Euclidis elementorum

LIBER DECIMVS, PETRO

Montaureo interprete.

Ad Ioannem Bellaïum Cardinalem.

LVTETIAE,
Apud Vascosanum, uia Iacobæa ad insigne Fontis.
M. D. LII.
CVM PRIVILEGIO.

1565. Ro. Ro. 15 febr — XXI. ſ

Astadius

PRIVILEGII SENTENTIA.

Regio diplomate cautū eſt, ne quis alius præter Va-*ſcoſanum, hunc* Euclid*is elementorum librum deci-mum interprete* Petro Montaureo *uiro ſenatorio ante ſexennium imprimat, neue uendat.* Qui *ſecus fecerit, libris & pœna in ſanctione æſtimata multabitur.* Datum Bleſis *decimo* Calendas Februarij. M. D. L.

De *moulins.*

AD IO. BELLAIVM CARDINALEM PETRI MONTAUREI PRÆFATIO.

CVm ad insitam mihi magno naturæ erga me beneficio incredibilem discedi cupiditatem, illud quoque iudiciũ progrediente sensim ętate studióque confirmatum accessisset, nihil esse tam uehemẽter homini expetendũ, quàm rerum maximarum perceptam habere naturam, feci non inuitus adhuc, ut quò uocaret illa, eò me deduci facile paterer: in ídque uitæ curriculum immitti, quod & dignitati hominis cõuenientissimũ, & naturæ præterea meæ accõmodatũ esset. Huius uerò consilij tantũ abesse uideo ut me pœnitere cœperit, ut maiores etiã quotidie uberiorésque fructus mihi non contingere tantum ipse sentiam, sed & deinceps multo pręstantiores perceptum iri certo sperem. Nam quanto in altum longius euehimur, tanto laborẽ minui magis, qui maximus in cuiusque rei principiis solet esse: animi uero uoluptatẽ nulla alia re tantũ, quã discendo ali augeríque cognoscimus. Is autem meus in suscipiendo uitæ genere sensus cum uniuersæ philosophiæ studiũ mihi proponeret amplectẽdum, simul animo subiiciebat illud, nihil in ea re magnopere profici posse, nisi quis ueterum philosophorum uestigia summa diligentia persequutus, tandem quam ipsi,uiam institisset. Itaq; nihil,ut hoc quidem loco dicam,de nostris cæterarũ philosophiæ partium studiis, ad mathematicam cognitionem animum applicans, in eum me locum sensim abductum diuertisse intelligo,unde suscepti primum institutíque illius itineris recordatio propemodum effluxerit: neque id uero repugnante me admodum. Quid enim est,cum ex ea philosophię parte,quæ omnis est in agendi rationibus occupata,tantum præceptorum acceperis, quãtum ad unius hominis reíque priuatę cuiusq; suæ rectionem attinet, unde maior animum ueri cupiditate flagrantissimũ permulcere possit oblectatio,quàm quæ ueri cognitionem subsequi solet?Nam illa quidem studia ciuilis disciplinæ,quę publicis rebus consilio administrandis idonea totius hominum uitæ multo præstantissimas actiones ex recto rationis præscripto moderari debuerant,plane refrixerunt: tanta profecto perturbatione rerum omnium,ut cuius scientiæ ratio clauum aliquando in rerumpub. gubernatione magna cum sua laude,hominum uero lõge maxima felicitate, cursúque prospero tenuerit, eidem nũc sit uix aliquid relictũ in sentina loci. Tertia quædam supererat illa philosophãdi exercitatio, quæ naturam rerum persequens,ut est omnium ingeniorum cognitione dignissima, ita propter multiplices ipsius materiæ formas & motus incõstantes,acutum quoddam habet & subtile disputan-

di

di genus, sed obscurum tamen, adeóq; repugnantes inter se summorum philosophorum sententias, ut uerisimilia tantum, non etiam uera docere uideri possit. Vna ergo est mathematicarũ rerum tractatio, quæ constantibus necessariísque ducta principiis, uias quoque consimiles persecuta, eò nos progredientes manu ueluti ducit, ubi ueritatis ipsius cubilia, quę quidem mentibus humanis sua ipsarum ui facultatéq; cerni queant, explicet intuenda. Quid autem est, quod hac una re præstantius magnificentiúsque dici possit? An quid erit aliud, quod cuiquam anteuertẽdum uideri queat? Tibi certe non arbitror, Bellaï amplissime, cui neque ad acumen ingenij doctrinæ cultum, neque ad doctrinam iudicij uim deesse intelligo. Quæ cum ita sint in te illustria, ut fortunæ tuæ, illius quidem per se splendidæ, luminibus ego unus omnium minime blandus fortunæ admirator offecisse putem, tibi homini grauissimo, idoneóque uiso de tota nostra ratione iudiciíque sensu perscribam paulo liberius: si forte plus authoritatis ex personæ tuæ dignitate nostra habitura est oratio, ut sane habitura est, ad iuuentutem in eum studiorum cursum, quẽ ualde uolumus, inducẽdam. Verum enim, ut ipse tecum, hoc est, cum homine intelligente loquar, iampridem errabunde de uia deflexímus: ueterémque illam discendi consuetudinem pręstudiis quibusdam nouis amisimus. Hîc cũ plurima quæ recte dici posſint,omittenda ducam: unum illud quidem certe nunc maxime mihi dicēdum eſt, illius perturbationis,de qua paulo ante diximus, eā eſſe cauſam, & potiſſimam quidem,quòd totius inſtitutionis, (quam à pueris παιδείαν ueteres illi ueritatis magiſtri uocare ſoliti ſunt) priſcis quōdam ſeculis tantopere conſeruatæ, ea eſt hac quidem ætate peruerſitas, ut quod primum potiſſimúmq; ſtudiorum eſſe debuerat, perexiguum quidem omnino locum apud nos, plurimorum autem hominum iudiciis nullam etiam dignitatis æſtimationíſque partem mereatur aut obtineat. Quid ergo eſt? dicat aliquis, quid habes quod reprehendas? Ego uero permulta, pene dixi omnia, ut iam indubitāter illud affirmare poſſim,tum demū optime rebus hominū conſultum iri, cum illud poëtarum ὕστερον πρότερον ipſi in ſuas actiones tranſtulerint: quódque primum ducunt, poſtremū habuerint: & quod poſtremo,aut, ut uerius dicam, nullo loco ipſis eſt, ſi primum exiſtimauerint. Nunc unius artis,uixdum etiam artis prçſidiis opibúſq; immodicis tam flagitioſe circumuenti tantis clamoribus obtundimur, ut naturæ uox ad ſcientiæ cupiditatem inuitantis, ne exaudiri quidem ulla ratione queat. Quæ ſi loco ſuo contēta non ſe cōmouiſſet, diiudicandíſque hominum litibus occupata munus alienum aut nunquam appetiiſſet, aut certe non impediiſſet, minus profecto haberemus quod dolendum uideretur. eſt enim & iu-

diciis

diciis accommodata: iudicia porro ipsa disceptationibus rerũ controuersarum, quibus carere nullo modo possumus, pernecessaria. Neque sane est in ea re quod reprehẽdi iure possit, si quis morem maiorum in illa consequenda retineat, ut philosophiæ totius institutis abunde suppeditatus, hanc ipsam illius quidem imitatricem quandã & quasi sobolem aggrediatur discere, cum intellexerit id quod in genere sciẽtiarum est perpetuum, ut aliis aliæ subsint, idem ipsum hîc quoque fieri, ut iurisperitia philosophiæ partem illam, quæ est de moribus tum singulorũ tum uniuersorum, tanquam architectam agnoscat & obseruet. Sed hæc tota cõtrouersorum ratio iudiciorum illius partis est iustitiæ, quæ συναλλάγματα tantum continet. Nam de altera illa quæ multo est & dignitate præstantior, & utilitate in omnem uitæ societatem uberior, quæ præmia recte factis, pœnásque sceleribus pro rata cuiúsque rei personæq; portione distribuens, duo uincula rerũpub. firmissima complectitur, aut omnino de iusti ipsius ui atque natura, ne literam quidem. Se tamen ueram philosophiam profiteri rerúmq; maximarum gubernationi unam idoneam prædicans, illam ipsam philosophiam, cum omnium artium parentem, tum uero erga se beneficẽtissimam magistrámque uitæ certissimam lædens, dignitatis inuadit possessionẽ alienæ: neque se animaduertit (ne quid ipse criminosius dicam) alienum appetentem contra ſua ipſius,quid autem dico ſua?imò magis contra rationis uniuerſæ decreta,cuique ſuũ minime tribuere: quámque matris loco uereri debuerat ab ipſa genita & educata, unde ſuum aliquem in repub.locum ut tenere poſſet,habuerat, quod in parentes impij filij ſolent, ipſi quaſi ſenectute deſipienti,ut bonorum ſuorum adminiſtratione interdiceretur,efficere. Nam ſi nihil aliud eſſet,quis quæſo remigem in naui ferat gubernatoris munus arrogãter affectantem? Iam uero ut à primis ordiamur,hæc totas urbes ſuis ſacris initiorúmque pertractationi conſecratas habet:ad quas undique concurſus puerorum iuuenúmq; fiant,non tam diſcendi,quàm à magiſtris diſcedendi cupidorum.ſic ætas maxime imbecilla, ſuíque impotens,effrenis,incuſtodita,ſuo unius impetu ferenda permittitur,quam unam alieno parentem imperio,authoritate bonorum nixam, inſolẽtiæ, leuitati,audaciæ,uoluptati frenum,cęteris etiã animorum motibus modum imponendum eſſe maxime doceri oportuit:híſque uocibus aſſidue aures illius perſonare, ut concurſantes immenſique cupiditatum æſtus,quibus ætas illa plurimum nata eſt cõmoueri, reprimerẽtur. At enim qui recte præcipiãt doceántque , præſto ſunt, ſi modo eos audire in animum induxerint. Credo ſane, quod ad illorum artem attinet,ut eſt captus horum hominum & temporum, non indiligenter exponere teſtamenta,ſubſtitutiones,obligationes, ſtipulationes,

lationes. Sed quid hæc ad mores informãdos? Ita fit ut alij ne audiantur quidem, propter abhorrentem ab illis studiis multorum ingeniorum naturam: alij quãuis studiose soleant audiri, tamen uel rei ipsius per se spinosæ traditione perplexa, uel docendi imperitia præpediti, nihilo doctiores amittant auditores, quàm acceperint. Ex quo illud malum interea sequi omnino necesse est in iuuenum animis, cum uoluptates ex doctrina institutionéque liberales ipsi non habeant, ut consectandis alienis illiberalibúsq; totos sese dedant: prorsus enim eos aliquid agere, quietémq; contemnere, necesse est. Pauci quidam ex illo sunt genere, qui gloriæ, nescio cuius, utilitatísque expectatione deliniti, è toto studiorum suorum quinquennio fructus tenues illos quidem & austeros, sed quæsitos tamen colligant. Præclara uero res, hominem natura quidẽ ipsum sua nullius uirtutis, uitiíue præsentia habitúue fretum, uerùm facultatibus nudis in utramuis partem ferentibus, pręditum, magis tamẽ improbandorũ exemplorum multitudine, opinionúmque peruersitate deprauatum, cum opes, honores, diuitias præcipue duxerit expetendas, ad alendum morbum ex contagione contractum, artem etiam per omne uitæ tempus exercendam adhibere: cuius tota ratio disputandi sit de meo & tuo: déque iis rebus & modis, quibus quod meum est, tuum effici possit. Ad quam quidem disciplinã nimis multos dociliores reddi ſcimus, quàm ſocietati hominum cōducat tranquille conſtantérque moderandæ. Ita credo priſcos illos non tam antiquitate quàm dignitate memorabiles uiros, domi foríſq; in ſua quęque ciuitate rerum geſtarum gloria præſtantes, liberos ſuos ad maiorum imitationē inſtituiſſe: ac non potius Athenas, Rhodum, Maſſiliam, & quò non? ad cultum ingenij capeſſendum, mercaturámque artium optimarum dimiſiſſe. Vnde philoſophiæ præceptis inſtructi, cum ſe ipſi regere didiciſſent, agendíſque rebus adhiberentur, non ex artis illius formulis, ſed ex iuſtitiæ ſcitis immutabilibus hominum cœtus, & quidem uolentiū, regendos acciperent. Age modo, hunc ipſum hominem ex hac noſtra exercitatione, tali cultu educationéque in forum ex umbra tanquam in aciem producamus, ut ſtudij ſui rationē & uſum aliquē nobis tandem explicet. Ibi uero quanta prudentia, grauitate, conſtantia, probitate ſe gerat, dicere meū non eſt. Vos quæſo dicite Pierides, & quidem hominibus ignaris: nobis enim nihil attinet, quos plura ſcire neceſſe eſt, quàm referre iuuet. Hoc tantum dicam, cum ſe exiſtimēt parum in ea arte profecturos, niſi toti ſint in illius cognitione per omnē uitæ curſum occupati, tantúmq; ſibi periiſſe temporis, quantum aliis ſtudiis acceſſerit, homines ignorantes quantum cuique ſcientiæ temporis ſit tribuēdum, nimis magnam mercedem ſtatuunt, ſi pręſtantiſſimarum rerum, offi cij dico munerisque sui ignoratione, hæc una fortuitarum rerũ cognitio disceptatrix sibi ipsis cõparanda uideatur: neque uero intelligunt rei per se infinitæ finem nullũ reperiri posse. Verum ipse me longius scribendo prouectum in offensiones multorum incurrisse uideo, quod equidem nollem: sed cum nulla remedia tam faciant dolorem quàm quæ sunt salutaria, si quid est quod sanari possit, plus apud me ualere debere nonnullorum salutem quàm plurimorum indignationẽ ex remediorum acerbitate collectã semper existimaui. Quod cum optimis quibusq; uiris, quales iam bene multos hic noster ordo recipit, probatũ iri certo sciam, de cęteris minus est mihi laborandũ. Atque haud scio an quæ auditu nũc quidem grauia acerbáque uideantur, ipsis in experiundo suauissima futura sint: ut longior oratio comprobandæ rationis huius causa defensióque nulla requiratur alia, nisi quã rei ipsius intellectæ perceptio attulerit. Neque quenquam accepimus aut uidimus, qui, cum utranque scientiam tenuisset, non utranque adamaret: alteram uero nobiscum etiã admirationi maximæ summóque studio non habuisset. Porro alterius expertem & ignarum, de utraque iudicium suum esse uelle iniurium est. Præterea fuit ea profecto semper grauissimorum eruditissimorúmque hominum omnibus seculis de tota uitæ ratione consensio, cum expetendarũ rerum tria summa genera reperirentur, ut bonorum animi prima potissimáq; esset dignatio: cæterorum autem, ut quæque proxime nos attingerent. Ex quo illud efficeretur necessario, scientiarum quoque, quę bonorum adipiscendorum uias persequerentur & traderent, eandem esse debere rationem, ut cuiusque rei præstantissima uis esset, ita scientiæ, cui res ea subiiceretur, illi plurimum & tẽporis & industriæ nostræ deberetur. Ad quã sane normam si studia nostrorum hominum ab ipsis exigerentur, & firmior animorum tranquillitas, & uero maior ex ipsis in repub. esset utilitas: eiúsque mali, cuius mole propemodum obruti leuationem aliquam iampridem exposcimus, medicinam non leuem haberemus: cum non essent qui litigiosorum hominum audaciam, flagitium, furorem inconsultis suis consiliis adiuuantes, aut potius ipsos inter sese miserrimo cõcertationum genere committẽtes, alienis incommodis ad suas utilitates per iustitiæ conseruandæ speciem abuti uellẽt: quódque rerum omnium præcipuum est, illud boni præterea consequerẽtur, ut improbitas uirtuti suo loco dignitatíque restitutæ in rerũ administratione facile cõcederet. Hoc enim munus esse philosophiæ unius maxime proprium, humanarum rerum artem moderãdarum, diuinarúmque scientiam tradere quis non uidet, qui modo rem ullam unquam mẽtis acie perceperit? ne forte homines rerum omnium imperiti criminẽtur eam otij tantum esse, nõ item negotij. Cuius quidem

dem calumniæ perfacilis esset mihi quoque refellendæ ratio, nisi rem huius loci, aut operis nõ esse intelligerem: ipsam tamen etiam scriptis grauissimis cuiusque ætatis hominum prudẽtissimorum agitatã, tum uero unius Iacobi Sadoleti uiri præstantissimi doctissimíque libello pereleganti, ab eo perscripto tanta diligentia & eruditione, ut maiore scribi posse non existimem. Quòd si exẽplis agẽdum esset, nónne permultos omnibus historiæ monimentis celebratos accepimus, qui studia doctrinæ ad rerumpub. moderationem conferentes, ciuitatum suarum statum ab initio constituerint, conseruauerint, perditúmque restituerint, tanta omnium gẽtium admiratione, ut summis etiam honoribus deferendis magnitudinem meritorum assequi se nullo modo posse faterentur? Quid enim? (ut uetera omittamus) nunquid unquam grauissimũ sanctissimúmque istud uestrum Cardinalium collegium pœnituit, quãtum dignitatis ornamentíque ex duorum hominum studiis, uirtute prudentiáque percepisset, Gasparis Contareni, & huius ipsius, de quo modo dixi, Sadoleti? Quorum ille per omnes pene gradus honorum in moderatissima florẽtissimáque Venetorum repub. peruagatus, suis ciuibus ita se probauit, ut præsentem colerent & admirarẽtur: absentem etiam propter singularis uirtutis memoriam permanentem requirerent, uobísque ipsis, qui ab se ciuem totius ciuitatis optimum nihil tale ambientem aut omnino cogitantem abduxiſſetis, pene inuiderent. Et ſane fuit ille uir omni laude cumulatus, tum propter excellentẽ doctrinam, tum etiam probitatem & prudentiam multarum gentium imperio digniſſimus: hic uero alter magis eſt otio delectatus, nõ illo quidẽ inani, ſed fructuoſo in omnem poſteritatem & literato. Quid de Petro Bembo & Nicolao Ridolfo uiris certe in omni uirtutum genere maximis dicam? Libentius autem in cõmemoratione mortuorũ noſtra uerſatur oratio, ne quid aſſentationi uiuorum tribuiſſe iudicetur, ſi eorũ qui nunc ſunt, laudationes attingeret. Hi quidẽ in philoſophię ſinu ſtatim à pueris educati tales ad rempub. cum acceſſiſſent, utilitates ex ſe permagnas uniuerſo quidem hominũ generi maxime, ſibi uero ipſis immortalitatem præterea gloriæ cõpararunt. Quorum ſi qui ſtudia imitatione conſequuti erũt, quî fieri poteſt, ut reſpub. non maximam ſuę dignitatis recipiendæ ſpem in illorum prudentia & moderatione ſibi repoſitam arbitretur? Ac profecto fuit tempus illud ſane mihi periucũdum, cũ ſpes eſſet melius fore, propter alacritatem animorũ in id ſtadium ſeſe dedentiũ, quod eſt ad ueram gloriam expeditiſſimum: niſi permultorum ſtudia cogitationéſque in alia traduxiſſet ſua ipſorũ credulitas, neſcio cuius hominis uanitati aſſentientium. Itáne uero? quo quæque uox proferetur abſurdior, eo facilius in animis noſtris uiam ad perſuadendum

suadendum inueniet? Ergo repertus est, si diis placet, qui cum bellum nefarium omnibus bonis artibus indixisset, & sapientiæ fructũ iam plane maxima bonorum omnium gratulatione renascentis nobis inuideret, Lutetiæ in luce atq; oculis nõ Galliæ modo, sed totius Europæ castra figeret ignorantiæ: & uniuersæ philosophiæ uitæq; adeo è philosophia constituendæ authorem Aristotelẽ oppugnatum palam etiam accederet, nihil in dialecticis, nihil in physicis, nihil usquam ueri uidisse aut tradidisse argueret. Audax negotium dicerem & impudens, nisi uerborũ omnium acerbitatem rei ipsius per se inauditæ, neque iam audiẽdæ indignitas ipsa superaret. O imperitos maiores nostros, qui nunquam quiuerunt istud animo intelligere! Quid est quod profectum esse dicam recenti sophistarum clade, atque exilio, si sophistas alios asciscimus? Quasi uero non iam miserrimam rerum omnium ignorationem deprecemur, sed mutationem tantum in ipsis ignorantiæ magistris expetamus. At certe totum illud eiusmodi est, ut cẽsoria magis animaduersione, quàm cuiusquam omnino contra disputantis oratione reprimendum sit. Neque uero de hac ipsa re uerbum ullum facturus erã, si moderatius insaniendum sibi putasset: suáque ipse cõtentus iuuẽtutis credulæ & rerum imperitæ non augeret ignauiã: nam de ipso quidem leuior omnino iactura fuerat. Impune esse cuique debet periculo suo insanire:ſed cum ad aliorum perniciem morbus animi conuertitur,id uero ferendũ non eſt. Huic certe malo niſi maturis conſiliis obuiam eatur, & audaciſſimos impetus diligentia continuerit magiſtratuum,næ præclara illa ſtudiorum nobis promiſſa compendia permagno conſtiterint iuuentuti:cum grauiſſima mercede totius temporis iactura didicerit nihil è nouis illis, ſed non ſatis eruditis magiſtris, interea niſi arrogantis cuiuſdã & confidentis ignorantiæ ignauiæque præcepta didiciſſe. Sed de hac re tota ſatis hactenus: aliàs fortaſſe pluribus,ſi cõmodum erit. Nũc autem quod eſt huius potiſſimũ loci & inſtituti perſequamur. Cum itaque,ut ante dictum eſt, mathematicã cognitionem uniuerſam iam tum à prima iuuentute uehementer amplexatus eſſem, & ſæpius ipſe per me Euclidis elementa reuoluerem, in cæteris quidem libris modicus ſane labor mihi fuit: ubi uero decimum hunc multorum opinione perobſcurum attigiſſem, ea certe opinio non mediocri mihi quoque fraudi fuit,cum non arbitrarer, qui locus à pleriſque propter ſuſpectã ipſius difficultatem præteriri ſolitus eſſet,mihi non periturum, quicquid in eo laboris impendiſſem. Itaque plurima extrinſecus adiumenta mihi ipſe excogitãs, iterum atque iterum repetita diligenti lectione, cum nihilo minor maneret rei ipſius obſcuritas, cœpi cogitare unum Euclidẽ in primis libris ſibi ipſi ad ipſorum intelligentiam ſufficere:neq; fieri

poſſe

posse, ut suum in docēdo modum atque ordinem repudians, hîc alienum quendam & nouum adhiberet. Itaq; uia simpliciori cum rem aggredi cœpissem, sola librorum precedentium ipsius Euclidis ope, & uocum simplicium quę sunt huic libro maxime propriæ, intelligentia, omnia uisa sunt quàm antea illustriora multo atque clariora: Euclidémque sui ubique similem hoc quoque libro, ut olim cogitatione præceperam, nullius omnino rei externæ indigentem, se ipso contentū: rem illam quidem paulominus inuulgatam, sed alia ratione nulla, neq; alia uia, quàm sua & familiari tradere plane uidi. Hæc uero est, ut à rebus cognitis ad ignotas sensim progrediens ex prioribus rerum subsequentium comprobet intelligentiam, & ueritatem. Quæ cum perspicerem, in eáque re sæpenumero uersatus, magnáque animi intētione & studio singulas quásque res inter se conuenire, nihil collidere intelligerem, nullam moram studiis hominum putaui, quantum per me effici posset, diutius afferendam, quin laboribus nostris animíque exercitationibus fruerentur. Cúmque ex maiorum lucubrationibus, quo posteritatem iuuaremus, aliquid uideremur cōsequuti, & quibus omnia deberemus nihil esset quod post mortem hominibus bene meritis gratius per nos referri posse uideretur, quàm si quorū industriam experti uehemēter admiramur & suspicimus, eorum etiam humanitatis exemplum studiúmque posteritatis adiuuandę uellemus imitari, cœpi cõsilium rei totius illustrandæ. Itaque Græcorum demonstrationes interpretando consequutus, siue fuerint illæ Euclidis singulorúmue geometrarum, quorum symbolis hoc totum est opus absolutum, siue ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν, ubi pressius subtiliúsque compositæ uidebantur, fusiore quodã scribẽdi genere ita patefecisse me puto, ut lectori non dormitanti, sed attento nihil deesse possit ad rerũ intelligẽtiam: obitérque uiam & rationem resoluendi in primis theorematibus exemplorũ copia notauimus. Sed quo res adhuc multis incognita commendetur uberius, placuit nonnulla ex ueterum libris, Procli in primis, arbitratu quidem nostro sumpta, Latinis literis illustrata proponere, quibus initiis mathematica ducta cognitio, quã altũ ediderit rerum maximarũ fastigium, ut quã incredibilem ex se utilitatẽ seculis prioribus attulerit, eandem quoque sibi de ipsa polliceantur homines, si modo penitius ea studia inspexerint: neque, quod adhuc factum est, in primo liminis aditu, uixdum quinque sexue passus (totidem enim libris uulgo contenti sunt) in ea re progressi, restiterint. Illud itaque sciendum est, quod finitum & infinitum dicitur, principia summa esse mathematicarum specierum omnium. Nam ea principia inter se aliter atque aliter copulata, sufficiunt ad generandam eam uarietatẽ, quæ in rebus ipsis cernitur. Inde fit ut ipsarum proportiones in infi-

nitum

nitum excrescant: quas tamen ipsas finiri etiam necesse est, ob eam saltē causam, quia finiti quoq; naturam in ipsis existentem continent. Primum enim in arithmeticis, si ab unitate cœperis progrediēdo, reperies numeros in infinitum augeri: neque unquam excrescendi finem, ubi quiescant ipsi, fieri posse, ut cum eò perueneris, cessandum in illo numerorum auctu tibi prorsus intelligas. Quemcūque porro numerum effeceris, illum omnino finitū esse necesse est. Deinde in ipsis quoque magnitudinibus idē apparet, ut in infinitum diuisio illarum fieri possit. Ipsæ uero res ita diuisæ, omnino (& quod dicitur) actu ipso finitæ sunt: ut cum diuiditur aliquod totū in partes suas unde componitur, necesse est ipsas partes quæ ex diuisione procedunt, esse finitas: nam nisi finitæ essent, ne partes quidem ipsæ esse possent. Præterea si nihil esset infinitum, illa duo perabsurde consequerētur, & ut magnitudines omnes essent commensurabiles, neque in ipsis quicquam incōmensurabile: ideóque ne irrationale quidem. Hoc autem est, quo differunt ea, quæ in geometria pertractantur ab arithmeticis: siquidem in illis sunt quædam irrationalia, de quibus hoc libro: in arithmeticis uero nihil irrationale, aut incommensurabile cognoscitur: sunt enim omnes numeri commensurabiles inter se, ea saltem mēsura, quæ minima est in numeris, nempe unitate. Alterum quod perabsurde sequeretur, si nihil esset infinitū, illud est, quod ea uis & facultas unitatis, ut ex se numerorum sobolem infinitā procreare queat, non existeret: neque uero numeri proportiones omnes intra se continerent, quas in rebus singulis inesse perspicimus, multiplices dico, superparticulares & reliquas tales. Omnis enim numerus unitati cōparatus ad ipsam unitatem habet proportionē aliam, quàm idē ipse numerus ad alium numerum comparatus. Similiter si finitum nihil erit, commensurabilitas & communio proportionum, similitudo & æqualitas specierum, cæteráque huiusmodi quæ melioris cuiusdam sunt generis, in rebus distinguendis nulla sint: quæ tamē ipsa in mathematicis esse conspicimus. Ea uero si non essent, ne mathematica quidem ulla scientia superesset, cum nihil certo, constanter, subtiliterue diceretur, quod cogitatione firma cōcipi posset. Quantum uero utilitatis ea scientia communi hominum uitæ & societati cōferat, id quidem non ad usus ipsius uitæ necessarios respicientē æstimare conuenit: ita enim fieret ut cognitionem omnem & contemplationem rerum tāquam inutilem repudiaremus, quippe quæ à rerum humanarum necessaria suppeditatione sese quàm longissime soleat abducere, ne earum quidem rerum ullam omnino cognitionem aut curam appetēs, quibus usus uitę necessarius cōtineri solet. Est uero mathematicæ scientiæ sua certa, propriáque dignitas & utilitas, illa quidem per se æstimanda,

neque

neque quicquam externum respiciens, quo se referat, nullius omnino rei ministerio suam utilitatem accommodans, neque uitę necessitati subseruiens. Quin & liberales disciplinæ à libertate dictę, sui nominis dignitatem sustinere tueríue nullo modo possint, si ad seruiendum usibus necessariis reuocentur. Quòd si ulla ratione illud admittendum uidebitur, ut aliud quippiam extra se spectare debeat, cuius utilitatem consectandam sibi putet: quid est in omni rerum uniuersitate splendidius & magis excellens, quàm quod mathematica scientia uiam munire solet animis nostris? eámque certissimam ad rerum intelligibilium, omni materia solutarum cognitionẽ absolutam? Et quidẽ si qua est utilitas expetenda, illa est profecto, quam ex se præstãtissimã & eximiam profert. nam & quasi manu ducit ad res intelligibiles percipiendas, & quod est in Timæo scriptũ diuinitus, illius scientię cognitio uia quædam est ad plenam & integram mẽtis nostræ institutionem: cuius rei ea certe causa est atque ratio, quòd eadẽ est ipsi proportio ad cognitionem totius & primam philosophiam, quæ est institutioni puerili ad uirtutis ipsius summam & habitũ. Hæc enim efficit bonis & rectis moribus assuefaciendo, ut animus puerilis ad uitam ex uera uirtute perfectam adolescat: illa uero animi nostri partẽ eam, quæ διάνοια dicitur, ita suis commoditatibus instruit & cumulat, ut multo paratior ad res eximias inſpiciẽdas & cognoſcẽdas accedat. Ex quo Socratis ueriſſimũ illud mihi uideri ſolet, oculũ animæ, quem mentẽ dicimus, ipſum quidem ſtudiis & cupiditatibus obtutúque rerum alienarum excæcatũ, & ueluti defoſſum, ſolius ſciẽtiæ ratione diligentiáque recreatum excitari, & quodam ueluti collyrio perſanatum cõualeſcere ſolere: ita ſane, ut rurſum ad ſpeculationem ipſius entis, ab imaginibúsque perſpectis ad res ipſas, quarum illæ fuerãt imagines, erigi, & tanquam ex caliginoſo ſpecu in locũ illuſtriſſimũ eductus, illud ipſum lumen intelligibile acie conſtanti poſſit intueri: omninóque carcere quodam egreſſus, & rerum generabilium uinculis inconſtantíſque materiæ nodoſa uarietate tandem exolutus, ad incorpoream & impartibilem ſubſtantiam attolli. Nam & pulchritudo & ordinis illius ratio, qui in mathematicis elucet diſciplinis, ipſáque rerum ibidem perſpectarum certa conſtantia, animum noſtrum propius ſiſtunt ad intelligibilia, ipſa quoq; ſemper eodem modo ſe habẽtia, pulchritudiníq; diuinæ conuenientiſſima. Quæ cum ita ſint, mathematica ſcientia eſt, & ipſa quidẽ per ſe & ſuapte ui digniſſima, quæ ſtudioſe colatur: neque tamen non plurimum momenti ad eam uitam affert, quæ mentis unius maxime propria eſt & accommodata. Illud autem in hac re ſatis eſt argumenti, ſciẽtiam eam per ſe ſua ipſius dignitate & æſtimatione niti, ut eſt quodam loco ſcriptum ab

Ariſtotele,

Ariſtotele, quòd qui res illas exquiſiuerunt, nullo præmio, magna diligentia ſtudióque uehementi illud ſunt aſſequuti, ut paruo temporis interuallo illa permagnum acciperet incrementum, cum ipſi cæteris omnibus poſthabitis huic uni ſtudio ſe totos tradidiſſent: atq; hi maxime, qui diuiniore natura prædιti, diuinitatē ſuis factis exprimere, quoad licitum eſſet, elaborauerunt. Itaque uerißimū illud eſt, ſi qui ſunt, qui contēptui habendum hoc ſtudium exiſtiment, eos ſine guſtu eſſe ſummarum, quæ quidem in homine libero conſtantíque exiſtere poſſunt, uoluptatū. Quid ergo? nunquid habet ea ſcientia quod cōtemni debeat, ea re tantum quod nihil adiuuet cōmunis hominum uitæ neceſſarias utilitates? Nullo certe modo: nam & extremi illius effectus ubi ſe cum materia coniungere incipiunt, eò maxime tendunt, ut paulo poſt dicturi ſumus. Quin eo maiore digna res eſt admiratione, quod citra ullius omnino materiæ contagionem ſuum ipſa finem in eóque fine ſitum bonum perſequatur: & in ſe ipſa conuerſa nihil ſpectet externum. Homines enim rerum ad uſum uitæ neceſſarium cōparandarum occupationibus uacui plane ſolutíq;, ſeſe ad ſciendum ſcientiæque adeptionem contulerunt: neque id tamen non recte, cum prima cura rerum illarum eſſe debeat, quibus natura ipſa ad ſui educationem & tuitionē carere nullo modo poteſt. Huic porro ſi quando ſatisfactū erit, hoc eſt, ſi na turam ducem conſequuti, cupiditatem habendi rerum neceſſariarum modo naturáque metiri uoluerimus, tum uero illa nos cogitatio debet excipere, rerum à neceſſitate generationéque remotarum, & uerum ipſum proxime attingentium: quod cum acciderit, unà quoque id quod in anima noſtra inchoatum & rude fuerat, integrũ abſoluitur & perpolitũ. Scientiæ porro mathematicæ diuiſionem eam attulerunt ueterũ plerique, inter quos & Geminus, ut diceret aliam quidem circa res uerſari ſolo intellectu perceptibiles, aliã uero res ſenſui ſubiectas pertractare. Res autem intelligibiles illas eſſe dixerunt, quarũ intelligentiam ipſe per ſe animus abſque ulla rerum ſenſilium participatione ſeipſum ad contẽplationem excitans perſequitur: cuius generis duæ ſunt præcipuæ potiſſimæq; partes, arithmetica & geometria: alterũ uero genus quod rebus ſenſilibus addictum illa ſex comprehendit, aſtrologiam, muſicam, ſupputatricem, mechanicã, perſpectiuam, menſuratricem. Nam quod ad inſtruendas pertinet acies, (τακτικὸν uocant) in partibus mathematicæ habendum non arbitrãtur, quãuis interdum ipſius auxiliis uti adiuuaríque ſoleat, modo ſupputatricem adhibens, ut in enumerandis copiis, modo & menſuratricem, id eſt, γεωδαισίαν, ubi diuidenda ſunt caſtrorum metationi campi ſpatia & dimetienda: multo uero minus aut hiſtoriam: aut medendi artem dixeris partem ullam eſſe mathe-

maticæ,

maticæ,licet utraque ipsius ope interdum adiuuetur. Nam & historiæ perscribendæ mathematica theoremata solere scimus appingi, ubi tractus sitúsque regionum,urbium magnitudines, diametros, ambitus colligere uolunt. Ipsi quidẽ medici quàm multa in arte sua, quàm elucidate tractant freti mathematicæ cognitionis subsidio? Nam quod ad astrologiam pertinet, quanta eius in omnem medicinæ partẽ manare possit utilitas,docent de ea re scripti diligenter Hippocratis libri: cæteri quoque omnes, qui modo de tẽpestatum ratione locorúmque situ sibi scribendum putauerunt. Eadem quoque ratio erit eius, qui aciebus instruendis operam accommodat:nam utetur & ipse mathematicis theorematibus: neque tamen continuo mathematici nomine perhibẽdus, licet aliquando q̃ minimos cupiens in speciem uideri suos exercitus ad circuli figurã constituat castrorum ambitum,nonnũquam in quadratum pentagonum aut aliam multorum angulorum formam, ubi quàm maximos apparere cupit. Tales autem primæ species cum sint ipsius mathematicæ,geometria rursus diuiditur in tractatus duos, alterum planorum,alterum solidorum:nam punctorum & linearũ propria nulla omnino ars reperiri potest, cum nulla figura punctis aut lineis constet,quæ non simul plana sit aut solida. Nihil enim aliud agit geometria ulla sui parte,quàm ut plana & solida constituat:constituta inter se com paret aut diuidat. Hoc idem efficitur in arithmetica: nam & numeri diuiduntur in lineares, planos & ſolidos, quorum omnium ſingulatim ſua eſt tractatio. Nam & ſpecies numerorũ ipſæ per ſe ab unitate prodeuntes explicantur, & generationes planorum, ſimilium, inquam, & diſſimilium, & ſolidorum etiam, qui tertia quadam multiplicatione confici ſolent. Illa autem quam menſuratricem dicimus: item alia quam ſupputatricem ſuperiorum ſimilitudinem nonnullam referentes: ipſæ tamen ſunt in eo diſſimiles, quòd non de numeris aut figuris intellectu ſolo comprehenſis inueſtigant, ſed de ſenſilibus: neque enim munus menſuratricis eſſe poſueris, ut cylindrum aut conum metiatur, ſed rerum in materia demerſarum aceruos tanquam conos, puteos autem ut cylindros: ſed neque lineis quibuſdam intelligibilibus id aſſequitur, uerum ſenſilibus, & ut exactiſſime, radiis ſolaribus: ruditer autẽ, per applicationem amuſſis lineæ, aut alterius rei non diſſimilis opera, quæ materia conſtet. Quam uero diximus ſupputatricem, ne ea quidem paſſiones numerorum ipſas per ſe cõſiderat, ſed numeros rebus materialibus inuolutos: & diuidendo quidem nihil ſtatuit eſſe minimum, quomodo neque arithmetica: quod tamen ſpectat ad certum genus unum, ponit aliquid quod ſit minimum: unus enim aliquis homo eſt illi pro menſura totius hominum multitudinis, ſicut unitas quoque menſura com-

munis

munis est omnium numerorum. Perspectiua rursus & musica sunt quædam ueluti partes, illa quidem geometriæ, hæc autẽ arithmeticę. Nam perspectiua uisu nostro ceu linea abutitur, & iis angulis qui ex radiis uisoriis constituuntur: diuiditúrque in eam quæ proprio nomine dicitur perspectiua, causas explicans eorũ, quæ aliter quàm sint, apparere solent, ob ipsorum alios atque alios positus & distantias: quales sunt lineæ parallelæ concurrere uisæ: rerum quoque quadratarũ figuræ circulari forma conspectæ. item in eam quę in uniuersum specularis dici potest, quæ cuiusq; generis radios fractos siue flexos perscrutatur, uisorum seu imaginum cognitionem adiunctam habẽs, simul & illud afferẽs, quî fieri possit, uti quod conspicitur, amœnum sit uisu iucundúmq;, nulla partium suarum discrepãtia aut deprauatione corruptam imaginem propter interuallũ aut eleuationem rei uisæ, oculis spectantium exhibens. Musica uero consonantium numerorum rationes auribus acceptas cũ indagasset, canones suos & fides ipsas ita secandas ostendit, ut faciles ad cognitionem nostram illæ sonorum conuenientiæ fierent: cúmque passim ad sensuum delectationẽ iudiciúmque diuerteret, sermonem Platoni dedit affirmanti eã esse, quæ menti aures ipsas prętulisse uisa sit. Ad illas superiores accedit mechanica, pars & ipsa quædã existens totius tractationis & cognitionis rerum sensilium & materiæ coniunctarum. Huius autē generis illa eſt quæ opera & machinas cuiuſque modi efficit ad uſum totius rei bellicę neceſſarium idoneas: qualia multa diuino uir ingenio Syracuſius Archimedes excogitaſſe ſcribitur & conſtruxiſſe, uim permagnam & incredibilem habentia, ipſis quoque Romanis Syracuſas terra maríque obſidentibus formidabilia: quorum tamen ipſorũ nihil apud Archimedem tanti fuerat, ut magno ſtudio dignum arbitraretur: uerum ſicut Plutarchus in Marcello ſcribit elegantiſſime, γεωμετρίας παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ πλεῖστα: ea tamē fuerunt unius hominis ludicra, ut Romanorum uires toti pene terrarum orbi formidabiles diutius eluſerint, nec ante urbis potiũdæ Marcello imperatori clariſſimo ſpes facta fuerit, quàm ex inſidiis noctu, mœnibus per abſentiam Archimedis indefenſis ſcalas admouerit. Fabuloſa hæc profecto uideri poſſint, ſi ad noſtrorũ hominum ingenia, quæ uſpiam ſunt nobiliſſima, conferantur. Verum tamē perinique faceremus, ſi primum aliorum induſtriam ex cæterorũ metiri uellemus ignauia: ut quod hi non poſſint, ne illi quidem potuiſſe uideantur. Deinde quî fieri poſſit, quæ præſtantiſſimi quique, iidémque grauiſſimi ſcriptores, non Græci tantum, qui ſuis ambitioſius fauiſſe uideri poſſint, ſed etiã Latini, iiq; Græcis hominibus ſępius iniqui, M. Tullius, T. Liuius in unius hominis laudibus conſentientes ad cælum extulerũt, ut his fidem abrogemus? Quòd

