d] *Cum enim rectangulum ſub AE, EC, comprehenſum aquale ſit rectangulo ſub BE, ED, contento;* [e] *erunt latera circa aquales angulos reciproca. Quod eſt propoſitum.*

[d] 35. tertij.
[e] 14. ſexti.

IX.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum exterius.

EXTRA

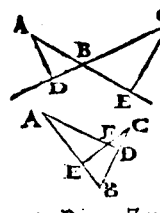


EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB. esse reciprocas rectis ED, EA. Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB: Vel vt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim linea tangente circulum in F, [a] erit rectangulum sub EC, EB quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula [b] EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt: [b] Ac proinde extrema eorum circa angulos æquales reciproca. [c] Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tam rectangulum sub EC, EB, quàm rectangulum sub ED, EA; [d] erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quàm tres ED, EF, EA, proportionales, æqualis adeo EF, media proportionalis inter quamlibet binam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod & propositum.

[a] 36. tertij.
[b] 14. sexti.
[c] 36. tertij.
[d] 17. sexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & prioris lineæ assumpæ perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



DVÆ rectæ AB, CB, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidem ad CB, at vero CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, productas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsas vero introrsum, si angulus acutus fuerit, vt figura docent. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior vero inter sectionem B, C

B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cũ enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti sunt; & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. [b] Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum.

[a] 15. primi.

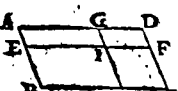
[b] 4. sexti.

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula, [c] erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum.

[c] 4. sexti.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ semutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.



IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. [d] Cum enim sit, vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; [e] Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum.

[d] 1. sexti.

[e] 11. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVI-



DIVIDANT diametri AC, BD, *se mutuo secantes in* E, *quadrilaterum* ABCD. *Dico quatuor triangula* AED, CED, AEB, CEB, *esse*

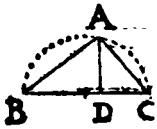
[a] *1. sexti.* *proportionalia*. [a] *Erit enim ut* AE, *ad* EC, *ita triangulum* AED, *ad triangulum* CED; *& triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB. [b] *Quare ut triangulum* AED, *ad triangulum*

[b] *11. quinti.* CED, *ita triangulum* AEB, *ad triangulum* CEB. *Eamque rationem esse, ut* BEA, *ad* DEA, *ita* BEC, *ad*

[c] *1. sexti.* DEC; [c] *cum utraque proportio eadem sit proportioni* BE, *ad* ED. *Constat ergo propositum*.

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



IN rectangulo triangulo ABC, *ex angulo recto* A, *demissa perpendiculari* AD, *secet basim* BC, *in* D, *extrema ac media ratione, sitque maius segmentum* BD; *ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus* AB, *latere* AC, *maius*. *Dico tria latera* BC, BA, AC, *esse continuè proportionalia*. *Quoniam enim*

[d] *17. sexti.* *per hypothesin est ut* BC, *ad* BD, *ita* BD, *ad* DC; [d] *erit quadratum ex* BD, *rectangulo sub* BC, CD, *æquale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib.* AC, *media proportionalis est inter*

[e] *17. sexti.* BC, CD; [e] *erit quoque quadratum ex* AC, *eidem rectangulo sub* BC, CD, *æquale. Quare quadrata ex* BD, AC, *æqualia inter se erunt, ut proinde & rectæ ipsæ æquales erunt. Est autem, ex coroll. propos. 8. huius lib.* AB, *inter* BC, BD, *media*

proportionalis.

proportionalis. Igitur eadem A B, *media proportionalis erit inter* BC, AC: *hoc est, erit vt* BC, *ad* AB, *ita* A B, *ad* A C. *Quod est propositum.*

SINT deinde tria latera B C, A B, A C, *in triangulo rectangulo* ABC, *continuè proportionalia, hoc est, sit* B C, *ad* AB, *vt* AB, *ad* A C, *demittaturque perpendicularis* AD, *ad basim* BC. *Dico* BC, *sectam esse in* D, *extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt* BC, *ad* AB, *ita* AB, *ad* AC: *Est autem vt* BC, *ad* AB, *ita quoque* AB, *ad* BD; *quòd* AB, *media proportionalis sit inter* BC, BD, *ex coroll. propos. 8. huius lib.* [a] *erit vt* AB, *ad* AC, *ita* AB, *ad* BD: [b] *ac proinde aquales erunt* AC, & BD. [c] *Vt igitur* AC, *ad* CD, *ita erit* BD, *ad* C D. *Sed vt* AC, *ad* CD, *ita est* B C, *ad* AC, *quod ex coroll. propos. 8. huius lib.* A C, *sit media proportionalis inter* BC, & CD. [d] *Igitur erit quoque* BC, *ad* AC, *hoc est, ad* BD, *vt* AC, *hoc est, vt* BD, *ad* CD: *ac propterea* B C, *in* C, *secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

[a] 11. quinti.
[b] 9. quinti.
[c] 7. quinti.
[d] 11. quinti.

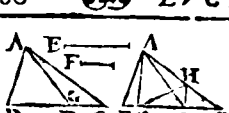
ITAQVE si super datam rectam B C, *constituendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta* B C, *extrema ac media ratione in* D. *Describato deinde semicirculo* B A C, *circa eandem datam* B C, *erigenda erit ad* B C, *perpendicularis* DA, *iungendaque recta* B A, C A. *Triangulum enim* ABC, *rectangulum erit,* [e] *cum angulus* B A C, *in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicularis* AD, *secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est.*

[e] 31. tertij.

XIIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineã rectam ducere, quę triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum ABC, *oporteatque a dato puncto* D, *in eius latere* BC, *lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam* E. *ad* F. *Diuidatur* BC, *in* G, *secundum proportionem* E. *ad* F, *cadatque primò*

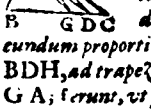


a 1. sexti. primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturque recta DA. a Quoniam autem BD, ad DC, ita triangulum BDA, ad triangulum CDA, secabit recta DA triangulum datum secundum proportionem datam BC; ad GC, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.

CADAT deinde punctum G, inter C, & D, in secunda figura. Ducatur ergo recta DA, cui per G, parallela agatur GH, coniungaturq; recta DH. Dico rectam DH secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt E, ad F, seu vt BG, ad GC. Ducta enim recta GA, triangula HGA, GHD, aequalia, cum sint super easdem bases GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addantur communi triangulo CGH, fient aequalia triangula CGA, CDH:

b 37. primi. c Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH. d Diuidendo igitur, erit vt triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH. e Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt BG, ad GE, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.

c 7. quinti. d 17. quinti. e 1. sexti.



CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq; recta DA, cui rursus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rursus, rectam DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, vt E, ad F. Ducta enim recta GA; f erunt, vt prius, triangula HGA, GHD, aequalia; additoque communi BGH, aequalia fient BGA, BDH.

f 37. primi. g Quare erit ABC, ad BGA, vt ad BDH. h Diuidendo ergo erit CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH; & conuertendo, vt BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA. i Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit vt BG, ad GC, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.

g 7. quinti. h 17. quinti. i 1. sexti.

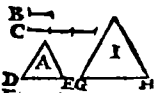
HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars trianguli sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectum lineam a dato

puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator unitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ addatur unitas, quæ ante deerat.

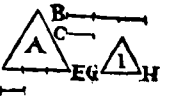
XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.

SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineũ A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterq; positum. Quod erat faciendum.



NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterq; positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

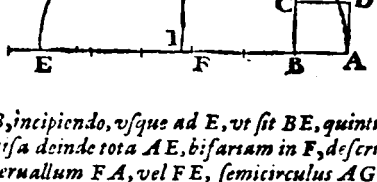


FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus,

[a] 12. sexti.
[b] 13. sexti.
[c] 18. sexti.

bimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod proposito rectilineo duplum existet, triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

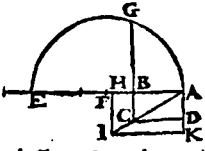
NON videtur autem omittenda praxis Alberti Durri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; obliquum. Etenim construemus quoque rectilineum simile, similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi non Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed tantum breuiter proponit; non multum tamen eius demonstratio a praesenti differt, vt mox ostendemus.



SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandum. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, ita manifestum sit partes ipsi AB, aequales, a puncto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producatur latus BC, ad circumferentiam vsque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplum esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiam ita BH, quadratum secunda, ad AC, quadratum tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulũ ABCD, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producto sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractæ in I, perficiaturque parallelogrammum HK; [a] erit HK, ipsi BD, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secunda æqualis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum. Quod est propositum.



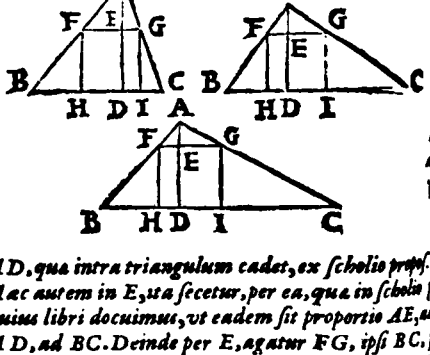
[a] 24. sexti.

EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod hac simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.



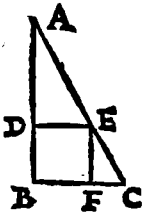
SIT data triangulum ABC, acutangulum. Et cuius quidem unus angulorum, ut ad BC, perpendicularis ducatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 1. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 11. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptum, esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. [a] Sed vt DC, ad AD, ita est EG, ad AE; quòd per coroll. propos. 4. huius lib. triangula ADC, AEG, sint similia. [b] Igitur erit ex æquo, vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia vero per constructionem est, vt AD, ad BC, ita AE, ad ED; [c] erit rursus ex æquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & FG, ipsi ED. [d] Quare cum FG, ipsi HI; & ED, ipsis FH, GI, æquales existat; Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia inter se. [e] Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 1. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt: ac parallelogrammum

[a] 4. sexti.
[b] 22. quinti.
[c] 22. quinti.
[d] 34. primi.
[e] 29. primi.

parallelogrammo FGIH; At propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD, ad DB, qua AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelã ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. [a] *Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD; quòd triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autem per constructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB,* [b] *erit ex aquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi aequalis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.*



[a] 4. sexti.

[b] 22. quinti.

VERVM hoc problemate Commandini multò ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

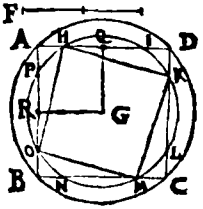
INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem duplam non esse maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem, quam recta E, ad rectam F, quacunque ea sit, dummodo maior non sit, quàm dupla. Nã si latera quadrati

secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis vnas quasque lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem eum eo centrum habens. Et quia



circulus intra quadratum ABCD, describendum est quadrato illi inscripto circumscriptus, ut in hac figura perspicuum est; erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, describi nequeat quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD tangit, vt patet: liquidò constat, quadratum ABCD, minus quadratum inscriptum proportionem posse habere minorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam inæqualitatis; nimirum sesquitertia. Inueniatur ex propos. 13. huius libri quadratum, ad quod circulus datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Et



eius semidiameter maior, quam semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod eorum quadrati ABCD, semidiametrum est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, semidiametro dati describatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, esse quadratum in circulo HIKLMNOP, descriptum, atque adeo æquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionem E, ad F. Describato n. circulo circa datum quadratum ABCD, ex centro G, ductisq; ex G, ad latera AD, AB, perpendicularibus GQ, GR, [a] secta erunt tam recta AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales [b] æqualiter distabunt à centro G, propterea q; & HI, OP, æqualiter ab eodem centro distabunt. [c] Quare æquales erunt HQ, QI, RO, RP, inter se erunt

[a] 3. tertij.
[b] 14. tertij.
[c] 14. tertij.

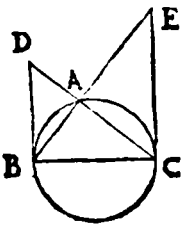
æquales. Sunt autem & semisses QA, QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, DI, PA, OB. Eademq; ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, ostendetur æquales NB, MC, LC, KD, & inter se, & illis quatuor HA, DI, PA, OB. Item quia æquales sunt HI, OP, si addantur æquales ID, PA, fient totæ æquales HD, AO: Atq; eadem de causa æquales erunt BM, KC, & inter se, & illis duabus HD, AQ. Itaq; quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, nimirum rectos, [a] erunt & bases HK, HO, æquales. Eodemq; modo demonstrabitur KM, MO, æquales & inter se, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo est figura HKMO. Dico & rectangulam esse. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia sint, [b] erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt OHK, HKM, KMO, MOH, [c] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum est, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus utrumque circumscribat. Circulus enim HKMO, descriptus est ad interuallum semidiametri circuli inuento quadrato circumscripti. Quod est propositum.