ſine

ſine authoritate quidem ulla ad credendum adducimur, ſunt in oculis manibúsq; noſtris Archimedis ipſius opera, non illa quidem de machinis ipſis aut operibus conſcripta, nihil enim tale ſcriptione dignũ magnopere iudicauit, ſed quæ longe maiora diuinioráque cenſenda ſint, rerum illarum uniuerſalia theoremata, quæ ſi quis uia ordinéque aggreſſus erit, cum iiſdem ueſtigiis inſtiterit, quibus Archimedes & ueteres illi nobiléſq; geometræ, eodem quoque peruenturum ſeſe confidat. Nobis quidem ſi uita ſuppetet, illud in primis curæ futurum eſt, quod adhuc fuit in hoc decimo Euclidis libro, ut difficillimi quique priſcorum geometrarum libri certa ſpe & fiducia intelligendi legi poſſint ab iis, qui modo ſtudiorũ ſuorum rationem ad ueterum normam exigere, ordinémque certiſſimum diſcendi magiſtrum conſeruare uolét. Ordinem autem ipſum ſi quis obſeruauerit, nihil præterea putet eſſe, quod ſibi deeſſe poſſit. Sed iam ad inſtitutũ ut reuertamur, ad eas artes quas ante memorauimus accedit & illa, quæ rebus ex ſeſe immobilibus motum attribuit, nunc per quaſdam aſpirationes, quemadmodum perſecuti ſunt Cteſibius & Heron: nunc per librationes ponderúmque momenta, quorum inæqualitas mouendi cauſam affert, æqualitas uero quietis neceſſitatẽ, ut eſt in Timæo: nunc quibuſdã neruis & funiculis attractus & motiones animatorum corporum imitantibus. Eſt & alia generis eiuſdem, quæ ſphæris conſtruendis operam adhibens, circuitus orbium cæleſtium imitatione conſequitur: qualem idem ille nunquam ſatis laudatus Archimedes effinxit. Aſtrologia ſupereſt diſputationem inſtituens de mundi ipſius cõuerſione mirabili, de magnitudine, figura, ſitu, celeritate, tarditate corporum cæleſtium: quæ uis ſit in illis illuminãdi, qui diſceſſus à terra, qui ad eãdem acceſſus: & quæ ſunt his conſequentia, ex ſenſu quidem & ipſa permultum inſtructa, nihilo tamen minus cognitioni rerum naturalium familiariter communicãs. Cuius illa pars contemnenda non eſt, quæ ex normarum & umbilicorum ſitu, horarum ſpatia & tempeſtatum interualla dimetitur: quæq; ſublimia ueſtigando poli cæleſtis altitudines in quaque terrarum parte, aſtrorúmque diſſitas poſitiones comprehẽdit, pleraque ſimul alia perſequens, quæ ſunt aſtrologo ſpeculanti propoſita. Eſt & illa quæ dioptrica dicitur per rimulas in ſole, luna cæteríſq; ſyderibus celeritates tarditatéſque motuũ uenari ſolita. Eæ quidem ſunt partes ſcientiæ mathematicæ, ita deſcriptæ à ueteribus mathematicis, quemadmodũ explicuimus. Nunc autem de fine ad quem feratur intendátque, cum hæc tota tractatio elementorum geometricorum, tum ea de lineis rationalibus & irrationalibus, quæ eſt huius decimi libri propria, pauca quædam afferamus. Qua in re illud ſane cum primis eſt intelligendũ, propoſitum

duplex

duplex Euclidi fuiſſe in his quidem libris: aliud quod traditionem rerum perquiſitarum reſpiceret: aliud præterea quod diſcẽtis animum omnibus modis informaret & erudiret: ut ſi res ipſæ inueſtigationi ſubiectæ conſiderandæ ſint, dicendũ profecto uideatur toto hoc de geometria ſermone nihil aliud quæri, quàm ut nobiles illæ figuræ quinque plane comprehẽſione intelligantur, à quibus mundus hic uniuerſus, iudicio quidẽ Platonis, deſcriptas ſuas habet partes. Itaq; primum cœpit agi de ſimpliciſſimis quibuſque rebus: deinde ſenſim aſſurgente compoſitionis ſtructura, eò tandem peruentum eſt, ut uarietas omnis illarum figurarum aperiretur, & ſeparatim quidem unaquæque prius conſtituta, tum denique ſimul omnes eodem globo contentæ inuoluerẽtur, expoſitis etiam proportionibus, quas lineis lateralibus cuiuſque figuræ inter ſe, quáſque ſuperficiebus ipſis, & quas ſolidis etiam figuris inter ipſas ineſſe compertum eſt. Quod autem ad illud propoſitum attinet, erudiendi eius qui ad hoc ſtudiũ diſcendum acceſſerit, huiuſmodi eſt, ut ſecũdum Elementorũ geometricorum intelligẽtiam perfecte cumuletur animus, abſoluatúrq; ipſius habitus & compleatur: quo facile poſſit ad quamlibet geometriæ tractationẽ comprehendẽdam ipſe ſibi ſufficere. Ab his enim uelut initiis auſpicati, cæterarũ quoq; permultarũ, uel potius omniũ huius ſciẽtiæ partium poterimus cognitionem aſſequi, eiusdémque multiplicem animo complecti uarietatem: neque id tantum, quin & illud quoque uerissime dici potest, sine iisdem ipsis reliquorum omnium non obscuram solum, uerum neque omnino possibilem esse intelligẽtiam. Nam & prima quæque atq; simplicissima theoremata proxime etiam ad primas hypotheses accedentia, sunt his libris ita coagmentata, ut interim nullum ordinem magis cuiq; rei conuenientem afferri potuisse cognoscamus: ex quibus cæterarũ partium scriptores ad propositũ suũ accõmodate, certissimis & incõuulsis usi sunt suarũ demõstrationum fundamentis. Quo in genere est Archimedes, Apollonius Pergæus, & cęteri omnes nõ geometræ tantũ, sed & astrologi, & qui mathematicorũ nomine censeri solẽt. Hoc autem cum alibi semper, tum uero in legendis Conicis Apollonij certissimum esse nuper ipsi uidimus: ad quæ nisi diligenter instructus ab Euclide ueneris, operã plane tibi perijsse senties. Est enim Euclidis geometria non ad eorum tantũ cognitionem, quę sunt de eodem genere scripta, necessario perdiscenda, sed etiam in quauis mathematicarũ scientiarũ nihil cuiquã satis poterit esse notum, qui nõ à geometria profectus peruenerit ad cætera: quam si quis secundũ Philonẽ esse dixerit principiũ & tãquam μητρόπολιν reliquarum omnium mathematicarum, is profecto à rei totius ueritate non aberrauerit. Nam ex illa matrice ueluti quadam urbe populosa deductæ

ctæ ſunt illæ deinceps coloniȩ, quȩ ſunt à nobis ſuperius explicatæ. Eſt ergo finis ille geometricorũ elementorum abſolutus diſcentis habitus, ſcientiæ uniuerſæ capax, traditióque mundanarũ figurarum, quæ ſint cuiuſq; propriæ fabricationes & inter ſe conuenientiæ. Id uero de quo conſcriptus eſt hic decimus liber, de commenſurabilitate dico & incommenſurabilitate, rationalitate & irrationalitate linearum, eò pertinet, ut cum extremum totius operis futurum illud eſſet exponere, figurarũ, de quibus antea dictũ eſt, dimenſus, ea præfari oportere uiſa ſunt, ſine quibus illud percipi nullo modo poſſet. In primíſque neceſſarium fuit, quoniã illæ figuræ æqualibus ſuperficiebus, lateribus item & angulis æquis comprehendendæ erant, & eodem globo ita coercendæ, ut quilibet angulus ſolidus cuiuſque figuræ intimam faciem pertingeret, oſtendere quanto diameter globi longior eſſet unoquoque cuiuſque figuræ latere. Cúmque uidiſſet Euclides in pyramide, octaedro & cubo talem eſſe habitudinem ipſorum laterum ad globi diametrum, quam rationalem eſſe poſuerat, ut eſſent ipſa inter ſeſe comparata lõgitudine quidem incommenſurabilia, ſed potentia tamen commenſurabilia, ideóque rationalia: in eicoſaedro uero & dodecaedro non ſolum eſſe inter ipſa latera longitudinis incommenſurabilitatem, ſed & potentiæ quoque, ob eámque cauſam illa eſſe ſimpliciter irrationalia certæ cuiuſdã ſpeciei. Ea ratione priuſquã ad illa demonſtranda aggrederetur, intellexit omnino ſibi faciendũ eſſe, ut de linearum rationalitate irrationalitatéq; tractatum inſtitueret, quótque & quales eſſent ſpecies irrationalium linearum: ut non appellationibus tãtum diſcretis notari poſſent, ſed, quod multò certius eſt ad quãque rem cognoſcendam, quid cuique ſpeciei ſingulatim neceſſarióque cõueniret, perſpicuum fieret. Proinde tractatum illum abſolui non poſſe ſine cognitione numerorũ cum facile intelligeret, ideo de ui numerorũ quãtum ſatis uiſum eſt ad ſermonem ſuſceptum, tribus eſt libris diligentiſſimè commẽtatus. Neque enim ferendus eſt neſcio quorũ hominum error, affirmantium proportiones linearum irrationalium eſſe non nobis tantum, ſed & naturæ ignotas: ob idque potiſſimum, quòd illæ tales proportiones nõ extent in numeris. Quod ſi ita eſſet, primum quàm inanis uideri deberet conatus Euclidis, operam in re per ſe inexplicabili abutentis? tum autem adeo ſunt illuſtres hoc libro notæ, támque proprij cuiuſque ueluti mores expreſſi, ut quod Euclides conari uiſus eſt, illud abunde perfectéque præſtitiſſe intelligatur. Nobiliſſimũ itaque totius geometriæ locum à Pythagora philoſopho præſtantiſſimo ante pateſactum ita perpoliuit excoluítque, ut deſiderio nihil reliquerit.

Hæc habui Bellaï ampliſſime, quæ nõ quidẽ dicere poſſem, finem enim nullũ habitura eſſet ora-

tio,

tio, sed quæ cum dixissem, existimaui iuuentutis partem aliquam excitatum iri, ut cuperet imitatione studiorum, ueterum philosophorum nominis gloriam æmulari. Cuius præclarissimæ cōtentionis in animis hominum excitandæ facultatem uiris concessam esse principibus, eámque amplissimam, cum intelligeret Franciscus Rex, huius nostri pater, omnium bonarum artium fidelissimus tutor, patronus atque propugnator acerrimus, iuuit ille quidem mirifice studia literarum: uerum minus profecto quàm uoluit, magis autem multo, quàm licitum illi fuit per quorundam auersas à laudabilissimo studio rationes, atque uolũtates. Illius tu Regis alumnus, illius tu beneficentia ad summos fortunæ dignitatísque gradus, doctrinæ commendatione sublatus, recte constantérque feceris, si quod per te nauiter facis, patrocinium philosophiæ antea quidẽ à Rege liberalissimo susceptum, ita retinere pergas, ut Margareta Regis filia, iudiciíque paterni, atque animi in bonarũ artium studiis, bonorúmque omnium tuitione obseruantissima atque æmula, bene collocatum in te ornando patris beneficium prædicare possit. Permultos autem esse multis in locis cum acceperim, quorum in philosophiæ literis studia, tuis paratissimis opibus alantur & sustententur: hæc autem una mathematica cognitio, cuius tantæ sunt in omni philosophiæ parte commoditates, deserta plane destitutáque reliquorum hominum preſidiis paſſim iaceat atque ignoretur, tuæ certæ partes illæ ſunt, ut huic quoque ſtudio pro tua humanitate per te conſultum uelis: ex iſtóque præclaro tuorum grege, de quo paulò antè dixi, certos eligas ingenio acres, quibus id muneris omnium iucundiſſimi atque fructuoſiſſimi committas, ut totam rem mathematicam diligenter amplexi, penitúſque perſcrutati, poſſint cæteros exemplo doctrináque ad ſui æmulationem permouere.

Vale. Lutetia Calend. Iulij. 1 5 5 1.

Errata ſic corrigito. Fol.8.uerſ.9.propoſitis.fo.15.in fig ι ζ.eod. fol, uerſ.18.Quare ι met.fo.20.in fig. α ζ.fo.24.b.uerſ.22.amplius. uerſ.26.quam.fol.27.b.uerſ.18.ſecundã fo.31.uerſ.ante penul.dele ſuperficiales.fo.34.b.uerſ.antepen.quàm.fo.43.in fig.lin.α ſubijce γ.fo.49.ĩ fig.ubi eſt γ, pone δ.ubi eſt δ, γ.fo.54.in fig.θ δ ι ζ γ.fo. 74.uer.14.binomiũ:alibi.fo.80.uerſ.19.linea δ β.fo.88.uerſ.21.eo quod.fo.89.in fig.ι θ λ.fol 95.uerſ.10.uerbis ij.fol.102.b.uerſ.13. ideo ſic.fol.104.Octogeſimũ ubiq;.fol.110.b.uerſ.21.quàm.fo.114 in fig. ſub π ſcribe υ.fol.116.uerſ.13.per 1.6.fol.127.b.uerſ.2.quadratum.fol.329.uerſ.25.linea κ θ.fo.132.uerſ.14.ad β δ.fol.134. uerſ.12.lineæ.fo.135, b.uerſ.24.lineæ, κ λ.fol.136.uerſ.13.dictarũ.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

Petro Montaureo interprete.

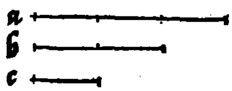
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur illæ, quas eadem mensura metitur.

PROPOSITVM *nobis illud est hunc decimũ elemẽtorum librum (cuius intelligentiam plerique difficillimam suspicantur, neq; uerò possibilem absque auxilio eius partis arithmeticæ, quam multorum scriptis illustratã* Algebram *uocant) sine omnino ullis numeris irrationalibus dictis ostendere, nõ solùm non difficillimũ, sed etiam facillimum esse, si quis attentum animum & instructum scientia librorum superiorum* Euclidis *afferat: neque porrò cuiusquam externæ scientiæ, nedum algebræ demonstrationibus indigere: sed ex suis ipsius* Euclidis *tãtum demonstrationibus, & familiarissimo ipsi ordine dependere. Vt autem clarius intelligatur hæc definitio, prius explanãdum puto, si quid in ea subobscurum contineri uideatur. sic enim præcipiunt dialectici. Cum itaque dicitur aliqua mensura magnitudinẽ aliam metiri: illud intelligitur primùm, ut ea mensura sit minor illa quam metitur, aut ei saltem æqualis. maior enim nullo modo metiri minorem potest. Deinde ut ea mensura semel sumpta si æqualis erit, aut si minor fuerit pluribus uicibus repetita: eam magnitudinem quam metitur, præcise referat. id quod ex numeris* *deprehendi facillime potest. Quãuis enim Euclides hac definitione comprahendat magnitudines tantùm quas quantitates continuas appellant, quales sunt lineæ, superficies, & corpora: tamen arbitror non inepte requirendam esse explicationem huius loci à numeris: quum præsertim magnitudines commensurabiles eam habeãt proportionem inter se, quam numerus ad numerum.*

Campanus uir ex geometriæ studijs laudem nõ immeritò consequutus, illud principium rectè inserit cæteris libri septimi principijs, cum græcum exemplar nihil tale habeat. Numerus aliũ numerare dicitur, qui secundum aliquem multiplicatus, illum producit. cuius rei hoc sit exemplum. Ternarius numerat ternarium per unitatẽ multiplicatus. idem ternarius numerat senarium per binarium multiplicatus: numerat nouenarium per ternarium multiplicatus: numerat 12 per 4: numerat quoq; cæteros infinitos. Ille ipse tamen ternarius alios numeros superioribus interpositos minime numerat. Nam neq; unitatem ipsam, aut binarium numerat. Maior enim minorem nullo modo numerare potest: sicut in magnitudinibus (ut antè diximus) maior mensura minorem seipsa magnitudinem non metitur. Neque uerò ternarius numerat 4 aut 5. per unitatem enim multiplicatus nihil amplius efficit quàm 3. binario uerò multiplicatus, excedit & 4 & 5. multo magis si alio ternario aut maiore aliquo numero multiplicatus fuerit, eosdem 4 & 5 excesserit. Eadẽ ratio est septenarij, octonarij, denarij & undenarij, si unum ex his quemlibet coneris per ternariũ numerare. Si quis

autem

autem erit qui me res nimiũ minutas perſequi repræhendat: conſilium noſtrum illud eſſe ſciat, ut librũ hũc, non tam natura ſua difficilẽ, quàm ignoratione principiorum, ad intelligendum facillimum reddam his qui amœniſsimum hunc geometriæ locũ perluſtrare uolent. Et certè in maximos errores pleroſq; imprudentiæ ſuæ uitio & principiorum parua ſiue dicas praua intelligentia turpiter incidiſſe, neminem dubitaturum arbitror, qui modò noſtra legens, ipſarum rerum intelligentiam aſſequutus erit. De his autem hactenus. nos in uiã redeamus. Dicimus hanc definitionem magnitudinũ commenſurabilium, ſiue malis principium nominare, per analogiam quandam ex illo Campani loco plane intelligi. Nam quod dicitur in numeris alios numeros numerantibus: idem aut ſimile quiddam intelligas in magnitudinibus, quarum alteram dicimus per alterã menſurari. Quod ut planius intelligatur, ſumamus exẽplum in una ſpecie magnitudinis. Sint duæ lineæ ã & b. quæ ſi fuerint cõmenſurabiles, erit quoque communis utrique aliqua menſura quæ ſit c. Nam illa linea c bis repetita, refert præciſe lineam b. ter uerò repetita, lineam ã, & ipſa quoque præciſe refert.

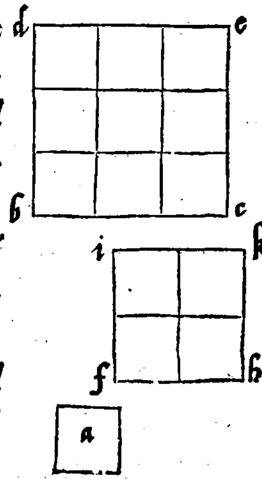


Incommenſurabiles verò magnitudines dicuntur hæ, quarum nullam menſuram communẽ contingit reperiri.

Hic locus pluribus uerbis non uidetur indigere, quàm ut *moneamus ex ſuperius dictis intelligendū eſſe. Contraria enim ex contrarijs intelligi poſſe receptum eſt. Porrò accidentia & paſsiones his congruentes ex ipſo Euclide repeti debere ſequentium rerum lectio docebit.*

Lineæ rectæ potentiâ commenſurabiles ſunt: quarum quadrata una eadem ſuperficies ſiue area metitur.

Quantum ad hunc locum attinet, duo quædam præſcribenda puto. Primum, ut intelligamus per hāc uocem, lineæ potentia, quadratū illius. tantum enim dicitur linea poſſe, quantum quadratum deſcribere poteſt. Alterum, ut tali diſtinctione hîc utamur. Linearum hæ quidem ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles: illæ uerò potentiâ inter ſe commenſurabiles. Alterum membrum linearum longitudine commenſurabiliū non explicat Euclides, quia uiſus erat illud comprehēdiſſe antea uniuerſali definitione magnitudinum commenſurabiliū. Nam lineæ ſunt ſub genere magnitudinis. Sed quia lineæ habent illud quoque in ſe propriū & peculiare, præter cæteras magnitudines, ut quædam ex his ſint potentiâ cō menſurabiles: hoc uerò ſibi nō exiſtimauit prætermittendum.



Sit linea b c. eius quadratū ſit b c d e. ſit etiā linea f h. eius quadratū ſit f h i k. hæc duo quadrata me-

tiatur

tiatur una quæpiã superficies, uerbi gratia superficies ã, quæ metiatur primò quadratum b c d e, nouies repetita, qui est numerus areolarum in eodẽ quadrato descriptarum. Præterea *metiatur quadratũ f h i* k, *quater repetita, secundum numerum suarum areolarum. Erit itaque superficies ã, illa, quæ metitur ea quadrata duo.* Horum *ergo, quadratorũ inquam, b c d e, f h i* k, *latera siue lineæ potentes illa quadrata, quæ sunt lineæ b c, f h, erunt potentiâ commensurabiles.*

Incommensurabiles verò lineæ sunt, quarum quadrata, quę metiatur area communis, reperiri nulla potest.

Hoc loco nihil aliud dico, quàm ut adiuues intelligentiam huius loci additione uocis, potentia, quæ superiori definitioni additur, ut intelligas de lineis illis quæ sunt incommensurabiles potentiâ: quæ cum sint potentiâ incõmensurabiles: illud quoque habent, ut sint præterea longitudine incommensurabiles. hactenus dictũ sit. Quòd si plura hoc quidem loco scire desideres: peruertes ordinem disciplinæ, qui certissimus est ad discẽdũ magister.

Hæc cum ita sint, ostendi potest, quòd quãtacunq; linea recta nobis proponatur: existunt etiam alię lineæ innumerabiles eidem cõmensurabiles: alię item incommensurabiles. hæ quidẽ longitudine & potentia: illæ verò potentia tantùm.

Huius libri præcipuum illud esse uelim scias, quod non, ut cæterorum superiorum, in prima lectione percipi possit *eius doctrina, sed iterata & sæpius repetita: eóque fit ut plæraque principia hic scripta, non quidem demonstrentur ex sequentibus: sed melius intelligantur, si cum ad sequentia ueneris, ad principia subinde redeas. Vsus enim harum uocum, qui est in ipsis theorematibus, res illis uocibus expressas faciliores intellectu reddit. Sic itaque faciendum puto hoc quidem loco. Nam sequentes propositiones magnam illi lucem afferent. Tantum enitere ut concipias animo res nudas, quarum significatio his uocibus simplicibus continetur: in quo te iuuabunt ea quæ superius à nobis scripta sunt. Vocetur igitur linea recta, quantacūque proponatur ῥητὴ, id est rationalis. Quam lineam uocari uult ῥητὴν, eam interpretes Latini nominauerunt rationalē. qua ratione ducti, nescio: mihi quidē non ualde probatur. Sit ergo ῥητὴ linea recta quæcunque, de qua sermo institui debeat. Etymologiæ rationem in enuntiatione rerū uocibus simplicibus significandarum, sicut uisi sunt ueteres magna diligentia consequuti: ita nobis non contemnendā existimo, ut rerum ipsarum cognitionem adiuuemus. huius uocis ῥητὴ ratio ducta mihi uideri solet ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι unde τὰ ῥητὰ καὶ ἄρρητα. ῥητὸν illud interpretor quod est effabile, certum, concessum, & determinatum: ac si, uerbi causa, dicas id esse, quod est dicibile, & uoce significari possit. ῥητὴ itaq; erit quæcunque linea, quantacunque magnitudine proponatur. Ideo ῥητὴ nominata, quia datam lineā possumus diuidere in quàm multas partes uoluerimus. Scitum est enim ex nona propositione sexti libri, A data linea iussam partē auferre.*

ferre. Quod quum ita sit, proposita linea diuisiones eas admittit, quas animo conceperis: ut dicas, hæc linea quæ proponitur, tot partes habet, tres puta, quatuor aut quinque, quas aut pedes aut passus, aut aliud quoduis mensuræ genus esse contigerit, ut tres pedes aut passus quatuor longa sit. hæc autem linea, quam ῥητὴν uoco, omnibus penè propositionibus huius libri, & eis maximè quæ à decima incipiunt, fundamenta præstat: ut nisi hanc primo loco posueris, & animo conceperis antequam demonstrationem cuiusque theorematis attingas, nullum facile intelligas. Est enim uelut norma omnium linearum ex qua ipsarum quoque mensura peti debet an sint rationales necne. Nam *hæc ipsa ῥητὴ quæ hic denominatur, est ῥητὴ ex suppositione quod quidem hæc uox προτεθεῖσα facile indicat, quasi dixerit ὑποτεθεῖσα, quæ uelut ῥητὴ id est rationalis primo loco dici potest, ut ipsa uoce differat à cæteris lineis rationalibus, de quibus mox agit. Cuius rei te perpetuò meminisse uelim.*

Lineæ quoque illi ῥητῇ commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantũ, vocentur & ipsæ ῥηταὶ id est rationales.

Hic locus plane intelligitur ex duabus definitionibus supradictis, nempe magnitudinum commensurabilium, & linearum potentia commensurabilium. Obiter tamen aduertas in his uerbis, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, quantã cautionem adhibuit Euclides, *ut uocibus ipsis coniungeret* *res eas quæ natura sua coniunguntur, seiungeretq́; contrarias. quod religiosissime mathematici penè omnes uisi sunt obseruare: ut in hoc loco, quia lineæ longitudine commensurabiles, sunt & ipsæ quoque potentia commensurabiles, quum de commensurabilibus longitudine loqueretur, addere uoluit, & potentia. cum uerò de potentia cõmensurabilibus, apposuit, tantùm. Quæ enim lineæ sunt potentià commensurabiles, non cõtinuò sunt & longitudine. Hæ uerò* ῥηταὶ *id est rationales, quæ hoc loco talem denominationem acceperunt, iam non sunt* ῥηταὶ *ex suppositione, id quod erat illa prior* ῥητὴ*: sed sunt tales propter relationem quam habent ad illam. Quia sunt aut longitudine simulq́; potentia, aut potentia tantùm, ipsi* ῥητῇ *quæ primo loco ita dicitur, commensurabiles. Præterea hìc est animaduertendum, uoces illas, longitudine & potentia, aut potentia tantùm, coniungi cum illis uocibus commensurabiles, aut incommensurabiles: illis uerò uocibus, rationales, aut irrationales, nunquam adponi, ut dicantur longitudine siue potentia rationales aut irrationales lineæ. quod Campanus uidetur promiscue usurpasse. Si plura cupis, auidum discendi animũ hìc retineto, ne uestigia authoris, eiusdemq́; ducis tui deseras, qui principia quidẽ simplicissime tradenda sibi putauit, ut discentium animos nuda rei notione tantùm informaret. quod & uerius est, & ad docendum magis appositum.*

Quæ verò lineæ sunt incommensurabiles, illi τῇ ῥητῇ id est primo loco rationali, vocentur ἄλογοι id est irrationales.

Illud

Illud intellige de lineis longitudine & potentia incommensurabilibus. Nam incommensurabiles potẽtia tantùm, ut eædem non sint longitudine etiam incommensurabiles, esse nullæ possunt. neque hic existimes Euclidem agere de lineis longitudine tantùm incommensurabilibus, potentia uerò commensurabilibus. has enim nuper posuit inter ῥητὰς id est rationales. Vult autem hic lineas omni ratione incõmensurabiles, id est potentia & longitudine uocari ἀλόγους. Quod cum non ita perceptum esset à Campano, uidetur homini causam erroris attulisse, quam ipse posteris quoque tradidit, ut mox dicemus. Quid sit ῥητὴ, & ῥητὸν, antè dictum est. Quod uerò ad hanc uocem ἄλογοι pertinet, ex commẽtarijs Procli scire licet, ῥητὸν καὶ ἄρρητον opponi per priuationem, ut ἄρρητον sit contrarium τῷ ῥητῷ: ἄλογον autem sæpius usurpari pro hac uoce ἄρρητον, cum tamẽ idem sit ἄλογον & ἄρρητον. hoc ἀπὸ τοῦ εἰρῆσθαι, illud ἀπὸ τοῦ λέγεσθαι, quæ idẽ significant. Itaque ἄλογος linea erit cuius proportio siue longitudo comparata ad longitudinem τῆς ῥητῆς id est ipsius lineæ primo loco, & ex suppositione rationalis, nullis numeris referri potest. Neq; putes ἄλογοι dici per priuationem τοῦ λόγου id est proportionis. Est enim sua proportio linearum alogarum inter se non quidem nobis planè incognita, nedum ut naturæ cognitionẽ effugiãt: quod quidã uolunt, alioqui frustrà sumpsisset eam operam Euclides hoc quidẽ in libro in quo nihil aliud agit, quàm ut doceat paßiones illarum linearum, & proportiones quas illæ lineæ ἄλογοι inter se retinent. Verũ ea ratione dicuntur ἄλογοι, quia numeris earum proportio *reddi non potest.* Nam *quod isti uocant irrationale, cur ita uocent, non intelligo. Surdas autem lineas dici, quas hîc* ἀλόγους *uocat* Euclides, *non omnino displicet: quãuis mathematici nõ facile huiusmodi translationes admittant, sed quia propriam huius rei uocẽ deesse agnoscimus, ferri potest hæc translatio.* Neque *tamen hoc loco prætermittendũ puto, quod* Nicolaus Tartalea *geometra apud* Venetos, *& libris eruditis nobis quoq; non incognitus, animaduertit* Campanum *& reliquos ab eo geometras falso existimauisse radices siue lineas quæ quadrata producunt, illa quidem numero significabilia, sed non quadrato numero, ueluti* 10, 11, 12, *& similibus, eas inquam lineas* ἀλόγους *esse id est, ut eorum uerbo utar, surdas: hoc uerò pugnare contra hypotheses* Euclidis, *qui uoluit eas uocari* ῥητὰς *id est rationales, quæ sunt ad lineam propositam commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm: ex quo magnas opinionum differentias in plerisque huius libri locis extitisse. hactenus* Tartalea. Neque *sanè hoc nihil est, neque tamen in eo sunt omnia.* Ego *uerò illud affirmare non dubitem, hinc cæpisse noctis illius initiũ, quæ tam densas tenebras offuderit ueritati rerum his libris traditarum, quæ docentes & discentes plerosq; omnes diuersos egerint: ut quum ulterius progrederẽtur, nihil amplius intelligerent, quàm se nihil intelligere. nostrum quidem de ea re iudicium cum opus fuerit, afferemus.*

Et quadratum quod à linea proposita describitur, quam ῥητὴν uocari uoluimus, uocetur ῥητόν.

Non *uideo quid planius dici possit.*

Et

Et quæ sunt huic commensurabilia, uocentur ῥητά.

Hanc uocem commēsurabilia, intelligas siue sint quadrata, siue aliæ quæcunque figuræ rectilineæ. Scitum est enim cuicunque parallelogrammo, æquale quadratum describere: per ultimum theorema libri secundi, siue per inuentionem lineæ mediæ proportionalis secundum 13 theorema libri 6. quam ubi repereris, colliges statim per 17.6. parallelogrammum rectangulum cōpræhensum ex duabus lineis extremis esse æquale quadrato lineæ mediæ. Simili ratione rursus cuicunq; quadrato parallelogrammum æquale describitur, per inuentionem tertiæ lineæ proportionalis secūdum theorema 11.6. hîc uides nihil tale dici de quadratis & cæteris figuris, quale de lineis antea, quarum est & longitudo & potentia commensurabilis. Figurarum enim sola consideratur capacitas, quam longitudo latitudini iuncta determinat.

inter quadrati latus
& eiusdem diametru
inuenienda est
tertia proportionalis
linea, quæ latitudine
parallelog.ᵒ referret
vt □ 25. diameter sit
erit √ 14 / latus
vero □ 5 / tertia
proportionalis 3 4/7
quæ multiplicata
super 7 reddit
25. parallelogrā
quadrato æq. latus

Quæ uerò sunt illi quadrato, ῥητῷ scilicet, incommēsurabilia uocentur ἄλογα id est surda.

Incommensurabilia hîc quoq; accipias, quales quales fuerint figuræ rectilineæ.

Et lineæ quæ illa incommensurabilia describunt, uocentur ἄλογοι. Et quidem si illa incommensurabilia fuerint quadrata, ipsa eorum latera uocabuntur ἄλογοι lineæ. quod si quadrata quidem nō fuerint, uerùm aliæ quæpiam superficies siue figuræ rectilineæ, tunc uerò lineæ illæ quæ describunt quadrata æqualia figuris rectilineis, vocentur ἄλογοι.

Vnum est quod hoc loco animaduertendum putem. Cum dixisset ἄλογα esse quæ sunt incommensurabilia τῷ ῥητῷ, subiungere uoluit de lineis illa incommensurabilia describentibus, & eas uocauit similiter ἀλόγους: cum tamẽ antea loqueretur de commensurabilibus ipsi ῥητῷ, nihil egit de lineis illa commensurabilia describentibus. hoc autem ea ratione prætermisit, quia satis sibi fecisse uidebatur, & de his innuisse, cum loqueretur de lineis τῇ ῥητῇ cõmensurabilibus, sub illis uerbis, siue potẽtia tantùm. Nam potentia lineæ est ipsius quadratum, ut antè diximus. Quod si quadratum commensurabile fuerit ipsi ῥητῷ, ipsa quoque linea quæ illud quadratum potest, commensurabilis erit saltem potentia. Itaque per diffinitionem linearum commensurabilium ῥητῇ etiam erit. Extat libellus nomine Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, quem quidem non esse Aristotelis ex multis locis ipsius facilè intelligitur: eruditio tamen facit, ut attribui debeat alicui ex nobili illa Peripateticorum & docta familia. in eo multa leges intelligentiæ horum principiorum conducentia. Quorum illud unũ annotabimus, quod ferè summam totius rei declarationem continere uideri posſit. Commensurabilitatem & incommensurabilitatem magnitudinum inter se, natura quidem ipsarum magnitudinum constare. Rationalitatem uerò & irrationalitatem positione fieri, quia quæ primo loco linea sic dicitur, nempe rationalis positione talis efficitur. Aliæ uerò lineæ ad illã relatæ, sunt aut rationa-

les,

les, aut irrationales, quatenus sunt eidem commẽsurabiles aut eidem incommẽsurabiles. Rursus linea rationalis quæ talis est, quia cõmensurabilis est lineæ illi primo rationali, & ipsa relata siue comparata alteri lineæ, quæ item proponatur primo loco rationalis esse, si eidem fuerit incommensurabilis, dicetur etiam irrationalis. Itaque eadem linea alteri atque alteri commensurabilis & incommensurabilis, erit similiter rationalis & irrationalis. Hoc autem ideo fit, quia rationalitas, & irrationalitas omnis pendet ex positione, non autem ex natura ipsarum magnitudinum. quod tamen in commensurabilitate & incommensurabilitate aliter est. Sunt & communes quædam animi conceptiones, quas hîc omisit Euclides, tum quia sunt infinitæ, tum uerò quia sunt eiusmodi, ut eas unusquisque posit animo modica quadam animaduersione subijcere, ut locus ipse postulare uidebitur: ex quibus tamen illas non prætermittemus, quæ singulis locis conuenientes erunt, quales reperiuntur in demonstrationibus primi & secundi theorematum.

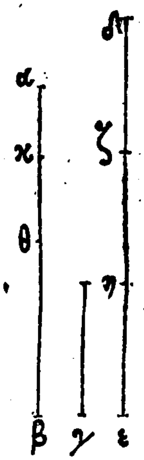
Campanus principijs huius libri illud quoq; inserit, Quamlibet quantitatem toties posse multiplicari, ut quamlibet eiusdem generis quantitatem excedat. quod quidem recte fecit. nam huius principij auxilio statim utitur demonstratio primi theorematis huius libri. De illa autem magnitudine hic dicit, quam geometræ & cæteri mathematici tractant, ut augeri posit in infinitum. Hoc loco uisum est addere, quod cum alij obscurè, Proclus tamen luculentißimè tradit: cuius libros (de ijs intelligo quos in Euclidem scripsit) ut omnes qui quidẽ mathematici fieri cupiunt, studiose legant, uehementer hortor: quibus ego plurimùm debere me, nunquam inficiabor. Quod ad rem attinet, id est huiusmodi, principium illud Campani uniuersaliter quantitatem omnẽ (siue sit ea quam continuã uocant, siue discreta sit qualis est numerus) compræhendere. Porrò aliud est quod quantitati continuæ soli conueniat, ut in infinitum minui possit, sicut in linea. Quantacunque enim detur in partes infinitas, minui siue diuidi potest, quarum tamẽ unaquæque linea erit. Illa porrò itidẽ in alias quæ eandem naturam retinent: neq; unquam ad minimum ex sectione deuenitur, ne si punctum quidem dicas, quãuis illud per se sit in geometria minimũ. Eo fit ut sint lineæ quædam ἄλογοι, quarum quidẽ est inter se quadã proportio, sed numero exprimi nequit, itaque uocatur à Proclo λόγος ἄῤῥητος. Nam ubicunque est sectio siue diuisio in infinitum, ibi quoque reperitur illud ineffabile, quod ἄλογον dicunt. hoc uerò non ita est in numeris. Nullus enim est numerus quem diuidendo non reducas ad illud minimum quod est unitas, ex quo numeros omnes esse ῥητοὺς & συμμέτρους necesse est. omnes enim metitur unitas. Nulli igitur sunt numeri ἄλογοι. Quod autem ad sequentium theorematum expositionem attinet, hoc habetote, non fuisse consilij nostri initio suscepti operis singulis manum admouere. Actum enim agere hoc quidẽ esse uidebatur, si quæ à maioribus recte tradita sunt (sunt autem bene multa) hic describerem. Neque sanè cupiam si maxime possim, alieno labore partam gloriã

in

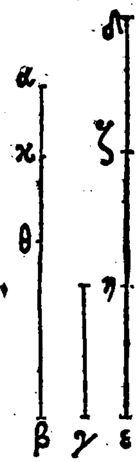
in me trāsferre: sed morem gestum amicis oportuit, qui me ad totius libri cōmentationem impulerunt, ut quam lucem rerum incognitarū obscuritas desyderaret, eam quantum in me esset ingenij, quantúmque diuturnum studiū huius præstantissimæ disciplinæ illud adiuuisset, ipse nobis afferrem, quos ueritatis studio ad rerum acutissimarū & dignissimarū cognitionē rapi intelligo.

Primum Theorema.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si de maiori detrahatur plus dimidio, & rursus de residuo iterum detrahatur plus dimidio, idq; semper fiat: relinquetur quædā magnitudo minor altera minore ex duabus propositis.



Sint duæ magnitudines inæquales α β, γ, quarū maior sit α β: dico si de α β detrahatur plus dimidio, & de residuo iterū plus dimidio, idq; semper fiat, relinqueturquædā magnitudo minor q̄ magnitudo γ. Nam γ multiplicata erit tādē aliquādo maior magnitudine α β. multiplicetur & sit δ ι multiplex quidē ipsius γ: maior uerò ipsa α β: diuidatúrque δ ι in partes æquales ipsi γ, quæ sint δ ζ, ζ η, η ι: & detrahatur de α β plus dimidio, sitq; β θ. rursus detrahatur de α θ plus dimidio, sitq; θ κ, idque eò usq; fiat, donec diuisiones magnitudinis α β tot fuerint quot sunt diuisiones in magnitudine δ ι. Sint igitur diuisiones α κ, κ θ, θ β totidem numero quot sunt diuisiones δζ, ζκ, κε. *hactenus constructio: deinde sequitur demonstratio. Quia maior est* δε *quàm* α β, *& detractum est de* δ ε *minus dimidio, scilicet ipsum* κ ε, *(quæ quidem detractio intelligitur facta ex superiori diuisione ipsius magnitudinis* δ ε, *in partes æquales ipsi* γ. *diuidendo enim minuitur magnitudo, sicut augetur multiplicando.) de* α β *uerò detractum est plus dimidio* β θ: *residuum ergo* κ δ *est maius residuo* θ α, *quod & uerissimum est, & ad cogitãdum facillimum, si ad principium illud reuocetur (qualia multa sunt in animis hominum penitus insita) residuum maioris magnitudinis post detractum dimidium uel minus dimidio, esse maius residuo minoris post detractum plus dimidio. Cum itaque* κ δ *sit maius quàm* θ α, *detractúmq; sit de* κ δ *dimidiũ, nempe* κ ζ: *& de* θ α *sit detractum* θ κ, *quod est plus dimidio totius* θ α: *residuum ergo* δ ζ *residuo* α κ *maius est, ratione principij modo scripti. Atqui* δ ζ *est æquale ipsi* γ *ex consensu & suppositione: ergo etiam magnitudo* γ *est maior magnitudine* α κ. *quod idem est ac si dicatur, minorem esse* α κ *ipsa* γ. *relinquitur itaque de magnitudine* α β, *magnitudo* α κ *minor ea quæ ex duabus propositis minor erat. Quod erat demonstrandum. Dictio autem illa* ἄλλως, *in exemplari græco postponẽda est post ea uerba* ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡμίσεα ἦ τὰ ἀφαιρούμενα. *Hunc ordinem in demonstrationibus perpetuò retinet Theon, quem compositorium uocant.*



Nunc

Nunc autem tractemus resolutorium per syllogismos resoluentes theorema in sua principia indemonstrabilia. Sic ergo agamus· Omnis *magnitudo minor* λζ, *est minor* γ. Omnis ακ *est minor* λζ. Ergo *omnis* ακ *est minor* γ. *Quod si cupis propius accedere ad terminos ipsius theorematis: sit maior terminus, esse minorem altera minore ex duabus inæqualibus propositis. minor uerò sit illa pars prior theorematis duabus inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore: iterumq; de residuo, tali continuata detractione perpetuo residuũ ipsum.* Medius *terminus sit, minorem esse altera magnitudine, quæ æqualis est ipsi minori ex duabus propositis. itaq; dices,*

Omnis magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis, est minor minore ex duabus propositis. Duabus *inæqualibus magnitudinibus propositis, de maiore detracta parte dimidia maiore, itidémque de residuo continuata tali detractione perpetua, residuum est, magnitudo minor altera quæ æqualis est minori ex duabus propositis.* Ergo *duabus inæqualibus propositis magnitudinibus detracta &c. residuum est magnitudo minor minore ex duabus propositis.* Maior *propositio est principium indemonstrabile & per se notum, quod uniuersalius dici solet, quæ æqualia sunt inter se, ad idem eodem modo se habere.* Minor *uerò probatur ex illis uerbis demonstrationis.* Residuum *ergo* λζ *residuo* ακ *maius est. quod idẽ ualet ac si dicatur* ακ *esse minus, quàm* λζ. *Sit ergo syllogismus per resolutionem: reuocetúrque res ad ele-*

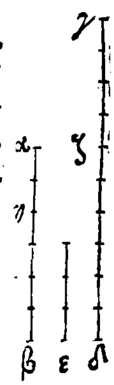
menta, quomodo solēt uti geometræ, ut paucioribus uerbis concludatur demonstratio, eoq́; promptius ab intellectu nostro compræhendatur. Primò *quia composita est propositio minor, qualitas illa adiecta prædicato, quæ æqualis est minori, probatur ex consensu & suppositione præcedentibus.*Maiorem *uerò terminum inesse minori sic probabis:*Residuū *minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detractoq́; dimidio de maiore: de minore uerò detracto plus dimidio, est minus residuo maioris.*Sed *α κ est residuum minoris ex duabus magnitudinibus nempe ex θ α, κ λ &c.* Ergo *α κ est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ ζ, ergo α κ est minus λ ζ.*Maior *uerò cōtracta est ex principio uniuersali.* Si *ab inæqualibus inæqualia auferas, residua sunt inæqualia, & minus id quod residuū est, eius à quo plus ablatum est.* Quantum *ad minorem propositionem attinet, illud solùm probatione indiget, α κ esse residuum minoris. primò residuum esse patet, ex suppositione.*Quod *uerò magnitudo θ α (cuius residuum est α κ) sit minor magnitudo κ λ, patet ita.*Residuum *minoris magnitudinis ex duabus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio de maiore: de minore uerò plus dimidio, est minus residuo maioris.* Sed *θ α est residuum minoris ex duabus magnitudinibus inæqualibus, detractoq́; minus dimidio ex maiore λ ε: de minore uerò α β plus dimidio &c.* Ergo *θ α est minus residuo maioris. sed residuum maioris est λ κ, ergo θ α est minus quàm λ κ.* Maior *patet ex principio indemōstrabili.* Minor *uerò probatur, primò quòd θ α sit residuum. probatur ex suppositione,*

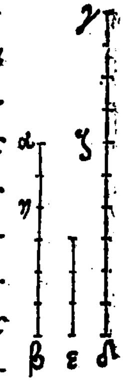
ſitione, propter detractionẽ factam. Quòd uerò $\alpha\beta$ ſit minor quàm $\delta\iota$, patet ſimiliter ex ſuppoſitione & principio: quamlibet quantitatem toties poſſe multiplicari &c. Addit Theon hoc quoq; theorema uerum eſſe, etiã ſi partes detractæ ſint dimidiæ. Quòd uerò dicitur in theoremate, Si detrahatur plus dimidio, eò pertinet ut ſi minus dimidio detrahatur, non ſemper uerum ſit reſiduum eſſe minus minore ex duabus propoſitis.

Secundum Theorema.

Duabus magnitudinibus propoſitis inæqualibus, ſi detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reſiduum unquam metiatur, id quod ante ſe metiebatur, incommenſurabiles ſunt illæ magnitudines.

Sint magnitudines duæ inæquales $\alpha\beta$, $\gamma\delta$: minórq; ſit $\alpha\beta$: detractáq; per detractionem alternatim, & ſemper cõtinuatã minore de maiori: id quod relinquitur ex ea quæ maior fuerat ante detractionẽ, nunquam metiatur hoc ipſum, quod antequã id reliquum fieret, metiebatur maiorem magnitudinem. Dico incommẽſurabiles illas eſſe magnitudines $\alpha\beta$, $\gamma\delta$. Quod ſi neges, illud cõtinuo affirmas, commẽſurabiles eas eſſe. Porro *ſi ſint commenſurabiles, metietur eas quædam communis magnitudo per diffinitionem linearum commenſurabilium.* Metiatur ita*que, ſi fieri poteſt: eáque ſit ι, detrahatúrque de maiori*





magnitudine $\gamma\delta$ pars quædam, puta $\delta\zeta$ quæ ſit æqualis maiori magnitudini $\alpha\beta$: aut ſi æqualis non erit, ſit tamen huiuſmodi, ut illa minor magnitudo $\alpha\beta$ aliquot uicibus repetita, repræſentet ipſam magnitudinem $\delta\zeta$. hoc enim eſt quod dicitur, magnitudinem $\alpha\beta$ metiri $\delta\zeta$: talique detractione facta, minoris inquam de maiore, relinquatur ex maiore portio quædam $\gamma\zeta$ minor magnitudine $\alpha\beta$. hoc uerò eſt quod dicitur in theoremate, neq; reſiduum unquam metiatur id quod ante ſe erat. Similiter de $\alpha\beta$ detrahatur portio quædam $\beta\kappa$ æqualis magnitudini $\gamma\zeta$, relinquatúrque ex ea detractione portio $\alpha\kappa$ minor quàm $\gamma\zeta$, ídque ſemper ſi ſit, opus fiat, ſaltem dum relinquatur quædam magnitudo minor ipſa magnitudine ι. hoc enim tandem euenire neceſſe eſt, per primum theorema huius, Si propoſitis illis duabus magnitudinibus inæqualibus $\alpha\beta$, ι, (quarum minor ex conſenſu & ſuppoſitione tua erat ι. hanc enim poſuiſti eſſe communem menſuram duarũ magnitudinum $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, itaque minorem alterutra) de maiore $\alpha\beta$. detrahatur plus dimidio, itémque de reſiduo plus ſuo dimidio: itaque relicta ſit $\alpha\kappa$ minor quàm ι. hactenus ea quæ ad ſtructuram pertinẽt. nunc ad demonſtrationem ueniamus. Cum igitur magnitudo ι metiatur magnitudinẽ $\alpha\beta$, ipſa uerò $\alpha\beta$ metiatur $\delta\zeta$: etiam ι metietur ſimiliter magnitudinem $\delta\zeta$ per commnnem cõceptionem. Si magnitudo quædam metiatur aliam, metietur quoque omnem aliam ab ea menſuratam. cui ſimile quiddam

appoſuit

apposuit Campanus *in numeris inter principia septimi.* Itaque ϵ *metietur* $\delta\zeta$.*eadem etiã magnitudo* ϵ *metitur totam magnitudinem* $\gamma\delta$ *ex tua suppositione.positum enim est eam esse communem mensuram ambarũ* $\alpha\beta,\gamma\delta$.Ergo ϵ *metietur & ipsum residuum, quod est* $\gamma\zeta$,*per illam communem conceptionem,* Q*uæ magnitudo metitur aliam totam,& partem ab ea detractã, metitur quoque reliquã.*Idem *in numeris posuit* Campanus. Cum *itaque* ϵ *metiatur* $\gamma\zeta$: $\gamma\zeta$ *autem metiatur* $\beta\eta$:*ipsa quoque* ϵ *metietur* $\beta\eta$ *per superiorem illam conceptionem.*A*tqui* ϵ *metitur totam magnitudinem* $\alpha\beta$: *itaque per alteram conceptionẽ metitur residuum* $\alpha\eta$. M*etietur ergo maior magnitudo aliam se ipsa minorẽ. hoc autem fieri nullo modo potest,ut antè diximus inter principia.* Non *igitur illas magnitudines* $\alpha\beta,\gamma\delta$ *metietur ulla magnitudo.* I*ncommensurabiles igitur erunt* $\alpha\beta,\gamma\delta$. D*uabus itaque magnitudinibus propositis inæqualibus et cæt.quod demonstrandum erat.*

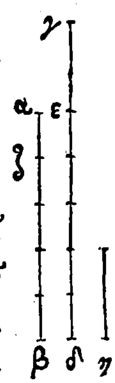
H*æc demonstratio conclusa est per deductionem ad impossibile.* P*ositum est enim contradictorium conclusionis uerum.ex qua propositione per plures gradus syllogismorum deuentum est tandem ad id quod falsissimum est, nempe maiorem magnitudinem esse quæ minorem metiatur.*Q*uia ergo ex ueris nunquam colligitur falsum:nunc autem conclusa est hæc falsitas,necesse est positionem illam tuam falsam extitisse. quod ipsum per destructionem consequentis ostendi posse tradunt dialectici.* F*alsum autem est maiorem metiri minorem. quod consequens erat ad illud antecedens,* *duas magnitudines α β, γ δ esse commẽsurabiles. sequitur ergò ipsum antecedens falsum esse.* Incommensura*biles ergo necesse est esse α β, γ δ.* Verum *ex quibus medijs processerit illa conclusio falsa, maiorem magnitudinem metiri minorem, uideamus per resolutionẽ, sitq́; syllogismus huiusmodi·* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem α β, & de ea detractam κ β, metitur residuum α κ.* Magnitudo *ι est magnitudo metiens totam α β, & detractam κ β.* Ergo *magnitudo ι metitur residuum α κ. falsa est conclusio, quia positum fuit α κ esse minorem quàm ι.* Maior *est indemonstrabilis, cõtracta ex principio uniuersali: quod quale esset, antè retulimus.* Minoris *uerò probatio quia plura continet, hinc petẽda est.* Primò *ex suppositione magnitudo ι metitur totam α β. deinde quòd eadem ι metiatur detractam partem quæ est κ β, ita probatur·* Omnis *magnitudo metiens magnitudinem γ ζ, metitur & κ β, quam γ ζ metitur. ι metitur γ ζ, ergo ι metitur & κ β.* Maior *similiter est per se nota ex principio uniuersali·* Quæcun*que magnitudo metitur aliam, metitur & eam quam ipsa metitur.* Minor *uerò sic probatur·* Omnis *magnitudo metiens totam magnitudinem γ δ, & detractã δ ζ, metitur & residuum γ ζ. ι metitur totam magnitudinem γ δ, & detractã δ ζ, ergo ι metitur γ ζ.* Maior *iterum per se nota est ex principio.* Minor *uerò quia duo membra habet, ita probatur·* Primò *ι metitur totã magnitudinem γ δ ex suppositione. deinde quòd eadem ι metiatur δ ζ, ita probandũ est·* Omnis *magnitudo metiẽs α β, metitur & δ ζ quam metitur α β. ι metitur α β,* *ergo ε metitur & δζ, quam metitur αβ.* Maior *uerissima est, & per se nota.* Minorē *uerò falsam esse ideo necesse est, quia causa fuit illius conclusionis falsæ, nempe quòd maior magnitudo minorē metiatur.* Non *erit itaque ε communis mensura ambarum magnitudinū αβ, γδ.* I*dem reperies, si quācunque aliam magnitudinē posueris pro communi illarum mensura. Quia igitur nulla reperiri potest, erunt illæ magnitudines incommensurabiles, quod demonstrandum erat.* Ex *hoc elicitur* πόρισμα *siue corollarium à destructione consequentis.*

Si duæ magnitudines inæquales propositæ nō fuerint incommensurabiles, sed fuerint commensurabiles: continuata detractione minoris alternatim facta de maiore, necesse est residuum metiri id quod ante se metiebatur.

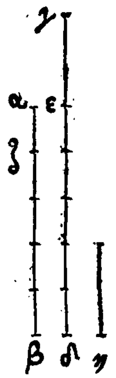
Tertium Theorema.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarū cōmunē mensurā reperire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles αβ, γδ: quarum minor sit αβ: oportet itaque magnitudinum αβ, γδ maximam communem mensuram reperire. Primum *ipsa magnitudo αβ aut metitur γδ, aut nō metitur. Si itaque αβ metitur γδ, seipsam quoque cū metiatur, ipsa ergo αβ est communis mensura magnitudinum αβ, γδ.* Manifestum *porrò est maximā quoque eam ambarum mensuram communē esse.* Nam *nulla maior magnitudo quam αβ metietur ipsam αβ.* Sed *ne metiatur αβ ma-*



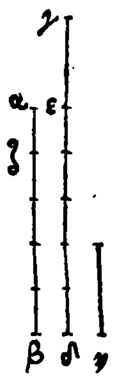
gnitudinem γ δ. Detracta igitur per mutuã detractionem minore de maiori, residuũ metietur aliquando id quod ante se est per præcedens corollarium. Nam datæ sunt magnitudines α β, γ δ esse commensurabiles. itaque magnitudo α β metiendo ι δ partem magnitudinis γ δ, relinquat magnitudinem ι γ se α β inquam minorem. Ipsa uerò ι γ metiendo magnitudinem ζ β partẽ magnitudinis α β, relinquat similiter α ζ se ι γ inquam minorem.



Ipsa uerò α ζ metiatur magnitudinem γ ι. Illud autẽ est metiri, id quod ante se est, quãdo nihil relinquitur post mensurationem factam. hactenus constructio. sequitur statim demõstratio. Cum igitur α ζ metiatur magnitudinem γ ι: γ ι autẽ metiatur ζ β: ergo α ζ metitur magnitudinem ζ β. Sed α ζ metitur seipsam: ergo α ζ metietur α β. Sed quia α ζ metitur δ ι: ergo α ζ metietur δ ι. Sed eadem α ζ metitur γ ι: totam ergo γ δ metietur: ergo α ζ metietur ambas magnitudines α β, γ δ, earúmq; cõmunis mẽsura erit. Dico præterea illam esse communẽ utriusque maximam mensuram. Quod si neges illam esse maximam mensuram: erit itaque magnitudo quædam maior quàm α ζ, quæ metiatur utramque α β, γ δ. ea uero sit κ. Cum igitur per te κ metiatur α β: ipsa autem α ζ metiatur ι δ: ergo κ metietur ι δ. ipsa etiam κ per te metitur totam γ δ: ergo metietur & residuũ γ ι. Sed cum γ ι metiatur ζ β, etiam κ metietur ζ β. metitur uerò eadem κ per te totam α ζ: ergo metietur & residuũ α ζ. Itaque magnitudo maior metietur minorem: quod sane

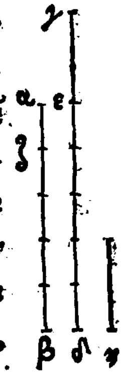
fieri

fieri nullo modo potest. Nulla ergo maior magnitudo quàm αζ metietur utramq; αβ, γδ: ergo αζ est maxima earum communis mensura. Duarum igitur magnitudinum commensurabilium αβ, γδ reperta est communis maxima mēsura, nempe αζ. quod faciendū fuit.



Corollarium.

Ex *hoc cōcluditur, si magnitudo quæpiam duas alias magnitudines metiatur, metietur quoque & communem utriusq; maximam mēsuram.* Hoc *corollarium probatur ex postrema parte demōstrationis.* Sint *duæ magnitudines αβ, γδ, quarum sit maxima communis mensura αζ: sit porrò alia η quæ etiam metiatur utramque αβ, γδ. dico magnitudinem η metiri αζ. Sint eædem suppositiones quas modò posuimus.* Cum *igitur η metiatur αβ: αβ autem metiatur εδ: ergo η metietur εδ. Sed η metitur etiam totā γδ: metietur ergo & reliquum γε. Sed quia γε metitur ζβ: ergo η metietur ζβ. sed metitur totam αβ: metietur ergo & reliquum, quod est αζ. ergo η metiens utrāque αβ, γδ, metietur & maximam utriusque communem mensuram, nempe αζ.* Docet Proclus *differentiam inter problemata & theoremata geometrica eā esse, ut problemata sint ea quæ proponunt aliquid fieri oportere, qualia sunt omnia quæ uerbo infinito concipiuntur, ut reperire, cōstituère, secare, & similia.* Theoremata *uerò sunt quæ asserendo ponunt & definiūt de unoquoq; accidente cuiusque subiecti, qualia sunt duo prima huius libri.* Hoc *autem 3. problema est.* Huius *ergo pro-*



blematis demonſtrationem ſic reſoluere nos oportet. Primùm aggrediamur partẽ eã quæ ſyllogiſmo directo & categorico cõcludit ipſam magnitudinẽ αζ eſſe cõmunem menſurã magnitudinũ αβ, γδ. Omnis magnitudo metiens magnitudines γε & εδ, metitur totam γδ. Sed αζ metitur γε & εδ: ergo αζ metitur totam γδ. Maior patet ex principio indemonſtrabili. Quæcũq; magnitudo metitur duas, metitur etiam compoſitam ex illis. cuius ſimile ponit Campanus in numeris inter principia libri ſeptimi. Minoris pars illa quod αζ metiatur γε, patet per corollarium ſecundi theorematis. Quòd uerò eadẽ αζ metiatur εδ, probatur: Omnis magnitudo metiens αβ, metitur δε menſuratam ab αβ. Sed αζ metitur αβ: ergo αζ metitur δε. Maior patet ex principio. Quæcunq; magnitudo metitur aliam, metitur quamcunque menſuratam ab ea. Minorẽ ita probabis: Omnis magnitudo metiens magnitudines αζ, ζβ, metitur & totam compoſitam ex illis αβ. Sed αζ metitur αζ, ζβ: ergo αζ metitur totam αβ. Maior ex principio eodẽ patet. Minoris pars quod αζ metiatur αζ, patet etiam ex eo, quia omnis magnitudo ſeipſam metitur per unitatem. Quòd uerò αζ metiatur ζβ, probatur ſic. Omnis magnitudo metiens γε, metitur & ζβ menſuratã ab ea. Sed αζ metitur γε, ergo αζ metitur ζβ. Maior pendet ex principio. Minor etiam pendet ex antè dictis. Nunc uerò reſtat perſequẽda pars illa demonſtrationis, qua oſtẽditur magnitudinem αζ communem utriuſque αβ, γδ menſuram: eſſe

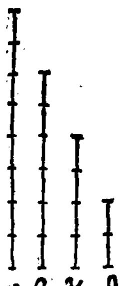
præterea

præterea maximam ambarum cõmunem menſurã. hoc autem fit per deductionem ad impoſsibile. Nam ſi neges illam α ζ eſſe menſuram maximam communem utriuſque magnitudinis α β, γ δ. ſit alia maior quàm α ζ maxima communis utriuſque menſura quæ ſit κ. Tunc dico te deductum iri ad illud impoſsibile magnitudinem maiorem, nempe κ metiri minorem, ſcilicet α ζ. Manentibus enim his quæ ſuperius poſita ſunt· Omnis magnitudo metiens totam α β, & de ea partem detractam ζ β, metitur & reſiduũ α ζ. Sed κ metitur totam α β & detractam ζ β: ergo κ metitur α ζ. Maior eſt indemõſtrabilis. Minor ſic probatur. Primum κ metitur totã α β ex tua poſitione. Quod uerò eadem κ metiatur ζ β, probo. Omnis magnitudo metiens γ ε metitur ζ β quam γ ε metitur. Sed κ metitur γ ε, ergo κ metitur ζ β. Maior rurſum nõ eget probatione. Minoris probatio hinc deducitur. Omnis magnitudo metiens totam γ δ & eius partẽ δ ε, metitur & reſiduũ γ ε. Sed κ metitur totam γ δ & eius partem δ ε, ergo κ metitur γ ε. Maior item eſt indemonſtrabilis. Minoris probationẽ ſic deduces· Primũ quod κ metiatur totam γ δ, patet ex tua poſitione. Quòd uerò eadem κ metiatur δ ε, ſic agas· Omnis magnitudo metiens α β, metitur δ ε menſuratam ab ea. Sed κ metitur α β: ergo κ metitur δ ε. Maior eſt indemonſtrabilis. Minor patet ex tua poſitione quãdo uoluiſti κ eſſe communem maximam menſuram utriuſque nẽpe α β, γ δ. ex qua quia ſequitur illa cõcluſio falſa, ſcilicet maiorem κ metiri minorẽ α ζ, neceſſe eſt illã tuam poſitionem falſam extitiſſe. nam ex ueris nõ ſequi falſum *compertum est. Ergo* κ *non erit communis utriusque maxima mensura. idemq; fiet si quācunq; aliam posueris. Constat igitur* α ζ *esse communem maximam utriusque mensuram. Quod autem hoc problemate proponitur inquirendum, id licet in theorema conuertere collecta summa totius demonstrationis, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus & commensurabilibus: si minor metitur maiorem, illa est communis maxima utriusque mensura: sin minus, facta mutua detractione quandocunque residuum metitur id quod ante se metiebatur postremo, illa est communis utriusque mēsura atque ea maxima. Simili ratione poteris ex quocunque problemate theorema efficere.*

Quartum Theorema.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram reperire.

Sint datæ tres magnitudines cōmensurabiles α, β, γ, *oportet ipsarum communem maximam mensuram reperire. Sumatur maxima communis duarum priorum* α, β, *mensura per præcedens problema, sitq;* δ: *hæc magnitudo* δ, *aut metitur magnitudinem tertiam quæ est* γ, *aut eam non metitur. metiatur prius.* Hactenus *constructio huius partis, nunc ad demonstrationem.* Cum itaque δ *metiatur* γ, *metiaturq; magnitudines* α, β, Ergo δ *metietur* α, β, γ: *ipsarúmque communis men-*

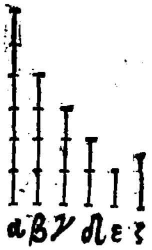


α β γ δ

sura

sura est. Præterea hanc esse illarum maximam communem mensuram constat hac ratione. Nam nulla magnitudo maior quàm δ metietur illas α,β,γ. Quod si fieri posse defendis, sit magnitudo ε maior quàm δ, quam dicis metiri magnitudines illas α,β,γ. Cum itaque ε per te metiatur α,β,γ, metitur duas priores ex illis scilicet α,β: & præterea maximam cōmunem utriusque mensuram, nempe δ per corollarium præcedēs. Ergo ε maior quàm δ, metietur ipsam δ, quod est impoßibile. Sed ne metiatur δ magnitudinem γ, hoc primum dico magnitudines γ,δ esse commensurabiles. quod ita demonstratur. Cum sint commensurabiles datæ magnitudines α,β,γ, metietur eas profecto quædam magnitudo quæ similiter metietur separatas ex illis duas α,β. Quare metietur quoque maximam communem utriusque mensuram, nempe δ. Metitur etiam ipsa eadem magnitudinē γ. Quare ε metietur utrāque γ,δ. Ergo γ,δ sunt commensurabiles ex definitione. Sumatur itaque maxima communis mēsura ambarum γ,δ, sitq; ε. Hactenus constructio huius partis, nunc est demonstratio. Quoniā ε metitur δ, & δ metitur magnitudines α,β, itaque ε metietur α,β. metitur præterea magnitudinem γ. Ergo ε est communis mēsura trium α,β,γ. Dico autem illam etiam esse maximam. Nam si fieri potest ut ε non sit maxima mensura communis trium α,β,γ, sit quædam maior quàm ε, magnitudo ζ, metiaturque tres illas α,β,γ. Cumq; ζ metiatur α,β,γ, etiam metietur α, β, & ipsarum maximam

communem utriusque mensurã, nempe δ. Metitur præterea ipsa ζ magnitudinem γ. ergo ζ metitur γ, δ, & ambarum communem maximã mensuram, nempe ε. Maior uidelicet magnitudo minorẽ. hoc uero fieri nullo modo potest. Nulla ergo maior quàm ε magnitudo metietur magnitudines α, β, γ. Ergo ε est maxima trium dictarum communis mensura. siquidem δ non metitur magnitudinem γ. Quòd si δ metitur γ, ipsamet δ erit communis trium maxima mensura. Datis igitur tribus magnitudinibus commensurabilibus, reperta est ipsarum communis maxima mensura, quod faciendum erat.



Corollarium.

Ex hoc manifestum relinquitur, si magnitudo tres magnitudines metiatur, metiri quoque maximam communem ipsarum mensuram. Similiter etiam in pluribus magnitudinibus maxima illarum communis mensura reperitur. In illis quoque uerum erit hoc corollarium. Huius corollarij demonstratio continetur in postremis uerbis ipsius Theonis. itaque dices. Sint tres magnitudines α, β, γ, quarum communis maxima mensura sit ε. sit porrò alia ueluti ζ, ipsa quoque metiẽs tres illas magnitudines, dico ζ metiri ε. Demonstrationẽ autem requires ab illis uerbis. Cumq; ζ metiatur α, β, γ etiã metietur α, β usque ad ea uerba, Maior uidelicet. Hæc demõstratio quia uarias partes habet, singulæ uerò pluribus syllogismis cõtinẽtur: singillatim omnes resoluemus. Primò si δ communis maxima mensurã ambarum *harum α,β metiatur γ per se, clarum est magnitudinem λ esse communem mensuram magnitudinum α,β,γ. Quod verò eadem λ sit earumdem communis mensura maxima, hinc liquet per deductionem ad illud impoßibile,* Maiorem *magnitudinem metiri eam quæ se ipsa minor est.* Nam *si negas λ esse maximam mensuram, sit quæuis maior quàm λ, uidelicet ι metiens illas α,β,γ.* Ex *hoc sequitur ι metiri ipsam λ, quod falsum est & impoßibile, cum maior non metiatur minorem.*

Omnis *magnitudo metiens α,β, metitur λ maximam α,β, mensuram. Sed ι metitur α,β: ergo ι metitur λ.* Maior *patet, quia collecta ex corollario superioris problematis.* Minor *patet ex tua positione. quam tamen falsam esse constat, quia causa est falsitatis illius ex ea consequentis. Verum est itaque λ esse communem & maximam trium mensuram, si modò λ metitur γ. Sin autẽ λ non metiatur γ, illud imprimis uerum esse dico (quod ueluti lemma quoddã demonstrandũ est antequã eatur ulterius) magnitudines γ,λ, esse cõmẽsurabiles.* Omnes *magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet θ, sunt cõmensurabiles. Sed γ,λ sunt magnitudines quas eadẽ mẽsura metitur, uidelicet θ. ergo γ,λ sunt cõmẽsurabiles.* Maior *patet ex definitione.* Minor *patet ex eo, quia α,β,γ, positæ sunt cõmẽsurabiles per cõmunẽ mẽsurã, uidelicet θ. sic itaq; probabitur* Omnis *magnitudo metiẽs tres α,β,γ, metitur duas priores, & maximã mẽsuram duarũ priorũ nempe λ, per corollarium præcedentis theorematis. Sed θ metitur tres α,β,γ. ergo θ metitur λ. Quod autẽ θ metiatur γ, patet ex positione. Cũ* *igitur* ε *metiatur utrãq;* γ,δ, *sequitur ex definitione ambas* γ,δ *esse cõmẽsurabiles.* Sit *maxima cõmunis mẽsura ipsarũ* γ,δ, *quæ uocetur* ε. Dico *primo ipsam* ε *esse cõmunem mensurã trium* α,β,γ *sic probari.* Omnis *magnitudo metiens* δ, *metitur* α,β, *mensuratas à* δ. Sed ε *metitur* δ, *ergo* ε *metitur* α,β. Maior *patet ex principio.* Minor *uerò ex suppositione quando positum est ipsam* ε *esse maximam communem mensuram duarum* γ,δ, *ex eadem etiam suppositione* ε *metiebatur* γ. Ergo ε *metitur* α,β,γ, *estq; earum communis mensura.* Dico *præterea eandem* ε *esse communem maximam mensuram earũdem trium. sin minus, esto magnitudo quædã maior quàm* ε *metiẽs illas, sitq;* ζ. Ex *hac positione sequi uidebis illud idem impossibile, maiorem* ζ *metiri minorẽ* ε. Omnis *magnitudo metiens* γ,δ, *metitur* ε *communem maximam utriusque mensuram.* Sed ζ *metitur* γ,δ, *ergo* ζ *metitur* ε. Maior *patet ex corollario superiori.* Minor *uerò ita probatur.* Primò *quod* ζ *metitur* γ, *patet ex suppositione, quia positũ est eam metiri singulas* α,β,γ. Quod *uerò eadem* ζ *metiatur* δ *probatur.* Omnis *magnitudo metiens* α,β, *metitur &* δ *communem utriusque maximam mẽsuram.* Sed ζ *metitur* α,β, *ergo* ζ *metitur* δ. Maior *patet ex corollario.* Minor *uerò à te posita est, quæ cum sit unica caussa illius falsæ conclusionis, necesse est ipsam quoq; falsam esse.* Nulla *ergo alia magnitudo quàm* ε *erit communis illarum trium maxima mensura.* Hoc *autem problema potes redigere in formam theorematis hoc modo.* Si *maxima mẽsura duarum primarum ex tribus commensurabilibus magni-*

tudinibus

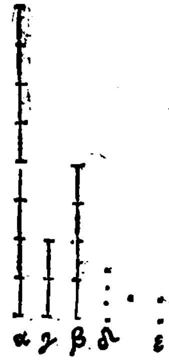
tudinibus metitur tertiam, illa est communis maxima mensura trium. sin minus, maxima mensura tertiæ & maximæ mensuræ duarum primarum est cõmunis maxima mensura trium.

Quintum Theorema.

Cõmẽsurabiles magnitudines inter se proportionẽ eam habent, quã habet numerus ad numerũ.

Magnitudines dicũtur inter se proportionem habere, quã habet numerus ad numerum, quãdo quæ proportio est inter illas magnitudines, ea reperitur inter aliquos numeros, ut puta si magnitudo magnitudini sit, uel æqualis, ut numerus 2 numero 2: uel dupla, ut numerus 4 ad 2: uel tripla, ut 6 ad 2: uel in alia quauis multiplici proportione. Idem de superparticulari, si magnitudo sit sesquialtera ad magnitudinem, ut numerus 3 ad numerum 2. Idem de aliis speciebus superparticularis proportionis. Idem de superpartienti, de multiplici superparticulari, & de multiplici superpartienti, quæ sunt omnia proportionum genera, quæ in numeris repe

riuntur. Sint magnitudines commẽsurabiles α, β. Dico ipsas habere proportionem inter se, quã numerus aliquis ad aliquem aliũ numerum. Nam cùm sint commensurabiles α, β, sit γ cõmunis earũ mẽsura, & quoties γ metitur α, (id est quot partes reperiũtur in α æquales ipsi γ) tot sint unitates in numero δ. quoties uerò eadem γ meti-



tur β, tot sint unitates in numero ε. Sequitur demonstratio. *Cum itaque γ metiatur α toties quot sunt unitates in δ numero, ipsáque unitas metiatur numerũ δ toties quot sunt in ipso δ unitates. totidem ergo uicibus γ metitur α, quot uicibus unitas metitur numerum δ.* Ergo γ *eandem proportionem habebit ad α, quam unitas ad numerum δ. per conuersam etiam proportionalitatem erit ut α ad γ: sic numerus δ ad unitatem.* R*ursum cum γ metiatur β toties quot sunt unitates in numero ε: metiatúrque unitas numerum ε toties, quot sunt in eo unitates. tot uicibus itaque γ metietur β, quot uicibus unitas metitur numerum ε.* Ergo *per æquam proportionalitatem (hanc uerò uocat* Euclides δι' ἴσου λόγου*) quam proportionem habet magnitudo α ad magnitudinem β, eandem habet numerus δ ad numerum ε.* I*taque commensurabiles magnitudines, puta α, β, inter se proportionem eam habent, quam numerus δ ad numerum ε. quod demonstrandum erat.*

Resolutio.

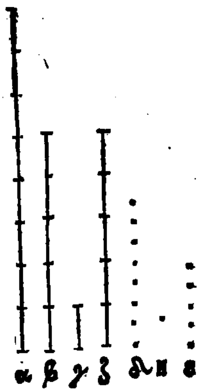
Omnia extrema duorum ordinum continentium æqualẽ numerum magnitudinum coniugatarum in eadẽ proportione, sunt & ipsa in eadem proportione. Sed *α, β, & δ, ε sunt extrema duorum ordinum, &c.* Ergo *α, β, & δ, ε sunt in eadem proportione.* Maior *patet* ex 22.5. Minoris *pars prior scilicet α, β & δ, ε esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentiũ*

magnitu-

magnitudinum patet ex suppositionibus admissis in cõstructione. Quod uerò magnitudines contentæ in illis ordinibus sint in eadem proportione coniugatæ, id est singula paria prioris ordinis cum singulis paribus alterius sint proportionalia, probatur ita· Primò quòd γ, β habeant eandem inter se proportionem quam unitas & numerus ι, λ. Omnis magnitudo metiens β tot uicibus, quot uicibus unitas metitur ι, habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Sed γ tot uicibus metitur β quot uicibus unitas metitur ι. Ergo γ habet ad β eandem proportionem, quam unitas ad numerum ι. Maior per se patet contracta ex definitione proportionalium, quæ est in principiis lib. 5. de quibus doctissime disserentem lege Petrum Nonium *Lusitanũ.* Minor *uerò concessa est per suppositionem. Quod uerò α, γ habeant eam proportionem quam numerus λ ad unitatem, probatur eodem modo· Omnis magnitudo quam metitur γ tot uicibus quot unitas metitur numerum λ, habet ad γ eandem proportionem quam numerus λ ad unitatem.* Sed *α est magnitudo quam metitur γ tot uicibus, &c.* Ergo *α habet ad γ eandẽ proportionem quam λ ad unitatem.* Maior *probatur eodem modo quo superior.* Minor *item patet ex suppositione.* Vt *uerò reperias numeros duos, quorum proportionem habeant inter se duæ magnitudines commensurabiles, uide quot uicibus mensura earum communis unamquãque metiatur.* Numeri *enim uicibus illis expreßi retinent eam proportionem, quam magnitudines commensurabiles.*

Sextum Theorema.

Si duæ magnitudines proportionem eam habent inter ſe quam numerus ad numerum, commenſurabiles ſunt illæ magnitudines.



Duæ enim magnitudines α, β, inter ſe habeant eam proportionem, quam numerus δ ad numerum ι. Dico cõ*menſurabiles eſſe magnitudines α, β.* Nam *magnitudo α diuidatur in tot partes æquales quot ſunt unitates in numero δ (hoc uerò idem eſt ac ſi uelis quamcunque partem auferre de magnitudine α, quod quomodo fiat, docet 9.6.) ſitque magnitudo γ æqualis uni ex illis partibus æqualibus ipſius α. ſit etiam alia magnitudo ζ compoſita ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi γ, quot unitates ſunt in numero ι.* Hic *incipit demonſtratio.* Cùm *igitur tot magnitudines æquales ipſi γ ſint in magnitudine α, quot ſunt unitates in δ, quota pars ipſius δ eſt unitas, eadem pars erit magnitudo γ magnitudinis α.* Eſt *ergo ut γ ad α, ita unitas ad δ. metitur uerò unitas numerum δ. ergo & γ metietur α.* Et *quia eſt ut γ ad α, ſic unitas ad numerum δ. conuerſa igitur proportione erit ut α ad γ, ſic numerus δ ad unitatem.* Rur*ſum quia quot ſunt unitates in numero ι, tot ſunt in magnitudine ζ magnitudines ſiue partes æquales ipſi γ.* Erit *itaque ut γ ad ζ, ſic unitas ad ι.* Nuper *uerò concluſum eſt ſicut α ad γ, ita*

numerus

numerus δ ad unitatem. Per æquam igitur proportionem erit ut α ad ζ, sic δ ad ι. Sed sicut δ ad ι, ita se habet α ad β. Itaque etiam ut α ad β, similiter se habebit α ad ζ. Ipsa igitur magnitudo α ad utranque β, ζ, eandem proportionem retinebit. Aequalis est igitur magnitudo β magnitudini ζ per secundam partem 9. 5. Sed γ metitur ζ, ergo metietur β. Sed & eadem γ metitur α, igitur γ metitur α, β. commensurabiles igitur sunt magnitudines α, β. Si ergo duæ magnitudines &c. quod demonstrandum fuit.

Resolutio.

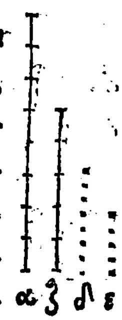
Omnes magnitudines quas eadem mensura metitur, sunt commensurabiles. Sed magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, metitur eadẽ mensura, puta γ. Ergo magnitudines α, β, habentes proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt commensurabiles. Maior patet ex definitione commensurabilium magnitudinum. Minoris uerò pars illa quòd γ metiatur β, ita probanda est. Magnitudo ζ est magnitudo β, quia æquales. γ metitur ζ, ergo γ metitur β. Minor patet ex concessione supposita inter construendum, illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Maior sic probatur. Omnes magnitudines ad quas eadem magnitudo, puta α eandem proportionem habet, sunt æquales. Sed ζ, β sunt huiusmodi. ergo ζ β sunt æquales. Maior patet ex secunda parte nonæ quinti. Minor uerò ita probetur. Omnes proportiones æquales eidem proportioni, puta ei quæ est inter δ, ι numeros, sunt inter se æquales. Sed proportiones inter α, ζ & α, β sunt æquales eidẽ proportioni, puta quæ est *inter δ,ι. Ergo proportiones inter α,ζ & α,β sunt inter se æquales. Maior patet ex undecima quinti. Minoris pars illa, quòd proportio inter α,β sit æqualis ei quæ est inter δ,ι numeros, patet ex suppositione. Quòd uerò α,ζ eandem habeant proportionem quam δ,ι, probetur sic. Omnia extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum coniugatarũ in eadem proportione, sunt & ipsa in una & eadẽ proportione. Sed α,ζ, & δ,ι sunt extrema duorũ ordinũ, &c. Ergo α,ζ & δ,ι sunt in una & eadem proportione. Maior patet ex 22.5. Minoris uerò pars prior scilicet α,ζ & δ,ι esse extrema duorum ordinum æqualem numerum continentium magnitudinum, patet ex suppositionibus admissis in construendo. Nam primus ordo est α,γ,ζ. Secundus uerò est δ,κ,ι. κ enim est loco unitatis. Quòd uerò magnitudines in his ordinibus cõtentæ sint in eadem proportione cõiugatæ, probetur. Et primo loco α,γ habere inter se eandem proportionẽ quam δ ad unitatem κ, patet ex suppositione admissa inter cõstruendũ illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur in tot partes æquales, &c. Quanuis ea pars syllogismo quoque demonstrari posit. Omnes quatuor magnitudines inter se proportionales, sunt quoque conuersa proportione proportionales. Sed γ,α,κ unitas & δ sunt magnitudines proportionales. Ergo γ,α,κ & δ sunt conuersa proportione proportionales. Maior patet per corollariũ quarti theorematis libri quinti. Minor uerò patere potest ex suppositione, illis uerbis, Nam magnitudo α diuidatur. Secundum erat in illa minore γ,ζ habere eandem pro-*

portionem

portionem quam unitas & ε. quod quidem etiã patet ex suppositione inter construẽdum admissa illis uerbis, Sit etiam alia magnitudo ζ. Quantum ad alteram partem minoris assumptæ in primo syllogismo, nempe γ metiri magnitudinem α, ea quoque patet ex illa suppositione, Nam magnitudo α diuidatur, &c. Nihilominus potest & ipsa syllogismo demõstrari: sed quia est ex suppositione nota, nihil est opus syllogismo.

Corollarium.

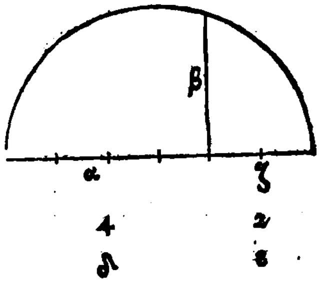
Ex *hoc fit manifestũ, si fuerint duo numeri ut δ, ε, & recta linea ut α, dari posse aliam lineam ad quam linea α retineat eandem proportionem quã numerus δ ad numerum ε. Diuidatur linea α in tot partes æquales quot sunt unitates in altero numero δ per nonam sexti, & cõponatur altera linea, puta ζ ex tot partibus, quæ sint æquales partibus lineæ α, quot sunt unitates in altero numero ε. itaque linea α erit ad lineã ζ sicut numerus δ ad numerũ ε. Hac ratione potes cuicunque lineæ propositæ, aliã dare commensurabilem in longitudine. Nam si duæ lineæ habent proportionem inter se quam numerus ad numerum, sunt inter se quoque longitudine commensurabiles, per hoc theorema 6. Quod uerò sequitur in exemplari græco, continet, subobscurè tamen lemma quoddam, ipsum etiam alieno loco positũ. inuenitur enim inter alia lemmata post 29 theorema huius libri, uerbis conceptis in formam problematis.*



Lemma.

Duobus numeris datis, & linea recta, oportere efficere ut numerum ad numerum: sic quadratum lineæ datæ ad quadratum alterius.

Sint dati numeri δ, ε: recta uerò sit α: propositúmque sit efficere id quod præcipitur hoc problemate. reperiatur igitur per postremum corollarium linea ζ, ad quam linea α sit in ea proportione in qua numerus δ ad numerum ε: sumatúrq; inter duas illas lineas α, ζ media proportionalis per tertiam decimam sexti, sitque β. Cum igitur sit sicut numerus δ ad numerum ε, ita linea α, ad lineam ζ. & quemadmodum se habet linea α ad lineam ζ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, per secundum corollarium uicesimæ sexti. Itaque sicut numerus δ ad numerum ε, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β.

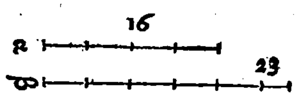


Septimum Theorema.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerũ.

Magnitudinum non habẽtium proportionem inter se quã numerus ad numerum, nullum exemplum efferre possumus in numeris, sicut fecimus in 5 huius. nam impossibile est numerum ad numerum nõ habere proportionem quam numerus ad numerum. Sint magnitudines incommensurabiles α, β. Dico α, β nullam omnino proportionem

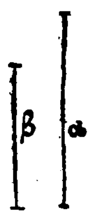
proportionem inter se talē habere, qualis inter ullos numeros reperitur. Quod si contra-



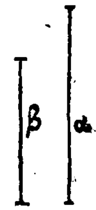
dicatur α,β habere proportionem inter se quam numerus ad numerum: sequitur illud continuo, commensurabiles quoque esse α,β per sextum theorema huius libri. Sed hoc theorema ponit illas esse incommensurabiles. Nullo igitur modo α habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum, quod demonstrandum fuit. Hic modus argumentationis & certissimus est, & breuissimus: sumiturque ex syllogismis hypotheticis, quem à destructione consequentis uocant. Illúdque in uniuersum uerum esse deprehendes, quotiescunque in disciplinis mathematicis aut aliis quibuscunque, quæ nomine censentur scientiarum, reperiuntur duæ conclusiones ex earum numero, quas conuersas uocant, quales sunt quintum & sextum theorema huius libri: in his potentia contineri præterea alias duas conclusiones & ipsas conuersas, contrario tamen modo quàm superiores, quales sunt hoc theorema & proximum.

Octauum Theorema.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum, incommensurabiles sunt illæ magnitudines.

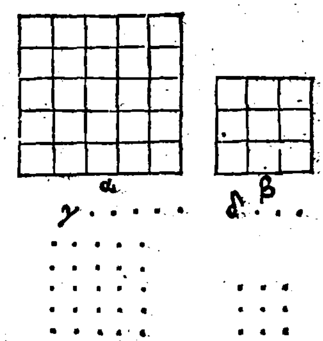


Duæ enim magnitudines α,β, inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico incommensurabiles esse magnitu-



dines α,β. Quòd si contradicas, uidelicet cõmensurabiles esse, habent statim proportionem quam numerus ad numerum, per quintum theorema huius. sed hoc theorema supponit eas non habere. incommensurabiles ergo sunt magnitudines α,β. Si igitur duæ magnitudines, &c. quod demonstrandum fuit.

Nonum Theorema.



Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine comme͂surabilibus, inter se proportione͂ habent, qua͂ numerus quadratus ad alium numerũ quadratum. Et quadrata habentia proportionem inter se quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebunt quoque latera longitudine commensurabilia. Quadrata verò quæ describuntur à lineis longitudine incommensurabilibus, proportionem non habent inter se qua͂ quadratus numerus ad numerum alium quadratũ. Et quadrata non habentia proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque latera habebunt longitudine cõmensurabilia.

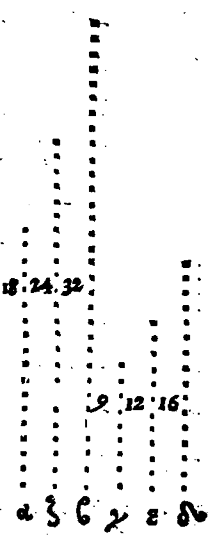
Quia difficile uidetur hoc theorema, dignum quoque uisum

ſum eſt, quod pluribus modis demonſtraretur. Nos *uerò antequam ad demonſtrandum accedamus, nonnulla præfabimur de ſignificatione uocum ſiue terminorum huius theorematis, quæ rem totam illuſtrabũt.* Hoc *ſane theorema & quæ proxime ſequuntur, huiuſmodi ſunt, ut niſi plane percipiantur, res alioqui non difficillimæ inexplicabiles uideri poßint.* Imprimis *illud intelligendum eſt, lineas eſſe longitudine commenſurabiles, & lineas habere proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, idem eſſe.* Vt *quæcunque lineæ ſunt longitudine commenſurabiles, habeant etiam proportionem inter ſe quam numerus ad numerum. & contrà, quæ lineæ habent proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſint quoque longitudine commenſurabiles, ut patet ex* 5. *&* 6. *huius libri.* Similiter *illud conuertitur, lineas eſſe longitudine incommenſurabiles, & non habere proportionem quam numerus ad numerum, ut patet per* 7 *&* 8 *huius.* Itáque *intelligi debet quod dicitur in hoc theoremate, de lineis longitudine commenſurabilibus, & longitudine incõmenſurabilibus.* Sed *dicat aliquis, priuſquã* Euclides *docuit modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles, tractat de quadratis ipſarum, cum tamen contrà fieri oportere uideri poßit. prius enim exquiri debet de re aliqua an ſit, quàm quid ei accidat, conſyderetur.* Nos *uerò dicimus* Euclidem *quidem tradere modum reperiendi lineas longitudine incommenſurabiles in theoremate* 11. *quod eſt in* Græco 10. *neque tamen peruerſe quicquam feciſſe.* Nam *hoc theoremate ſumit has* *lineas longitudine incommensurabiles ex hypothesi, neque amplius quicquam sibi demonstrãdum hoc quidem loco assumit, quàm ex illa hypothesi scilicet linearum longitudine incommensurabilium quadrata non habere proportionem, & cætera. Quod ubi uerum esse demonstrauerit, sat fecisse uidebitur. Ex hoc autem theoremate gradum sibi faciet ad inuestigationem linearum illarum in theoremate undecimo. Illud præterea intelligendum est quid uocibus illis significetur, habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod ut assequi posis, repetenda tibi sunt nõnulla theoremata, eorúmque demonstrationes ex arithmeticis suprà scriptis: atque ea maxime quæ agunt de numeris similibus superficialibus ex quibus est uicesimumsextum octaui. Numeri similes plani inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Similes uerò plani numeri sunt (ut est in principijs libri septimi) qui habent latera proportionalia. Latera uerò cuiusque numeri sunt, ex quibus inter se multiplicatis, singuli numeri producuntur: ex illo theoremate 26 octaui constat non solos numeros quadratos habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratum, sed eandem etiam proportionem habere numeros omnes similes superficiales inter se. Neque uerò idem est numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque hæc inter se conuerti possunt. Quãuis enim numeri quadrati habeant proportionem quã*

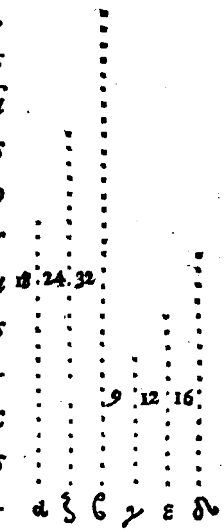
numerus

numerus quadratus ad quadratum, non ideo tamē omnes habentes proportionē quam quadratus ad quadratum sunt quadrati. Sunt enim similes superficiales & ijdem non quadrati, qui tamen proportionē habent quam quadratus ad quadratum, quanuis omnes quadrati sint similes superficiales. nam inter duos numeros quadratos incidit unus medius proportionalis, per 11.8. Si *uerò inter duos numeros incidat unus medius proportionalis, illi duo numeri sunt similes superficiales per* 20.8. Dico *præterea illud theorema* 26.8. *conuerti.* D*uo numeri habentes inter se proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum sunt similes superficiales: cuius rei illa demōstratio afferri potest.*

Sint *duo numeri* α, β *habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum.* I*lli duo numeri aut ambo simul sunt quadrati, aut ambo simul sunt nō quadrati. (de illis autē non intelligimus hìc quicquam dicere, quorum alter est quadratus, alter uerò non quadratus. tales enim non possunt habere proportionem quā numerus quadratus ad numerum quadratum, per* 24.8. *à destructione consequētis.)* E*rgo si ambo sunt quadrati, sunt etiam similes superficiales, ut modo conclusum est.* S*i non sint quadrati, sint illi duo quadrati* γ, δ, *quorum proportionem habeant* α, β. *quia ergo* α, β *habent proportionem inter*

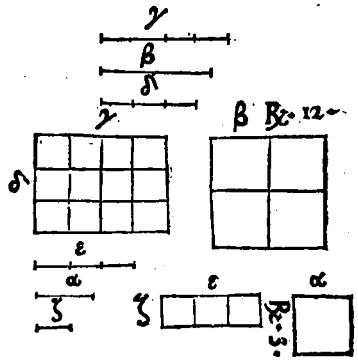


se quã γ, δ, & inter γ, δ incidit unus medius proportionalis puta ε, per 11. 8. Ergo inter α, β incidet unus medius proportionalis, puta ζ per 8.8. Sed si inter duos numeros nempe α, β unus medius incidat proportionalis, illi duo uumeri sunt similes superficiales, per 20.8. Ergo numeri α, β sunt similes superficiales. Duo ergo numeri habẽtes proportionẽ quã quadratus ad quadratum, sunt similes superficiales. Ex his intelligi potest numeros habentes proportionem inter se quam quadratus ad quadratum esse aut quadratos, aut similes planos id est superficiales. Similes uerò superficiales qui sint, intelligitur quidem ex definitione. sed quibus notis statim agnosci possint numeri propositi, an similes superficiales sint nec ne, sic habetote. Primùm si inter duos numeros propositos non incidit medius proportionalis, illi duo numeri non sunt similes superficiales per 18.8. à destructione consequentis. Quòd si incidit medius proportionalis, sunt illi similes superficiales per 20.8. Deinde duo numeri similes superficiales multiplicatione alterius in alterum facta, producunt numerum quadratum, per primam 9. Ergo si non producunt quadratũ, non sunt similes superficiales. Quòd si fecerint quadratũ ex multiplicatione sui ipsius, sunt illi similes superficiales per 2.9. Quo uerò facilius apprehendantur consequentes demonstrationes, & simul



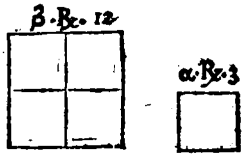
exemplum

exemplum adducamus eorum quæ diximus. Sit linea γ longa pedes quatuor. sit & alia linea δ longa & ipsa pedes tres, reperiaturque media proportionalis per 13.6. quæ media proportionalis sit linea β. Ergo quadratum lineæ β erit æquale parallelogrãmo rectangulo quod fit ex lineis γ, δ, per 17. 6.