[a] 4. primi.
[b] 28. tertij.
[c] 31. tertij.

XVIII.

SI addiametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmẽto interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. fecit &, quæ sequitur. Vtramq; autẽ demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus AEC, cuius diameter BC,



ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares BD, CE, & per assumptum quodvis punctum A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, eductæ rectæ BA, CA, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub EB, BA, quàm sub DC, CA, quadrato diametri BC, æquale esse. Quoniam enim triangulo rectangulo BCE, a angulo recto C, demissa est CA, ad basin BE, perpendicularis; a quod angulus BAC, in semicirculo rectus sit: erit b coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare b rectangulum sub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis est inter DC, CA, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.

a 31. tertij.

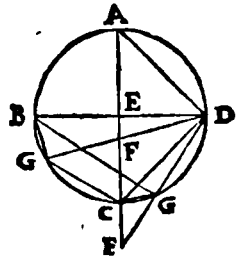
b 17. sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam; erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum primæ diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato ipsius circulum describendi.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, secent sese ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturq; ex puncto D recta vtcunque DF, secans diametrum AC, in F, & circumferentiam

cumſerentiam in G. Dico rectangulum ſub F D, DG, quadrato intra circulum deſcripto eſſe æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter ſe. Nam angulus CDF, cõmunis eſt, & angulus DCF, angulo DGC, æqualis; [a] *ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quòd autem anguli DCF, DGC, æquales ſint, ita oſtendemus. Si punctum quidem F, eſt intra circulum;* [b] *erunt anguli DCF, DGC, inſiſtentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales: Si vero punctum F, eſt extra circulum, ducta recta AD, erunt anguli DAC, DCA, inſiſtentes quadrantibus æquales:* [d] *Sed tam DAC, DGC,* [e] *quàm DCA, DCF, æquales ſunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, æquales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula ſint;* [f] *erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc eſt, tres lineæ DF, DC, DG, continuè proportionales erunt.* [g] *Igitur rectangulum ſub extremis DF, DG, æquale eſt quadrato mediæ DC, hoc eſt, quadrato intra circulum deſcripto, cum DC, latus ſit quadrati circulo inſcripti, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Quod eſt propoſitum.*



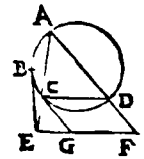
ALITER. Ducta recta BG; [h] *erit angulus BGD, in ſemicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem,* [i] *æquiangula erunt.* [k] *Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG.* [l] *Rectangulum ergo ſub DF, DG, æquale erit rectangulo ſub DB, DE.* [m] *Sed rectangulo ſub DB, DE, æquale eſt quadratum rectæ AD, hoc eſt, quadratum circulo inſcriptum; propterea quòd ex coroll. propoſ. 8. huius lib. AD, media proportionalis eſt inter DB, DE, vt patet, ſi ducatur recta AB.* [n] *Fiet enim triangulum rectangulũ BAD, & ex angulo recto perpendicularis demiſſa erit AE. Igitur & rectangulum ſub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

DATO

[a] 32. primi.
[b] 27. tertij.
[c] 27. tertij
[d] 22. tertij.
[e] 13. primi.
[f] 4. ſexti.
[g] 17. ſexti.
[h] 31. tertij.
[i] 32. primi.
[k] 4. ſexti.
[l] 16. ſexti.
[m] 17. ſexti.
[n] 31. tertij.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus dictæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.



HOC problema non minus acutum non curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigemus multo clarius demonstrabimus. Sit enim circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, ducta sit recta. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & ducatur EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior est, quàm EB. Ducta igitur GC, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, iungatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturq; recta AF, secans circumferentiam in D. Dico & rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè proportionales sunt,

[a] *17 sexti.* [b] *36. tertij.* *a erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: b Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub EA, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit.* [c] *22. tertij.* *c Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G, qui*

[d] *13. primi.* [e] *32. tertij.* *duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Demptis igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis. Est autem & angulus DCG, angulo A, in alterno segmento æqualis.*

Igitur

Igitur anguli D C G, C G E, *inter se æquales erunt, atque ideo, cum sint alterni,* [a] *rectæ* C D, E F, *parallelæ erunt. Quod est propositum.*

[a] 27. primi.

C A D A T *deinde punctum* G, *in punctum* F. *quod accidit, quando* E F, *ipsi* E B, *æqualis est. Ducta igitur rursus recta* G C, *circulum tangente in* C, *versus priorem tangentem* E B, *ducatur ex* E, *per* C, *recta concavam peripheriam secans in* A, *iungaturq; recta* A F, *secans circumferentiam in* D.



Dico rursus ductam rectam C D, *ipsi* E F, *esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt* E B, E F; [b] *estque rectangulum sub* A E, E C, *quadrato ex* E B, *æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub* E F, *æquale. Quare* [c] *si circa triangulum* A C F, *circulus describatur, cum eum secet recta* E A, *recta autem* E F, *eidem applicetur,* [d] *tanget recta* E F, *eum circulum.* [e] *Angulus ergo* E F C, *anguli* A, *in alterno segmento illius circuli æqualis erit:* [f] *Est autem & angulus* F C D, *eidem angulo* A, *in alterno segmento circuli* A B C D, *æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli* E F C, F C D: *qui cum sint alterni,* [g] *erunt rectæ* C D, E F, *parallelæ. Quod est propositum.*

[b] 36. tertij.
[c] 5. quarti.
[d] 37. tertij.
[e] 32. tertij.
[f] 32. tertij.
[g] 27. primi.

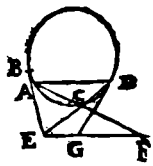
C A D A T *tertio punctum* G, *ultra* F. *quod contingit, quando* E F, *minor est quàm* E B. *Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ* E F, E B, E G, *continuè proportionales sunt,* [h] *erit rectangulum sub* E F, E G, *quadrato ex* E B, *æquale:* [i] *Est autem eidem quadrato ex* E B, *æquale rectangulum sub* A E, E C. *Igitur rectangulum sub* E F, E G, *hoc est sub* E G, E F, *rectangulo sub* E A, E C, *æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta* A, C, F, G, *circulus describi poterit.*



[h] 17. sexti.
[i] 36. tertij.