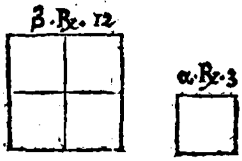


Quod quadratum continebit pedes 12, sicut & parallelogrammum ex lineis γ, δ. Sit etiam linea ε longa pedes 3, & linea ζ longa pedem 1, media proportionalis inter lineas ε, ζ, sit α. Quadratum lineæ α, erit pedum trium, sicut & parallelogrammum ex lineis ε, ζ. Dico quadratum lineæ β quod est 12. pedum, habere proportionem ad quadratum lineæ α, quod est pedum triũ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Nam quemadmodũ se habet numerus 12. ad numerum 3, ita se habet quadratũ lineæ β, quod est 12 pedum, ad quadratũ lineæ α quod est 3. Sed numeri 12 & 3 sunt similes superficiales, quia latera numeri 12 quæ sunt 2 & 6, sunt proportionalia lateribus numeri 3, quæ sunt 1. & 3. Ergo quadratum lineæ β quod est 12, habebit eam proportionem ad quadratũ lineæ α, quod est 3, quam habet numerus similis superficialis ad similẽ superficialem. Sed numeri similes superficiales habent proportionẽ inter se quam numerus quadratus ad nu-

merum quadratum qui sunt 4 & 1, per 26. octaui. Ergo quadratũ lineæ β quod est duodecim, habebit proportionem ad quadratum lineæ α quod est 3, quam numerus quadratus ad quadratum, eam scilicet quam quaternarius ad unitatem



quæ est quadrupla proportio. Nam quadratum maius quod est duodecim, continet quater quadratum minus quod est 3, quia latus quadrati duodecim quod est linea β, est duplum ad latus quadrati 3 quod est linea α. Habet ergo linea β ad lineã α proportionẽ quã numerus ad numerum. Ergo sunt longitudine commensurabiles per 5. huius, quæ est hypothesis necessaria ad conclusionẽ eius passionis siue prædicati hoc theoremate comprehensi, nempe quadrata talium linearum habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sic & numerus denominãs maiorem extremitatem proportionis lineæ β ad lineã α, qui est 2. si in se ducatur reddet quadratum numerum nempe 4. similiter & numerus denominans minorem extremitatẽ nempe 1, si ducatur in se, nihil amplius efficit quàm 1. quæ unitas est etiam potentia quadratus numerus. Ergo quadratum lineæ β ad quadratum lineæ α habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, nempe quàm 4. ad 1. Ex hoc uides (quod modò dicebamus) non idem significare numeros aliquos quadratos esse, & habere proportionem inter se quam numerus quadratus ad quadratũ. Nam numeros

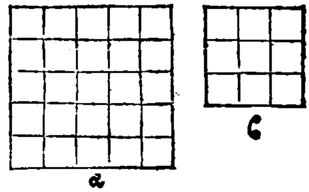


meros 12 & 3 quadratos nō esse constat, cum tamē quadrata eos numeros continentia illam proportionem habeāt. Sed & latus quadrati 12, quanuis numero per se exprimi nequeat, ut dicas latus illud est longū tot pedibus, qui pedes quadrati numero 12 complent totum illud quadratum: tamen ad aliud relatum siue comparatum, nempe ad latus quadrati 3, quod nec ipsum per se numero poßis exprimere, ad latus inquam quadrati 3, proportionem duplam habet. Nam *quadratum quadruplum ad aliud quadratum (ut quadratum lineæ* β *quod est 12, ad quadratum lineæ* α *quod est 3) habet latus suum duplum ad latus alterius quadrati, per illud uniuersale corollarium 20. 6. Similes figuræ habent proportionem inter se suorum laterum relatiuorum duplicatam. Quòd si dicas latus quadrati 12 numerari posse, quia eius proportio quam habet ad latus quadrati 3 numeratur per binarium, cū sit proportio dupla: illud primùm fac cogites, non esse id quod dicitur per se numerari aliquam magnitudinē, sed illius proportionem.* Magnitudo *autem illa scilicet latus quadrati 12 per se numeraretur, quādo nulla habita ratione proportionis ipsius ad aliud, dicere possemus, Quadrati continētis pedes quadratos 12, latus est longum tot pedibus, quorum numerus in se ductus efficeret numerum illum 12. sed hoc fieri non potest, quia 12 non est numerus quadratus.* Sic *itaq; dices* Quatenus *quadratum illud 12 per se consyderatur, nulla habita* *ratione proportionis ad aliud, ſed tantum ut eſt 12 pedum, non habet quidem latus per ſe numerabile, ſed ſi conferatur ad aliud, puta ad quadratum 3 pedum, tũc dices, latus quadrati 12 eſt 2. latus uerò quadrati 3 eſt 1. ſed hæc eſt denominatio ipſius proportionis quæ dupla dicitur. quæ proportio non poteſt eſſe aut conſyderari in paucioribus terminis quàm duobus, cum ſit relatio ad aliud, hoc eſt in prædicamento ad aliquid.* Itaque *binarius non eſt numerus pedum talium quales 12 ſunt in ipſo quadrato.* Deinde *ſi binarius eſſet latus quadrati 12, ut dicas illud latus eſſe duo, ex multiplicatione duorum in ſe, non efficeretur illud quadratum 12, ſed quadratum aliud quod eſſet 4 pedum, quemadmodum ex binario numero in ſe ducto fit quadratus numerus quaternarius.* Sed *nec ſi dicas illud latus quadrati 12 numerari alio ullo numero, duxerisq́; numerum illum in ſeipſum, unquam efficitur duodenarius numerus. Cũ tamen omnes numeri denominantes latus cuiuſcunque quadrati multiplicatione ſui ipſius, illum ipſum numerum efficiant denominantem quadratum, cuius latera denominant, puta 2, multiplicatione ſui in ſeipſum reddit 4. ternarius reddit 9. quaternarius reddit 16. & ſimiliter cæteri omnes.* Non *igitur idem eſt aliquas magnitudines habere inter ſe proportionem quam numerus ad numerum, & numerari per ſe ſingulas ex illis nulla ratione habita proportionis, ut hìc latus quadrati 12 per ſe quidem numerari nullo modo poteſt ſed comparatum ad aliam magnitudinem, puta ad latus quadrati 3, numeratur illius proportio.* Sic *& latus ipſius*

quadrati

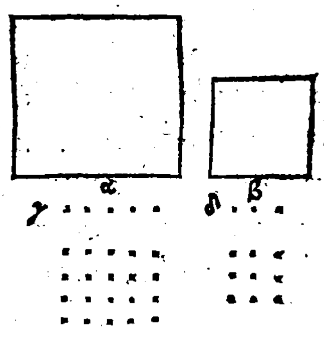
quadrati 3 & cæterarum omnium figurarũ quas geometræ quadratas uocant, quarum areæ tamen per numeros quadratos non designantur. Quod uerò dicimus, manifestum est ex uerbis ipsius Euclidis *in theorematibus 5, 6, 7, & 8 huius libri, cum ubique dicat commensurabiles & incommensurabiles magnitudines non quidem per se numerari, sed habere aut non habere proportionem quam numerus ad numerum. Quæ res non bene animaduersa uidetur plerisq; caussam erroris attulisse, ut ex sequentibus planum fiet.* N*unc uerò qui aggreßi sunt demonstrationem huius theorematis magis particularem aliquam demonstrationem nonnullis uideri possent attulisse, quàm uniuersalem.* Et *sane non deesse arbitror qui illorum dicta secus intelligant, cum existiment ab eis suppositas esse lineas quasdam non tam longitudine commensurabiles, quales in theoremate supponuntur esse, quàm numero certo singillatim numerabiles.* It*aque non intelligentes, illud de demonstrationibus illorum dicere potuerunt: cũ ea ratione credidissent à se conclusum illud uniuersale quod est in hoc theoremate* Euclidis, *Quadrata descripta ex lineis longitudine commensurabilibus habere proportionẽ inter se, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: illud particulare tantum concluserunt, Quadrata descripta ex lineis numero certo per se numerabilibus habere proportionem &c. Quod tamen aliter est, & demonstrationes illorum rectæ sunt, & proposito theoremati conuenientes.* T*antum pictura figurarum quas græcus codex habet, posset ambi-*

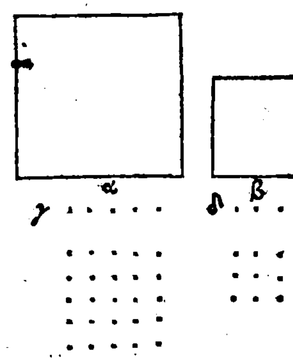
guitatis aliquid afferre. Nam *ita pinguntur quadrata, & describuntur certis areolis, ut earũ numerus quadrato numero denominetur.*



Ex *quo uideri posset lineas α, β, quæ describunt ipsa quadrata, oportere esse numero aliquo per se numerabiles, ut linea α sit pedum 5, & linea β pedum 3, ueluti pictura ipsa refert hic. Quod tamen non supponit* Euclides, *sed unum illud supponit & requirit eas esse longitudine cõmensurabiles, ut in superiori exẽplo de quadratis duobus, quorum alterum spatium totum est 12, alterũ uerò est 3.* Nam *quanuis latera ipsorum non sint numero aliquo certo per se numerabilia, sunt tamen ipsa eadem longitudine cõmẽsurabilia.* Præterea *hæc pictura quadratorum α, β per areolas distinctorum illum errorem efficere posset, ut quis existimet idem esse numeros duos quadratos esse, & habere proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerũ. nam numerus areolarum in quadrato α, est numerus quadratus, nempe 25 productus ex radice 5, quæ est longitudo ipsius lineæ α.* Similiter *numerus areolarum quadrati β est quadratus, nempe 9, & ipse productus ex suo latere 3, longitudine inquã ipsius lineæ β.* Nos *uerò nuper ostẽdimus aliud esse numeros quadratos dici, & habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Itaque *quantũ ad illas areolas attinet contentas maiore quadrato lineæ α, quæ sunt numero 25, exprimunt numerum illum quadratum 25, qui efficitur*

tur ex numero 5 in se ducto. qui numerus 5 est maior extremitas proportionis inter 5 & 3, quæ est proportio linearum α, β. Hæc autẽ proportio, nempe numeri 5 ad 3 facit ut lineæ ipsæ α, β sint inter se longitudine commensurabiles per 6 huius. Idem dices de minoris quadrati areolis. Neque necesse est intelligere illas areolas quadratas esse, aut pedes aut passus quadratos conficiẽtes ipsa quadrata, quanuis tales esse possunt, si modò latera ipsorum quadratorũ sint tot pedibus longa, nempe 5 aut 3. Omnino tamen necesse est numeros ambos exprimentes numerum pedum aut passuum quadratorũ ipsis quadratis comprehensorũ esse simul aut quadratos, ut in his figuris quadratis linearum α, β: aut ambos esse similes superficiales, ut in superioribus quadratis quæ erant 12, et 3. de quibus numeris constat ex antedictis eos esse similes superficiales, itáq; habere proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Itaq; potes pingenda tibi proponere ipsa quadrata linearum α, β, ut nullam distinctionem areolarum in se recipiãt, sintq; quadrata singula plane uacua, solisque quatuor lineis æqualibus cõtẽta. quod ut intelligatur, demonstrationes ipsas explicabimus. Sint duæ lineæ α, β longitudine cõmẽsurabiles. Dico quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β habere proportionẽ quã quadratus numerus ad quadra-

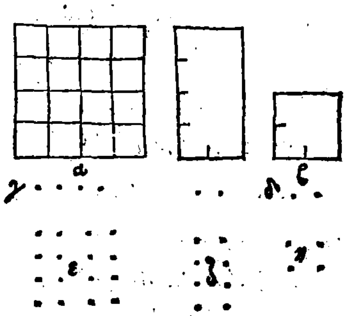


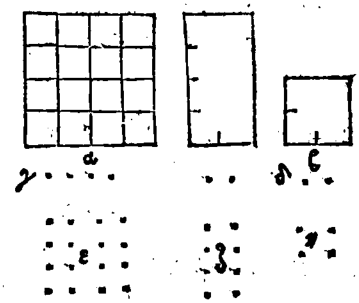


tum numerum. Cum enim commensurabilis sit longitudine linea α linea β. Ergo α ad β habet proportionē quā numerus ad numerum, per 5. huius: habeat itaque proportionem quā numerus γ ad δ. Cū igitur sit quemadmodum linea α ad β, ita γ numerus ad δ numerum: cumq; proportio quadrati quidem lineæ α ad quadratum lineæ β sit proportio cōtinens duplicatam proportionem lineæ α ad lineam β, (similes enim figuræ sunt in duplicata proportione suorum laterum relatiuorum, per primum corollariū 20. 6.) itidem cum proportio numeri quadrati, qui producitur à radice γ, ad quadratum numerum productum à radice δ sit proportio duplicata numeri γ, ad numerū δ per secundum partem 11. 8: *cúmque unius & eiusdē proportionis, puta quæ est lineæ α ad lineam β, uel numeri γ ad numerum δ, proportiones æque multiplices, nempe quadrati lineæ α ad quadratum lineæ β, & numeri quadrati producti à radice γ ad numerum quadratum productum à radice δ, sint inter se æquales: est igitur sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita numerus quadratus productus à radice γ, ad numerum quadratum productum à radice δ.*

Aliter.

Sint α, β lineæ rectæ longitudine commensurabiles. Dico *quadratum descriptum ab α ad quadratum descriptū ad* *ad β habere proportionẽ quã numerus quadratus ad alium numerum quadratum. Quia enim linea α est longitudine cõmensurabilis lineæ β, habent inter se proportionẽ quam numerus ad numerum, per quintũ theorema huius libri. Habeant itaque proportionem eam quã numerus γ ad numerum δ, & numerus γ se ipse multiplicans efficiat numerũ ε. idem porrò numerus γ multiplicans numerum δ reddat numerum ζ. numerus uerò δ ex sui ipsius multiplicatione producat numerum η. Cũ igitur γ ex sui ipsius multiplicatione reddiderit numerum ε: multiplicatus etiam per δ effecerit numerum ζ: est ergo ut numerus γ ad numerum δ; id est linea α ad lineam β, sic numerus ε ad numerum ζ per septimamdecimam septimi. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, sic se habet quadratũ lineæ α ad parallelogrammum descriptum ex linea α in lineam β ducta per primam sexti. Quemadmodum igitur quadratũ lineæ α ad parallelogrammum ex α, β, sic numerus ε ad numerum ζ. Rursus quia numerus δ ex sui ipsius multiplicatione reddidit numerum η, multiplicatus uerò idẽ δ in γ produxit numerum ζ: est igitur quemadmodum γ ad δ hoc est quemadmodum linea α ad lineam β, sic numerus ζ ad numerum η per eandem septimam decimam septimi. Sed quemadmodum linea α ad lineã β,*



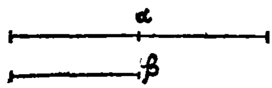


ita parallelogrãmũ ex lineis α,β, ad quadratũ lineæ β per primã sexti. Est igitur sicut parallelogrãmũ ex lineis α,β ad quadratum lineæ β, ita numerus ζ ad numerum κ.

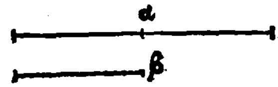
Sed modò cõclusum est sicut se habebat quadratum lineæ α ad parallelogrammum ex α,β, ita se habere numerum ι ad numerum ζ. Per æquam igitur proportionem erit quemadmodum quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sic numerus ι ad numerum κ. Vterque uerò illorum numerorũ est quadratus. Nam ι productus est ex multiplicatione γ in seipsum: κ uerò ex multiplicatione δ sui etiam ipsius in seipsum. Ergo quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ β habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod primo loco demonstrandũ erat. Priore demonstrationis modo usi sunt Theon *&* Campanus, *posteriore etiam* Theon *aut quis alius.* Ex *his duabus nobis simplicior uidetur illa quam priore loco retulimus.* V*acua itaque pingi possunt quadrata quæ describuntur à lineis longitudine commensurabilibus, modò constet tales esse suppositiones, quales accipiuntur in theoremate, lineas scilicet esse longitudine commensurabiles: tunc enim in uniuersum illud uerum erit, quotquot pedes aut passus quadrati fuerint in illis figuris quadratis, semper numerabuntur à numeris habentibus*

proportionem

proportionem inter se quã quadratus numerus ad numerum. Sed quia perobscurus hic locus totus uideri solet, non alienum existimauimus nostram quoque demonstrationẽ apponere, si forte iuuare possimus, quod cupimus quidem, & certe confidimus. Sint lineæ duæ longitudine commensurabiles α, β. dico quadrata earũ &c. Cum enim lineæ α, β sint longitudine commensurabiles, habebunt proportionem inter se quam numerus ad numerum per 5. huius. habeat igitur α ad β proportionẽ duplam, quæ



est quam habet numerus ad numerũ, puta 4 ad 2, & 6 ad 3, & plerique alij: reperianturque minimi numeri tres continuè proportionales in proportione dupla per 2.8, sintq; illi 4, 2, 1. ergo per corollarium eiusdem 2.8, numeri 4 & 1 erunt quadrati. Nam *sicut 4 est quadratus ex 2 in se multiplicato productus, ita 1 est etiam numerus quadratus. fit enim ex eadem unitate in seipsam multiplicata.* Dico *præterea hos numeros quadratos illos esse, quorum proportionem habent inter se quadrata linearum α, β.* Nam *sicut numerus 4 ad numerum 2, ita se habet linea α, ad lineam β.* Vtrobiq; *enim est dupla proportio per suppositionem. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habet quadratum lineæ α ad parallelogrammum, quod fit ex ductu lineæ α in lineam β, per primam sexti.* Ergo *sicut se habet numerus 4 ad 2, ita se habebit quadratum lineæ α ad parallelogrammum productum ex α & β.* Itidem *sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habet linea α ad li-*



neam β. utrobiq; enim etiã est dupla proportio per suppositionẽ. Sed quemadmodum se habet linea α ad lineam β, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β per eandem primam sexti. Ergo *sicut se habet numerus 2 ad 1, ita se habebit parallelogrammum productum ex α & β ad quadratum lineæ β.* Ergo *per definitionẽ æquæ proportionalitatis, & per 22.5 erit quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut numerus 4 ad 1. qui quadrati sunt. Illud ergo uerum est uniuersaliter, Quadrata descripta ex lineis longitudine commẽsurabilibus, habere proportionẽ inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quẽcunque numerum areolarum siue spatiorum intra se capiant illa quadrata: semper tamen necesse erit numeros ab illis contentos esse aut quadratos: aut si quadrati non erũt, (neque enim semper necesse est tales esse) similes saltem superficiales esse omnino necesse est. Porrò secundæ partis huius theorematis quæ est conuersa prioris illa est demonstratio. Sit quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus productus à γ ad quadratum productũ ex δ.* Dico *lineas α, β esse longitudine commensurabiles.* Nam *proportio quadrati α ad quadratum β est duplicata proportio lineæ α ad lineam β. per 20.6. Similiter proportio numeri quadrati producti ex γ ad quadratum productum ex δ est duplicata proportio ipsius numeri γ ad numerum δ, per 11.8. Igitur per 15.5, quemadmodum linea α ad lineã β,*

sic

sic numerus γ ad numerum λ. Commen*surabilis est ergo longitudine linea α lineæ β per 6 huius libri.* Ter*tiam uerò partem theorematis demonstrare non est difficile per secundum syllogismum hypotheticum, quem à destructione consequentis uocant. Sit linea α incommẽsurabilis longitudine lineæ β: quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β non habebit proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* Nam *si cõtradicatur, sequitur statim per secũdam partem huius theorematis, illa quadrata habere latera longitudine commensurabilia, quod est contrarium his quæ supposita sunt.* Sic *enim essent lineæ α, β, & commensurabiles & incommẽsurabiles longitudine, quod est impossibile. Simili ratione postrema pars huius theorematis demonstratur.* Nam *si quadrata inter se proportionẽ non habent quam quadratus numerus ad quadratum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.* Si *contradicatur, continuo sequitur per primam partem huius theorematis, illa quadrata habere proportionem inter se quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quod est contrarium suppositioni.*

Corollarium.

Ex *quibus ita demonstratis, manifestũ illud est, lineas longitudine commensurabiles, omnino potentia quoq; cõmensurabiles esse.* Q*uæ uerò sunt potentia commensurabiles, non omnino longitudine quoque commensurabiles esse.* Et *quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino potentia etiam incommensurabiles esse. Quæ uerò potentia incommensurabiles sunt, omnino* *longitudine quoque incommenſurabiles eſſe. Cum enim quadrata linearum longitudine commenſurabiliũ proportionem eam inter ſe habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ea uerò quæ proportionem habeant quadrati numeri ad quadratum numerum, ſimpliciter etiam habeãt proportionem quam numerus ad numerum. Et quæ proportionẽ habent quã numerus ad numerum, ſint commẽſurabilia per 6 huius. Sequitur omnino lineas longitudine commenſurabiles non tantùm eſſe longitudine commenſurabiles, ſed etiã eſſe potentia. Huius probatio pendet ex prima parte theorematis. Rurſus quia quadrata quædam ſunt quæ non habẽt proportionem eam inter ſe quam quadratus numerus ad quadratum numerum, habẽtia tamẽ ipſa proportionem eam ſimpliciter quam numerus ad numerum, latera quidem eorum ſunt potẽtia commenſurabilia, quia deſcribunt quadrata habẽtia proportionem quam numerus ſimpliciter ad numerum, itáque commenſurabilia per 6 huius: latera uerò ipſa inter ſe ſunt longitudine incommenſurabilia, per poſtremam partem theorematis. Verum eſt igitur lineas potentia commenſurabiles nõ ſtatim eſſe longitudine etiã commenſurabiles. Hac eadẽ ratione probatur & illud tertium corollarij membrum, lineas longitudine incõmenſurabiles non ſtatim etiam eſſe potentia incommenſurabiles. Poſſunt enim eſſe longitudine quidem incommenſurabiles, potentia tamen commenſurabiles, ut in quadratis quæ habent quidem proportionem inter ſe quam numerus ad numerum, ſed non quam numerus*

quadratus

quadratus ad numerum quadratum. Quartum uero probatur per ſecundum ſyllogiſmum hypotheticum à deſtructione conſequentis, lineas potentia incommenſurabiles, longitudine quoque incommenſurabiles eſſe. Nam ſi dicas eas eſſe longitudine commenſurabiles, ſequitur eſſe ipſas quoque potentia cõmenſurabiles, quod eſt contra ſuppoſitionem. Nam poſitæ ſunt incommenſurabiles longitudine. Reſolutio autẽ eius demonſtrationis quam attulimus illa eſt. Omnia quadrata habentia proportionem inter ſe quam extremi trium numerorum minimorum ſuæ proportionis continuæ proportionalium, habẽt proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Sed quadrata duarũ linearum longitudine commenſurabilium ſunt huiuſmodi. Ergo quadrata duarum linearũ longitudine commenſurabilium habent proportionem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Maior patet ex corollario 2.8. Minor patet ex 22.5.

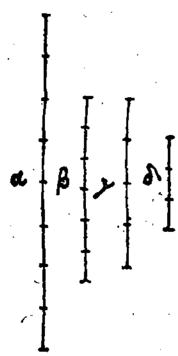
Lemma.

Demonſtratum eſt in arithmeticis theoremate 26.8 ſimiles planos numeros habere proportionem inter ſe quã numerus quadratus ad numerum quadratũ. Conuerſum uerò theorema numeros habentes proportionẽ inter ſe quam numerus quadratus ad numerũ quadratum eſſe ſimiles planos ſuperficiales, non quidẽ demonſtratur in libris arithmeticis, ſed eſt à nobis in præcedẽti theoremate libri huius demonſtratum. Vnde manifeſtum eſt numeros qui non ſunt ſimiles plani ſuperficiales, id eſt non habẽtes latera inter ſe proportionalia, nõ *habere etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Eam enim proportionẽ si inter se haberent, sequeretur simul eos esse similes superficiales. cuius contrarium est positum, eos inquam non esse similes planos. Ergo numeri non similes superficiales non habent inter se proportionem eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Antequam attingamus theorema quod est decimo loco positum in hoc libro, illud omnino faciẽdum est, ut ei præponamus illud quod uulgo proximum locum tenet, scilicet undecimum. Aliter enim si fecerimus, demonstratio illius theorematis quod decimo loco scribi diximus, non procederet à priori, ut patebit in explicatione illius. Itáque Campanus fieri oportere recte indicauit, dum situm utriusque theorematis inuerteret.

Decimum Theorema.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, prima uerò secundæ fuerit commensurabilis, tertia quoque quartæ commensurabilis erit. Quòd si prima secũdæ fuerit incommẽsurabilis, tertia quoq; quartæ incommensurabilis erit.



Sint quatuor magnitudines proportionales α, β, γ, δ. ut α ad β, sic γ ad δ. Sitq; α commensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse commensurabilem magnitudini δ. Cum enim α sit commensurabilis β, Ergo α habebit proportio-

nem

nem ad β quam numerus ad numerum, per 5 huius. Sed ex *suppositione est sicut α ad β, sic γ ad δ.* Ergo *γ ad δ habebit etiam proportionem quam numerus ad numerum.* Ergo *commensurabilis erit magnitudo γ magnitudini δ per 6 huius.* Rursus *sit α incommensurabilis magnitudini β, dico etiam γ esse incommensurabilem δ.* Cum *enim α sit incommensurabile β, igitur α non habebit proportionem ad β, quam numerus ad numerum per 7 huius.* Est *autem sicut α ad β, ita γ ad δ.* Ergo *neque γ ad δ proportionem habebit quam numerus ad numerum.* Incommensurabilis *est igitur γ magnitudini δ per 8 huius.* Si *itaque quatuor magnitudines & cætera.*

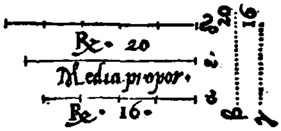
Corollarium.

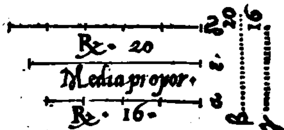
Si *fuerint quatuor lineæ proportionales, fuerintque duæ priores, aut duæ posteriores inter se cōmensurabiles potentia tantum, cæteræ quoque duæ erunt potentia tantum cōmensurabiles. hoc probatur per 22.6, & per hoc theorema* 10. *quo corollario utitur demonstrator in sequentibus theorematibus* 28. 29. *& alijs.*

Vndecimum Theorema.

Propositæ lineæ rectæ (quam ῥητὴν uocari diximus) reperire duas lineas rectas incommensurabiles, hanc quidē longitudine tantum, illam uerō non longitudine tantum, sed etiam potentia incommensurabilem.

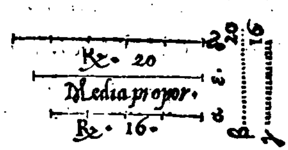
Sit linea recta proposita α, reperiendæ sunt duæ lineæ incommensurabiles lineæ α, alia qui-





dem longitudine tantùm, alia uerò etiam potentia incommẽsurabilis. Afferantur numeri duo β, γ inter se rationem eam non habentes quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est, ne sint illi numeri similes plani: fiatque sicut numerus β ad numerum γ, ita quadratum lineæ α ad quadratum alterius lineæ quæ sit δ. Quomodo uerò id fiat, didicimus per lemma illud positum in theoremate 6 huius libri. Commensurabile est igitur quadratũ lineæ α, quadrato lineæ δ per 6 huius libri. Et quia numerus β ad numerum γ non habet eam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum: neque etiam quadratum lineæ α ad quadratũ lineæ δ habebit eam proportionem quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Ergo linea α erit incommensurabilis longitudine tantum lineæ δ per 9 huius libri. Sic itaq; reperta est prior linea, nempe δ incommensurabilis longitudine tantum lineæ propositæ quæ est α. Rursus reperiatur media proportionalis inter α, δ quæ sit ι per 13. 6. Est itaque sicut linea α ad lineam δ, ita quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ ι per secundum corollarium 20. 6. Sed linea α est incommensurabilis longitudine lineæ δ, ut modò conclusum est. Ergo quadratum etiam lineæ α erit incommensurabile quadrato lineæ ι, per secundam partem postremi theorematis. Nec te impediat quod illud theorema 10 loquatur de magnitudinibus cõmensurabilibus & incõmensurabilibus. Lineæ enim quando consyderantur earum lõgitudines, ut sint longitudine

gitudine cõmensurabiles aut incommẽsurabiles lineæ, magnitudinis uoce comprehenduntur, & contrà, si considerantur ut magnitudines, ut sint magnitudines commensurabiles siue incommensurabiles, de longitudinibus ipsarum linearum loqui intelligimus. neque tum quicquam de potentia lineæ intelligimus. Nam magnitudo lineæ est ipsa longitudo, cum linea nihil aliud sit quàm longitudo sine latitudine. De quadratis uerò nihil est necesse ita loqui, quia magnitudo ipsius quadrati est ipsum quadratum. potentia enim quadrati non dicitur. Cum ergo quadratũ lineæ α sit incommensurabile quadrato lineæ ι, erit igitur per definitionem linearum incommensurabiliũ linea α incommẽsurabilis potentia lineæ ι. Ergo lineæ rectæ propositæ ueluti α quam ῥητὴν diximus, & ex qua mensuras cæterarum linearum accipi oportere dicebamus inter principia huius libri, reperta est linea α longitudine tantum incommensurabilis. Est itaque ea linea α ῥητὴ siue rationalis, longitudine tantum incommensurabilis, supple lineæ α quæ primò & ex suppositione rationalis est. Reperta est item linea ι eidem lineæ α incommensurabilis non longitudine tantum, sed etiam potentia. quæ linea ι per definitionem linearum incommensurabilium lineæ rationali erit irrationalis. Nam in uniuersum solet Euclides eas uocare ἀλόγους id est irrationales, quæ & longitudine & potentia sint incommensurabiles lineæ propositæ, & ex suppositione ῥητῇ id est rationali. Hoc au-

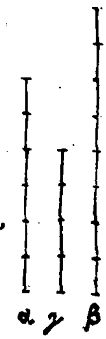


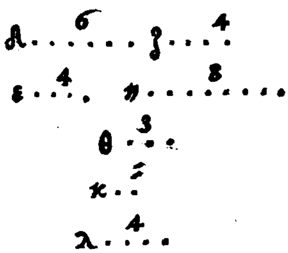
tem problema licet in theorema conuertere, quomodo diximus cætera conuerti posse.

Duodecimum Theorema.

Magnitudines quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, inter se quoq; sunt cõmẽsurabiles.

Vtraque magnitudo α, β sit commensurabilis magnitudini γ. Dico magnitudines etiam α, β esse inter se commensurabiles. Nam cum α sit commensurabilis magnitudini γ. igitur α ad γ habebit proportionem quam numerus ad numerum. habeat proportionem quam numerus δ ad numerum ε. Rursus cum β sit commensurabilis γ, igitur γ ad β habebit proportionẽ quam numerus ad numerum. habeat itaque quam numerus ζ ad numerum η. Sumantur minimi numeri continuati in proportionibus datis secundum 4.8. qui numeri sint θ, κ, λ. ut quæ sit proportio numeri δ ad numerum ε, eadẽ sit numeri θ ad numerum κ: quæ uerò proportio sit numeri ζ ad numerum η, eadẽ sit numeri κ ad numerũ λ. Cum igitur sit sicut α ad γ, ita δ ad ε: sitq; δ ad ε sicut θ ad κ: est itaq; ut α ad γ, sic numerus θ ad numerũ κ. Itẽ cũ sit ut γ ad β, sic ζ ad η: sitq; sicut ζ ad η, ita κ ad λ. Ergo sicut γ ad β, ita κ ad λ. sed modò probatũ est, sicut erat α ad γ, ita θ ad κ. Per æquã igitur proportionẽ





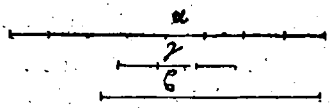
α, γ, β.
θ, κ, λ.

sicut

sicut α ad β, ita numerus θ ad numerum λ. Ergo *per 6 huius libri, magnitudo α erit commensurabilis magnitudini β. ergo magnitudines quæ eidem sunt commensurabiles & cætera.*

Decimumtertium Theorema.

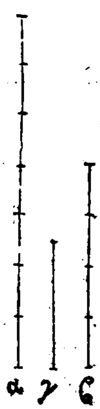
Si ex duabus magnitudinibus hæc quidem commensurabilis sit tertiæ magnitudini, illa uerò eidem incommensurabilis, incõmensurabiles sunt illæ duæ magnitudines.



Sint duæ magnitudines α, β. porrò sit tertia magnitudo γ: sitq; α commensurabilis ipsi γ: sit etiam β incommensurabilis eidem γ. dico magnitudinem α esse incommensurabilem ipsi β. Nam *si α esset commensurabilis ipsi β, cum sit α commensurabilis ipsi γ: ipsa quoque magnitudo β esset commensurabilis magnitudini γ, per 12. cuius positum est contrarium.*

Decimumquartum Theorema.

Si duarum magnitudinum cõmensurabilium altera fuerit incõmensurabilis magnitudini alteri cuipiam tertiæ, reliqua quoque magnitudo eidem tertiæ incõmensurabilis erit.

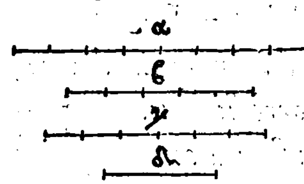


Sint duæ magnitudines commẽsurabiles α, β: altera uero ipsarum, nempe α alteri cuipiã quæ γ sit, incommensurabilis esto: dico reliquam quoque magnitudinem β esse incommen-

ſurabilem ipſi γ. Nam ſi β eſſet commenſurabilis γ, cum etiam α ſit commenſurabilis β: ipſa quoque magnitudo α magnitudini γ erit commenſurabilis, per præcedens theorema. Sed *poſitum eſt eas eſſe incommenſurabiles: quod eſt factu impoſsibile. Non ergo erit commenſurabilis β ipſi γ. ergo incommẽſurabilis. Si duarum ergo magnitudinum &c.*

Corollarium.

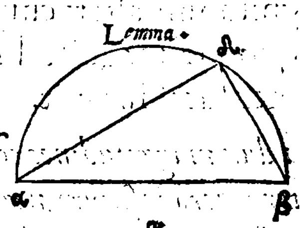
Quæ ſunt commenſurabilia incommẽſurabilibus, ſunt inter ſe incommenſurabilia. Sint *magnitudines, α, β incommẽſurabiles: ſit & magnitudo γ cõmenſurabilis ipſi α: ſit item magnitudo δ cõmenſurabilis ipſi β. dico γ, δ eſſe inter ſe incommenſurabiles.* Nam *α, γ ſunt commenſurabiles, ex quibus α eſt incommenſurabilis ipſi β.* Ergo *per hoc theorema* 14. *γ, β ſunt incommenſurabiles.* Sed *β, δ ſunt commenſurabiles. ergo per hoc ipſum theorema, aut per* 13, *γ, δ ſunt inter ſe incommenſurabiles. hoc autẽ corollario ſæpe utitur* Theon, *ut in* 23, 27, 38, *& alijs.*



Lemma.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quanto plus poteſt maior q̃ minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ α β, & γ, quarum maior ſit α β, inueniẽdũ eſt quanto plus poſſit linea α β, quàm γ. Deſcri*batur ſuper lineã α β ſemicirculus α δ β, & intra eum uſque*



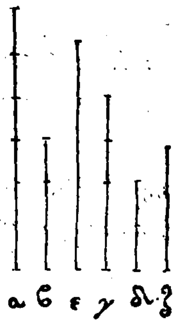
ad ipsius semicirculi circunferentiam collocetur linea recta α δ æqualis ipsi γ per primam quarti, & cõiungãtur puncta δ, β linea ducta, quæ sit δ β. Cõstat sane angulum α δ β rectum esse per 31.3. præterea lineam α β posse plus quàm linea α δ, quæ est æqualis ipsi γ: tantóque plus posse quantum est quadratum lineæ δ β, per 47.1. Similiter quoq; duabus datis rectis, linea utrãque potens reperietur hac ratione. Sint duæ datæ rectæ α δ, δ β, inueniendáq; proponatur linea quæ utrãque posit. applicentur inter se eo situ quo angulum rectum conficiãt, qui sit α δ β, & ducatur linea à puncto α in punctum β. constat item lineam α β esse eam quam quærimus potentẽ quantũ illæ ambæ α δ, δ β, per 47.1.

Decimumquintum Theorema.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, posit autem prima plusquam secunda, tanto quãtum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine: tertia quoque poterit plusquam quarta tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si prima posit plusquam secunda quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: tertia quoque poterit plusquam quarta quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Sint quatuor lineæ rectæ proportionales α, β, γ, δ: sicut α ad β, ita γ ad δ. posit autem α plusquam β tanto quãtum est quadratum lineæ ε: positq; γ plusquam δ quadrato lineæ ζ. Dico si α fuerit commensurabilis longitudine li-

neæ ι, erit etiam γ commensurabilis longitudine lineæ ζ. si autem α incommensurabilis longitudine fuerit lineæ ι, erit similiter γ incommensurabilis longitudine lineæ ζ. Ex eo enim quod est sicut α ad β, ita γ ad δ: erit etiam ut quadratũ lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ



per 22, 6. Sed ex suppositione quadrato lineæ α æqualia sunt quadrata linearum β, ι: quadrato uerò lineæ γ æqualia sunt quadrata linearũ δ, ζ. Est igitur sicut proportio quadratorum earum linearum β, ι ad quadratũ lineæ β: ita proportio quadratorum duarum linearum δ ζ, ad quadratum lineæ δ. Per disiunctã igitur proportionalitatem sicut quadratum lineæ ι ad quadratũ lineæ β, ita quadratum lineæ ζ ad quadratum lineæ δ. Est itaque ueluti ι ad β, sic ζ ad δ, per secundam partẽ 22. 6. Per cõtrariam ergo proportionem, sicut β ad ι, ita δ ad ζ. Erat autem ex suppositione sicut α ad β, ita γ ad δ. Per æquam igitur proportionem est ut α ad ι, ita γ ad ζ. Itaque per decimam huius, si α est commensurabilis longitudine ipsi ι, erit quoque γ commensurabilis longitudine ipsi ζ. Si uerò incommensurabilis fuerit α ipsi ι, erit similiter incommensurabilis γ ipsi ζ. Ergo si quatuor rectæ proportionales &c.

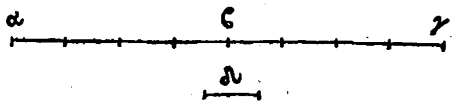
α, β, ι.
γ, δ, ζ.

Decimumsextum Theorema.

Si duæ magnitudines commensurabiles componãtur, tota magnitudo composita singulis partibus commensurabilis

commenſurabilis erit. Quòd ſi tota magnitudo compoſita alterutri parti commenſurabilis fuerit, illæ duæ quoque partes commenſurabiles erunt.

Componantur duæ magnitudines commenſurabiles α β, β γ. Dico totam magnitudinem α γ ſingulis partibus α β, β γ cõmenſurabilem eſſe.



Cum enim α β & β γ ſint commẽſurabiles, metietur ipſas quædam magnitudo cõmunis ambarum menſura. Metiatur igitur, ſitq́; δ. Cum itaq; δ metiatur α β: β γ metietur quoque totam magnitudinem compoſitam α γ per communem cõceptionẽ. Quæcunque magnitudo metitur duas alias, metitur quoque compoſitam ex illis. Sed eadem δ metiebatur α β, β γ ex ſuppoſitione. Ergo δ metitur α β, β γ, & α γ. Commenſurabilis eſt itaque α γ utriq; magnitudini α β, & β γ. Sit præterea α γ tota compoſita commenſurabilis alteri ex duabus α β, β γ: ſitq́; illa α β. Dico duas illas α β, β γ eſſe commenſurabiles. Nam cum α γ & α β ſint commenſurabiles, metiatur ipſas communis quædam menſura: ſit autem illa magnitudo δ. Cum itaq; δ metiatur α β & α γ, reliquam quoque magnitudinem β γ metietur magnitudo δ per illam communem conceptionem. Quicquid metitur totũ, & detractum metitur & reliquũ. Sed eadem δ metiebatur magnitudinem α β ex ſuppoſitione. Ergo δ metitur utranque α β, & β γ. Commenſurabiles itaque ſunt α β, β γ. itaq; ambæ partes theore-

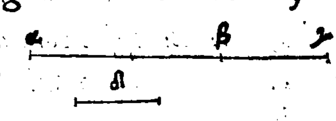
matis uera. *Corollarium.*

Si tota magnitudo fuerit commensurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus commẽsurabilis. Nam si tota magnitudo ueluti α γ est commensurabilis magnitudini β γ, ergo per secundam partem huius theorematis 16, magnitudines α β, β γ sunt commensurabiles. ergo per priorem partem eiusdem theorematis magnitudo α γ erit cõmensurabilis singulis α β, β γ. Hoc *corollario utitur* Theon *in demonstratione* 18, *& aliorũ theorematum. omissum tamen est* Euclidi, *quia facile uidebatur ut cætera ferè corollaria.*

Decimumseptimum Theorema.