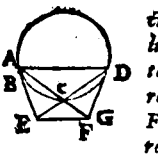
[k] *Duo ergo anguli* A, G, *in eodem segmento* C A G F, *illius circuli, cuius chorda esset ducta recta* C F, *inter se æquales erunt:* [l] *Est autem angulus* G C D, *angulo* A, *in alterno segmento dicti circuli* A B C D, *æqualis. Igitur idem angulus* G C D, *angulo* G, *æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni,* [m] *parallelæ erunt* C D, E F. *Quod est propositum.*

[k] 21. tertij.
[l] 32. tertij.
[m] 27. primi.



SI vero ex eisdem punctis datis E, F, ducenda sint duæ rectæ ad aliquod punctum connexæ circumferentiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per transiens sit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ductæ rectæ EB, circulum tangenti in B, annectatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis EG, quæque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, tangens GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ejiciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam esse rectæ EF, parallelam. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continuè sunt proportionales, [a] erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex B, æquale: [b] Est autem & rectangulum sub ED, EC, eidem rectangulo ex EB, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub EF, EG, & sub ED, EC: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi poterit, [c] Duo ergo anguli CDG, & F, in eodem segmento CDFG illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CG, inter se erunt æquales. [d] Est autem angulus CDG, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, [e] ideoque parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.

[a] 17. sexti.
[b] 36. tertij.
[c] 21. tertij.
[d] 32. tertij.
[e] 27. primi.



CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum enim æquales sint EB, EF, (quòd sit EF, ad EB, ut EB, ad EF) earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub EB, EC, quadrato ex EB, æquale. Igitur & quadratum ex EF. Quia ergo, circa triangulum CDF, circulus describitur, recta ED, eum secat, & EF, applicata est, & tangit EF, eum circulum. [b] Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno segmen-

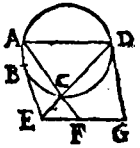
[f] 5. quarti.
[g] 37. tertij.
[h] 32. tertij.

segmento eius circuli æqualis erit: [a] *Est autem angulus* FDE, *angulo A, in alterno segmento circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* EFC, *eidem angulo A, alterno æqualis erit.* [b] *Quare parallela erunt* AD, EF. *Quod est propositum.*

[a] 32. tertij.

[b] 27. primi.

CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem cõstructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, *sint continuè proportionales,* [c] *erit rectangulum sub* EF, EG, *siue sub* EG, EF, *æquale quadrato ex* EB: [d] *Est autem eidem quadrato æquale rectangulũ sub* ED, EC. *Igitur rectãgulum sub* EG, EF, *rectangulo sub* E D, EC, *æquale erit; propterea* [e] *ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta* C, D, G, F, *circulus poterit describi.* [c] *Duo ergo anguli* EDG, CFG, *oppositi in quadrilatero* CDGF, *intra eum circulum descripto æquales erũt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F,* [f] *qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi* CFG, *reliquus* CDG, *reliquo* CFE, *æqualis erit:* [g] *Est autem angulus* GDC, *angulo A, in alterno segmento dati circuli* ABCD, *æqualis. Igitur & angulus* C F E, *eidem angulo* CAD, *alterno æqualis erit:* [h] *atque idcirco parallela erunt* AD, EF. *Quod est propositum.*



[c] 17. sexti.

[d] 36. tertij.

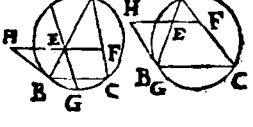
[e] 22. tertij.

[f] 13. primi.

[g] 32. tertij.

[h] 27. primi.

SED sint iam data puncta E, F, *intra circulum* A B C D. *Ducta recta* AG, *per* E, *vtcunque, inueniatur tribus rectis* EF, EA, EG, *quarta proportionalis, cui æqualis sit* EH, *ducaturque* H B, *circulum tangens in* B. *Ducta enim recta ex* B, *per* E, *secante circumferentiam in* D, *& ex* D, *per* F, *recta secante circumferentiam in* C; *dico ductam rectam* B C, *parallelam esse rectæ* EF. *Quia enim ita est* EF, *ad* EA, *vt* EG, *ad* E H; [i] *erit rectangulum sub* EF, EH, *æquale rectangulo sub* E A, E G: [k] *Est autem rectangulum sub* EA, EG, *æquale rectangulo sub* ED, EB. *Igitur & rectangulum sub* EF, EH, *eidem rectangulo sub* ED, E B, *æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta* B, H, D, F, *circulus poterit describi.* [l] *Quare duo anguli* HBD, *& DFH, in eodem segmen-*



[i] 16. sexti.

[k] 37. tertij.

[l] 21. tertij.

segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ductaneta DH, æquales erunt. a Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, exterior interno. b Parallelæ ergo sunt recta BC, EF. Quod est propositum.

a 32. tertij.

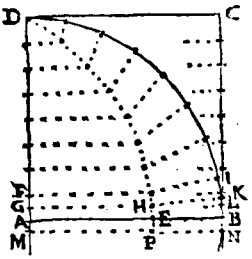
b 28. primi.

QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in rectam G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ iam ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in ipsa figura.

DE MIRABILI NATVRA lineæ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores exercitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquàm autem prædicti auctores huius lineam conentur describere per duos motus imaginarios rectarum, quæ in re principium petunt, vt proprie a Pappo reijciatur, tanquàm inutilis, & quæ describi non possit: nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse cẽsuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu peramœna, & quæ ad huius vsum accommodata sunt, facillimè conficiuntur. Id quod in quarto lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus. Etsi autem Quadraturam circuli diximus à nobis differri in longè mensurationibus magnitudinũ, visum tamen est, eam interim hic attingere, reijciendo pleniorem eiusdem tractationem in eum, quem diximus, librum. Sic enim descriptio lineæ Quadratricis fiet.

IN

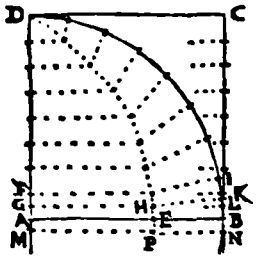


IN quadrato A B C D, describatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores linea Quadratricis, tam semidiameter A D, aquabiliter seri intelligatur circa cẽtrum A, quàm latus supremum C D, deorsum versus aquabiliter quoq; ita vt quo tempore punctum D, circumferẽtiam D B, vniformi semper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu descendens ad latus A B, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri A B, sit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; secant se continuè semidiameter in circumferentia D B, circumacta, & recta D C, deorsum lata, in punctis, qua lineam Quadratricem describent, hoc est, per qua linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa D E. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis linea ad rectam, meritò à Pappo descriptio hac reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & qua per hanc lineam inuestiganda pronuntiatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus D B, in quotuis partes aequales diuidatur, & latus vtrumque A D, B C, in totidem aequales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus D B, & vtrumque latus A D, B C, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, & singula rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in 8. partes aequales.

DEINDE bina puncta laterum A D, B C, aqualiter distantia à latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex cẽtro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis D B, extendãtur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primã, secunda secundã, &c.

per

per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed aequabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, secans semidiametrum A B, in E.



SED quia punctum Lineae A B, inuenire Geometrice non potest, cum ibi omnia fiant rectarum cessent; vt illa per notabili errore, qui fieret in sensum cadat, reperiamus, aliter hoc artificio. Intelligatur latus A F, lateris A D, exigua non sit, secabimus ipsam in continuè, donec minima particula sit perexigua. Eodemmodo infimam partem B I, arcus D B, bisariam omnia diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte A F, recta sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A G, totius lateris A D. Particulis itaque A G, aequales abscindemus B L, B N, A M, ducemusque rectas ipsis G L, M N. Ducta vero ex A, centro recta vsque ad K L, quae secet G L, in H, puncto, quod accuratissimè notare, sumemus ipsi G H, aequalem M P. Si enim Quadratricem ita ad H, descriptam continuabimus aequabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A D, in E, puncto, quod quaritur. Nam propter parua rectarum G H, A E, M P, inter se distantiam, efficitur, vt ferè aequales, licet Geometricè loquendo, recta A E, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum ea recta inter se differat, excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod ortum circumferentia circuli contingit. Recta namque G L, A B, M N, si parum inter se distent, in circulo omnino aequales intercabuntur, quamuis verè A B, aliquanto maior sit. Itaque tres illae rectae G H, A E, M P, perexiguam habent distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat, ab eo, quod est in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta B, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM verò AD, vocabimus latus Quadratrix, & rectā

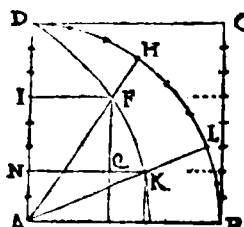
& rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrũ A, per arcum DB, eodem tempore moueatur uniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque uniformi; fit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tũc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent uniformes, aut nõ eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quàm latus DC, peruenirent. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus DB, emissa, & linea parallela per partes laterum DA, CB, ducta, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes ex constructione, liquido constat, puncta linea inflexa DE, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur est descriptio linea Quadratricis, quæ Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxiæ, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaslibet duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis linea, vt Geometricam. Adde quòd linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas pro-

portionales acutissimè investigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam linea Quadratricis vsum nonnullis propositionibus expendamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittãtur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ circumferentes arcui Quadrantis in H, L, demittãturq; ad basim AE perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est rectæ DI, totius lateris DA, vt in descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, sine ea constituetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus, cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, rectæ DI, &c. propterea quòd rectæ AH, IF, se intersecent in puncto F, quæ

describit

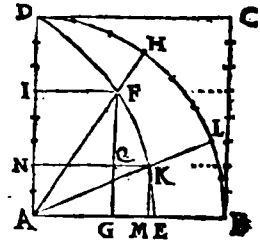
dratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quàm recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem uniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB; si cogitetur talis pars minor quàm DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdū, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, qua pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, qua pars est reliqua recta IA, totius lateris DA. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quàm conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c. [a] 34. primi.

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt DB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG; erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo, vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita QL, ad QG. [b] 34. primi.

RVRSVS quia est, vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus per semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmen semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



SIT primùm arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datæ rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AE parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex schol. propos. 10. huius lib. vt sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P; ductaque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniã enim vt propos. 1. ostendimus, vt HL, ad LB, ita est IN, ad NA: Est autem IN, ad NA, ex constructione, vt O, ad P; erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P.

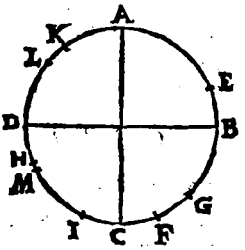
11. quinti.

DEINDE totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, vt sit DI, ad IA, sicuti R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadratricẽ in F. Ducta quoque recta AFM; erit ex propos. 1. DB, ad HB, vt DI, ad IA, hoc est, vt R, ad S.

O 3
P 2
R 3
S 5
T 8
V 2

TERTIO sit idem Quadrans DB, secandus in duas eius, ita vt totus Quadrans ad vnũ eorũ habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui aequalis abscindatur AN. Ducta autem AL, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur AKL, per K, recta. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc est, vt T, ad V.

QVARTO



QVARTO *semicirculus* ABC, *diuidendus sit in datam proportionem, uidelicet in triplã. Secetur uero Quadrans* AB, BC, *secũdum datam proportionem triplam in* E, F, *& arcui* AE, *uel* BF, *æqualis abscindatur arcus* EG. *Si igitur ex arcu communi* ABC, *æqualia demantur, nimirũ duo arcus* AE, BF, *simul, & arcus* AG; *reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus* EB, FC, *simul, & arcus* GC. *Et quoniam est, ut* AE, *ad* EB, *ita* BF, *ad* FC; [a] *erunt* AE, BF, *simul ad* EB, FC, *simul, hoc est, arcus* AG, *ad arcum* GC, *ut* AE, *ad* EB: *Habet autem* AE, *ad* EB, *datum proportionem triplam. Igitur & arcus* AG, *ad arcum* GC, *eandem proportionem datam habebit.* [a] 12. quinti.