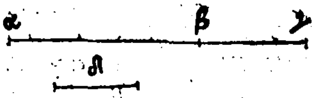
Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, ipsa quoq; tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quòd si tota alteri parti incommẽsurabilis fuerit, illæ quoque primæ magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles α β, β γ. Dico *totã magnitudinem α γ, utricunq; magnitudini α β, β γ incõmensurabilem fore.*



Quòd si negetur incommensurabiles esse γ α, α β, metietur ipsas quædam magnitudo. metiatur itaque, ea quæ sit δ si fieri potest. Cum igitur δ metiatur per te γ α, α β, metietur similiter reliquã magnitudinem β γ: sed per te eadẽ δ metiebatur γ α. Ergo

α β,



α β,β γ ſunt commenſurabiles. Sed ex *ſuppoſitione erãt incõmenſurabiles: fieri ergo nõ poteſt ut γ α, α β ſint cõmenſurabiles: ſunt itaq; incõmenſurabiles.* Eadem *uia demonſtrari poteſt magnitudines α γ, γ β eſſe incommenſurabiles.* Ergo *α γ ſingulis magnitudinibus α β, β γ eſt incommenſurabilis.*

Rurſus *α γ alteri magnitudini, nempe ipſi α C, ſit incõmenſurabilis. dico etiam α β, β γ eſſe incommenſurabiles.* Nam *ſi commẽſurabiles fuerint, metietur ipſas magnitudo quædam. metiatur, ſitq; δ.* Cum *igitur δ metiatur α β, β γ, metietur quoque totam magnitudinem α γ. ſed per te δ metiebatur α β: ergo δ metietur γ α, α C.* Cõ*menſurabiles itaq; ſunt γ α, α β.* Sed ex *ſuppoſitione erant incommenſurabiles. illud autem fieri nullo modo poſſe certum eſt, ut ſimul ſint & commenſurabiles & incommenſurabiles.* Nulla *ergo magnitudo metietur α β, β γ.* Ergo *incommenſurabiles ſunt α β, β γ.* Eadem *quoque uia demonſtrari poteſt illud idem, ſi poſuerimus magnitudinem α γ eſſe incommenſurabilem ipſi β γ.* Er*go ſi duæ magnitudines incommenſurabiles &c.*

Corollarium.

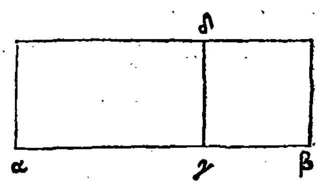
Si *tota magnitudo fuerit incõmenſurabilis alteri ex duabus magnitudinibus totam magnitudinem componentibus, erit etiam & reliquæ ex duabus incommẽſurabilis.* Nam *ſi tota magnitudo ueluti α γ eſt incommenſurabilis magnitudini β γ, ergo per ſecundam partem huius theorematis 17. magnitudines α β, β γ ſunt incom-*

mensurabiles. ergo per priorem partem eiusdẽ theorematis magnitudo α γ erit incommensurabilis singulis α β, β γ. hoc corollario utitur Theon *in demonstratione* 73 *theorematis, & aliorum.*

Lemma.

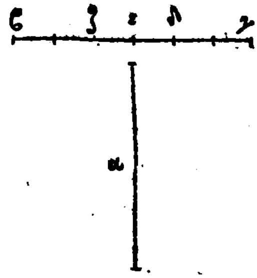
Si *parallelogrammum applicetur secundum lineam rectam, lineáque illa tanto plus excedat parallelogrammi latus, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi: illud parallelogrammũ sic applicatum, est æquale alteri parallelogrammo, quod fit ex sectionibus lineæ, quæ facta sunt per applicationem ipsius parallelogrammi secundum lineam illam.*

Hoc *per se manifestum uideri potest, tamen quia reperitur inter cætera, demonstrationem eius afferemus.* Secũdum *lineam rectam α β applicetur parallelogrammum α δ, cuius alterũ latus sit æquale illi portioni lineæ rectæ, quæ excurrit extra parallelogrammũ.* Dico *parallelogrammũ α δ esse æquale superficiei rectangulæ quæ fit ex α γ, γ β. quod per se patet, ut modò diximus.* Nam *quia quadratum est δ β, linea δ γ est æqualis lineæ β γ: estq́; parallelogrammum α δ, id quod est superficies rectangula α γ, γ β.* Ergo *si parallelogrammum applicetur &c.*

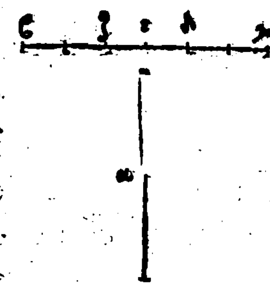


Decimumoctauum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati quod describitur à minore, æquale le parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrãmi. Si præterea parallelogrammum sui applicatione diuidat lineã illam in partes inter se cõmensurabiles longitudine: illa maior linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quòd si maior plus possit quàm minor, tanto quantum est quadratum lineæ sibi cõmẽsurabilis longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur secundũ maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi, parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se longitudine cõmensurabiles.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarum maior sit β γ. Quartæ autem parti quadrati lineæ minoris α, hoc est ipsi quadrato quod describitur à dimidia linea α, æquale parallelogrammum secundum lineã β γ, applicetur, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipsius parallelogrãmi: sitq; illud parallelogrammũ quod fiat ex β δ, δ γ: (hoc uerò quemadmodũ fiat, docet Campanus in fine demonstrationis 13.) sit quoque commen-



ſurabilis longitudine linea β δ ipſi lineæ δ γ. Dico lineã β γ plus poſſe quàm linea α, tanto quantum eſt quadratum lineæ cuiuſdã ſibi ipſi lineæ, dico β γ, longitudine cõmenſurabilis. Secetur enim linea β γ in duas partes æquales in puncto ε, ponaturque lineam ε ζ æqualem eſſe lineæ δ ε: reliqua ergo linea δ γ erit æqualis lineæ β ζ. Cumq; linea recta β γ diuiſa ſit in partes æquales in puncto ε, in partes autem inæquales in puncto δ, ſuperficies rectangula contenta ex β δ, δ γ cum quadrato lineæ ε δ, æqualis eſt quadrato lineæ ε γ, per quintum theorema ſecundi libri. Itaque ſuperficies rectangula contenta ex β δ, δ γ quater ſumpta cũ quadrato lineæ ε δ item quater ſumpto, eſt æqualis quadrato lineæ ε γ quater ſumpto. Nam æqualia quæ ſunt æqualiter multiplicata, ſimul æqualia ſunt. Sed ſuperficiei rectangulæ contentæ ex β δ, δ γ quater ſumptæ æquale eſt quadratũ lineæ α ex ſuppoſitione. Nam parallelogrammum ex β δ, δ γ poſitum eſt æquale quartæ parti quadrati lineæ α. Quadrato uerò lineæ δ ε quater ſumpto æquale eſt quadratum lineæ δ ζ. Nam linea δ ζ eſt dupla ad lineam δ ε. quadrato autem lineæ ε γ quater ſumpto æquale eſt quadratũ lineæ β γ. Similiter enim linea β γ dupla eſt ad lineam ε γ. Ergo quadrata linearũ α, δ ζ ſunt æqualia quadrato lineæ β γ. Quocirca quadratum lineæ β γ maius eſt quàm quadratum lineæ α tanto quantum eſt quadratum lineæ δ ζ. Ergo maior linea β γ plus poteſt quàm

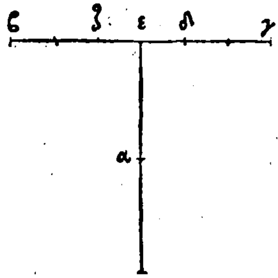
minor

minor α quadrato lineæ δ ζ. Nunc autem demonstrandum est lineam ϐ γ esse longitudine commensurabilem ipsi lineæ δ ζ. Cum enim ex suppositione linea ϐ δ sit longitudine commẽsurabilis ipsi δ γ: ergo linea tota ϐ γ erit longitudine commensurabilis lineæ δ γ, per sextum decimum theorema huius libri. Atqui linea δ γ est æqualis lineæ ϐ ζ. Ergo linea tota ϐ γ est commensurabilis longitudine lineis ϐ ζ, γ δ. Componantur illæ duæ lineæ ut unam lineam efficiant. Cum itaque linea tota β γ sit cõmensurabilis lõgitudine duabus lineis unius loco sumptis ϐ ζ, γ δ. Ergo lineæ β ζ, γ δ unius loco sumptæ sunt cõmensurabiles longitudine ipsi lineæ ζ δ, per secundam partẽ sextidecimi theorematis huius libri. Quare etiã residuæ lineæ ζ δ commensurabilis longitudine erit tota linea ϐ γ, per priorem partem eiusdem sextidecimi theorematis. hoc ipsum tamen probari potest per corollariũ à nobis positum post 16. Ergo linea β γ plus potest quàm linea α quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Rursus linea β γ plus posit quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi longitudine commẽsurabilis: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale secundum lineam β γ parallelogrammum applicetur, quod relinquat ex linea β γ portionem æqualem alteri ipsius lateri: sitq; superficies rectangula contẽta ex β δ, δ γ, demonstrandum est lineas ϐ δ, δ γ esse inter se longitudine commensurabiles. Manentibus constructionibus & suppositionibus præcedentibus similiter demonstrabimus lineam ϐ γ plus posse linea α tanto quantum est quadratum lineæ ζ δ. Sed ex suppositione linea β γ plus *potest quàm linea α, tanto quantum est quadratum lineæ sibi commensurabilis longitudine. Commensurabilis est itaque longitudine linea β γ lineæ ζ δ. Ergo linea composita ex duabus β ζ, δ γ est commensurabilis longitudine lineæ ζ δ, per secundā partem sextidecimi theorematis huius libri. Quocirca per 12 huius, siue per priorem partem sextidecimi theorematis, linea β γ est cõmensurabilis longitudine lineæ compositæ ex β ζ, δ γ. Sed tota linea composita ex β ζ, δ γ est commensurabilis longitudine ipsi δ γ. nam β ζ est æqualis ex antè dictis ipsi δ γ. Ergo linea β γ est longitudine commensurabilis ipsi δ γ, per 12 huius. Quare & linea β δ est longitudine commensurabilis lineæ δ γ, per secundam partem sextidecimi theorematis. Ergo si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales &c. Quod demonstrandum erat.*

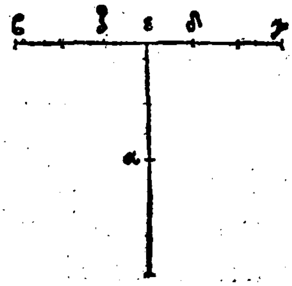
Decimumnonum Theorema.

Si fuerint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati lineę minoris æquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum præterea sui applicatione diuidat lineam in partes inter se longitudine incommẽsurabiles, maior illa linea tanto plus potest quàm minor, quantũ est quadratum lineæ sibi maiori incõmensurabilis longitudine. Quòd si maior linea tanto plus possit quàm minor, quantum est quadratum lineæ incommensurabilis

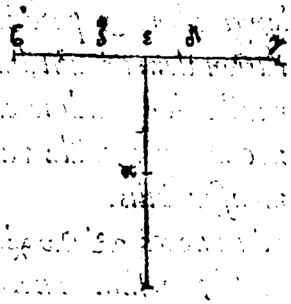
commenſurabilis ſibi longitudine: & præterea quartæ parti quadrati lineæ minoris æquale parallelogrammum applicetur ſecundum maiorē, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrāmi, quantum eſt alterum latus ipſius:, parallelogrammum ſui applicatione diuidit maiorem in partes inter ſe incommenſurabiles longitudine.



Sint duæ rectæ inæquales α, β γ, quarū maior ſit β γ: quartæ autē parti quadrati minoris nempe α, æqualę parallelogrammū applicetur ſecundum lineā β γ, quod relinquat ex linea β γ partem excurrentem æqualem alteri lateri ipſius parallelogrammi: ſitq; illud parallelogrammum ex β δ, δ γ: incommenſurabilis autem longitudine ſit β δ ipſi δ γ. Dico lineam β γ poſſe plus quàm linea α tanto, quantum eſt quadratum lineæ incommenſurabilis ſibi longitudine. Sint primum eædem conſtructiones & ratiocinādi uiæ, quæ in proximo theoremate. Similiter oſtendemus lineā β γ poſſe plus quàm linea α tanto, quantum eſt quadratum lineæ δ ζ. Reſtat ut demonſtremus lineam β γ eſſe incommenſurabilem longitudine ipſi δ ζ. Cum enim linea β δ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ δ γ ex ſuppoſitione, incommenſurabilis etiam longitudine erit lineæ β γ ipſi lineæ δ γ, per 17 huius: ſed δ γ eſt commenſurabilis ambabus lineis β ζ, δ γ ſimul compoſitis, quia δ γ eſt



æqualis ipsi β ζ. Ergo β γ est incommensurabilis ambabus β ζ, δ γ simul compositis, per 14 huius. Ergo per secundam partem septimidecimi theorematis huius libri linea composita ex β ζ, δ γ simul & unius loco sumptis est incommẽsurabilis lineæ ζ δ. Ergo per priorem partẽ eiusdẽ septimidecimi theorematis linea β γ est incommensurabilis longitudine lineæ ζ δ. Linea igitur β γ potest plus quàm linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine. Rursus linea β γ possit plus linea α tanto quantum est quadratum lineæ incommensurabilis sibi longitudine: quartæ autem parti quadrati lineæ α æquale parallelogrammum applicetur secũdum lineam β γ, quod relinquat excurrentem portionem lineæ β γ æqualem alteri ipsius lateri: sitq́; illud parallelogrammum ex lineis β δ, δ γ. Demonstrandum nobis est illud lineam β δ, esse incommensurabilem longitudine lineæ δ γ. Maneant enim eædem constructiones & ratiocinandi uiæ: similiter etiam ostendemus lineam β γ posse plus quàm linea α quadrato lineæ ζ δ. Primùm ex suppositione linea β γ potest plusquam linea α tanto quantum est quadratum lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo linea β γ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ δ. Itaque linea composita ex β ζ, δ γ & unius loco sumpta erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ δ, per secundam partem septimidecimi theorematis



matis libri huius. Quare & per primam partẽ eiusdẽ theorematis, linea βγ erit incommẽsurabilis longitudine lineæ composita ex βζ, δγ. Sed linea cõposita ex βζ, δγ est commensurabilis longitudine lineæ δγ, eò quia βζ est æqualis ipsi δγ ex anteprobatis. Itaque linea βγ est incommensurabilis longitudine ipsi δγ per 14 huius. Ergo per secundã partem eiusdem septimidecimi theorematis, linea βδ est incommensurabilis longitudine lineæ δγ. Quamobrem si fuerint duæ rectæ inæquales &c.

Lemma.

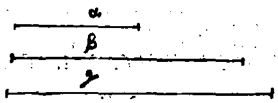
Cum sit demonstratum lineas longitudine commensurabiles omnino potentia quoque commensurabiles esse, eas uerò quæ potentia sunt commensurabiles non omnino longitudine quoque commensurabiles esse, sed esse posse & longitudine commensurabiles & incommensurabiles, constat si lineæ propositæ (quam ῥητὴν uocari diximus, eandémque rationalẽ à recentioribus) linea quædam fuerit commensurabilis longitudine, illam uocari debere rationalem, & commensurabilem non longitudine solum, sed etiam potentia. Nam lineæ longitudine commensurabiles, omnino potentia quoque commensurabiles sunt. Quod si propositæ lineæ, quam rationalem uocant, quædam fuerit linea commensurabilis potẽtia: siquidem & longitudine etiam cõmensurabilis ipsi fuerit, uocabitur illa rationalis, & commensurabilis ipsi *longitudine & potẽtia. Si uerò ipsi lineæ propositæ, quã rationalem uocant, linea quædam potentia commensurabilis, longitudine eidem fuerit incommensurabilis: uocabitur & illa rationalis, potentia tantum commensurabilis.*

Illæ duæ uoces πρόκλου σχόλιον quæ sunt in exemplari impresso, non sunt in uetusto: & quod sequitur, continuata serie scribitur, addita particula γὰρ hoc modo, ῥητὰς γὰρ, sic itaque dicemus: Rationales enim uocat Euclides *(ut est in principijs huius libri) illas lineas quæ sunt lineæ propositæ quam ῥητὴν uocat, siue longitudine & potentia commensurabiles, siue potentia tantum. Sunt tamen & aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incommensurabiles lineæ propositæ, id est τῇ ῥητῇ, siue dicas rationali, potentia tantum eidem commensurabiles, eoq; uocantur rationales & cõmensurabiles inter se ea ratione qua sunt rationales. sed & illæ eadem possunt esse cõmensurabiles inter se siue longitudine, & ideo potentia quoque, siue potentia tantum. Et quidẽ si fuerint inter se commensurabiles longitudine, uocabuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut tamen simul intelligatur potentia quoque cõmensurabiles esse. Quòd si potentia tantum inter se fuerint commensurabiles, uocabuntur & ipsæ rationales potentia tantum commensurabiles.*

Corollarium.

Quod autem lineæ duæ siue plures rationales & commẽsurabiles longitudine ipsi rationali sint inter se commẽsurabiles longitudine, hinc cõstat. Nam cum sint rationales & longitudine commensurabiles ipsi primo rationali,

tionali, eæ autem magnitudines quæ sunt uni & eidem commensurabiles sint inter se commensurabiles, per 12 huius. Ergo lineæ rationales ipsi primo rationali longitudine commensurabiles, sunt inter se quoque commensurabiles longitudine. Sed quantũ ad eas attinet, quæ sunt rationales potentia tantum commensurabiles ipsi primo rationali, fieri omnino necesse est ut illæ quoque inter se sint potentia saltem cõmensurabiles. Cum enim quadrata earum sint rationalia, erunt commensurabilia quadrato lineæ propositæ quæ dicitur primo rationalis. Itaque per 12 huius ipsa quoque inter se erunt cõmensurabilia. Ergo lineæ eorum sunt inter se potentia saltem commensurabiles. Sed nihil uetat easdẽ esse præterea longitudine inter se commensurabiles. Sit enim linea α rationalis, sitq; linea β eidem lineæ α rationali potentia tantum commensurabilis,

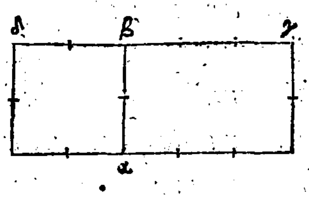


hoc est longitudine incommensurabilis eidẽ. sit præterea alia linea γ lineæ β longitudine commensurabilis (hoc enim esse posse constat ex principijs huius libri) per 14 huius, linea γ est incommensurabilis longitudine ipsi lineæ α: sed quadratum lineæ α est commensurabile quadrato lineæ β ex suppositione: quadratum item lineæ γ est commensurabile eidem quadrato lineæ β, per suppositionem. Ergo per 12 huius, quadratum lineæ γ est commensurabile quadrato lineæ α. Ergo linea γ erit per definitionem rationalis, potentia tantum commensurabilis ipsi lineæ α, sicut & ipsa linea β. Dantur ergo duæ rationales potentia tantum commensurabiles ipsi ra-

tionali, inter se uerò longitudine commensurabiles. Hic *obiter repetendũ esse puto, quod antea diximus in diffinitione linearũ rationalium, Campanũ, cæterósq; deinceps ab eo latinos geometras inuexisse illas uoces siue terminos, ut quasdam lineas uocarent rationales potentia tantum, quasdã uerò longitudine & potentia, quibus nunquam* Euclidem *usum esse reperies. hæ enim uoces longitudine & potentia nunquã referuntur ad rationalitatem aut irrationalitatem, sed semper ad commensurabilitatem, aut incommensurabilitatem linearum. Quæ peruersiones solent rerum per se difficilium etiam difficultatem & obscuritatem augere. Itaque te monitum iterum atque iterum uelim, ut principiorum id est simplicium terminorum simplicem uim diligenter intelligas & retineas, neque quicquam externum admiscendum existimes.*

Vigesimum Theorema.

Superficies rectangula contenta ex lineis rectis rationalibus longitudine commensurabilibus secundum unum aliquem modum ex antedictis, rationalis est.

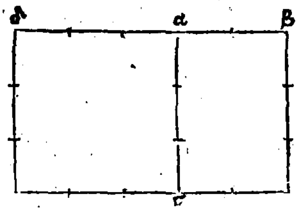


Nam ex lineis αβ, βγ *rationalibus longitudine commẽsurabilibus secundum unũ aliquem modum ex antedictis cõtineatur superficies rectãgula quæ sit* αγ. *dico superficiem* αγ *esse rationalẽ. Describatur enim à linea* αβ *quadratum* αδ: *rationale est*

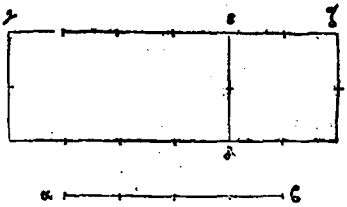
itaque

itaque quadratum illud α δ ex definitione. Cúnque sit commensurabilis longitudine linea α β lineæ β γ, æqualisq́; sit linea α β lineæ β δ, commensurabilis itaque longitudine erit linea β δ lineæ β γ. Est autẽ sicut linea ζ δ ad lineam ζ γ, ita quadratum δ α ad superficiẽ rectangulam α γ, per primam sexti. Sed modo conclusum est lineam β δ esse commensurabilem lineæ β γ. Ergo per decimam huius libri quadratum δ α est commensurabile superficiei rectangulæ α γ. Sed quadratum δ α est rationale: itaque per definitionem superficies α γ erit etiã rationalis. Ergo superficies rectangula cõtenta & cætera.

Sed & alia quadam descriptione placet idem demõstrare. Prior enim demonstratio quadratum minoris lineæ cõscripsit, nunc mutato casu demonstrationis quadratum maioris describamus. Sit superficies rectangula β γ contenta ex lineis rationalibus inæqualibus longitudine inter se commensurabilibus α β, α γ: sítque maior α γ. Describatur ex linea α γ quadratum δ γ. dico parallelogrammum γ ζ rationale esse. Nam linea α γ est commensurabilis longitudine lineæ α β ex suppositione: sed linea δ α est æqualis lineæ α γ. Ergo linea δ α est commensurabilis longitudine lineæ α β: sed quam proportionem habet δ α ad α β, eandem habet quadratum δ γ ad parallelogrammum γ β, per primam sexti. Ergo per 10 huius libri commensurabile est quadratum δ γ parallelogrãmo γ β. Quadratum autem δ γ rationale esse constat, quia est qua-



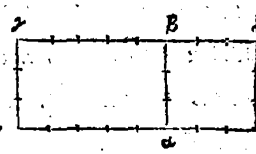
dratum lineæ rationalis, nempe α γ. Itaque per definitionem, parallelogrammum etiam γ ϐ erit rationale. Præterea cum demonstrationes illæ uideantur loqui de eo parallelogrammo quod fit ex duabus lineis, quarum altera sit ea proposita quam primo loco rationalem dicimus, unde diximus mensuras cæterarũ linearum ad illam comparatarum capi oportere, altera uerò sit eidẽ primo rationali commensurabilis longitudine, quæ est prima species linearum rationalium longitudine commensurabilium, alium casum afferendum puto de altera specie, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, ut demonstremus generalem huius theorematis ueritatem, neq; frustra in eo positum illud extitisse secundum unum aliquem modum ex antedictis. Sit itaque linea primo rationalis α β: sit etiam parallelogrammum γ δ contentum ex lineis γ ε, ε δ rationalibus id est lineæ primo rationali α β commensurabilibus longitudine. Sint tamen illæ duæ lineæ γ ε, ε δ diuersæ & inæquales lineæ primo rationali α ϐ. Dico parallelogrammũ γ δ esse rationale. Describatur quadratum lineæ ε δ, sitq; δ ζ. Primum constat lineas γ ε, ε δ esse inter se commensurabiles longitudine per 12 huius. Nam positum est utrãque esse longitudine commensurabilem ipsi α ϐ. Sed ε δ est æqualis lineæ ε ζ. Ergo lineæ γ ε erit commensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Sed quẽadmodum se habet linea γ ε ad lineã ε ζ, ita se habet parallelogrammum



rallelogrammum γ δ ad quadratũ δ ζ, per primã sexti. Ergo per decimam huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato δ ζ. Sed quadratum δ ζ est commensurabile quadrato lineæ α β, quia linea ι δ posita est cõmensurabilis longitudine lineæ α β, quæ est primo rationalis. Ergo per 12 huius, parallelogrammũ γ δ est commensurabile quadrato lineæ α β. Sed quadratũ lineæ α β est rationale per definitionem. Ergo per definitionem quoque figurarum rationalium parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Nunc restat alius casus tertiæ speciei, linearum inquam rationalium longitudine commensurabilium, quæ sunt ipsi quidem lineæ primo rationali α β commensurabiles potentia tantum, itaque rationales tamen. inter se uerò longitudine commensurabiles sint ipsæ lineæ γ ι, ι δ, maneat itaque eadẽ constructio quæ in proximo casu modo lineæ γ ι, ι δ sint rationales potentia tantum commensurabiles ipsi α β: inter se uerò sint longitudine etiam commensurabiles. Dico sic quoque parallelogrammum γ δ esse rationale. Primo probabitur, sicut modo dictum est parallelogrãmum γ δ esse commẽsurabile quadrato δ ζ: sed quadratum lineæ α β est commensurabile quadrato δ ζ. Ergo per 12 huius parallelogrammum γ δ erit commensurabile quadrato lineæ α β. sed quadratũ lineæ α β est rationale. Ergo per definitionem parallelogrammum γ δ erit etiam rationale. Hunc autem casum notandum tibi memineris. Quum enim uentum erit ad 26 theorema, ad illius theorematis demonstrationem & intelligentiam illum tibi usui fore intelliges.

Vigesimumprimum Theorema.

Si rationale secundum lineam rationalem applicetur, habebit alterum latus lineam rationalem & commensurabilem longitudine lineæ, cui rationale parallelogrammum applicatur.



Hoc theorema est ueluti ἀντίστροφον præcedentis. Rationale enim parallelogrammum α γ applicetur secundum lineam α β rationalē uno aliquo modo ex antedictis, siue sit illa primo rationalis, siue alia ipsi primo rationali commensurabilis, idq; longitudine & potentia, uel potentia tãtum. his enim tribus modis dicitur linea rationalis. Dico lineam β γ esse rationalem & longitudine commensurabilem ipsi lineæ α β. Describatur enim quadratum lineæ α β quod sit α δ. Rationale est igitur quadratum α δ, sed & parallelogrammum α γ est rationale per positionem. Ergo per definitionem rationaliũ quæ in se conuertitur, siue per 12 huius, commensurabile est quadratum α δ parallelogrammo α γ. Est autem sicut quadratum α δ ad parallelogrammũ α γ, ita linea δ ε ad lineam ε γ, per primam sexti. Itaq; per decimam huius, linea δ β erit commensurabilis lineæ β γ. sed linea ε δ, est æqualis lineæ β α, commensurabilis est ergo linea α β, lineæ β γ. Rationalis autem est linea α β, Rationalis ergo erit & linea β γ, & commensurabilis longitudine lineæ α β. Ergo si rationale secundum lineã rationalem &c.

Lemma.

Linea

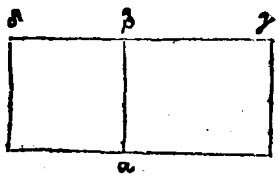
Lemma.

Linea potens ſuperficiem irrationalem, eſt irrationalis. Poſsit enim linea α ſuperficiem irrationalem, hoc eſt quadratum quod ab α deſcribitur, æquale eſto areæ irrationali. dico lineam α eſſe irrationalem. Nam ſi linea α eſſet rationalis, rationale quoque eſſet quadratum ab illa deſcriptum: (ſic enim eſt poſitũ inter definitiones) ſed ex poſitione eſt irrationale, irrationalis eſt ergo linea α. quod demonſtrandum erat.

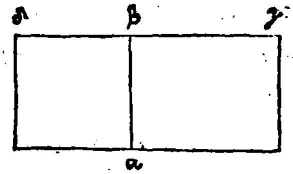
Hîc inſeritur quoddam ſcholium, quod lemmatis inſcriptionem habet, ſed illud nihil aliud eſt quàm demõſtratio quædam ſequentis theorematis.

Vigeſimumſecundum Theorema.

Superficies rectangula contenta duabus lineis rectis rationalibus potẽtia tantum cõmenſurabilibus, irrationalis eſt. Linea autem quæ illam ſuperficiem poteſt, irrationalis & ipſa eſt: uocetur uerò medialis.



Superficies enim rectãgula αγ comprehendatur à duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽſurabilibus, quæ ſint αβ, βγ. Dico ſuperficiem illam eſſe irrationalem, & lineam quæ illam poteſt, irrationalem etiam eſſe: uocetur autem medialis. Deſcribatur enim à linea αβ quadratum αδ. rationale eſt itaq; quadratum αδ. Et quoniam incommẽſurabilis eſt longitudine linea αβ



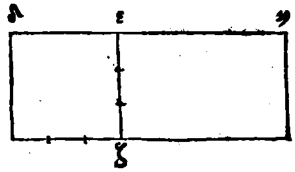
lineæ βγ (nam ex suppositione sunt illæ inter se potentia tantum commensurabiles) æqualisq; est linea αβ, lineæ ζδ. incommensurabilis longitudine ergo erit linea δζ lineæ ζγ. Est autem sicut linea δζ ad lineã βγ, ita quadratum αδ ad parallelogrammum αγ, per primam sexti. incommensurabile. est ergo quadratum αδ parallelogrammo αγ per secundã partem decimi theorematis huius libri. Sed quadratũ δα est rationale: irrationale est ergo parallelogrammum αγ. Quare & linea quæ illud parallelogrammũ αγ, hoc est ea quæ quadratum ipsi parallelogrammo æquale describit, irrationalis erit per lemma postremum. Vocetur autem medialis ea ratione, quia quadratum quod ab ea describitur, æquale est parallelogrammo quod comprehenditur à lineis αζ, βγ, itaque media ipsa proportionaliter intercidit inter illas lineas αζ, βγ per 17.6. quod demonstrandum erat. Hæc autem μέση de qua hoc libro agitur, simpliciter μέση dicitur: illa uero cuius inuentionem tradidit lib. 6. theoremate 13. dicitur μέση ἀνάλογον. Neque omnis μέση ἀνάλογον est potens superficiem irrationalẽ, sed ea tantum quæ est media proportionalis inter duas lineas potentia tantum commensurabiles. Campanus in propositione apud eum 19 addidit, diciturque superficies medialis: quod tamẽ non est ita intelligendũ, ut omnis superficies medialis contineatur ex duabus lineis rationalibus potentia tantum commẽsurabilibus.

hoc

hoc enim refellitur per sequētia theoremata 26. & 29. ubi superficies medialis cōtineri dicitur ex duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. Itaque *superficies omnis rectāgula duabus rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehēsa, medialis dicitur, sed non econuerso, ut omnis medialis superficies rectangula sit comprahensa duabus rectis rationalibus potentia tantum commēsurabilibus. est enim & medialis comprehensa duabus medialibus potentia tantum commensurabilibus. sed tamen in uniuersum superficies quam potest linea medialis est & ipsa medialis.*

Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ, erit sicut prior ad secundā, ita quadratum quod à priori describitur, ad parallelogrammum quod comprehenditur duabus illis rectis. Hoc Lemma *nihil aliud affert quàm quod theorema primū libri sexti. Sint duæ rectæ ζ ι, ι κ.* Dico *sicut est linea ζ ι ad lineam ι κ, ita quadratū lineæ ζ ι ad parallelogrammum comprehensum ex ζ ι, ι κ.* Describatur *enim quadratū lineæ ι ζ, sitq; δ ζ, & compleatur parallelogrammum κ ζ.*

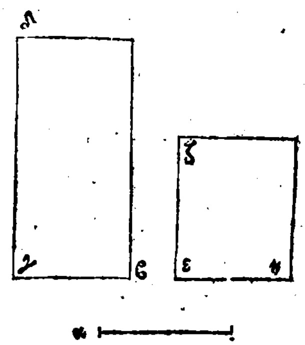


Cum igitur linea δ ι sit æqualis lineæ ι ζ: sit autem sicut linea δ ι ad lineam ι κ, ita quadratum δ ζ ad parallelogrammum ζ κ per 1.6. Ergo *sicut linea ι ζ ad lineam ι κ, ita quadratum δ ζ ad parallelogrammum ζ κ.* Est *autem quadratum δ ζ, quadratum lineæ ι ζ, parallelogrammum uerò ζ κ. id quod comprehenditur dua-*

bus lineis ι ζ, ι κ. Est ergo sicut linea ι ζ ad lineam ι κ, ita quadratum lineæ ι ζ ad parallelogrammum comprehensum lineis duabus ζ ι, ι κ. Et econuerso sicut parallelogrammũ comprehensum duabus lineis κ ι, ι ζ ad quadratum lineæ ι ζ, ita linea κ ι ad lineam ι ζ.

Vigesimumtertium Theorema.

Quadrati lineæ medialis applicati secundum lineã rationalem, alterum latus est linea rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ secũdum quam a pplicatur.



Sit linea medialis α, rationalis uerò sit γ β: & quadrato lineæ α parallelogrammũ rectangulum æquale β δ applicetur secundum lineam β γ, cuius alterũ latus sit γ δ. Dico lineam γ δ esse rationalem & longitudine incommensurabilem lineæ β γ. Cum enim linea α sit medialis, potest parallelogrammum contentum ex lineis rationalibus potentia tantum commensurabilibus. possit itaque parallelogrammum rectangulum η ζ: sed ex suppositione potest etiam parallelogrummum β δ. æquale est igitur parallelogrammum β δ parallelogrammo η ζ. Sed & ambo parallelogramma sunt æqualium angulorum, quia sunt rectangula. Aequalium uerò & æquiangulorum parallelogrammorũ latera quæ sunt circa æquales angulos

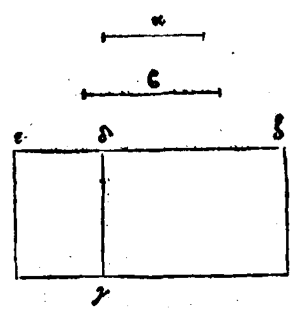
gulos reciprocam inter se proportionem habent per 14 sexti. proportionaliter ergo erit sicut linea ϐγ ad lineã ιϰ, ita linea ιζ ad lineam γδ. Est igitur sicut quadratũ lineæ ϐγ ad quadratum lineæ ιϰ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ γδ, per 22 sexti. sed quadratũ lineæ ϐγ est commẽsurabile quadrato lineæ ιϰ: est enim utraque linea rationalis. commẽsurabile ergo erit etiã quadratum lineæ ιζ quadrato lineæ γδ, per 10 huius. sed quadratum lineæ ιζ est rationale. ergo similiter rationale erit quadratum lineæ γδ. linea ergo γδ erit rationalis. Et quoniam linea ιζ est longitudine incommensurabilis lineæ ιϰ. nam illæ sunt potentia tantum inter se cõmensurabiles. Sicut autem linea ιζ ad lineã ιϰ, ita quadratum lineæ ιζ ad parallelogrammum ex ambabus lineis ιζ, ιϰ contentum per lemma proximum. incommensurabile est ergo quadratum lineæ ιζ parallelogrammo ex lineis ιζ, ιϰ per secundam partem decimi theorematis huius libri. Sed quadrato lineæ ιζ quadratum lineæ γδ est commensurabile: modo enim probatum est utrãque lineam esse rationalem. Ergo per 13 huius, quadratum lineæ γδ est incommensurabile parallelogrammo ex lineis ιζ, ιϰ. Sed parallelogrammum ex lineis γδ, γϐ est æquale parallelogrammo ex lineis ιζ, ιϰ, ut modo probatum est. Ergo quadratum lineæ γδ est incommensurabile parallelogrãmo ex lineis γδ, γϐ. hæc uerò pars breuius concluditur per corollariũ à nobis positũ post 14 theorema. Sed sicut se habet quadratũ lineæ γδ ad parallelogrammum ex lineis δγ, γϐ, ita se habet linea δγ ad lineam γϐ per lemma proximum.

incommensurabilis longitudine est itaque linea δγ lineæ γβ. Rationalis est ergo linea γδ & longitudine incommensurabilis lineæ γβ. quod demonstrandum erat.

Hoc theorema est ἀντίστροφον *proxime præcedentis. Vt uerò fieri posit quod requirit hoc theorema, scilicet applicari quadratum lineæ medialis secundum lineam rationalem, reperienda est tertia linea proportionalis sicut docet 11. sexti, ita tamen ut linea rationalis sit prima, secunda sit linea medialis quæ potest quadratum applicandum. Nam superficies quæ fit ex prima & tertia est æqualis quadrato mediæ per 17 sexti.*

Vigesimumquartum Theorema.

Linea recta mediali commēsurabilis, est ipsa quoque medialis.



Sit linea medialis α, sitq́; linea illi commensurabilis β siue longitudine & potentia, siue potentia tātum, ut recte addidit Cāpanus, & in uetusto exemplari græco legitur. dico lineam β esse medialē. Exponatur linea rationalis γδ, & quadrato lineæ α æquale parallelogrammum rectangulum applicetur secundum lineam γδ, sitq́; parallelogrammū γε, eiusque alterum latus sit linea εδ. Rationalis itaq; erit linea εδ, & incommensurabilis longitudine lineæ γδ, per proximum theorema. Rursus quadrato lineæ β æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrā-

mum

mum rectangulum γζ, cuius alterum latus sit λζ. Cum igitur commensurabilis sit linea α lineæ β, commẽsurabile quoque erit quadratum lineæ α, quadrato lineæ β. sed quadrato lineæ α æquale est ιγ, quadrato autem lineæ β æquale est γζ: commensurabile est ergo parallelogrammum ιγ parallelogrammo γζ. Est autem sicut parallelogrammum γι ad parallelogrammum γζ, ita linea ιλ ad lineam λζ per primam sexti. commensurabilis est ergo longitudine linea ιλ lineæ λζ per 10 huius. Sed linea ιλ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ γλ. Rationalis est ergo linea λζ & incommensurabilis longitudine lineæ λγ per 13 huius. Ergo lineæ γλ, λζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Sed linea quæ potest parallelogrammum rectãgulum compræhensum rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, medialis est per 22 huius. Igitur medialis est quæ parallelogrammum ex γλ, λζ potest. Id uerò potest linea β, ergo linea β medialis est.

Corollarium.

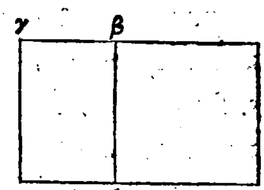
Vnde manifestum est superficiem commẽsurabilem superficiei mediali, medialem esse. Nam lineæ quæ possunt tales superficies, sunt potentia commensurabiles, quarum linearum altera, quæ scilicet potest superficiem medialem, medialis est, quare & reliqua medialis erit per hoc theorema 24. Sane quemadmodum diximus de lineis rationalibus, ita dicendũ est in lineis medialibus, nempe lineam mediali commensurabilem esse etiã medialem, lineam inquam quæ sit commẽsurabilis mediali siue sit longitudine & potentia commensurabilis, siue *potentia tantum. in uniuersum enim uerum est lineas longitudine commensurabiles, esse quoque potentia cõmensurabiles. Quod si lineæ mediali fuerit alia commẽsurabilis potentia, siquidem & longitudine cõmensurabilis fuerit, dicuntur illæ lineæ mediales longitudine & potentia commensurabiles. si uerò potentia tantum fuerint inter se commensurabiles, dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles.* Sunt autem *& aliæ lineæ rectæ longitudine quidem incõmensurabiles mediali, potentia tantum eidem commensurabiles, hæ uerò dicuntur & ipsæ mediales, eò quia commensurabiles sunt potẽtia lineæ mediali, & ea ratione qua sunt mediales, sunt inter se potẽtia commẽsurabiles, sed & inter se ipsæ comparatæ, possunt esse siue longitudine & ideo etiam potentia commensurabiles, siue potẽtia tantum.* Et *quidem si longitudine, dicũtur & ipsæ mediales longitudine commensurabiles, ut consequenter intelligatur potentia quoque commensurabiles esse. Quòd si potentia tantum sint inter se commensurabiles, nihilominus tamen & ipsæ dicuntur mediales potentia tantum commensurabiles.* Hoc *loco addit exemplar græcũ, quod autem lineæ mediales sint cõmensurabiles, ita demonstrari potest. Quoniã mediales mediali cuidã sunt commensurabiles: quæ uerò sunt eidem commensurabilia, inter se quoque sunt commẽsurabilia.* Ergo *mediales sunt inter se commensurabiles. hoc totum nõ est* Euclidis, *neque ullius omnino geometræ. nam quum dicitur, quoniam mediales mediali cuidam sunt commensurabiles, petitur principium.* Præterea *falsum est simpliciter*

pliciter lineas mediales esse commensurabiles, quod patebit ex theoremate 35 huius libri, ubi propositum est reperire lineas duas potentia incommensurabiles cõficientes compositum ex quadratis ipsarũ mediale, & id parallelogrammum quod fit ex eisdẽ mediale, ipsum etiã incommensurabile composito ex quadratis illarum. Cũ ergo reperiantur duo medialia incõmensurabilia, certum est lineas quæ illa possunt esse mediales potentia incommensurabiles, quas necesse est esse etiam longitudine incommensurabiles.

Vigesimumquintum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum contentũ ex lineis medialibus longitudine commensurabilibus mediale est.

Ex lineis enim medialibus longitudine commẽsurabilibus $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ contineatur parallelogrammum rectãgulũ $\alpha\gamma$, dico illud parallelogrãmum esse mediale. Des*cribatur enim ex linea $\alpha\beta$ quadratum $\alpha\delta$: mediale est ergo quadratum illud $\alpha\delta$.* Et *quoniã linea $\alpha\beta$ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ $\beta\gamma$, æqualisque est linea $\alpha\beta$ lineæ $\beta\delta$, commensurabilis est ergo longitudine linea $\beta\delta$, lineæ $\beta\gamma$. sed quemadmodum se habet linea $\delta\beta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratum $\delta\alpha$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$ per primam sexti.* Ergo *per decimum theorema huius libri quadratum $\delta\alpha$ est commensurabile parallelogrammo $\alpha\gamma$. sed quadratũ $\delta\alpha$ est me-*

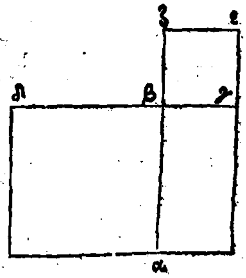


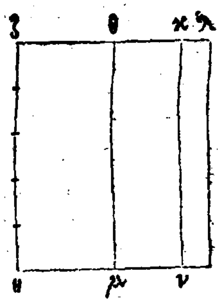
diale quia describitur à linea mediali. Ergo *per corollarium proximi theorematis parallelogrammū α γ erit etiam mediale. quod demonstrandum erat.*

Vigesimumsextum Theorema.

Parallelogrammum rectangulum comprehensum duabus lineis medialibus potentia tantum commensurabilibus, uel rationale est, uel mediale.