QVINTO *in eandem proportionem secandus sit arcus* ACD, *tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus* AB, BC, CD, *in eam proportionem in* E, F, H, *sumatur arcus* EG, *ipsi* BF, *& arcus* GI, *ipsi* CH, *æqualis. Si igitur ex communi arcu* ACD, *demantur æqualia, nimirum tres arcus* AE, BF, CH, *simul, & arcus* ABI; *reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus* EB, FC, HD, *simul, & arcus* ID. *Et quia tres arcus* AE, BF, CH, *ad tres arcus* EB, FC, HD, *eandem habent proportionem;* [b] *habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus* ABI, *ad arcum* ID, *eandem proportionem, quam unus arcus* AE, *ad unum arcum* EB, *uidelicet datam.* [b] 12. quinti.

POSTREMO *sit eodem modo diuidendus arcus* ACK. *Diuisis rursus tribus quadrantibus, & arcu* DK, *ut proponitur, in* E, F, H, L, *sumatur arcus* EG, *arcui* BF, *& arcus* GI, *arcui* CH, *& arcus* IM, *arcui* DL, *æqualia. Si igitur ex communi arcu* ACK, *æqualia auferantur, uidelicet quatuor arcus* AE, BF, CH, DL, *simul, & arcus* ABM; *reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus* EB, FC, HD, LK, *simul, & arcus* MK. *Et quia quatuor arcus* AE, BF, CH, DL, *ad quatuor arcus* EB, FC, HD, LK, *eandem proportionem habent;* [c] *habebunt omnes* [c] 12. quinti.

quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcum AB, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, qua data est. Constat ergo id, quod proponitur.

COROLLARIVM.

EX his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partimur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, cui arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: [a] *cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.*

a 33. sexti.



QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem ad nominatam à numero, qui vna minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secetur arcus BC, in G, in proportionem quadruplam. Sit GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

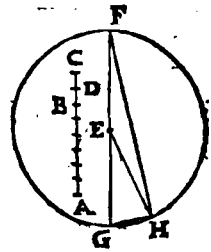
III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio recta AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quæ-

tocunque

tecum FGH, ducta ad in eo diametro FG; secetur ita semicircumferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB, ad rectam BD: iunganturq; rectæ HE, HG. Dico Isoscelis trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datæ AB, ad BC.



Cum enim sit, vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG: Et vt arcus FH, ad arcum HG, [a] ita angulus FGH, ad angulum GFH; [b] erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, eius dupla, ita est angulus GFH, ad angulum GEH, [c] qui illius duplus est. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod est propositum.

[a] 33. sexti.
[b] 11. quinti.
[c] 20. tertij.

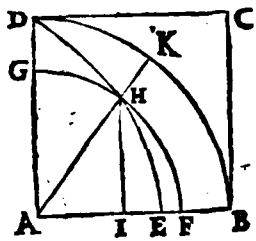
COROLLARIVM.

ITAQVE si constituantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ æquilatera parium laterum, per posteriora vero laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera angulosuè figura inscribenda habere debet, &c.

IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erũt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.

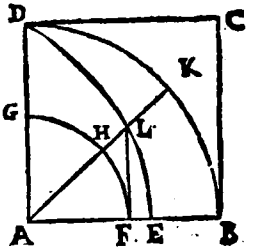


SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continuè esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, vt DA, ad AE. Si minus, sit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipsa AE, vel minorem: sitque primum AF, maior quàm AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, ipsi F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturq; perpendicularis HI. Quoniam vero ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc est, vt AB, ad AF: estq; vt AB, semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim supra demonstrationibus, vt & nos in libro de mensuratione circuli docuimus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; [a] erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam; [b] ac proinde etiam vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, vt arcus BD, ad arcum FG.) [c] Erit quoque arcus BD, ad rectam DA, vt idem arcus BD, ad arcum FG: [d] ac proinde aquales erunt rectæ DA, & arcus FG. Quia verò ex hoc est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcum FH, quòd arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint, vt in præcedenti scholio ostensum est: [e] Erit quoque recta DA, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, æqualis; [f] erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis, quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF, [g] secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum; ex scholio propos. 27. libri 3. chordæ autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam AE, basim Quadratricis.

[a] 15. quinti.
[b] 15. quinti.
[c] 11. quinti.
[d] 9. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 14. quinti.
[g] 3. tertij.

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Describa-

Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH, vt est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eiusdem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex scholio propos. 36. lib. 3. arcusque inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, [a] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur; [b] ideoque & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam minorem basi AE, Quadratricis: Sed neque vt DA, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.



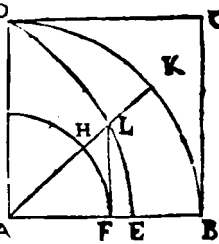
[a] 4. vel 8. prim.
[b] 26. tertij.

COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius Quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, vt DA, ad AE; erit conuertendo quoq; AE, ad DA, vt DA, ad arcū Quadrātis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia propor-

[a] 11. quinti.



[b] 9. quinti.

proportionalis; erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraque propertu sit eadē, quæ AE, ad AD.[b] Quare tertia illa proportionalis erit Quadrantis BD, aqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ totius circuli; si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcui BK, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta æqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ita L, ad AB, demissam, ita tertia illa proportionalis ad eam, inuentaque erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum sit, ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK;

[c] 11. quinti.

[c] erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis DB. [d] Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui propositi æquales.

[d] 14. quinti.

COROLLARIVM. II.

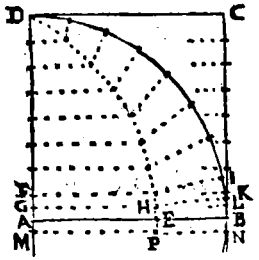
SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri, semicircumferentiis circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc est, vt tertia

illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem ſemidiametri AE: ſit autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, vt oſtenſum eſt: [a] erit & recta DA, Quadranti ſemidiametri AE, æqualis. Dupla linea ergo ipſius DA, ſemicircumferentia circuli, cuius ſemidiameter AE; & quadrupla toti circumferentia erit æqualis. [a] 14. quinti.

EADEM ratione, ſi duæ rectæ eandem proportionem habeant, quàm DA, AE, & minor ponatur ſemidiameter alicuius circuli, oſtendetur maior æqualis Quadranti illius circuli, &c.