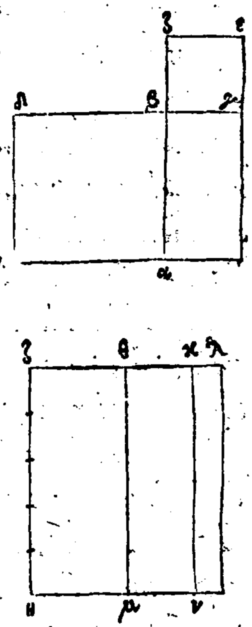
Proposita linea quæ sit medialis, alia reperitur potētia tantum commensurabilis eidem per 11 *huius, sicut de rationalibus ibidem dictum est.* Ex *duabus itaque medialibus potentia tantum cōmensurabilibus α β, β γ, parallelogrammum rectangulum comprehendatur quod sit α γ.* Dico *illud parallelogrammum esse aut rationale aut mediale.* De*scribātur enim quadrata linearū α β, β γ quæ sint α δ, β ε, mediale est ergo utrūque per* 22 *huius.* Pro*ponatur linea rationalis η ζ secundū quam applicetur æquale quadrato α δ parallelogrammum rectangulum η θ, cuius alterū latus sit ζ θ. (hoc autē quomodo fiat diximus in theoromate* 23.) *parallelogrammo uerò α γ æquale secundum lineam θ μ, æqualem lineæ ζ η applicetur parallelogrammum rectangulum μ κ, cuius alterū latus sit θ κ. (ut autem id fiat, sumēda est quarta li-*





nea

nea proportionalis ad lineas θ μ, α ς, β γ per 12 sexti, quæ quarta sit θ κ: ergo per 16 sexti parallelogrammum ex θ μ, θ κ erit æquale parallelogrammo ex lineis α β, β γ.) præterea quadrato β ι æquale similiter secundum lineã κ ν applicetur parallelogrammum rectangulum ν λ, cuius alterum latus sit κ λ. In eadem ergo recta linea sunt lineæ ζ θ, θ κ, κ λ. (Nam illa parallelogramma sic applicata secũdum lineas ζ κ, θ μ, κ ν sunt rectangula, & anguli ζ θ μ, κ θ μ æquales duobus rectis, quia sunt ipsi recti. Itaque lineæ ζ θ, θ κ sunt in eadem linea recta per 14 primi. idem dices de angulis θ κ ν, λ κ ν.) Cum igitur mediale sit utrũque quadratum α λ, β ι parallelogramma illis æqualia κ θ, ν λ similiter medialia erunt. Illa autem applicantur secundum lineam rationalẽ, nempe ζ κ: rationalis est ergo utraque linea ζ θ, κ λ & incommensurabilis longitudine lineæ ζ κ per 23 huius. Sed quia lineæ α β, β γ positæ sunt potentia commensurabiles: ergo quadratum α λ est commensurabile quadrato β ι. similiter igitur illis æqualia parallelogramma κ θ, ν λ erunt inter se commensurabilia. Sed sicut se habet parallelogrammum κ θ ad parallelogrammum ν λ, ita se habet linea ζ θ, ad lineam κ λ per primum sexti. Ergo per decimum huius linea ζ θ erit commensurabilis longitudine lineæ κ λ. Lineæ ergo ζ θ, κ λ sunt rationales, longitudine inter se commensurabiles. inter se dico longitudine commẽsurabiles. Nam ipsi lineæ ζ κ propter quam sunt rationales, sunt longitudine incommensurabiles, ut modo probatum est. Ergo parallelogrammum contentum ex illis lineis ζ θ, κ λ est rationale per 20 huius. & quoniam

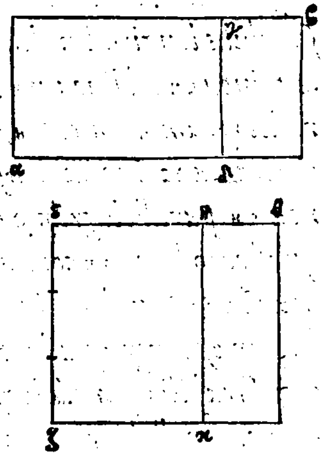


linea $\beta\delta$ est æqualis lineæ $\beta\kappa$, lineæ uerò $\zeta\beta$ æqualis lineæ $\beta\gamma$: est igitur sicut linea $\beta\delta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita linea $\alpha\epsilon$ ad lineã $\beta\zeta$. Sed sicut linea $\delta\beta$ ad lineam $\beta\gamma$, ita quadratũ $\delta\alpha$ ad parallelogrammum $\alpha\gamma$ per primum sexti. sicut autem linea α, ad lineam $\beta\zeta$, ita parallelogrammum $\alpha\gamma$ ad quadratũ $\epsilon\iota$. Est igitur sicut quadratũ $\alpha\delta$ ad parallelogrammũ $\alpha\gamma$, ita parallelogrãmũ $\alpha\gamma$ ad quadratũ $\beta\iota$. quadrato autẽ $\alpha\delta$ æquale est parallelogrammũ $\eta\theta$. parallelogrammo autẽ $\alpha\gamma$ æquale est item parallelogrãmũ $\mu\kappa$. quadrato uerò $\beta\iota$ æquale est parallelogrãmũ λ. Est igitur sicut parallelogrãmũ $\eta\theta$ ad parallelogrãmũ $\mu\kappa$, ita parallelogrãmũ $\mu\kappa$ ad parallelogrãmũ $\nu\lambda$. Est ergo per primũ sexti sicut linea $\zeta\theta$ ad lineã $\theta\kappa$, ita linea $\theta\kappa$ ad lineã $\kappa\lambda$. Ergo parallelogrammũ contentum ex lineis $\zeta\theta$, $\kappa\lambda$ est æquale quadrato lineæ $\theta\kappa$ per 17 sexti. sed parallelogrãmũ ex lineis $\zeta\theta$, $\kappa\lambda$ est rationale, ut modo probatũ est, rationale est ergo quadratũ lineæ $\theta\kappa$. ergo linea $\theta\kappa$ erit rationalis. Et quidẽ si ipsa linea inquã $\theta\kappa$ fuerit longitudine cõmensurabilis lineæ $\theta\mu$, id est lineæ $\zeta\eta$ ipsi æquali, rationale tũc erit parallelogrãmũ $\theta\nu$ per 20 huius. Quod si fuerit longitudine incõmensurabilis ipsi lineæ $\zeta\eta$, tunc lineæ $\theta\mu$, $\theta\kappa$ sunt rationales potentia tantũ cõmensurabiles: sic igitur parallelogrammũ $\theta\nu$ erit mediale. Ergo paral-

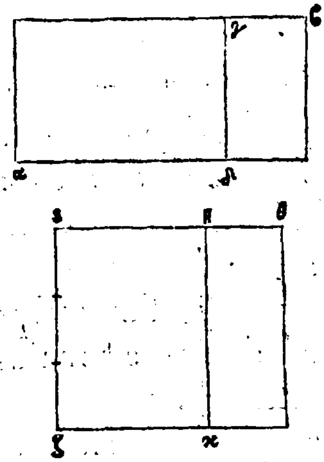
parallelogrammũ θι erit uel mediale uel rationale: sed parallelogrammũ θι est æquale parallelogrammo αγ. Ergo parallelogrammum αγ erit aut mediale aut rationale. Quomodo autem reperiantur lineæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale parallelogrammum continentes, item aliæ mediale continentes, docebunt theoremata 28. & 29.

Vigesimumseptimum Theorema.

Mediale non est maius quàm mediale superficie rationali.



Nam si fieri potest mediale αβ sit maius quàm mediale αγ superficie rationali qua sit λβ, & proponatur linea rationalis ιζ, & mediali αβ æquale secundum lineam ιζ applicetur parallelogrammum ζθ, cuius alterum latus sit ιθ. ipsi autem mediali αγ æquale itẽ auferatur parallelogrammũ ζκ. Reliquum ergo ϛλ reliquo κθ æquale est. sed per positionem βλ est rationale, ergo rationale etiam erit κθ. Cum igitur mediale sit utrunque αβ, αγ, sitq; αϛ æquale ipsi ζθ: sit etiã αγ æquale ipsi ζκ, mediale est ergo utrunque etiam ζθ, ζκ. & secundum lineam rationalẽ ιζ applicãtur. rationalis est ergo utraq; linea θι, ικ & incommensurabilis longitudine lineæ ιζ per 23 huius. Et quoniam rationale est λϛ, ipsiq; æquale κθ: rationale etiam erit κθ, & secundum lineam ra-



tionalem ε ζ uel ei æqualem η κ applicatur: rationalis est ergo linea η θ, & commensurabilis longitudine lineæ η κ per 21 huius. sed linea η κ est æqualis lineæ ε ζ: ergo linea η θ est rationalis, & cõmensurabilis lõgitudine lineæ ε ζ. sed & linea ε η rationalis est & incommensurabilis longitudine lineæ ε ζ. Ergo linea η ε erit incommensurabilis longitudine lineæ η θ per 14 huius. Est autẽ sicut linea ε η ad lineam η θ, ita quadratũ lineæ ε η ad parallelogrammum ex ε η, η θ per lemma suprapositũ post theorema 22. Incommensurabile est ergo quadratum lineæ ε η parallelogrãmo ex lineis ε η, η θ per 10 huius. sed quadrato lineæ ε η commensurabilia sunt quadrata linearũ ε η, η θ. ambo enim sunt rationalia, ut modo probatum est. Ergo quadrata linearum ε η, η θ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex lineis ε η, η θ per 14 huius. parallelogrammo uerò ex lineis ε η, η θ commensurabile est id quod fit bis ex lineis ε η, η θ (habent enim proportionem sicut numerus ad numerum, nempe sicut unitas ad binariũ, aut sicut binarius ad quaternariũ: itaque per 6 huius sunt commẽsurabilia) Ergo per eandem 14 huius, id quod fit bis ex lineis ε η, η θ est incommẽsurabile quadratis linearum ε η, η θ. hoc breuius concluditur per corollarium 14 theorematis. Sed quadrata linearum ε η, η θ & id quod fit bis ex lineis ε η, η θ sunt

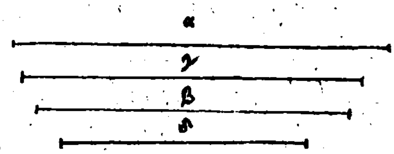
æqualia

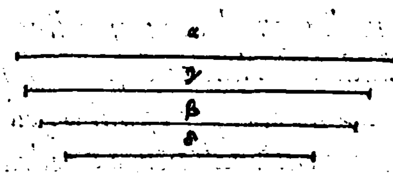
æqualia quadrato totius lineæ ι θ per 4. secundi. Ergo *quadratum lineæ ι θ est incommensurabile quadratis linearum ι κ, κ θ per 17 huius. sed quadrata linearum ι κ, κ θ sunt rationalia: ergo quadratum lineæ ι θ est irrationale. irrationalis est ergo linea ι θ.* Sed *modo demõstratũ est eã esse rationalẽ, quod fieri nullo modo potest. non igitur mediale maius est mediali superficie rationali.*

Vigesimumoctauum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles rationale comprehendentes.

P*roponantur duæ rationales lineæ potentia tantum commensurabiles α, β: sumaturq; media proportionalis inter eas linea γ, sitq; sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ per 13 sexti.* Cũ *igitur lineæ α, β sint rationales potentia tantum commensurabiles, parallelogrammum comprehensum ex lineis α, β, hoc est quadratum lineæ γ (nam quadratũ lineæ γ est æquale parallelogrãmo ex lineis α, β per 17 sexti) est mediale: medialis est ergo linea γ.* Et *quoniam est sicut linea α ad lineã β, ita linea γ ad lineam δ. erit sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratum lineæ γ ad quadratum lineæ δ per 22. 6. sed quadrata linearum α, β sunt commensurabilia, quia lineæ α, β positæ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo & quadrata linearum γ, δ sunt etiam commensurabilia per*

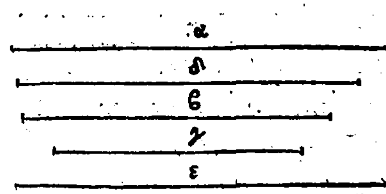




10 huius. ergo & linea γ,δ sunt etiã potentia commensurabiles per diffinitionẽ. Est autẽ linea γ medialis. Medialis ergo est etiam linea δ per 24 huius. Ergo lineæ γ,δ sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Dico præterea eas continere parallelogrammũ rationale. Cum enim sit sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. permutata ergo proportione erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. sed sicut est linea α ad lineam γ, ita linea γ ad lineam β: ergo sicut linea γ ad lineã β, ita linea β ad lineam δ. ergo parallelogrammum ex lineis γ,δ est æquale quadrato lineæ β: sed quadratum lineæ β est rationale, quia linea β posita est rationalis. Rationale est ergo parallelogrammum ex lineis γ,δ. repertæ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, quod faciendum erat.

Vigesimumnonum Theorema.

Mediales lineas inuenire potentia tantum cõmensurabiles mediale comprehendentes.



Proponãtur tres rationales potentia tantum cõmensurabiles α,β,γ, sumaturq; inter lineas α, β media proportionalis δ per 13.6. fiatq; sicut li-

nea

nea β ad lineam γ, ita linea δ ad lineā ε per 12.6. Cum igitur lineæ α,β sint rationales potentia tantum cōmensurabiles, ergo parallelogrammum ex α,β, hoc est quadratum lineæ δ est mediale, medialis est ergo linea δ. Et *cum lineæ β,γ sint potentia tantum commensurabiles, sitq; sicut β ad γ, ita δ ad ε, ergo δ,ε sunt potentia tantū commensurabiles. sed linea δ est medialis. ergo linea ε, erit etiam medialis. ergo lineæ δ,ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles.* Dico *præterea eas continere mediale.* Cum *enim sit sicut linea β ad lineā γ, ita δ ad ε: permutatim ergo sicut β ad δ, ita γ ad ε. sed sicut β ad δ, ita δ ad α per cōuersam siue contrariam proportionem, quæ probatur per corollarium quarti theorematis libri quinti.* Itaque *sicut δ ad α, ita γ ad ε: itaque parallelogrammum ex α,γ est æquale parallelogrammo ex δ,ε per 16.6.* Sed *parallelogrammū ex $\alpha\ \gamma$ per 22 huius mediale est, ergo mediale quoque erit parallelogrammum ex δ,ε.* Repert*æ sunt ergo mediales potentia tantum commensurabiles mediale comprehendentes, quod demonstrandum erat.*

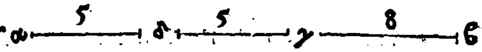
Lemma.

Re*perire duos numeros quadratos huiusmodi, ut numerus qui efficitur ex ipsorū additione sit etiā quadratus.*

Pro*ponātur duo numeri $\alpha\beta$, $\varepsilon\gamma$ similes superficiales, qui quomodo reperiātur, dictum est in*

theoremate 9. sint autem ambo pares uel ambo impares, sit etiam maior $\alpha\beta$. Et *quia siue à numero pari par auferatur, siue ab*

impari impar residuus est par, per 24 & 26.9. Dempto itaque β γ de α β residuus α γ par erit. Secetur numerus α γ in duas partes æquales in puncto δ, numerus ergo productus ex multiplicatione numerorũ α β, β γ cum numero quadrato producto ex multiplicatione γ δ in seipsum, est æqualis quadrato producto ex multiplicatione β δ in se ipsum, per ea quæ demõstrat Campanus propositione 16. libri 9. quam demonstrationem sumpsit ex 6 theoremate libri secundi. Est autẽ numerus productus ex multiplicatione α β, β γ, quadratus, per 1.9. Reperti sunt ergo duo numeri quadrati, nẽpe alter productus ex α β, β γ, alter autem ex multiplicatione γ δ in seipsum, qui compositi per additionẽ efficiunt numerũ quadratum, nempe productum ex multiplicatione β δ in seipsum.



Corollarium.

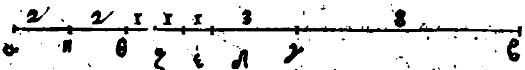
Ex hoc manifestum etiã illud est repertos esse duos numeros quadratos, nempe alterum productum ex multiplicatione β δ in seipsum, item alterum ex multiplicatione γ δ in seipsum tales, ut numerus quo excedit alter alterum, ille inquam numerus qui producitur ex multiplicatione α β, β γ: sit etiam quadratus quando uidelicet numeri α β, β γ fuerint similes superficiales. Quòd si nõ fuerint similes superficiales, reperti sunt duo quadrati, nẽpe alter productus ex radice β δ, & alter productus ex radice γ δ, quorum excessus, id est numerus quo maior excedit minorem, uidelicet productus ex α β, β γ non est quadratus.

Lemma.

Lemma.

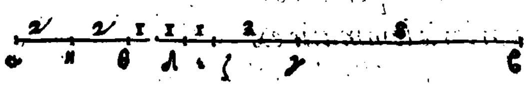
Reperire duos quadratos numeros huiusmodi ut compositus ex ipsorum additione ne sit quadratus.

Sit numerus productus ex multiplicatione numerorum



α γ, β γ, ut diximus in proximo lemmate, quadratus: sitq; numerus γ α par, diuidaturque idem numerus γ α in duas partes aequales in puncto δ. Manifestum est numerum quadratum qui fit ex multiplicatione α β, β γ, cum quadrato radicis γ δ, aequalem esse quadrato radicis β δ, per ea quae dicta sunt in proximo lẽmate. auferatur unitas ex δ γ, quae unitas sit δ ε. Ergo quadratus productus ex multiplicatione α β, β γ, cũ quadrato radicis γ ε, minor est quadrato radicis β δ. Dico itaque numerũ compositũ ex quadrato producto per multiplicationẽ α β, β γ, & quadrato radicis γ ε, non esse quadratũ. Quòd si dicas esse quadratũ, simul oportet eũ esse maiorẽ aut aequalẽ aut minorẽ quadrato radicis β ε. Primũ non potest eo maior esse. Modo enim probatũ est numerũ productũ ex α β, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ε, esse minorem quadrato radicis β δ: sed inter quadratũ radicis β δ & quadratum radicis β ε, nullus medius quadratus interuenit. Nam radix β δ excedit radicem β ε, sola unitate quae unitas in numeros diuidi nullo modo potest. Aut si numerus productus ex α β, β γ, unà cũ quadrato radicis γ ε esset maior quadrato radicis β ε, *oporteret eundem numerum productum ex* $\alpha\,\zeta$, $\beta\,\gamma$ *unà cum quadrato radicis* $\gamma\,\iota$, *esse æqualẽ quadrato radicis* $\beta\,\delta$, *cuius modo probatũ est cõtrarium.* Sit ergo, *siquidẽ illud fieri posse dicis, numerus productus ex* $\alpha\,\beta$, $\zeta\,\gamma$, *unà cum quadrato radicis* $\gamma\,\iota$ *æqualis quadrato radicis* $\beta\,\iota$, *sitq; numerus* $\kappa\,\alpha$ *duplus ad unitatẽ* $\delta\,\iota$, *id est binarius.* Cum *igitur totus numerus* $\alpha\,\gamma$ *totius numeri* $\gamma\,\delta$ *sit duplus ex suppositione, & numerus* $\alpha\,\kappa$ *sit duplus ad unitatẽ* $\delta\,\iota$: *ergo residuus numerus* $\gamma\,\kappa$ *ad residuũ numerũ* $\iota\,\gamma$, *duplus erit per* 5.5. *siue per* 7.7. & II. *eiusdẽ* 7. Ergo *in duas partes æquales diuisus est numerus* $\kappa\,\gamma$, *in puncto* ι. Numerus *itaq; productus ex* $\kappa\,\beta$, $\beta\,\gamma$ *unà cũ quadrato radicis* $\gamma\,\iota$ *est æqualis quadrato radicis* $\iota\,\beta$. *sed per positionem tuam numerus productus ex* $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$ *unà cũ quadrato* $\gamma\,\iota$, *est æqualis eidẽ quadrato radicis* $\zeta\,\iota$. Ergo *numerus productus ex* $\kappa\,\beta$, $\beta\,\gamma$ *unà cũ quadrato radicis* $\gamma\,\iota$ *est æqualis numero producto ex* $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$ *unà cũ quadrato radicis* $\gamma\,\iota$, *quia quæ uni & eidẽ sunt æqualia, inter se quoq; sunt æqualia. sed si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanẽt sunt æqualia.* Ergo *numerus productus ex* $\kappa\,\beta$, $\zeta\,\gamma$, *est æqualis numero producto ex* $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$. Ergo *per* 17. *uel* 18.7. *numerus* $\kappa\,\beta$ *est æqualis numero* $\alpha\,\beta$ *minor maiori, quod est impoßibile.* Non *igitur erit numerus productus ex* $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$ *cũ quadrato radicis* $\gamma\,\iota$, *æqualis quadrato radicis* $\zeta\,\iota$. Dico *similiter eũdem numerum productũ ex* $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$ *unà cum quadrato radicis* $\gamma\,\iota$ *non esse minorem quadrato radicis* $\beta\,\iota$. Si *enim fieri posse dicas, erit ergo æqualis cuipiam numero quadrato minori quàm est quadratus radicis* $\beta\,\iota$. *sit ergo*

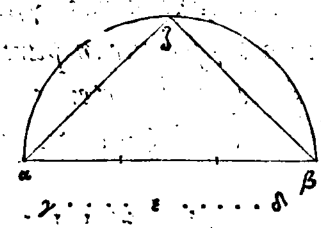
ergo numerus ille productus ex α β, β γ, unà cum quadrato radicis γ ι æqualis quadrato radicis β ζ, sumatúrque numerus θ α duplus ad numerum λ ζ. efficitur similiter ut numerus θ γ sit duplus ad numerũ ζ γ, ita ut etiam θ γ secetur in partes duas æquales in puncto ζ. ideóque simul numerus productus ex θ β, β γ cum quadrato radicis ζ γ erit æqualis quadrato radicis β ζ.



Sed per positionẽ tuã numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι erat æqualis quadrato radicis β ζ. efficitur ergo ut numerus productus ex α β, β γ unà cum quadrato radicis γ ι sit æqualis numero producto ex θ ε, β γ, unà cum quadrato radicis γ ζ, quod est impossibile. Nam si esset æqualis, cum quadratus radicis γ ζ sit minor quadrato radicis ε ι, oporteret numerũ productum ex θ ε, ε γ esse maiorẽ numero producto ex α β, β γ, itaque simul necesse esset numerum θ ε esse maiorem numero α ε, cum tamen sit eo minor. Non erit ergo numerus productus ex α ε, ε γ cum quadrato radicis γ ι æqualis numero minori quàm sit quadratus radicis ε ι. Sed demonstratum est neque esse posse eidem æqualem, neq; maiorem: igitur numerus ex α ε, ε γ unà cũ quadrato radicis γ ι, compositus quadratus esse nullo modo potest.

Trigesimum Theorema.

Reperire duas rationales potentia tantũ commenſurabiles huiuſmodi, ut maior ex illis poſsit pluſquam minor quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine.



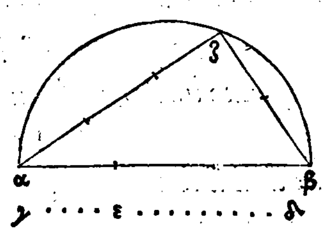
Esto propoſita linea rationalis α β, & duo numeri quadrati γ δ, δ ε, huiuſmodi, ut exceſſus illorũ γ ε ne ſit quadratus numerus per corollarium prioris lemmatis ex duobus modo dictis: deſcribatúrque ſuper linea α β, ſemicirculus α ζ β, fiatq́; ſicut numerus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum alterius lineæ quæ ſit α ζ per lemma poſitum poſt 6. theorema huius libri, & ducatur linea ζ β. Cum igitur ſit ſicut quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ, ita numerus γ δ ad numerum γ ε, ergo commenſurabile eſt quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ per 6 huius. ſed quadratum lineæ α β eſt rationale. ergo etiam rationale erit quadratum lineæ α ζ. Rationalis *eſt ergo linea α ζ. Cúmq; numerus δ γ, ad numerum γ ε proportionem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum per 24. 8. à deſtructione conſequentis: neque ſimiliter quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ α ζ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ergo *linea α β erit incommenſurabilis longitudine lineæ α ζ, per 9 huius. ergo lineæ α β, α ζ, ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. Cúmque ſit ſicut numerus γ δ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratũ lineæ α ζ. per euerſam*

sam ergo porportionem quæ dicitur ἀναστροφὴ λόγου, demonstratúrque per corollarium 19 theorematis libri 5. sicut numerus γ δ ad numerum δ ε, ita quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ β ζ, qui est excessus quadrati lineæ α ϛ, supra quadratum lineæ α ζ per lemma positum post 14 huius libri: sed numerus γ δ ad numerum δ ε habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ α β ad quadratum lineæ ϛ ζ proportionem habet quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea α ϛ est commensurabilis longitudine lineæ ϛ ζ, per 9 huius. Est autem quadratum lineæ α ϛ æquale duobus quadratis linearum α ζ, ζ ϛ. Ergo linea α ϛ plus potest quàm linea α ζ quadrato lineæ ϛ ζ sibi commensurabilis longitudine. Repertæ sunt ergo duæ rationales potentia tantum cōmensurabiles huiusmodi &c. quod demonstrandum erat.

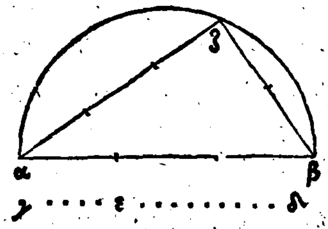
Lemma.

Reperire duas rationales potentia tantum commensurabiles huiusmodi, ut maior plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

Proponatur linea rationalis α ϛ, & numeri quadrati duo γ ε, ε δ, tales ut compositus ex ipsis nempe γ δ, ne sit quadratus per alterū lemma positum post 29. theorema huius libri: describatúrque super linea α ϛ semicirculus α ζ ϛ, fiatq́; sicut numerus δ γ ad numerum γ ε, ita quadratum lineæ α β, ad quadratum lineæ α ζ: duca-



turque linea à puncto ζ in punctum β quæ sit ζβ, quẽadmodũ in præcedẽti theoremate. similiter hìc demonstrabimus lineas αβ, αζ, esse rationales potentia tantum



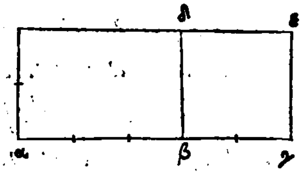
commensurabiles. Et cum sit sicut numerus δγ ad numerum γε, ita quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ αζ. Per euersam ergo proportionem quemadmodũ numerus δγ ad numerum δε, ita quadratũ lineæ αβ ad quadratum lineæ ζβ, ut diximus in præcedẽti theoremate. sed numerus γδ ad numerum δε proportionẽ non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum per corollarium illatum à destructione consequentis 24 lib. 8. Neque ergo quadratum lineæ αβ ad quadratum lineæ βζ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo per 9 huius linea αβ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζβ. Potest autem linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ βζ sibi incommensurabilis longitudine. Ergo lineæ αβ, αζ sunt duæ rationales potentia tãtum cõmensurabiles, & potest linea αβ plus quàm linea αζ quadrato lineæ ζβ sibi incommensurabilis longitudine.

Lemma.

Si *sint duæ lineæ rectæ habentes inter se aliquam proportionem, erit ut linea recta ad lineam rectam, ita parallelogrammum contentum ex ambabus ad quadratum lineæ minoris ex illis duabus.* Hoc *lemma nihil amplius affert quàm primum theorema libri sexti, itaque non reperitur*

reperitur in quibuſdam exemplaribus.

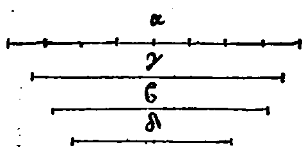
Sint duæ rectæ lineæ α ϐ, ϐ γ in aliqua proportione. Dico ſicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita eſſe parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratū ϐ γ. Deſcribatur enim quadratū lineæ ϐ γ, quod ſit ϐ δ ε γ, compleaturq; parallelogrammum α δ. manifeſtum eſt ſicut linea α ϐ ad lineam ϐ γ, ita parallelogrammū α δ ad parallelogrammum uel quadratum ϐ ε per primam ſexti. Eſt autem parallelogrammum α δ contentū ex lineis α ϐ, ϐ γ. eſt enim æqualis linea ϐ γ lineæ ϐ δ. parallelogrammum autem ϐ ε eſt quadratum lineæ ϐ γ. Ergo ſicut linea α ß ad lineam ϐ γ, ita parallelogrammum ex α ϐ, ϐ γ ad quadratum lineæ ϐ γ. quod demonſtrandum erat.

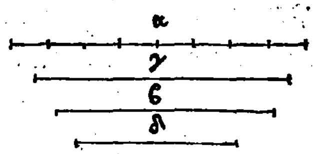


Trigeſimumprimum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potentia tantum cōmenſurabiles rationalem ſuperficiem continentes, tales inquam, ut maior poſſit pluſquā minor quadrato lineę ſibi cōmenſurabilis longitudine.

Proponantur duæ rationales potentia tantum commenſurabiles α, ϐ, tales ut maior α poſſit plus quàm minor ϐ quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine per 30 theorema, ſitq; parallelogrammo ex α, ß æquale quadratum lineæ γ (quod ſit reperta linea me-





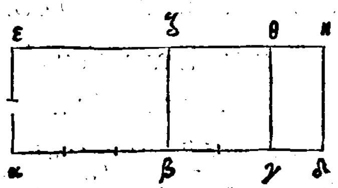
dia proportionali, nempe linea γ inter α, β, ut traditur libro sexto). Est autem mediale parallelogrā mū ex α, β per 22 huius libri. ergo similiter mediale erit quadratū lineæ γ. linea ergo γ erit medialis. Quadrato autē lineæ β æquale sit parallelogrammū ex γ, δ, reperta tertia proportionali, nēpe linea δ, ad duas lineas γ, β, ut traditur libro 6. Est autem quadratum lineæ β rationale. est ergo & parallelogrammum ex γ, δ rationale. Et quoniā sicut linea α ad lineam β, ita est parallelogrammum ex α, β ad quadratum lineæ β per lemma modo positum. Sed parallelogrammo ex α, β, æquale est quadratum lineæ γ. quadrato autē lineæ β æquale est parallelogrammum ex lineis γ, δ, ut modo probatū est. Est ergo sicut linea α ad lineam β, ita quadratum lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ. Sed sicut est quadratū lineæ γ ad parallelogrammum ex γ, δ, ita linea γ ad lineam δ per lemma positum ante 23 huius libri. Ergo sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineā δ. Sed linea α est posita commensurabilis potentia tantum lineæ β. Ergo etiam linea γ est commensurabilis potentia tantū lineæ δ per 10 huius. Sed linea γ est medialis, ergo etiam linea δ erit medialis per 24 huius. Et quoniam est sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ. lineáque α potest plusquam linea β quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per suppositionem. Ergo etiam linea γ poterit plusquam linea δ quadrato lineæ sibi cōmēsurabilis longitudine per 15 huius. Repertæ sunt er-

go

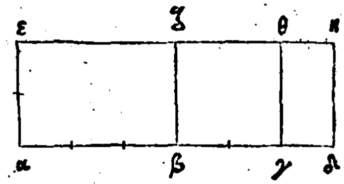
go duæ mediales potentia tantum commensurabiles γ, δ, rationalem superficiem continentes, poteſtque linea γ plusquam linea δ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Similiter etiam reperiri possunt duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes, tales ut maior poßit plusquã minor quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, quando uidelicet linea α poterit plusquam linea β quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. quod facere docuit prius lemma positũ post 30 theorema huius libri. Manente eadem constructione potest facilius illa pars huius theorematis demonstrari, ab illis uerbis. Et quoniam sicut linea α usq; ad ea uerba, Sed linea α est posita commensurabilis. Nam lineæ γ, β, δ sunt continue proportionales per secũdam partem 17.6. Sed etiam α, γ, ε sunt tres continue proportionales. Ergo per 11.5. erit sicut linea α ad lineam γ, ita linea β ad lineam δ. Ergo permutata proportione sicut linea α ad lineam β, ita linea γ ad lineam δ &c.

Lemma.

Si sint tres lineæ rectæ habẽtes proportionem aliquam inter se, erit sicut prima ad tertiam, ita parallelogrammũ ex prima & media ad parallelogrammum ex media & tertia. Sint tres lineæ rectæ in aliqua proportione αβ, βγ, γδ. Dico sicut linea



αβ ad lineam γδ, ita esse parallelogrammum ex αε, βγ ad parallelogrammum ex βγ, γδ. Erigatur enim ex puncto α supra lineam αβ perpendicularis linea αε,

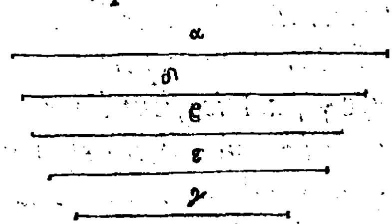


sitq; illa α ι æqualis lineæ β γ, & à pũcto ι lineæ α δ ducatur parallela linea ι κ, & à singulis punctis β, γ, δ, lineæ α ι, parallelæ lineæ ducantur β ζ, γ θ, δ κ. Cùmque sit sicut linea α β ad lineam β γ, ita parallelogrammum α ζ ad parallelogrammum β θ, per primam sexti. sicut autem linea β γ ad lineã γ δ, ita parallelogrammum β θ ad parallelogrammum γ κ. Per æquam itaque proportionem erit sicut linea α β ad lineam γ δ, ita parallelogrammum α ζ, ad parallelogrammum γ κ. Est autem parallelogrammũ α ζ ex lineis α β, β γ. posita est enim æqualis α ι lineæ β γ, estq; parallelogrammum γ κ ex lineis β γ, γ δ. Nam β γ est æqualis lineæ γ θ, quia γ θ est æqualis lineæ α ι per 34. I. Ergo si sint tres lineæ rectæ &c. quod demonstrandum erat.

Trigesimumsecundum Theorema.

Reperire duas lineas mediales potẽtia tantum cõmensurabiles medialem superficiem continentes, huiusmodi ut maior plus possit quàm minor quadrato lineæ sibi cõmensurabilis longitudine.

Proponantur tres rationales α, β, γ, potentia tantum commẽsurabiles, tales ut linea α plus posit quàm linea γ quadrato lineæ sibi commẽsurabilis longitudine. Et parallelogrãmo ex α, β sit æqua-



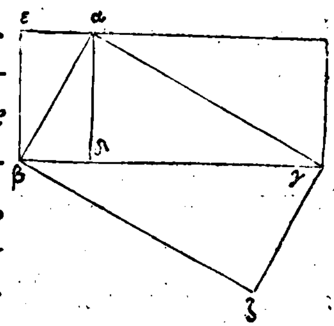
le

le quadratum lineæ δ. Parallelogrammum autem ex α,β est mediale, mediale ergo erit, & quadratum lineæ δ. ergo linea δ erit medialis. parallelogrammo uerò ex β,γ sit æquale parallelogrammum ex δ,ι (quod sit reperta quarta proportionali ad lineas δ,ϛ,γ quæ sit linea ι.) Cum itaque sit sicut parallelogrammum ex α,β ad parallelogrammum ex ϛ,γ, ita linea α ad lineã γ per lemma proximũ. Sed parallelogrãmo ex α,ϛ est æquale quadratum lineæ δ: parallelogrammo uerò ex β,γ est æquale parallelogrammum ex δ,ι. Est ergo sicut linea α ad lineam γ, ita quadratũ lineæ δ, ad parallelogrammum ex δ,ι. Sed sicut quadratum lineæ δ ad parallelogrammũ ex δ,ι, ita linea δ ad lineam ι per lemma positum post 22 theorema. Ergo sicut linea α ad lineam γ, ita linea δ ad lineam ι. Sed linea α est commensurabilis potentia tantum lineæ γ. Ergo linea δ erit commensurabilis potentia tantũ lineæ ι. Sed linea δ est medialis. ergo linea ι erit etiã medialis per 24 huius. Cũq; sit sicut linea α ad lineã γ, ita linea δ ad lineam ι. linea autem α possit plus quàm linea γ quadrato lineæ sibi cõmensurabilis longitudine. Ergo linea δ poterit plusquã linea ι quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15 huius. Dico præterea parallelogrammum ex δ,ι esse mediale. Nam est æquale parallelogrammo ex β,γ quod est mediale per 22 huius. Mediale est ergo similiter parallelogrammum ex δ,ι, Repertæ sunt ergo duæ mediales potentia tantum commensurabiles, nempe δ,ι & c| quod fecisse oportuit. Rursus eadem ratione reperientur duæ mediales potentia tantum commensurabi-

les mediale continentes, huiusmodi, ut maior plus poßit quàm minor quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, quandocunque linea α plus poterit quàm linea γ quadrato lineæ sibi incõmẽsurabilis longitudine.

Lemma.

Sit triangulum rectangulum ϐ α γ, habens rectum angulũ α, ducatúrque perpendicularis α δ. dico primò parallelogrammum ex γ ϐ, ϐ δ esse æquale quadrato lineæ ϐ α. dico secundò parallelogrammum ex ϐ γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ γ α. dico tertiò parallelogrammũ ex ϐ δ, δ γ esse æquale quadrato lineæ δ α. dico quartò parallelogrammum ex ϐ γ, α δ esse



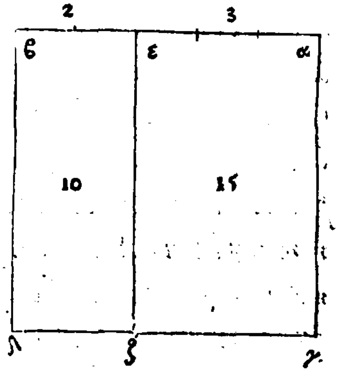
æquale parallelogrammo ex ϐ α, α γ. Quod ad primum *attinet, parallelogrãmũ ex γ ϐ, ϐ δ esse æquale quadrato lineæ ϐ α, ita demonstratur. Cũ ab angulo recto triãguli rectanguli ad basim perpẽdicularis ducta sit linea α δ.* Ergo *triangula α ϐ δ, α δ γ sunt similia toti triangulo α ϐ γ, & ipsa inter se per* 8.6. Et *cum triangulũ α ϐ γ sit simile triangulo α ϐ δ. sunt igitur ambo triãgula æqualium angulorum per definitionem similium figurarum.* Ergo *per* 4.6. *sicut linea γ ϐ ad lineã ϐ α, ita linea ϐ α ad lineam ϐ δ.* Ergo *parallelogrammum ex γ ϐ, ϐ δ erit æquale quadrato lineæ α ϐ per* 17.6. Quod *ad secũdum, parallelogrammũ ex ϐ γ, γ δ esse æquale quadrato lineæ α γ, eadem ratione demonstratur.* Nam *triangulum*

gulum $\alpha\beta\gamma$ est simile triangulo $\alpha\delta\gamma$. Est igitur sicut linea $\beta\gamma$ ad lineam $\alpha\gamma$, ita linea $\alpha\gamma$ ad lineam $\delta\gamma$. Ergo parallelogrammum ex $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\gamma$. Quod ad tertium, parallelogrammum ex $\beta\delta$, $\delta\gamma$ esse æquale quadrato lineæ $\delta\alpha$, ita demonstratur. Cum à recto angulo trianguli rectanguli ad basim ducta sit perpēdicularis, illa perpēdicularis est media proportionalis inter sectiones basis per corollariū 8. theorematis libri 6. Est igitur sicut linea $\beta\delta$ ad lineā $\alpha\delta$, ita $\alpha\delta$ ad $\delta\gamma$. Ergo parallelogrammū ex $\beta\delta$, $\delta\gamma$ est æquale quadrato lineæ $\delta\alpha$. Quod ad quartum, parallelogrammum ex $\beta\gamma$, $\alpha\delta$ esse æquale parallelogrammo ex $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, ita demonstratur. Cum enim, sicut modo dictū est, triāgulum $\alpha\beta\gamma$ sit simile triangulo $\alpha\beta\delta$, & ideo æqualium angulorū. Est igitur sicut linea $\beta\gamma$ ad lineam $\gamma\alpha$, ita linea $\beta\alpha$ ad lineam $\alpha\delta$ per 4.6. Ergo per 16.6. parallelogrammum ex $\beta\gamma$, $\alpha\delta$ esse æquale parallelogrammo ex $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$. Dico præterea si compleatur parallelogrammū rectangulum ex $\beta\gamma$, $\alpha\delta$ quod sit $\iota\gamma$, compleaturq; parallelogrammū ex $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ quod sit $\alpha\zeta$. Alia ratione demonstrabitur, parallelogrammum $\iota\gamma$ esse æquale parallelogrammo $\alpha\zeta$. Nam utrunque ipsorum est duplum trianguli $\alpha\gamma\beta$, per 41.1. Et quæ unius & eiusdem sunt dupla, inter se sunt æqualia. ergo &c.

Lemma.

Si linea recta scindatur in partes duas inæquales, erit ut maior portio ad minorem, ita parallelogrammum ex tota & maiore portione ad parallelogrammum ex tota & minore. Recta linea $\alpha\beta$ diuidatur in partes *duas inæquales in puncto ε, sitq; α ε maior portio. Dico sicut α ε ad lineã ε β, ita parallelogrammũ ex β α, α ε ad parallelogrammũ ex ϛ α, β ε.*

Describatur enim quadratũ lineæ α ϛ quod sit α γ δ ϛ, & à puncto ε utrique α γ, δ β parallela ducatur ε ζ, manifestũ est sicut linea α ε ad lineã ε β, ita parallelogrammũ α ζ ad parallelogrammũ ϛ ζ per primam sexti. Est autem parallelogrammum α ζ contentum



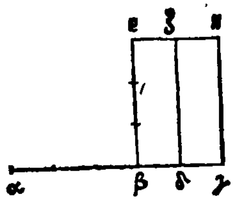
ex lineis β α, α ε: est enim linea α γ æqualis lineæ α β, parallelogrammum uerò ϛ ζ est cõtentum ex lineis α β, ϛ ε. Nam δ ϛ est æqualis lineæ α ϛ. sicut ergo linea α ε ad lineam ε ϛ, ita parallelogrammum ex β α, α ε, ad parallelogrammum ex α β, ϛ ε. quod demonstrandum erat.

Hoc *lemma nihil aliud affert quàm quod primum theorema sexti.* Lemma.

Si sint duæ lineæ rectæ inæquales, diuidatúrque minor in partes duas æquales, parallelogrammum ex ambabus lineis inæqualibus est duplum parallelogrammi ex maiore & media minoris. Quanuis hoc lemma sit in græco exemplari post 33. theorema, uisum est tamen hoc loco ponere, quia sequentis theorematis 33. demonstrationem adiuuat. Sint duæ rectæ inæquales α β, quarum maior sit α β, diuidatúrque β γ bifariam in puncto δ. Dico parallelogrammum ex α ϛ, β γ esse duplum parallelogrammi ex α β, ϛ δ. ducatur enim à puncto β super

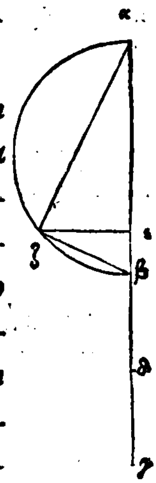
lineam

lineam βγ perpendicularis βι, sitq; æqualis lineæ βα, describatúrq; figura ut picta est. Cū igitur sit sicut δβ ad δγ, ita parallelogrammum εζ ad parallelogrammum δκ per 1.6. Composita ergo proportione erit sicut tota linea εγ ad lineā δγ, ita parallelogrammū βκ ad parallelogrammū δκ per 18.5. Est autem linea βγ dupla lineæ δγ, ergo parallelogrammum βκ erit duplum parallelogrammi δκ. Est autem parallelogrammum βκ ex lineis αε, βγ. nam linea αε est æqualis lineæ ει: parallelogrammū uero δκ est ex lineis αβ, βδ. nam æqualis est βδ linea, lineæ δγ: linea uerò αβ lineæ δζ. quod demonstrandum erat.

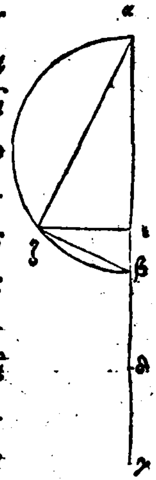


Trigesimumtertium Theorema.

Reperire duas rectas potentia incommensurabiles, quarum quadrata simul addita faciant superficiem rationalem, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum sit mediale.



Proponantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles αβ, βγ, huiusmodi, ut maior ex illis, nempe αβ, pluspossit, quàm minor βγ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine per lemma positū priore loco post 30 theorema huius libri. Diuidatúrque linea εγ bifariam & æqualiter in pūcto δ: & quadrato lineæ εδ uel δγ æquale secundum lineam αβ applicetur paral-



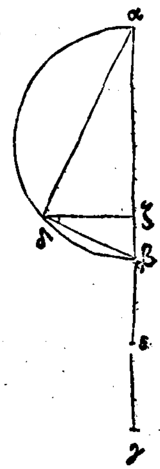
lelogrammū quadrata figura deficiens per 28.6. (H*æc autem uerba, quadrata figura deficiēs, idem significant quod ea quibus usi sumus in* 18 *&* 19 *theoremate, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrāmi.) sitq; parallelogrammū ex* αι, ιβ. *describatur super linea* αβ *semicirculus* αζβ, *& à linea* αβ *ad circunferentiā semicirculi ducatur perpendicularis* ιζ, *ducanturq; lineæ* αζ, ζβ. C*um igitur sint duæ rectæ inæquales* αβ, βγ, *poßitq; linea* αβ *plusquam linea* βγ *quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine: quartæ autē parti quadrati lineæ minoris* βγ, *hoc est quadrato illius dimidiæ quod est* δβ, *æquale parallelogrammum deficiens figura quadrata applicatū sit secundum lineam* αβ, *quod parallelogrammum est ex* αι, ιβ. Ergo *incommensurabilis est longitudine linea* αι *lineæ* ιβ, *per secundam partem* 19 *huius libri.* E*st autem sicut linea* αι *ad lineam* ιβ, *ita parallelogrammū ex* βα, αι *ad parallelogrammum ex* αβ, βι, *per lemma penultimo loco positum ante hoc theorema.* E*st autē parallelogrammum ex* αβ, αι *æquale quadrato lineæ* αζ, *per secundam partē lemmatis primo positi post* 32 *theorema: parallelogrammum autem ex* αβ, βι *est æquale quadrato lineæ* βζ *per primā partem eiusdem lemmatis*. Ergo *incōmensurabile est quadratū lineæ* αζ *quadrato lineæ* βζ *per* 10 *huius, ergo lineæ* αζ, ζβ *sunt potentia incommensurabiles.* S*ed quia linea* αβ *est rationalis,*

nalis, rationale. est ergo quadratum ipsius. ergo composi tum ex additione amborum quadratorum, nempe descriptorum ex lineis α ζ, ζ β, quæ sunt æqualia quadrato lineæ α β per 47.1. erit inquam illud compositum rationale. Rursum parallelogrammũ ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ ι ζ per tertiam partem eiusdem lemmatis. Sed per suppositionem idem parallelogrammum ex α ι, ι β est æquale quadrato lineæ β δ. Ergo linea ζ ι est æqualis lineæ β δ. ergo linea β γ est dupla ad lineam ζ ι. Quare & parallelogrammum ex α β, β γ est duplũ ad parallelogrammũ ex α β, ι ζ, per proximũ lemma, quod perperam positũ esse diximus in exemplari græco post huius theorematis demõstrationem. Sed parallelogram mum ex α β, β γ est mediale per suppositionem & 22 theorema. Ergo etiam mediale erit parallelogrammum ex α β, ι ζ per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α β, ι ζ est æquale parallelogrammo ex α ζ, ζ β per quartam partem illius lemmatis positi post 32. theorema. Ergo parallelogrammum ex α ζ, ζ β erit mediale. Sed modo probatũ est compositũ ex quadratis earundem linearum α ζ, ζ β esse rationale. Repertæ sunt ergo duæ lineæ rectæ, nempe α ζ, ζ β potentia incommen surabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: parallelogrammum uerò ex eisdem cõtentũ, mediale, quod faciendum erat.

Trigesimumquartum Theorema.

Reperire lineas duas rectas potentia incommensurabiles conficientes compositum ex ipsarũ quadratis mediale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum rationale.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α β, ϵ γ rationale continentes parallelogrammum ex ipsis, tales inquã, ut linea α β posit plus quàm linea β γ quadrato lineæ sibi incommẽsurabilis longitudine, per postremam partem demõstrationis theorematis 31. Describatúrque super linea α ϵ semicirculus α δ β. diuidatur etiam linea ϵ γ bifariam & æqualiter in puncto ι: & secundũ lineã α β quadrato lineæ β ι æquale parallelogrammum applicetur, deficiens figura quadrata quod parallelogrammum sit ex α ζ, ζ β, ut dictũ est in proximo theoremate. Incommensurabilis est ergo longitudine linea α ζ lineæ ζ β, ut ibidem dictum est: & à puncto ζ erigatur linea ζ δ perpendicularis super linea α β, ducantúrque lineæ α δ, δ β. Et quoniam est sicut linea α ζ ad lineam ζ β, ita parallelogrammum ex β α, α ζ ad parallelogrammum ex β α, β ζ per alterum lemma positum ante theorema 33. uel per primũ sexti. Ergo per 10 huius, parallelogrammum ex β α, α ζ est incõmensurabile parallelogrammo ex α ϵ, β ζ. Sed per lemma positum post 32 theorema, parallelogrammum ex ϵ α, α ζ est æquale quadrato lineæ α δ: parallelogrammũ uerò ex α β, ϵ ζ est item æquale quadrato lineæ β δ. Incõmensurabile est ergo quadratum lineæ α δ quadrato lineæ ϵ δ. Ergo lineæ α δ, δ ϵ sunt potentia incommensurabiles.



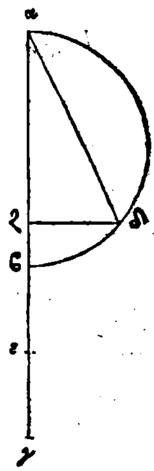
*rabiles.*Et *quoniam quadratum lineæ* $\alpha\beta$ *est mediale, quod est æquale duobus quadratis duarum linearum* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *per* 47.1.*Ergo compositum ex illis duobus quadratis linearum* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *est etiam mediale.*Et *quoniam linea* $\beta\gamma$ *est dupla ad lineam* $\delta\zeta$, *ut probatũ est in proximo theoremate.*Ergo *parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *erit duplum ad parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\delta\zeta$ *per lemma positum ante* 33 *theorema, uel per primam sexti, quare & eidem erit commensurabile per 6 huius.*Sed *per positionem parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est rationale. ergo parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\delta\zeta$ *est etiam rationale. parallelogrammo uerò ex* $\alpha\beta$, $\delta\zeta$ *æquale est parallelogrammum ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *per tertiam partem lemmatis positi post* 32 *theorema. quare parallelogrammũ ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *erit etiam rationale.*Repert*æ sunt ergo duæ lineæ rectæ, nẽpe* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *potentia incõmẽsurabiles &c.*

Trigesimumquintum Theorema.

Reperire duas lineas rectas potentia incommensurabiles, conficientes id quod ex ipsarum quadratis componitur mediale, simúlque parallelogrammum ex ipsis cõtentũ, mediale, quod præterea parallelogrammum sit incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Proponantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *mediale continentes, tales inquam, ut* $\alpha\beta$ *plus possit quàm* $\beta\gamma$ *quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, per postremam partem demonstrationis theorematis* 32. *Describatúrque super linea* $\alpha\beta$

semicirculus α δ β, cæteráque constructa sunto eo modo quo in præcedentibus. Cum linea α ζ sit incommensurabilis longitudine lineæ ζ β, est etiam incommensurabilis potẽtia linea α δ lineæ δ β, per ea quæ sunt demonstrata in proximo theoremate. Et quoniam quadratum lineæ α β est mediale, ergo compositum ex quadratis linearũ α δ, δ β quod est æquale quadrato lineæ α β per 47.1. erit etiam mediale. Et quoniã parallelogrammum ex α ζ, ζ β est æquale alterutri quadrato ex singulis lineis β ι, δ ζ.



Nam ex suppositione parallelogrammum ex α ζ, ζ β est æquale quadrato lineæ β ι. idem etiã parallelogrammũ ex lineis α ζ, ζ β est æquale quadrato lineæ δ ζ per tertiam partem lemmatis positi post 32. theorema. Ergo linea δ ζ est æqualis lineæ β ι. dupla est ergo linea β γ ad lineam ζ δ. Quare & parallelogrammũ ex α β, β γ erit duplum ad parallelogrammum ex α β, ζ δ, itaque sunt commensurabilia per sextam huius. Sed parallelogrãmum ex α β, β γ est mediale per positionem. Ergo parallelogrammum ex α β, ζ δ erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. Sed parallelogrammum ex α β ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ β per quartã partem eiusdem lemmatis. Ergo parallelogrammum ex α δ, δ β erit etiam mediale. Et quoniam linea α β est incommensurabilis longitudine lineæ β γ: linea uerò β γ est commẽsurabilis longitudine lineæ β ι: est ergo linea α β longitudine incommensurabilis lineæ β ι. per 13. uel 14 huius.

huius. quare & quadratum lineæ α β erit incommensurabile parallelogrammo ex α β, β ι per primum sexti & 10 huius. Sed quadrato lineæ α ε est æquale compositum ex quadratis linearum α δ, δ β. parallelogrammo uerò ex α β, β ι est æquale parallelogrammũ ex α β, ζ δ, hoc est parallelogrammum ex α δ, δ β. Nam parallelogrammũ ex α β, ζ δ est æquale parallelogrammo ex α δ, δ ε. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearum α δ, δ ε parallelogrammo ex eisdem lineis α δ, δ ε. Repertæ sunt ergo duæ rectæ nempe α δ, δ ε potentia incommensurabiles &c.

Principium senariorum per compositionem.

Trigesimumsextum Theorema.

Si duæ rationales potentia tantum commensurabiles cõponantur, tota linea erit irrationalis. Vocetur autem Binomium.

Componantur duæ rationales potentia tantum commensurabiles α ε, ε γ, quales reperire docet 11 huius.

Dico totam lineam α γ esse irrationalem. Cum enim sit incommensurabilis longitudine linea α ε, lineæ ε γ, positæ sunt enim potentia tantum commensurabiles: cumque sit sicut linea α ε ad lineã β γ, ita parallelogrãmum ex α ε, ε γ ad quadratum ε γ per 1.6. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ex α ε, ε γ quadrato lineæ β γ per 10 huius. Sed parallelogrammo ex α ε, ε γ commensurabile est id quod fit bis ex α ε, β γ per 6. huius. Ergo id quod fit bis ex α ε, β γ est incommensurabi-

le quadrato lineæ β γ per 14 huius. Quadrato autem lineæ β γ est commensurabile compositũ ex quadratis linearum α β, β γ per 16 huius, quia per suppositionem lineæ α β, β γ sunt potentia tantum commensurabiles. Ergo per 14 compositum ex quadratis linearum α β, β γ est incommensurabile ei quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per 17 id quod fit bis ex α β, β γ cum quadratis linearum α β, β γ, quod est æquale quadrato totius lineæ α γ per 4.2. est incommensurabile cõposito ex quadratis linearum α β, β γ. Sed compositũ ex quadratis linearum α β, β γ est rationale, quia est commensurabile alterutri quadrato linearum α β, β γ, quorum utrũque est rationale per positionem. Ergo quadratum lineæ α γ est irrationale, quare & linea α γ erit irrationalis. Vocetur autem linea illa Binomium. *Hic autem & in cæteris deinceps denominationibus linearum irrationalium, nihil innouandum censuimus de uocibus tritis & iamdudum inter latinos geometras receptis, nisi si quãdo ratio contrarium suaserit.*

Trigesimumseptimum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes cõponantur, tota linea est irrationalis. Vocetur autem bimediale prius.

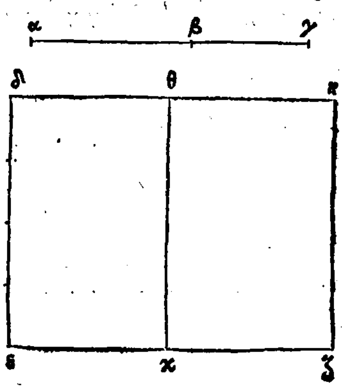
Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles α β, β γ rationale continentes (quales reperire docet 28) dico totam lineam α γ esse irrationalem. sicut enim dictum

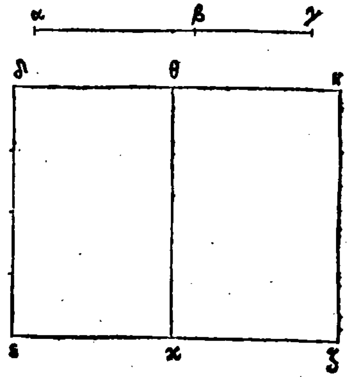
dictum est in proximo theoremate, compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\varsigma\gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Ergo per 17 huius, compositum ex quadratis linearum $\alpha\varsigma$, $\beta\gamma$ cum eo quod fit bis ex $\alpha\varsigma$, $\beta\gamma$, quod est æquale quadrato totius lineæ $\alpha\gamma$, est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\varsigma\gamma$. Sed id quod fit bis ex $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ est commensurabile ei quod fit semel ex $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ per 6 huius. Ergo quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$ est incommensurabile ei quod fit semel ex $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ per 14 huius. Sed per positionem id quod fit semel ex $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ est rationale. Ergo quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$ est irrationale. Irrationalis est ergo tota linea $\alpha\gamma$. Vocetur autem Bimediale prius.

Trigesimumoctauum Theorema.

Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes componantur, tota linea est irrationalis, uocetur autem Bimediale secundum.

Componantur duæ mediales potentia tantum commensurabiles $\alpha\varsigma$, $\varsigma\gamma$ mediale continentes (quales docet reperire 29.) Dico totam lineã $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Proponatur enim linea rationalis $\delta\iota$, & quadrato lineæ $\alpha\gamma$ æquale secundum lineam $\delta\iota$ applicetur parallelogrãmum $\delta\zeta$, cuius alterũ latus





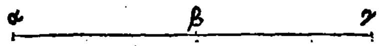
ſit δκ. Cum quadratũ lineæ αγ ſit æquale quadratis linearum αβ, βγ. & ei quod fit bis ex αβ, βγ per 4.2. applicetur ſecundum lineã δε quadratis linearum αβ, βγ æquale parallelogrammum εθ. Reſiduum ergo parallelogrammum ζθ, eſt æquale ei quod fit bis ex αβ, βγ. Sed poſitũ eſt parallelogrammũ ex αβ, βγ eſſe mediale, cui id quod fit bis ex αβ, βγ eſt commenſurabile per 6 huius. Ergo per corollarium 24 theorematis id quod fit bis ex αβ, βγ eſt etiam mediale. Eſt autem parallelogrammum εθ æquale quadratis linearum αβ, βγ, quæ quadrata ſunt inter ſe commenſurabilia ex ſuppoſitione. Ergo per 16 huius, parallelogrammum εθ erit commenſurabile utrique quadrato lineæ αβ, & lineæ βγ. Sed illa quadrata ſunt medialia, quia ex poſitione lineæ αβ, βγ ſunt mediales. Ergo per corollarium 24 theorematis parallelogrammũ εθ erit etiam mediale. Ei uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale eſt reſiduum parallelogrammũ θζ. Mediale eſt ergo utrũque parallelogrammum εθ, θζ, & ſecundum lineam rationalem δε applicantur. Rationalis eſt ergo utraq; linearum δθ, θκ, & incommẽſurabilis longitudine lineæ δε, per 23. Et quoniam per poſitionem eſt incommenſurabilis longitudine linea αβ, lineæ βγ: eſt autem ſicut linea αβ ad lineam βγ, ita quadratum lineæ αβ ad parallelogrammum ex αβ, βγ per 1.6: incommenſurabile

eſt

est ergo quadratum lineæ α β parallelogrammo ex α β, β γ per 10 huius. Sed quadrato lineæ α β est commensurabile compositū ex quadratis linearum α β, ϛ γ per 16, quia quadrata linearum α β, ϛ γ sunt commēsurabilia, cum lineæ α ϛ, ϛ γ positæ sint potentia tantum commensurabiles. Ergo compositum ex quadratis linearum α ϛ, ϛ γ est incommensurabile parallelogrammo ex α ϛ, β γ per 14. Parallelogrammo uero ex α ϛ, ϛ γ commensurabile est id quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per idē 14 theorema incommensurabile est compositum ex quadratis linearū α β, β γ ei quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ. Ergo eis æqualia parallelogramma ι θ, θ ζ sunt etiam inter se incommensurabilia. quare & linea δ θ lineæ θ κ est incommēsurabilis lōgitudine per 1. 6 & 10 huius. Sed modo probatum est eas esse rationales. lineæ ergo δ θ, θ κ sunt rationales potentia tantum commēsurabiles: quare & linea δ κ est irrationalis per 36 huius. Sed parallelogrammum δ ζ contentum ex linea irrationali δ κ, & rationali δ ι est ipsum etiam irrationale. nam si esset rationale cum applicetur secundum lineam rationalem puta δ ι, esset & altera linea nempe δ κ etiam rationalis per 21. cum tamen probata sit irrationalis. Irrationale est ergo parallelogrammum δ ζ. quare & linea quæ illud parallelogrammum potest, nempe α γ, est etiam irrationalis. Vocetur autem Bimediale *secundum. Vocauit autem illam eo nomine, quia mediale est non rationale quod continetur ex illis medialibus lineis α ϛ, β γ, quarum compositione fit linea α γ. Posterius est autem & natura & cognitione mediale rationali.*

Trigesimumnonum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur, conficientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrammum uerò ex ipsis contentum mediale, tota linea recta est irrationalis. Vocetur autem linea maior.



Componantur enim duæ rectæ potentia incommensurabiles $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 33.) Dico totam lineã* $\alpha\gamma$ *esse irrationalem. Nam parallelogrammum ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est mediale: & quod fit bis ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est commensurabile ei quod fit semel ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *per 6 huius. Ergo per corollarium 24 huius, quod fit bis ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *erit mediale. Sed per positionem compositum ex quadratis linearum* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est rationale. Ergo id quod fit bis ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est incommensurabile composito ex quadratis linearũ* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. *Quare per 17 compositum ex quadratis linearum* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *cum eo quod fit bis ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est incommẽsurabile composito ex quadratis linearum* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. *Sed compositum ex quadratis linearũ* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *cum eo quod fit bis ex* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est æquale quadrato totius lineæ* $\alpha\gamma$ *per 4.2. Compositũ uerò quod fit ex quadratis linearũ* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *est rationale per positionem. Ergo quadratũ totius lineæ* $\alpha\gamma$ *est irrationale. ergo tota linea* $\alpha\gamma$ *est etiã irrationalis. Vocetur autem linea maior. Vocauit autẽ ideo maiorem, quia compositum ex quadratis linearũ* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *quæ sũnt rationalia, est maius eo quod fit bis ex* *α β, β γ ut modo dicemus.* Et *ſane decet fieri denominationem à conuenientia rationalium.*

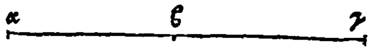
Lemma.

Quod autem compoſitum ex quadratis linearum α β, β γ ſit maius eo quod fit bis ex α β, β γ, ita demõſtretur· Primò *manifeſtum eſt lineas α β, β γ eſſe inæquales.* Nam *ſi æquales eſſent, æqualia quoque eſſent quadrata linearũ α β, β γ ei quod fieret bis ex α β, β γ. itaque ambo, compoſitũ inquam ex quadratis linearum α β, β γ, & id quod ex illis continetur, eſſent ſimul aut medialia aut rationalia, quod eſt cõtra poſitionem.* Ergo *inæquales ſunt lineæ α β, β γ.* Sit *autem per ſuppoſitionem maior linea α β: ſit autẽ æqualis linea β δ lineæ β γ.* Ergo *per* 7.2. *quadrata linearũ α β, β δ ſunt æqualia ei quod fit bis ex α β, β δ, & quadrato lineæ δ α.* Eſt *autem æqualis δ β lineæ β γ.* Ergo *quadrata linearum α β, β γ ſunt æqualia ei quod fit bis ex α β, β γ, & quadrato lineæ δ α. Quare quadrata linearum α β, β γ ſunt maiora quàm id quod fit bis ex α β, β γ, tanto quantũ eſt quadratũ lineæ δ α.*

Quadrageſimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommenſurabiles componantur conficientes compoſitũ ex ipſarum quadratis mediale: id uerò quod fit ex ipſis rationale, tota linea eſt irrationalis. Vocetur autem potens rationale & mediale.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽſurabiles α β, β γ conficientes id quod dicitur in theoremate (quales



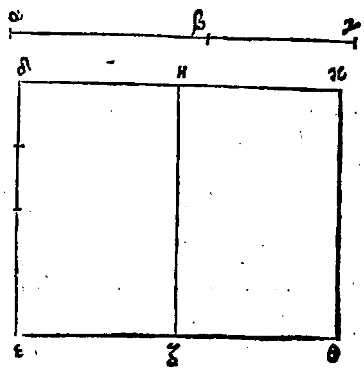
reperire docet 34.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Cum enim cõpositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sit mediale: id uerò quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sit rationale. Incommensurabile est ergo compositum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Ergo per 17 compositum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, quod est quadratũ totius $\alpha\gamma$, est incommẽsurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Sed id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est rationale, quia id quod continetur ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ positum est esse rationale. Ergo irrationale est quadratum totius lineæ $\alpha\gamma$, quare & ipsa linea $\alpha\gamma$ erit irrationalis. Vocetur autẽ potens rationale & mediale. Quam ideo sic uocauit, quia potest duas superficies, aliam quidẽ rationalem, aliam uerò medialem. Et quia rationale præcedit ordine naturæ & cognitionis, prius intulit mentionẽ ipsius rationalis. Sciendum est has rationes denominationum quæ sunt in 38. 39. & hoc theoremate, item in 41 esse additiones, quæ tamẽ ut in nonnullis conueniãt hæc certe nõ satisfacit.

Quadragesimumprimum Theorema.

Si duæ rectæ potentia incommensurabiles componantur conficientes compositũ ex quadratis ipsarum, mediale & quod continetur ex ipsis mediale, & præterea incommensurabile composito ex quadratis ipsarum, tota linea est irrationalis. Vocetur autem potens duo medialia.

Componantur duæ rectæ potentia incommẽsurabiles $\alpha\beta$, $\beta\gamma$

$\beta\gamma$ conficiẽtes id quod dicitur in theoremate (quales docet reperire 35.) Dico totam lineam $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Proponatur linea rationalis $\delta\epsilon$, & secũdum illã quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ æquale parallelogrammum $\delta\zeta$ applicetur.



Item secundum eandem lineam $\delta\epsilon$ uel ei æqualem $\eta\zeta$ ac æquale ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ parallelogrammum $\eta\theta$ applicetur: totum ergo parallelogrammum $\delta\theta$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\gamma$ per 4. 2. Et quoniam cõpositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est mediale cui est æquale parallelogrammũ $\delta\zeta$. Ergo mediale erit etiã $\delta\zeta$ per ea quæ scripsimus in demonstratione 38 theorematis. ergo linea $\delta\eta$ est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ $\delta\epsilon$ per 23. Eadẽ ratione linea $\eta\kappa$ erit rationalis & incommensurabilis longitudine eidẽ lineæ $\delta\epsilon$. Et quoniam compositum ex quadratis linearum $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: ergo etiam incommensurabile erit parallelogrammum $\delta\zeta$ parallelogrammo $\theta\eta$. Quare & linea $\delta\eta$ lineæ $\eta\kappa$ erit incommensurabilis per 1. 6. & 10 huius. Sed modo probatum est illas esse rationales: sunt ergo lineæ $\delta\eta$, $\eta\kappa$ rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea $\delta\kappa$ est irrationalis quæ uocatur Binomiũ per 36. Sed linea $\delta\epsilon$ est rationalis. ergo parallelogrammum $\delta\theta$ est irrationale per id quod probatum est in fine 38.

Ergo linea potens illud parallelogrammum nempe α γ erit irrationalis. Vocetur autẽ potẽs duo medialia. Hãc uerò uocauit hoc nomine, quia potest duas superficies mediales, & eam quæ componitur ex quadratis linearum α β, β γ, & eam quæ fit ex α β, β γ. Quod uerò dictæ irrationales lineæ unico modo, id est uno tantum in puncto diuiduntur in rectas lineas ex quibus componũtur, & quæ constituunt singulas species illarũ irrationalium, mox demonstrabimus, si prius demonstrauerimus huiusmodi lemma.

Lemma.

Proponatur recta linea α β, diuidatúrque in partes inæquales duas in puncto γ, iterúmq; diuidatur eadem linea α β in partes duas inæquales in alio puncto δ. Sit

autem linea α γ maior quàm linea δ β. Dico compositum ex quadratis duarum linearum α γ, γ β esse maius quàm compositum ex quadratis α δ, δ β. Diuidatur enim bifariam & æqualiter linea α β in puncto ι. & quoniam linea α γ est maior linea δ β, auferatur ab utraque ea pars quæ utriusque est communis nempe δ γ. Residua ergo linea α δ est maior residua linea γ β. Quia de duabus lineis inæqualibus quarum maior erat α γ, idem ablatum est nempe δ γ. Est autem æqualis linea α ι lineæ ι β. Ergo linea δ ι est minor linea ι γ. ergo puncta γ, δ, non æqualiter distant à puncto ι, quod est punctum sectionis in partes duas æquales. Et quoniam parallelogrammum contentum ex α γ, γ β cum quadrato lineæ γ ι est æquale quadrato lineæ ι β per 5.2.

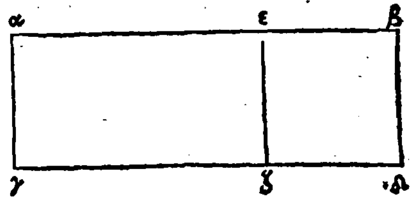
&

& eadem ratione parallelogrammum contentum ex $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum quadrato lineæ $\delta\iota$ est æquale eidem quadrato eiusdem lineæ $\iota\beta$. Ergo parallelogrammum contentum ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ unà cum quadrato lineæ $\gamma\iota$ est æquale parallelogrammo ex $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum quadrato lineæ $\delta\iota$, quia quæ sunt æqualia uni tertio sunt æqualia inter se. Sed quadratū lineæ $\delta\iota$ est minus quadrato lineæ $\iota\gamma$, quia linea $\delta\iota$ est probata minor linea $\iota\gamma$. Ergo & residuum nempe parallelogrammum ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ est minus parallelogrammo ex $\alpha\delta,\delta\beta$. quare & id quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ est minus eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$. Sed per 4. 2 quadratum totius lineæ $\alpha\beta$ est æquale composito ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$, & eadem ratione. Idem quadratum totius lineæ $\alpha\beta$ est æquale composito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$. Ergo compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ est æquale composito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$ unà cum eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$. Sed modo probatū est id quod fit bis ex $\alpha\gamma,\gamma\beta$ esse minus eo quod fit bis ex $\alpha\delta,\delta\beta$. Residuum ergo nempe compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma,\gamma\beta$ est maius residuo nempe composito ex quadratis linearum $\alpha\delta,\delta\beta$, quod erat demonstrandum.

Lemma.

Rationale excedit rationale superficie rationali.

Sit rationale $\alpha\delta$ excedēs aliud rationale $\alpha\zeta$, superficie $\iota\delta$. Dico superficiem $\iota\delta$ esse etiam rationalem. Nam pa-

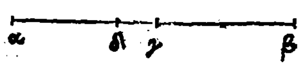


rallelogrammũ α δ est commẽsurabile parallelogrammo α ζ. Ergo per secundam partẽ 16 huius, parallelogrammũ α ζ est commẽsurabile parallelogrammo ι δ. Sed parallelogrammum α ζ est rationale. Ergo etiam parallelogrammum ι δ est rationale.

Quadragesimumsecundum Theorema.

Binomium in unico tantũ puncto diuiditur in sua nomina, id est in lineas ex quibus componitur.

Sit binomium linea α β diuisa in puncto γ in sua nomina, hoc est in lineas ex quibus linea tota α ϐ cõponitur. Ergo lineæ α γ, γ β sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles per 36. Dico lineam α β non posse diuidi in ullo alio puncto quàm γ, in alias lineas duas rationales potentia tantum commensurabiles. Nam si contradicatur, diuidatur in pũcto δ, ita ut lineæ α δ, δ β sint duæ rationales potentia tantum commensurabiles. Primò constat neutrum illorum punctorum γ, δ diuidere lineã α β in partes æquales, alioquin essent lineæ α γ, γ ϐ, rationales longitudine cõmensurabiles, similiter & lineæ α δ, δ ϐ. Quælibet enim linea seipsam metitur & quãcunque aliam sibi æqualem. Præterea linea δ ϐ uel est eadem cũ linea α γ, hoc est æqualis lineæ α γ, uel eadem maior, uel minor eadem. Si est æqualis linea δ β lineæ α γ, imposita ergo linea δ β lineæ α γ singulæ extremitates unius



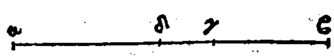
tribuunt

tribuũt cũ singulis extremitatibus alterius. Posito itaque puncto β super puncto α, punctum etiam δ incidet super punctum γ, & residua linea α δ ex linea α γ erit etiam æqualis lineæ γ β residuæ ex δ β. Ergo linea α β diuiditur in puncto γ, in sua nomina. Sic itaque linea α β diuisa per punctum δ, diuisa erit, in eodem puncto quo fuerat prius diuisa eadem linea α β per punctũ γ, quod est contra hypothesin contradicentis. nam ex positione erat diuisa aliter atque aliter in punctis γ, δ. Quòd si linea δ β est maior quàm linea α γ, diuidatur linea α β bifariam & æqualiter in puncto ι. non itaque puncta γ, δ æqualiter distabunt à puncto ι. Sed per lemma modo positum post 41, compositum ex quadratis linearum α δ, δ β est maius composito ex quadratis linearum α γ, γ β: & compositum ex quadratis linearum α δ, δ β unà cum eo quod fit bis ex α δ, δ β est æquale composito ex quadratis linearum α γ, γ β, unà cum eo quod fit bis ex α γ, γ β. quia utrunque est æquale quadrato totius lineæ α β per 4.2. Ergo quanto compositum ex quadratis linearum α δ, δ β est maius cõposito ex quadratis linearũ α γ, γ β, tanto id quod fit bis ex α γ, γ β est maius eo quod fit bis ex α δ, δ β. Quod ipsum quãuis sit indemonstrabile, modica tamen inductione fit manifestius, si duabus lineis æqualibus propositis, puta quatuor pedes longis, ab altera pedes tres abstuleris, ab altera pedes duos. Residuum eius à qua pedes duos abstulisti, est maius quàm residuum eius à qua pedes tres abstulisti pede uno. quãto scilicet maiores erant pedes tres ablati quã pedes duo ablati. Sed compositum ex quadratis linearum α δ, δ β *excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali per lemma positum ante hoc theorema. Sunt enim utraq; composita rationalia, quia lineæ α δ, δ β, sunt positæ rationales potentia tantum cõmensurabiles, similiter & lineæ α γ, γ ε.* Ergo *etiam id quod fit bis ex α γ, γ ε excedit id quod fit bis ex α δ, δ ε superficie rationali, cum sint tamẽ ambo medialia per 22 huius, quod est impossibile per 27. Quòd si linea δ ε est minor linea α γ, eadem uia deducitur ad idem impossibile.* Non *igitur binomium diuidetur aliter atque aliter in sua nomina, sed unico tantum modo. Qui defendebant unitatem entis ex opinione* Parmenidis, *existimauerunt esse quasdã lineas insecabiles, de quibus ageretur hoc theoremate & cæteris sequentibus, quam tamen illorum opinionem* Aristoteles *in libello* περὶ ἀτόμων γραμμῶν, *seu quis alius author eius opusculi, falsam esse arguit, & peruerse ab illis intellectũ hoc theorema.*

Quadragesimumtertium Theorema.

Bimediale prius in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit *bimediale prius linea α β, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ ε sint mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes.*



Dico *lineam α β non posse diuidi in alio puncto quàm γ in sua nomina.* Quod *si cõtradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut α δ, δ β sint mediales potentia tantum commensurabiles rationale continẽtes. Cum igitur tanto differat id quod fit bis ex*

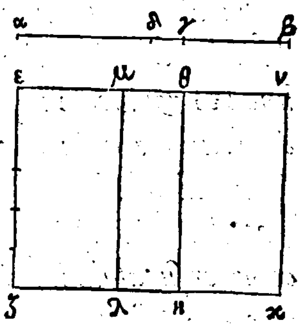
α δ,

α δ, δ β, ab eo quod fit bis ex α γ, γ ϐ, quanto differt compositum ex quadratis linearum α γ, γ ϐ, à composito ex quadratis linearum α δ, δ ϐ, & quod fit bis ex α δ, β δ differat ab eo quod fit bis ex α ς, γ ϐ, superficie rationali, sunt enim ambo rationalia. Ergo & cõpositũ ex quadratis linearum α γ, γ β differt à composito ex quadratis linearum α δ, δ β mediale inquam à mediali superficie rationali quod est impossibile. Non igitur bimediale prius aliter atque aliter diuiditur in sua nomina, ergo unico tantum modo.

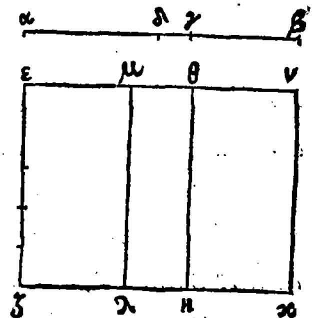
Quadragesimumquartum Theorema.

Bimediale secundum in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit Bimediale *secundum linea α ϐ diuisa in puncto γ, ita ut lineæ α γ, γ ϐ sint mediales potentia tantum cõmẽsurabiles, mediale continentes. Manifestũ est igitur punctum γ non secare totam lineam α β bifariã & æqualiter, quia lineæ α γ, γ β non sunt longitudine inter se commensurabiles.* Dico *lineam α β*



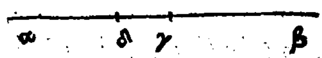
non posse diuidi aliter quàm in pũcto γ, in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut linea α γ ne sit eadem, hoc est ne sit æqualis lineæ δ β, sed ea maior. lineæ autẽ α δ, δ β sint mediales potentia tantum commensurabiles mediale continentes per te. Manifestum est primo quadrata linearũ α γ, γ ϐ esse maiora



quadratis linearũ αδ, δβ per lemma positum ante 42. Proponatur linea rationalis εζ, & quadrato lineæ αβ æquale secundum lineã εζ applicetur parallelogrammum εκ. Ex quo parallelogrammo detrahatur id quod æquale est quadratis linearum αγ, γβ, puta parallelogrammum εη. Residuum ergo, nempe parallelogrammum θκ est æquale ei quod fit bis ex αγ, γβ. Rursus quadratis linearũ αδ, δβ quæ sunt minora quadratis linearum αγ, γβ æquale detrahatur parallelogrammum ελ. Residuum ergo parallelogrammum μκ, est æquale ei quod fit bis ex αδ, δβ. Et quoniam quadrata linearum αγ, γβ sunt medialia, ergo parallelogrammum εη erit etiam mediale, & secũdum lineã rationalẽ εζ applicatur rationalis. Est ergo linea εθ & incommẽsurabilis longitudine lineæ εζ. Eadem ratione quia parallelogrammum θκ est mediale. (nam id quod est ei æquale, nempe quod fit bis ex αγ, γβ est mediale.) Ergo linea θν est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ εζ. Et quoniam lineæ αγ, γβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea αγ ad lineã γβ, ita quadratũ lineæ αγ ad parallelogrammum ex αγ, γβ per 1.6. ergo quadratum lineæ αγ est incommensurabile parallelogrammo ex αγ, γβ. Sed quadrato lineæ αγ est commensurabile compositum ex quadratis linearum αγ, γβ per 16. quia lineæ *α γ, γ β sunt potentia inter se commensurabiles. parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ ϛ. Ergo compositum ex quadratis linearũ α γ, γ ϛ est incommensurabile ei quod fit bis ex α γ, γ ϛ, per corollarium à nobis additum theoremati 14. Sed cõposito ex quadratis linearum α γ, γ ϛ est æquale parallelogrammũ ι κ, ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β est æquale parallelogrammum θ κ. Incommensurabile est ergo parallelogrammum ι κ parallelogrammo θ κ. quare & linea ι θ, erit incommensurabilis longitudine lineæ θ ν. sunt autem ambæ rationales. Sunt ergo illæ lineæ ι θ, θ ν rationales potentia tantum commensurabiles, per lemma positũ post 19 theorema. Nam eo ipso quòd sunt rationales sunt potentia saltem commẽsurabiles. Ergo tota linea ι ν erit binomiũ per 36. quæ diuisa est in puncto θ, in sua nomina. Eadem uia demonstrabitur lineas ι μ, μ ν esse rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea ι ν quæ est binomium, in alio atque alio puncto nempe θ, μ, diuiditur in sua nomina quod est impossibile per 42. Quòd si quis dicat posse fieri ut linea ι θ sit eadem hoc æqualis lineæ μ ν, itaque nihil cõsequi impossibile, neque lineam ι ν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio, atque alio puncto, sed in uno tantum. hoc etiam demonstrabimus, nempe lineam ι θ nõ esse eandẽ, hoc est æqualem lineæ μ ν. Nam quadrata linearũ α γ, γ ϛ, sunt maiora quadratis linearum α δ, δ ϛ per lemma positum post 41. Sed quadrata linearũ α δ, δ β sunt maiora eo quod fit bis ex α δ, δ β, per lemma positũ post 39. Ergo multo maiora sunt quadrata linearũ α γ, γ ϛ, hoc* *est illis æquale parallelogrammũ ι κ est maius eo quod fit bis ex α δ, δ β hoc est, quàm parallelogrammum μ κ, quod est æquale ei quod fit bis ex α δ, δ β,* Ergo per 1.6. *Linea etiam ι θ erit maior quàm linea μ ν.* Ergo *linea ι θ non erit eadem cum linea μ ν. Quod si posueris ab initio lineam α γ esse minorem linea δ β. Idem etiam tunc impossibile consequetur, hoc est lineam ι ν quæ est binomiũ diuidi in sua nomina alio atque alio puncto.* Non *igitur bimediale secundum in alio atque alio puncto diuiditur in sua nomina, ergo in uno tantum.*

Quadragesimumquintum Theorema.

Linea maior in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.



Sit linea maior α β diuisa in puncto γ, ita ut α γ, γ β sint potentia incommensurabiles conficiẽtes compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, rationale, contentũ uero ex ipsis parallelogrammum mediale. Dico *lineam α β non posse diuidi in sua nomina alibi quàm in puncto γ. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ in sua nomina.* Et *quoniam quanto differt compositum ex quadratis linearum α γ, γ β à composito ex quadratis linearũ α δ, δ β, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β ab eo quod fit bis ex α γ, γ β per ea quæ scripsimus in demonstratione 42 theorematis. Sed compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β excedit compositum ex quadratis linearum α δ, δ β, superficie rationali. Sunt enim ambo rationalia. Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β excedet id quod fit bis*

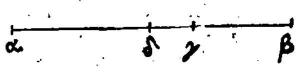
ex

ex αγ, γβ superficie rationali, sed illa sunt medialia. Er*go mediale excedet mediale superficie rationali, quod est impoßibile per 27.* Non *igitur linea maior diuiditur aliter atq; aliter in sua nomina, ergo in uno tantũ puncto diuidetur.*

Quadragesimumsextum Theorema.

Linea potens rationale & mediale in unico tantum puncto, diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens rationale & mediale αβ, diuisa in puncto γ, ita



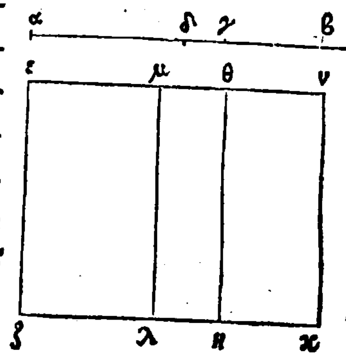
ut lineæ αγ, γβ sint potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum αγ, γβ mediale: id autem quod cõtinetur ex αγ, γβ rationale. Di*co lineam αβ in alio puncto quàm γ non posse diuidi in sua nomina.* Q*uòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, in sua nomina. Cũ igitur quanto differt id quod fit bis ex αδ, δβ ab eo quod fit bis ex αγ, γβ, tanto differat compositum ex quadratis linearum αγ, γβ à composito ex quadratis linearum αδ, δβ, id autem quod fit bis ex αγ, γβ excedat id quod fit bis ex αδ, δβ, superficie, rationali quia utrunque est rationale.* Ergo *& compositum ex quadratis linearum αγ, γβ excedit compositum ex quadratis linearum αδ, δβ superficie rationali, cum tamẽ utrunque illorum sit mediale.* Q*uod est impoßibile.* Non *igitur linea potens rationale & mediale diuiditur aliter atque aliter in sua nomina.* Ergo *diuiditur tantum in puncto uno.*

Quadragesimumseptimum Theorema.

V

Linea potens duo medialia in unico tantum puncto diuiditur in sua nomina.