SED ſi lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem eſt) ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, [b] cum ſit vt circumferentia ad diametrum, ita ſemicircumferentia ad ſemidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem deſcripſimus, diuiſum eſſe in grad. 90. & ſingulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuiſum eſſe, erit parallela ex vltima particula vſque ad Quadratricem educta ferme æqualis baſi AE, ob exiguam diſtantiam illius parallelæ, & baſis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam ſexta decimam, qua $\frac{1}{10}$. multò maior eſt quàm $\frac{1}{5400}$. vix à baſe AE, ſuperetur: ita vt ſine errore notabili eam parallelam pro baſe accipere poſſimus. Quia vero vltima illa particula lateris DA, eſt ſinus arcus Min. 1. & parallela illa ſinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt conſtat, ſi ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit ſinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, ſinus anguli AHG, Min 1. poſito ſinu toto AH, vt in tractatione Sinuum oſtendimus. Si igitur ſinus totus AH, ſtatuatur 10000000. [b] 15. quinti.



(Ita

(*Ita enim exquisitius proportio optata inueniatur, quàm si finis totus ponatur tantum* 100000. *cum in hoc finus grad.* 89. *Min.* 59. *à sinu toto non differat.*) *erit* AG, 2909. & GH, 9999999. *at totum latus* DA, *earundem partium erit* 1570800. *vt constat, si* 5400. *particulæ lateris* DA, *dicantur in vnam* AG, *quam diximus esse* 2909. *Duplum ergo lateris* DA, *erit* 3141200. *Et quoniam ex coroll.* 2. *huius propos.* 4. *duplum lateris* DA, *æquale est semicircumferentiæ, cuius semidiameter* AE; *erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum* AE, *eadem ferè, quæ numeri* 3141200. *ad* 9999999, *denominata à* $\frac{3141200}{9999999}$, *hoc est, in minimis terminis, à* $3\frac{1}{7}\frac{1}{11}\frac{1}{11}\frac{1}{11}\frac{1}{11}$. *quæ proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.*

ITAQVE vt recta linea circumferentiæ circuli æquetur æqualis, satis est punctum E, *inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta: Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto* E, *vt perspicuum est.*

V.

DATO circulo quadratũ æquale cõstituere.

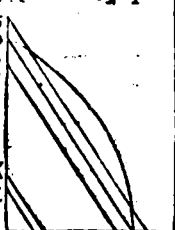
QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius unum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hanc ipse propos. 4. *figurarum Isoperimetrarum in commentarijs ex fabrarum ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehensi sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa*
[a] 14. *secũdi.* *recta, & semidiametro* [a] *construatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.*

INVENIETVR autem recta æqualis semicumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, [b] *si fiat vt basis Quadratricis descripta ad eiusdem latus, ita semidia-*
[b] 12. *sexti.*

meter

meter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea aqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. precedentis propoſ. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam ſemicircumferentiæ æqualem; quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.

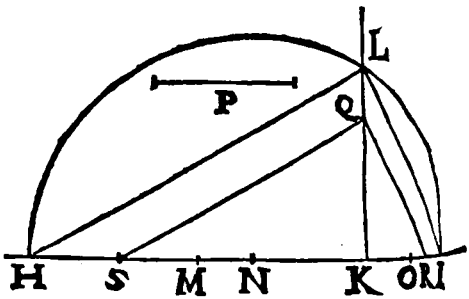
VERVM vt expeditius quilibet circulus poſſit quadrari, conſtruenda erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptiſſimæ, hoc modo. Conſtituatur angulus rectus D A E, ſitque AD, æqualis ſemidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, & A E, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, noua Quadratrix deſcribatur D E, cuius latus AD, & baſis A E. Ducta autem recta DE, conſtructum erit vnum inſtrumentum circulis quadrandis aptiſſimum. Si enim circuli quadrandi ſemidiameter æqualis ſit rectæ A E, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiuſdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propoſ. liquet. Si autem ſemidiameter minor ſit, quàm A E, abſcindemus ei æqualem A B, parallelamque ipſi DE, agemus B C. Si denique ſemidiameter ſit maior, quàm A E, abſcindemus ei æqualem A F, ex A E, producta, & per E, ipſi DE, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. precedentis propoſ. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrãtis, cuius ſemidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius ſemidiameter AF: [2] propterea quòd eſt, vt A E, ad A D, ita tam AB, ad A C, quàm A F, ad A G.



DEINDE ducta recta HI, cuiuſcunque longitudinis, excitetur ad eã perpendicularis quantacunq; KL; paratáq; erit altera inſtrumentũ quadrandis circulis accommodatiũ.

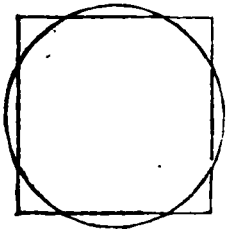
PER duo hæc inſtrumenta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius ſemidiametro in priori inſtrumento æqualis ſit recta A B, & per B, ipſi D E, parallela agatur BC. In poſteriori vero inſtrumento ſumantur duæ KM, M H, ipſi AC, æquales, & recta K I, ſemidiametro A B, æqualis. Diuiſa autem tota recta HI, bifariam in N, deſcribatur ex N, ad inter-

[2] 2. vel 4. ſexti.



interuallum NH, vel NI, semicirculus secans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cuius semidiameter AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori, aequale esse. Quoniam enim KL, media proportionalis est inter KH, KI, ex scholio propos. 13 huius lib. [a] erit quadratum ex KL, rectangulo sub KH, KI, aequale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit aequale, vt ad initium huius propos. diximus, quòd KH, sit aequalis semicircumferentiæ, & KI, semidiametro; erit quoque idem quadratum ex KL, dato circulo, cuius semidiameter AB, vel KI, aequale. Sigmentur quadratum rectæ KI, describatur, & ex eius centro ad interuallum AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum aequale circulo, vt in apposita figura apparet.

[a] 17. sexti.



CÆTERVM diuisio rectæ HI, in posteriori instrumento in duas partes aequales facile sic fiet. Diuisa semidiametro KI, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quàm HI, facile bifariam secabitur.) accipiatur recta KO, aequalis KI. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim aequales sint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipsi MO, aequalis: Est autem MO, ipsi HN, aequalis. (quia cum aequales sint HM, MK; additis aequalibus NN, KO, tota

æquales fient HN, MO.) Igitur & NI, ipsi HN, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari KL, abscindatur æqualis KQ. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter KI, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus KL. Deinde ducta recta LI, agatur ei parallela QR. Dico circulum, cuius semidiameter KR, æqualem esse quadrato dato, cuius latus KQ, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem recta KH, quæ semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KI, sit æqualis, ductaque recta LH, agatur ei parallela QS. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt HK, ad KL, ita SK, ad KQ; & vt KL, ad KI, ita SR, ad KR: erit ex æquo, vt HK, ad KI, ita SR, ad KR. Cum ergo HK, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KI, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. SK, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter KR. Quia vero KQ, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter SK, KR; quòd angulus RQS, rectus sit, [a] quippe cum eius partes RQK, SQK, partibus ILK, HLK, recti anguli HLI, æquales sint: (Nam [b] angulus HLI, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua KL, media proportionalis inter HK, KI, reperitur.) [c] erit quadratum ex KQ, æquale rectangulo sub SK, KR, hoc est, circulo, cuius semidiameter KR: hoc est, circulus semidiametri KR, æqualis est quadrato lateris KQ, vel P. Quod est propositum.

[a] 29. primi.
[b] 31. tertij.
[c] 17. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, constituemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si data figura rectilinea a *describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.*

a 14. secundi.

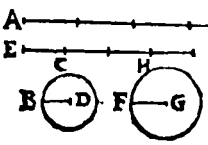
RVRSVS si, per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato b *constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.*

b 25. sexti.

VII.

DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentiæ dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nunc autem, ut vicissim recta data linea circumferentia circuli æqualis inueniatur, agendum erit. Sit data recta A, cuius circumferentiæ æqualis inuenienda est. Describatur quouis circulo BC, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facile ita fiet. In priori instrumento propos. 5. ponatur AH, æqualis semidiametro BD, describatur circulus per H, agatur ipsi DE perpendicularis HI. Nam AI, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propos. 5. diximus. Demonstratio



tribus rectis E, A, B D, inueniatur quarta proportionalis FG, atque ex G, ad internallum G F, circulus describatur F H. Dico eius circumferentiam data recta A, aequalem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita B D, ad FG; hoc est, [a] ita tota diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H, vt Pappus demonstrauit; [b] erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum ergo E, facta sit aequalis circumferentiae B C; [c] erit & recta A, circumferentiae F H, aequalis, hoc est, circumferentia circuli F H, inuenta est data recta A, aequalis. Quod est propositum.

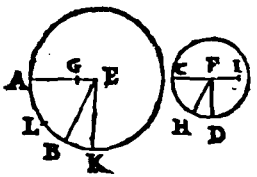
[a] 15. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 14. quinti.

ALITER, & facilius. Quarta parti rectae datae A, accipiatur aequalis A K, in primi instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius diameter A L, aequalis erit datae rectae A; propterea quòd eius circumferentia quadrans aequalis est rectae A K, quartae parti datae rectae A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inaequalibus, datoq; arcu in vno eorum, ex altero arcum aequalem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inaequales A B, C D, quorum centra E, F, & semidiametri A E, C F, sitq; A B, maior, & C D, minor. Datus autem primum sit in minori circulo arcus C D, cui aequalis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus B, circulo C D, maior est, erit & semidiameter A E; semidiametro C F, maior. Abscindatur ergo A G, ipsi C F, aequalis, secetq; arcus C D, ita in H, ex propos. 2. ut eadem sit proportio arcus C H, ad arcum H D, quae recta A G, ad rectam E: arcui q; C H, similis auferatur arcus A B. quod facile, si ducta recta F H, angulo C F H, aequalis fiat angulus



AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, aequalem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, aequalem, vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, vt AE, semidiameter ad semidiametrum GF, [a] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. [b] Igitur vt quoque vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus CD, AB, [c] aequales inter se sunt. Quod est propositum.

[a] 15. quinti.

[b] 11. quinti.

[c] 9. quinti.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, minor, quidem circumferentia circuli CD, minoris, cui arcui AB, aequalis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit aequalis; secetur per prop. 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, quae CF, ad FI; arcui BL, subtendatur aequalis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD, quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, aequalis CFD, aequalis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, aequalem esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, aequalem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, [d] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, [e] id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. [f] Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea arcus AB, CD, [g] aequales inter se. Quod est propositum.

[d] 15. quinti.

[e] 11. quinti.

[f] 9. quinti.

COROL.

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis datæ rectæ abscindi posse ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non sit, quàm recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum supra ostensum est in coroll. 1. propos. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri posse rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulò ante in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI verò illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quàm data recta linea; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum sit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis, erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis. [1] 14. quinti.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quàm recta linea data; sumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentia semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quã data lineæ rectæ, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt semicircumferentia ad vnum horum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam. quod quidem facile fit, si datæ rectæ ex dupla illa linea rectæ abscinda-

tur æqualis, & semicircumferentia ſecetur, per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota ſemicircumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim ſit, dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum: ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircumferentiæ; [a] 14. quinti erit quoque data recta illi arcui æqualis.

SI denique dupla illa recta linea fuerit maior, quàm data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hac linea tripla fuerit data rectæ æqualis, erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quàm recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam. quod facile etiam fiet, ſi data recta ex tripla illa linea recta abſcindatur rectæ æqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ linea erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſt & tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum æqualis; [b] 14. quinti. erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abſciſſo.

DENIQVE ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quã data recta linea, addatur ei rurſus prior

linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta composita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

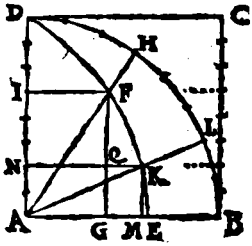
AT vero si illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quàm circumferentia dati circuli. quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnũ eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentiæ circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; [a] erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis. [a] 14. quinti.

ALITER, & brevius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea data recta linea æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, [b] erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum. [b] 14. quinti.

COROLLARIVM II.

EX ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quàm angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Describatur enim Quadratrici DE, quæ rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quæ duæ recta inuentæ; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, qua Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quàm angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam. n. per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, [a] vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.

[a] 33. sexti.



FINIS ELEMENTI SEXTI.

REGESTVM

* A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iij Kkk Lll Mmm.

Omnia ſunt folia integra, præter M m m, ſemifolium.

ROMAE, Apud Sanctium, & Soc.

M. D. LXXXIX.