Sit linea potens duo medialia $\alpha\beta$, diuisa in puncto γ, ita ut lineæ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ sint potẽtia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ mediale: similiter & quod continetur ex ipsis mediale, item contentum ex ipsis incommẽsurabile composito ex quadratis ipsarum $\alpha\gamma$ $\gamma\beta$. Dico *lineam $\alpha\beta$ non posse diuidi in alio puncto, quàm γ in sua nomina. Quòd si contradicatur, diuidatur in puncto δ, ita ut lineæ $\alpha\delta$, $\delta\beta$ conficiant ea quæ lineæ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$.* Sitq; *rursus ex suppositione linea $\alpha\gamma$ maior linea $\delta\beta$.* Sit *autem rationalis linea $\varepsilon\zeta$, secundum quam applicetur parallelogrammum $\varepsilon\kappa$ æquale quadratis linearum $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. ei uerò quod fit bis ex $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ æquale applicetur $\theta\xi$.* T*otum ergo parallelogrammum $\varepsilon\xi$ est æquale quadrato lineæ $\alpha\beta$.* R*ursus secundum eandem lineam $\varepsilon\zeta$ applicetur æquale quadratis linearum $\alpha\delta$, $\delta\beta$ parallelogrammum $\varepsilon\lambda$.* R*esiduum ergo parallelogrammũ $\mu\xi$ est æquale residuo, nempe ei quod fit bis ex $\alpha\delta$, $\delta\beta$.* Et *quoniam ex suppositione compositum ex quadratis linearũ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ est mediale.* E*st ergo parallelogrammũ illi æquale, nempe $\varepsilon\kappa$: etiam mediale & secũdum lineam rationalem $\varepsilon\zeta$ applicatur.* E*rgo linea $\varepsilon\theta$ est rationalis, & incommensurabilis longitudine lineæ $\varepsilon\zeta$.* E*adem ratione*



&

& linea θι est etiam rationalis & incommensurabilis longitudine eidem lineæ ιζ. Et *quoniam compositum ex quadratis linearũ αγ,γϐ est incommensurabile ei quod fit bis ex αγ,γβ(quia positum est esse incommensurabile ei quod fit semel ex αγ,γϐ.)* Ergo *parallelogrammum ιx est incommensurabile parallelogrammo θx. quare & linea ιθ est incommensurabilis lineæ θι.* Sunt *autem ιθ,θι rationales.* Ergo *sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea ιι est binomium per* 36, *& diuisa in puncto θ, in sua nomina.* Similiter *demonstrabimus eandem lineam ιι diuidi in puncto μ in sua nomina: nec est linea ιθ lineæ μι eadem, hoc est æqualis, ut probatum est in fine demonstrationis* 44. Ergo *binomium alibi atque alibi diuiditur in sua nomina, quod est impossibile per* 42. Non *igitur linea potens duo medialia diuiditur alibi atque alibi in sua nomina.* Ergo *in puncto uno tantum diuiditur.*

Termini *secundi siue definitiones secundæ.*

Proposita *linea rationali, & binomio diuiso in sua nomina, cuius binomij maius nomen, id est maior portio possit plusquam minus nomen quadrato lineæ sibi, maiori inquam nomini commensurabilis longitudine.*

Si*quidem maius nomen fuerit commensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea* Binomium *primum.*

Si *uerò minus nomen, id est minor portio binomij fuerit cõmensurabile longitudine propositæ lineæ rationali, uocetur tota linea* Binomium *secundum.*

Si *uerò neutrum nomen fuerit commensurabile longitu-*

dine propositæ lineæ rationali, uocetur binomiũ tertiũ.

Rursus si maius nomen poßit plusquã minus nomen quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine, siquidem maius nomen est cõmensurabile lõgitudine propositæ lineæ rationali uocetur tota linea binomiũ quartum.

Si uerò minus nomen fuerit commensurabile longitudine lineæ rationali, uocetur binomium quintum.

Si uerò neutrum nomen fuerit longitudine commensurabile lineæ rationali, uocetur illa binomium sextum.

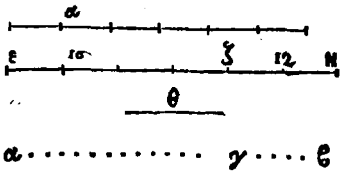
Hîc nihil dicitur de lineis illis quarũ ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali, quia lineæ tales non sunt binomia, cum scilicet illa cõponantur ex duabus rationalibus potentia tantum cõmensurabilibus, ut est in 36. Lineæ *uerò quarum ambæ portiones sunt longitudine commensurabiles propositæ lineæ rationali non sunt binomia, quia portiones taliũ linearum essent inter se quoque longitudine commensurabiles per* 12 *huius.* Ergo *non essent quales requirũtur ad compositionem binomij.* Præterea *lineæ tales nõ essent irrationales sed rationales, quia sunt commẽsurabiles singulis partibus se componẽtibus per* 16. Ergo *essent rationales quia componentes essent rationales.*

Quadragesimumoctauum Theorema.

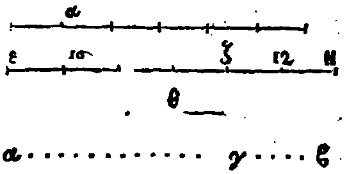
Reperire binomium primum.

Proponantur numeri duo $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *tales ut compositus ex ipsis totus* $\alpha\beta$ *ad alterum ex ijsdẽ nempe* $\gamma\beta$ *habeat proportionem quã numerus quadratus ad numerũ quadratum: ad alterum uerò* $\alpha\gamma$, *idem* $\alpha\beta$ *proportionẽ eam*

ne



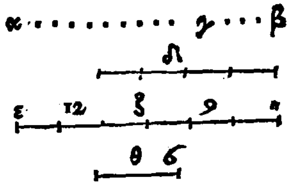
ne retineat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, qualis est numerus quadratus diuisibilis in quadratum & non quadratũ, inquit Campanus *theoremate* 17. *Sit autem linea rationalis* α, *eiq; commẽsurabilis longitudine sit linea* ε ζ: *rationalis est ergo linea* ε ζ. Fiat *autẽ sicut numerus* α β *ad numerum* α γ, *ita quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratum alterius lineæ quæ sit* ζ η *per lemma repositum à nobis post 6 theorema.* Ergo *quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratũ lineæ* ζ η *proportionẽ habet quam numerus ad numerũ.* Quare *illa quadrata sunt commensurabilia per* 6. *Est autem linea* ε ζ *rationalis, ergo linea* ζ η *erit etiam rationalis.* Et *quoniam numerus* β α *ad numerum* α γ *non habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum, neque etiam quadratum lineæ* ε ζ *ad quadratum lineæ* ζ η *habebit proportionem quã numerus quadratus ad numerum quadratum. incommensurabilis est ergo longitudine linea* ε ζ *lineæ* ζ η. Ergo *illæ lineæ* ε ζ, ζ η *sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Ergo *tota linea* ε η *est binomium per* 36. Dico *prætereà eandem lineam esse binomium primum.* Nam *cum sit sicut numerus* β α *ad numerum* α γ, *ita quadratũ lineæ* ε ζ *ad quadratum lineæ* ζ η. *sitq; numerus* β α *maior numero* α γ: *maius quoq; erit quadratum lineæ* ε ζ *quadrato lineæ* ζ η. *Sint igitur quadrato lineæ* ε ζ *æqualia quadrata linearum* ζ η, θ (*quæ quomodo reperiantur docet lemma positũ post* 14.) Et *cum sit sicut numerus* β α *ad numerũ*



α γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratũ lineæ ζ η. Per euersam ergo proportionem sicut numerus β α ad numerum β γ, ita quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus α β ad numerum α γ habet proportionẽ quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratum lineæ ε ζ ad quadratum lineæ θ habet etiam proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo linea ε ζ erit longitudine commensurabilis lineæ θ, per 9. ergo linea ε ζ plus potest quam linea ζ η quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ε ζ, ζ η rationales potentia tantum commensurabiles. estq; linea ε ζ longitudine cõmensurabilis lineæ rationali δ. ergo linea ε η est binomiũ primũ.

Quadragesimumnonum Theorema.

Reperire binomium secundum.

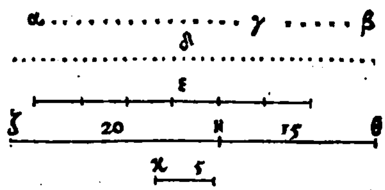


Proponantur numeri duo α γ, γ β tales ut compositus ex ipsis totus α β ad β γ proportionem habeat quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ad γ α uerò proportionem eam ne habeat quam numerus quadratus ad numerũ quadratum, ut dictum est in proximo theoremate. & proponatur linea rationalis δ, & lineæ δ sit cõmensurabilis longitudine linea ζ η. rationalis est ergo linea ζ η. Fiat autẽ sicut numerus γ α ad numerum α β, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum alterius

alterius lineæ quæ sit ζι. Ergo commensurabile est quadratum lineæ ζκ lineæ ζι. est ergo rationalis etiam linea ζι. Et quoniam numerus γα ad numerum αβ non habet proportionem quam quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ζκ ad quadratum ζι habebit proportionẽ quam quadratus numerus ad quadratum. Ergo linea ζκ est incommensurabilis longitudine lineæ ζι per 9. ergo lineæ ζκ, ζι sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea ικ est binomiũ. Dico præterea eandem esse binomium secundum. Cum enim per contrariam siue dicas conuersam proportionem sit sicut numerus αϐ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζκ. maior autem est numerus αϐ, numero αγ. maius etiam erit quadratũ lineæ ιζ quadrato lineæ ζκ. Sint quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearum ζκ, θ, ut dictum est in proximo theoremate. Per euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus αϐ ad numerũ βγ habet proportionem quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Ergo quadratũ lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ιζ erit commensurabilis longitudine lineæ θ, per 9. Quare linea ιζ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine. Sed linea ζκ quæ est minus nomen, est commensurabilis longitudine propositæ lineæ rationali δ per hypothesin. Ergo linea ικ est binomium secundum.

Quinquagesimum Theorema.

Reperire binomium tertium.



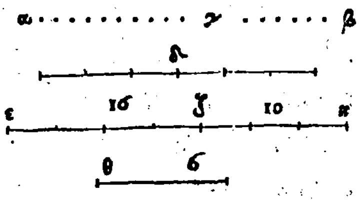
Proponãtur numeri duo α ς, γ ϛ, tales ut cõpositus ex ipsis, totus α β ad numerum ϛ γ proportionem habeat quã numerus quadratus ad quadratum, ad numerũ uerò α γ proportionem ne habeat quam numerus quadratus ad quadratum. Proponatur autẽ & *alius numerus siue quadratus, siue non quadratus, qui sit δ, qui ad singulos α β, α γ proportionem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum.* Proponaturq; *linea rationalis ε & fiat sicut numerus δ ad numerum α β, ita quadratum lineæ ε ad quadratum ζ η.* Commensurabile *est ergo quadratum lineæ ε quadrato lineæ ζ η.* Sed *linea ε est rationalis: rationalis est ergo linea ζ η. & quoniam numerus δ ad numerum α β proportionem non habet quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratum lineæ ζ η proportionem eam habet quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ε incõmensurabilis longitudine lineæ ζ η.* Rursus *fiat sicut numerus α β ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ.* Commensurabile *ergo est quadratum lineæ ζ η quadrato lineæ η θ.* Sed *linea ζ η est rationalis. ergo linea η θ erit etiã rationalis.* Et *quoniam numerus α β ad numerum α γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, neq; etiam quadratum lineæ ζ η ad quadratũ lineæ η θ proportionem habet quam quadratus numerus ad quadratum.*

dratum. Est ergo linea ζκ longitudine incommensurabilis lineæ κθ. ergo lineæ ζκ, κθ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. tota ergo linea ζθ erit binomiũ. Dico *præterea illam esse binomium tertium.* Cum *enim sit sicut numerus δ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ ζκ. Sicut uerò numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Per *æquam ergo proportionem sicut numerus δ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ε ad quadratũ lineæ κθ.* Sed *numerus δ ad numerũ αγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum.* Ergo *quadratum lineæ ε nõ habet proportionẽ ad quadratũ lineæ κθ quam quadratus numerus ad quadratum. est ergo linea ε longitudine incommensurabilis lineæ κθ per 9.* Et *quoniam est sicut numerus αβ ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ.* Ergo *quadratum lineæ ζκ est maius quadrato lineæ κθ. sint ergo quadrato lineæ ζκ æqualia quadrata linearum κθ, χ.* Per *euersam ergo proportionẽ sicut numerus αβ ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ.* Sed *numerus αβ ad numerum βγ habet proportionem quã quadratus numerus ad quadratum. ergo & quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ χ habebit proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζκ est longitudine commensurabilis lineæ χ. ergo linea ζκ plus potest quam linea κθ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis.* Sunt *autem lineæ ζκ, κθ rationales potentia tantum commensurabiles: & neutra est commensurabilis lon-*

gitudine lineæ ε. Ergo linea ζθ est binomium tertium.

Quinquagesimumprimum Theorema.

Reperire binomium quartum.



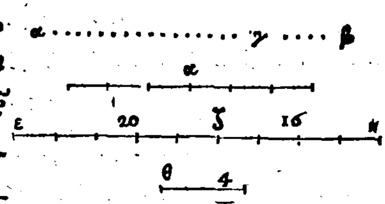
Proponantur numeri duo αγ, γβ tales ut cōpositus ex ipsis nempe αβ ad neutrū eorum habeat proportionem quam numerus quadratus ad quadratū (qualis est omnis numerus quadratus ad duos numeros non quadratos se minores ipsum componentes.) Sit autem linea rationalis δ, & lineæ δ sit commēsurabilis longitudine linea εζ. est ergo rationalis εζ. Sitq́; sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratū lineæ εζ ad quadratū lineæ ζη. ergo quadratum lineæ εζ est commensurabile quadrato lineæ ζη. Est ergo linea ζη rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerū αγ proportionem nō habet quam quadratus numerus ad quadratum: neque quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη habebit proportionem quam quadratus numerus ad numerum quadratum. ergo linea εζ est longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Ergo lineæ εζ, ζη sunt rationales potentia tantum commensurabiles, quare tota linea εη est binomium. Dico præterea eam esse binomium quartum. Cum enim sit sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ εζ ad quadratum lineæ ζη: est autem numerus βα maior numero αγ. Ergo quadratum lineæ εζ erit maius quadrato lineæ ζη. Sint ergo quadrato lineæ εζ æqualia quadrata linearū ζη, θ.

Per

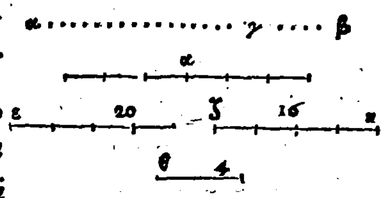
Per euersam ergo proportionem sicut numerus β α ad numerum ϛ γ, ita quadratum lineæ ι ζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus ϛ α ad numerum ϛ γ proportionem non habet quam quadratus numerus ad quadratum, igitur neque quadratũ lineæ ι ζ ad quadratum lineæ θ habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Est ergo linea ι ζ incommensurabilis longitudine lineæ θ. ergo linea ι ζ plus potest quã linea ζ κ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Sunt autem lineæ ι ζ, ζ κ rationales potentia tantũ commensurabiles, estq́; linea ι ζ lineæ rationali δ cõmẽsurabilis lõgitudine. Ergo linea ι κ est binomiũ quartũ.

Quinquagesimumsecundum Theorema.

Reperire binomium quintum.



Proponãtur numeri duo α γ, γ ϛ tales, ut totus α ϛ ad singulos α γ, γ ϛ proportionẽ eam ne habeat quã quadratus numerus ad quadratum, sicut in proximo theoremate. Et sit linea rationalis δ: lineæ autem δ sit commensurabilis longitudine linea ζ κ. Est ergo linea ζ κ rationalis: sitq́; sicut numerus γ α ad numerum α ϛ, ita quadratũ lineæ ζ κ ad quadratum lineæ ζ ι. ergo quadratum lineæ ζ κ est commensurabile quadrato lineæ ζ ι. Est ergo etiam linea ζ ι rationalis. Et quoniam numerus α γ ad numerum α β nõ habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum, neque etiam quadratum lineæ ζ κ ad quadra-

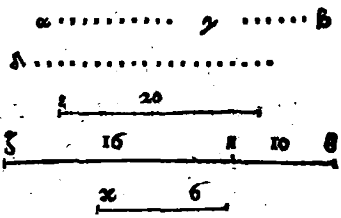


tum lineæ ζι habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ, Ergo lineæ ζκ, ζι sunt longitudine incommensurabiles. ergo lineæ ζκ, ζι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo tota linea ικ est binomiũ. Dico præterea eam esse binomium quintum. Cum enim sit sicut numerus αγ ad numerum αβ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ ιζ. Per conuersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ ζκ. Est ergo quadratum lineæ ιζ maius quadrato lineæ ζκ. Sint ergo quadrato lineæ ιζ æqualia quadrata linearũ ζκ, θ. Per euersam ergo proportionem sicut numerus βα ad numerum βγ, ita quadratum lineæ ιζ ad quadratum lineæ θ. Sed numerus βα ad numerum βγ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. Ergo neque quadratum lineæ ιζ ad quadratũ lineæ θ, habebit proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζι longitudine incommẽsurabilis lineæ θ. ergo linea ζι plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Sunt autem lineæ ζι, ζκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea ζκ minus nomen est, commensurabile longitudine lineæ rationali δ. Ergo linea ικ est binomium quintum.

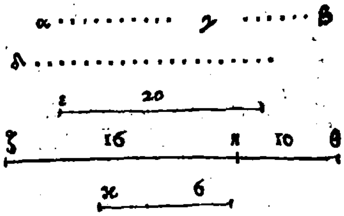
Quinquagesimumtertium Theorema.

Reperire binomium sextum.

Proponantur



Proponantur numeri duo αγ, γβ tales, ut totus αβ ad singulos αγ, γβ proportionē ne habeat quam quadratus numerus ad quadratū. Sit etiā & alius numerus δ, quique ad singulos αβ, αγ non habeat proportionem quam quadratus numerus ad quadratum. Sitq; linea rationalis ε: sit etiam sicut numerus δ ad numerum βα, ita quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ ζη. Ergo linea ε erit potentia commensurabilis lineæ ζη. est autem rationalis linea ε. ergo & lineæ ζη erit rationalis. Et quoniam numerus δ ad numerū αβ non habet proportionē quam numerus quadratus ad quadratum: neque etiam quadratum lineæ ε ad quadratū lineæ ζη habebit proportionem quā numerus quadratus ad quadratum. Est ergo linea ε longitudine incommensurabilis lineæ ζη. Rursus fiat sicut numerus βα ad numerum αγ, ita quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ. Ergo quadrata illa sunt commensurabilia. Sed quadratum lineæ ζη est rationale: est ergo etiā quadratum lineæ ηθ rationale. Ergo & linea ηθ rationalis. Et quoniam numerus βα ad numerum αγ proportionē nō habet quam numerus quadratus ad quadratum: neq; quadratum lineæ ζη ad quadratum lineæ ηθ proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum. Est ergo linea ζη longitudine incommensurabilis lineæ ηζ. ergo lineæ ζη, ηθ sunt rationales potentia tantū commensurabiles. ergo tota linea ζθ erit binomium. Dico præterea eam esse binomium sextum. Cum enim sit



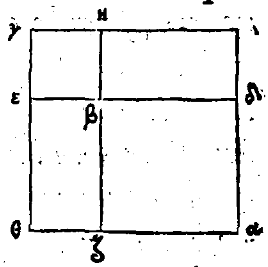
ſicut numerus δ ad numerũ β α, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ ζ η. Eſt autem ſicut numerus β α ad numerum α γ, ita quadratũ lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. Per æquam ergo proportionem ſicut numerus δ ad numerum α γ, ita quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ η θ. Sed numerus δ ad numerum α γ non habet proportionem quam quadratus numerus ad quadratum: neq; etiam quadratũ lineæ ε ad quadratum lineæ η θ habebit proportionem quã numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ε eſt longitudine incommenſurabiles lineæ η θ. Sed modo probatũ eſt lineam ζ η eſſe etiam longitudine incommẽſurabilem lineæ ε. Ergo ambæ lineæ ζ η, η θ ſunt incommenſurabiles longitudine lineæ ε. Et quoniam eſt ſicut numerus β α ad numerum α γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratũ lineæ η θ. maius eſt ergo quadratũ lineæ ζ η quadrato lineæ η θ. Sint ergo quadrato lineæ ζ η æqualia quadrata linearum η θ, κ. Ergo per euerſam proportionem ſicut numerus β α ad numerum β γ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ κ. Sed numerus β α ad numerum β γ non habet proportionem quam numerus quadratus ad quadratum. ergo neq; quadratũ lineæ ζ η ad quadratum lineæ κ habebit proportionẽ quam numerus quadratus ad quadratũ. Ergo linea ζ η, eſt longitudine incommenſurabilis lineæ κ. ergo linea ζ η poteſt pluſquam linea η θ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Sunt autem lineæ ζ η, η θ rationales potẽtia tantum

tum

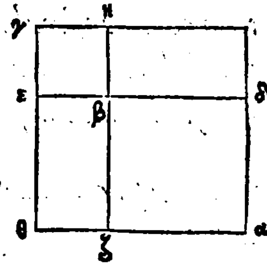
tum commensurabiles, & ambæ lineæ ζη, ηθ incommensurabiles longitudine lineæ rationali λ. Ergo tota linea ζθ est binomium sextum.

Lemma.

Si linea recta secetur in partes duas quocunque modo parallelogrammum rectangulum contentum ex sectionibus ambabus est medium proportionaliter inter quadrata sectionum. Et parallelogrammum rectangulum contentum ex tota linea & altera sectione est medium proportionaliter inter quadratũ totius lineæ & quadratum dictæ sectionis. Sint duo quadrata αβ, βγ, ita collocata ut lineæ δε, εζ sint in eadem recta linea. Erunt ergo & lineæ ζβ, βη in eadem recta linea per 14.1. Compleatur ergo parallelogrãmũ αγ.



Dico parallelogrammum rectangulum &c. ut in lemmate. Imprimis parallelogrammum αγ est quadratum, quia linea αβ est æqualis lineæ ζβ: linea uerò βε lineæ βη. tota ergo linea δε est æqualis toti lineæ ζη. Sed linea δε est æqualis utrique γκ, θα. linea item ζη est æqualis utrique ακ, θγ per 34.1. ergo utraque linearum αθ, κγ est æqualis utrique ακ, θγ. Ergo parallelogrammum αγ est æquilaterum. Est etiam rectangulum per 29.1. ergo parallelogrammum αγ est quadratum. Et quoniam est sicut linea ζβ ad lineam βη, ita linea δε ad lineam εε. Sed sicut linea ζβ ad lineam εη, ita parallelogrammum αβ, quod est quadratũ lineæ δε, ad parallelogrammũ δη per 1.6. Sicut autem linea δβ ad lineam εε, ita pa-

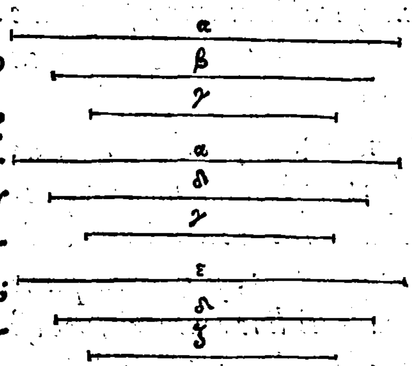


rallelogrammum δκ ad parallelogrammũ βγ, quod est quadratũ lineæ ϛζ per 1.6. Ergo sicut quadratum αϛ ad parallelogrammũ δκ, ita parallelogrammum δκ ad quadratũ βγ. Ergo parallelogrammum δκ est medium proportionaliter inter quadrata αϛ, βγ. Dico præterea parallelogrammum δγ esse medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ. Cum enim sit sicut linea αδ ad lineam δκ, ita linea κκ ad lineam κγ. singulæ enim sunt singulis æquales. Per compositam ergo proportionem quæ probatur per 18.5, sicut linea ακ ad lineam κδ, ita linea κγ ad lineã κγ. Sed sicut linea ακ ad lineam κδ, ita quadratum lineæ ακ, quod est quadratum αγ, ad parallelogrammum ex ακ, κδ, hoc est parallelogrammum δγ per 1.6. Sicut autem linea κγ ad lineam κγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum lineæ κγ, quod est quadratum βγ. Sicut ergo quadratum αγ ad parallelogrammum δγ, ita parallelogrammum δγ ad quadratum βγ. Ergo parallelogrammum δγ est medium proportionaliter inter quadrata αγ, βγ: quod demonstrandum erat.

Lemma.

Quæ sunt media proportionaliter inter eadẽ aut æqualia sunt, ipsa quoque inter se æqualia. Sint tres magnitudines α, ϛ, γ. Sitque sicut α ad ϛ, ita β ad γ. sit similiter sicut eadẽ magnitudo α ad δ, ita δ ad eandẽ magnitudinẽ γ. Dico β, δ esse inter se æqualia. Nam proportio α ad γ est proportio duplicata ipsius α ad ϛ per diffinitionẽ, similiter

liter proportio eadē ipsius α ad γ, est proportio duplicata ipsius α ad δ, per eandē diffinitionē. sed quorum æqualiter multiplicia sunt æqualia, aut eadē ipsa quoq; sunt æqualia. Ergo sicut α ad β, ita α ad δ:

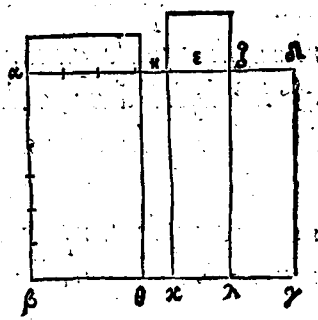


ergo per 9.5. β, δ, sunt inter se æqualia. Idē, si fuerint alia magnitudines æquales ipsis α, γ puta ι, ζ inter quas sit media proportionalis magnitudo δ.

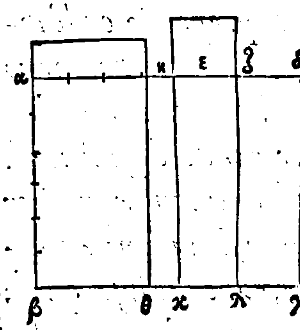
Quinquagesimumquartum Theorema.

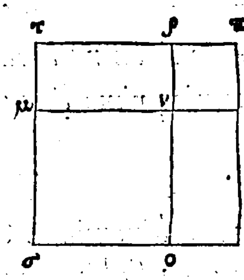
Si superficies contenta fuerit ex rationali & binomio primo, linea quæ illam superficiē potest, est irrationalis quæ binomium uocatur.

Superficies enim, α β γ δ, cōtineatur ex linea rationali α β & binomio primo linea α δ. Dico lineam quæ superficiem α γ potest esse irrationalē illam quæ uocatur binomium. Cum enim linea α δ sit binomium primū, diuidatur in sua nomina in pūcto ι, sitq; maius nomen α ι, constat lineas α ι, ι δ esse rationales potentia tantum commensurabiles, & lineam α ι plus posse, quàm linea ι δ quadrato lineæ sibi cōmensurabilis longitudine, & lineam α ι esse longitudine cō-

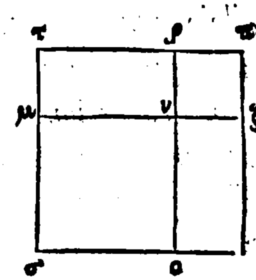


mensurabilem lineæ propositæ rationali α β. Diuidatur linea ε δ bifariam, & æqualiter in puncto ζ. Et quoniam linea α ε plus potest quàm linea ε δ quadrato lineæ sibi longitudine cōmensurabilis, si quartæ parti quadrati lineæ minoris, hoc est quadrato lineæ ε ζ æquale secundum maiorē lineā, nempe α ε applicetur, deficiēs figura quadrata diuidet lineā maiorem, nempe α ε in partes inter se longitudine commensurabiles, per secundam partem 18 *huius. applicetur ergo secūdum lineam α ε æquale quadrato lineæ ε ζ parallelogrammum ex α κ, κ ε. Ergo linea α κ est longitudine commensurabilis lineæ ε κ. Ducantur per puncta κ, ε, ζ alterutri linearum α β, δ γ parallelæ κ θ, ε χ, λ ζ per* 31.1. *& parallelogrammo α θ æquale quadratum construatur σ ν: parallelogrammo uerò κ χ, sit æquale quadratum ν π, & ita describātur, ut linea μ ν sit in eadem recta linea cum ν ξ. sunt ergo in eadē recta linea lineæ ρ ν, ν ο, & compleatur parallelogrammum σ π. Ergo parallelogrammū σ π est quadratum per ea quæ dicta sunt in demonstratione lemmatis penultimi. Et quoniam parallelogrammum ex α κ, κ ε est æquale quadrato lineæ ε ζ: Est igitur sicut linea α κ ad lineam ε ζ, ita linea ε ζ ad lineā κ ε per* 17.6. *Ergo per* 1.6. *sicut parallelogrammum α θ ad parallelo-*





rallelogrammum ι λ, ita parallelogrammum ι λ ad parallelogrammum κ η. Ergo parallelogrammũ ι λ est medium proportionaliter inter parallelogramma α θ, κ η. Sed parallelogrammum α θ est æquale quadrato σ υ. parallelogrammum uerò η κ est æquale quadrato υ ϖ. Ergo quadratorum σ υ, υ ϖ mediũ proportionale est ι λ, quorũ quadratorum σ υ, υ ϖ medium quoque proportionaliter est parallelogrammum μ ρ per lemma penultimũ. ergo μ ρ est æquale parallelogrammo ι λ per lemma proximum ante hoc theorema. Sed parallelogrammũ μ ρ est æquale parallelogrammo ο ξ per 43.1. parallelogrammum uerò ι λ est æquale parallelogrammo ζ γ. Totũ ergo parallelogrammum ι γ est æquale duobus parallelogrammis μ ρ, ο ξ inter se æqualibus. Sed parallelogramma α θ, η κ sunt æqualia quadratis σ υ, υ ϖ. totum ergo parallelogrammum α γ est æquale toti quadrato σ ϖ, hoc est quadrato lineæ μ ξ. Ergo linea μ ξ potest parallelogrammum α γ. dico lineam μ ξ esse binomiũ. Cum enim linea α η sit longitudine commensurabilis lineæ η ι, ergo linea tota α ι est commensurabilis longitudine utrique α η, η ι per 16. Sed per suppositionem linea α ι est longitudine commensurabilis lineæ α β, ergo & utraque α η, η ι est commensurabilis longitudine lineæ α β per 12. est autem linea α β rationalis: rationalis est ergo utraque α η, η ι. Est ergo utrũq; parallelogrammum α θ, η κ rationale per 20. Ergo & parallelogrammum α θ erit commensurabile parallelogrãmo η κ. ergo & quæ sunt illis æqualia, nempe quadrata σ υ, υ π quæ sunt quadrata linearũ μ υ, υ ξ sunt rationalia & commensurabilia. Et quoniã *linea α ι est per positionem longitudine incõmensurabilis lineæ ι Λ, sed linea α ι lineæ α κ est commensurabilis, ut modo probatum est: linea autem ι Λ est commensurabilis lineæ ι ξ. Ergo per corollariũ à nobis positum post 14. linea α κ, est*

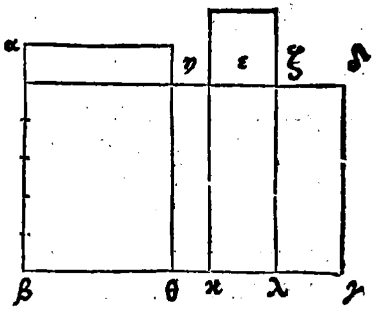


incommensurabilis longitudine lineæ ι ζ. Quare & parallelogrammum α θ parallelogrammo ι λ est incõmensurabile. Ergo & quadratũ σ υ est incommensurabile parallelogrãmo μ ϱ, quia per positionem parallelogrãmum α θ est æquale quadrato σ υ: & parallelogrãmum ι λ probatum est æquale parallelogrammo μ ϱ. Sed sicut quadratum σ υ, ad parallelogrammum μ ϱ, ita linea ο υ ad lineam υ ϱ per 1.6. ergo per 10 linea ο υ est incommẽsurabilis lineæ υ ϱ. est autem linea ο υ æqualis lineæ μ υ: linea autem υ ϱ lineæ υ ξ. est ergo incommensurabilis linea μ υ lineæ υ ξ. Modo autem probatum est quadrata ambarum linearum μ υ, υ ξ esse rationalia & commensurabilia. Ergo lineæ μ υ, υ ξ sunt rationales potẽtia tantũ commensurabiles. ergo linea μ ξ est binomium, & potest parallelogrammum α γ. quod demonstrandum erat.

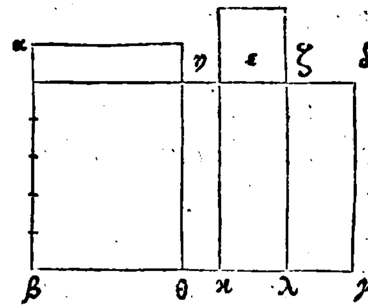
Quinquagesimumquintum Theorema.

Si superficies contenta fuerit ex linea rationali & binomio secundo, linea potens illam superficiem est irrationalis quæ bimediale primum uocatur.

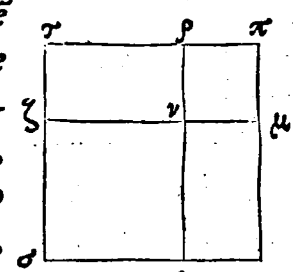
Superficies enim, α β γ Λ, contineatur ex rationali α β & binomio secundo, quæ sit linea α Λ. Dico lineam quæ superficiem *perficiẽ αγ poteſt, eſſe bimediale primũ. Cũ enim linea αδ ſit binomium ſecũdum, diuidatur in ſua nomina in pũcto ε, ita ut maius nomen ſit αε. ergo lineæ αε, εδ ſunt rationa-*



les tantum potentia commenſurabiles, & linea αε poteſt plus quàm linea εδ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen nempe εδ eſt commenſurabile longitudine lineæ αβ. Secetur linea εδ bifariam & æqualiter in puncto ζ, & quadrato lineæ εζ æquale ſecundum lineam αε applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod parallelogrammum ſit ex lineis αη, ηε. Ergo linea αη, eſt longitudine cõmenſurabilis lineæ ηε: & per puncta η, ε, ζ ducantur parallelæ lineis αβ, δγ, lineæ ηθ, εκ, ζλ. Et parallelogrãmo αθ æquale quadratum cõſtruatur σν. parallelogrammo uerò ηκ, æquale quadratum ſimiliter cõſtruatur νϖ, & ita componantur ut linea μν, & linea νξ conficiant unam lineam rectam. ergo & lineæ ον, νρ cõficiunt unã & eandem lineam, & compleatur quadratũ σϖ. Conſtat ex his quæ demõſtrata ſunt in proximo theoremate parallelogrammum μρ eſſe proportionaliter mediũ inter quadrata σν, νϖ, & æquale parallelogrãmo ελ & lineam μξ poſſe ſuperficiẽ αγ. Modo ſupereſt ut demonſtremus lineam μξ eſſe bimediale primum: quoniã linea αε eſt longitudine incommenſurabilis lineæ εδ, & linea εδ eſt commenſurabilis longitudine lineæ αβ. eſt



ergo linea αι longitudine incommensurabilis lineæ αβ per 14. Et quoniam linea ακ est commensurabilis lõgitudine lineæ κι, est ergo tota linea αι lõgitudine commensurabilis lineæ utrique ακ, κι per 16. est autẽ linea αι rationalis, ergo utraque ακ, κι rationalis. Et quoniam linea αι est longitudine incommẽsurabilis lineæ αβ. est autem linea αι commensurabilis longitudine utrique ακ, κι, ergo lineæ ακ, κι sunt longitudine incõmensurabiles lineæ αβ. ergo lineæ αβ, ακ, κι sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. Quare utrunque parallelogrammũ αθ, κλ est mediale per 22. quare utrũque quadratum σν, νπ, est etiã mediale, ergo lineæ μν, νξ, sunt mediales. Et quoniã linea ακ est longitudine cõmẽsurabilis lineæ κι, commẽsurabile est parallelogrãmũ αθ parallelogrammo κλ per 1.6. & 10 huius, hoc est quadratum σν quadrato νπ, hoc est quadratum lineæ μν, quadrato lineæ νξ, quare lineæ



μν, νξ sunt potentia cõmensurabiles. Et quoniã linea αι est longitudine incõmẽsurabilis lineæ ιδ. sed linea αι est longitudine cõmẽsurabilis lineæ ακ, linea uerò ιδ est lõgitudine commensurabilis lineæ ιζ. est ergo linea ακ incommensurabilis longitudine lineæ ιζ per corollarium 14 theorematis. Quare & parallelogrammũ αθ est in-

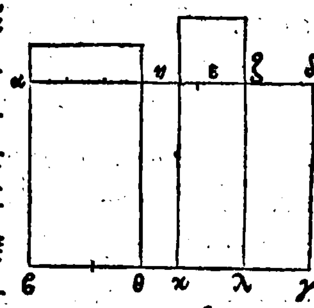
commen-

commensurabile parallelogrammo ι λ, hoc est quadratum σ ν parallelogrãmo μ ϱ, hoc est linea ο ν lineæ ν ϱ, hoc est linea μ ν lineæ ν ξ est longitudine incommensurabilis. Ergo *lineæ μ ν, ν ξ sunt potentia tantum commensurabiles. Sed modo probatũ est easdem esse mediales, ergo lineæ μ ν, ν ξ sunt mediales potentia tantum commensurabiles.* Dico *præterea eas continere superficiem rationalem. Cum enim linea ι δ sit longitudine cõmensurabilis utrique α β, ι ζ.* E*st ergo linea ι ζ longitudine commensurabilis lineæ ι κ quæ est æqualis lineæ α ϛ.* E*st autẽ utraque linea ι ζ, ι κ rationalis. ergo parallelogrammũ ι λ est rationale per 20 huius, hoc est ei æquale parallelogrammum μ ϱ. Sed parallelogrammum μ ϱ est contentum ex lineis μ ν, ν ξ.* Ergo *per 37 linea μ ξ est bimediale primum quod demonstrandum erat.*

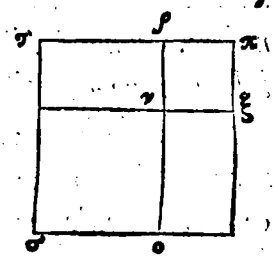
Quinquagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio tertio, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis quæ dicitur bimediale secundum.

Superficies enim α β γ δ contineatur ex rationali α β & binomio tertio linea α δ, quæ sit diuisa in sua nomina in puncto ι, quorum maius nomen sit linea α ι. Dico *lineã quæ potest superficiem α γ esse irrationalem uocatã bimediale secundum. Sit enim eadem constructio figurarum quæ in proximis theorematibus. Quoniam linea α δ est binomium tertiũ lineæ α ι, ι δ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea α ι plus potest quàm linea ι δ quadrato lineæ sibi longitudine com-*



mẽsurabilis, & neutra linearũ α ι, ι δ est longitudine commẽsurabilis lineæ α β. Sicut in superioribus est demonstratũ, ita hîc demonstrari potest lineã μ ξ posse superficiẽ α γ, & lineas μ ν, ν ξ esse mediales potentia tantũ cõmensurabiles, itaque lineam μ ξ esse compositã ex lineis medialibus potentia tantum commensuralibus. Restat *demonstrandum eandem lineam μ ξ esse bimediale secundum, quoniam linea ι δ*



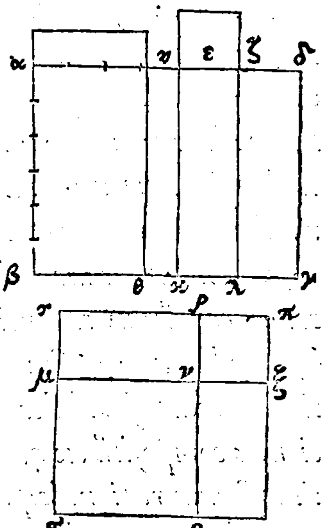
est longitudine incommẽsurabilis lineæ α β, hoc est lineæ ι κ. sed linea ι δ est commẽsurabilis lõgitudine lineæ ι ζ. Est ergo linea ι ζ lõgitudine incommẽsurabilis lineæ ι κ. ergo lineæ ζ ι, ι κ sunt rationales, quia ex hypothesi linea ι δ est rationalis, cui linea ζ ι est commensurabilis. Ergo lineæ ζ ι, ι κ sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum ι λ est mediale per 22. hoc est parallelogrammum μ ρ, quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo linea μ ξ est bimediale secundum.

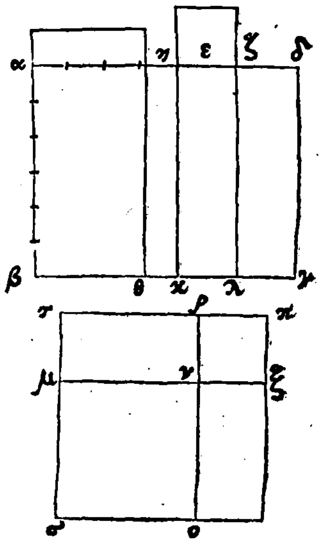
Quinquagesimumseptimum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio quarto, linea potens superficiem illam est irrationalis, quæ dicitur maior.

Superficies α γ contineatur ex linea rationali α ϐ, & binomio quarto, linea α δ diuisa in sua nomina in puncto ι, sitq;

ſitq; maius nomen α ι. Dico lineam quæ poteſt ſuperficiem α γ eſſe irrationalẽ eam, quæ dicitur maior. Cum enim linea α δ ſit binomium quartum, ergo lineæ α ι, ι δ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & linea α ι plus poteſt quàm linea ι δ quadrato lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: & linea α ι eſt longitudine cõmẽſurabilis rationali α β. Secetur linea ι δ bifariã & æqualiter in puncto ζ, & ſecũdum lineam α ι quadrato lineæ ι ζ æquale applicetur parallelogrammum ex α κ, κ ι. Ergo linea α κ eſt incommẽſurabilis longitudine lineæ κ ι per ſecundam partem 19 theorematis. Ducantur ad lineam α β parallelæ κ θ, ι χ, ζ λ, & fiant cætera ut in ſuperioribus. conſtat lineam μ ξ poſſe ſuperficiem α γ. Nunc demõſtremus illam lineã μ ξ eſſe irrationalem, quæ maior dicitur. Cum enim linea α κ ſit incommenſurabilis longitudine lineæ κ ι. ergo etiam erit parallelogrammũ α θ incommenſurabile parallelogrammo κ χ, hoc eſt quadratum σ ν quadrato ν π. ergo lineæ μ ν, ν ξ ſunt potentia incommenſurabiles. Et quoniã linea α ι eſt longitudine cõmenſurabilis rationali α β, id eſt per poſitionẽ, parallelogrammũ α χ eſt rationale per 20. ergo & compoſitũ ex quadratis illi æqualibus, nempe σ ν, ν π, quæ ſunt quadrata linearũ μ ν,

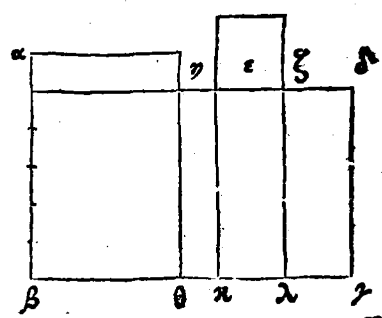




$\nu\xi$, erit similiter rationale. & quoniam linea $\iota\delta$ est longitudine incommensurabilis lineæ $\alpha\beta$, hoc est lineæ $\iota\kappa$: & linea $\iota\delta$ est commensurabilis longitudine lineæ $\iota\zeta$: Ergo linea $\iota\zeta$ est longitudine incommensurabilis lineæ $\iota\kappa$. ergo parallelogrammũ $\iota\lambda$ est mediale, hoc est $\mu\varrho$, contẽtum ex lineis $\mu\nu$, $\nu\xi$. ergo lineæ $\mu\nu$, $\nu\xi$ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositũ ex quadratis ipsarum rationale: parallelogrammum uero ex ipsis mediale. ergo tota linea $\mu\xi$ est irrationalis quæ dicitur linea maior, & potest superficiem $\alpha\gamma$ quod demonstrandum erat.

Quinquagesimumoctauum Theorema.

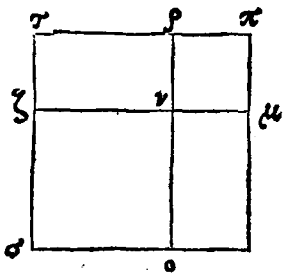
Si superficies contineatur ex rationali & binomio quinto, linea quæ illam superficiem potest, est irrationalis, quę dicitur potẽs rationale & mediale.



Superficies $\alpha\gamma$ contineatur ex rationali $\alpha\beta$ & binomio quinto, linea $\alpha\delta$ diuisa in sua nomina in puncto ι, ita ut maius nomen sit $\alpha\iota$. Dico lineã quæ potest superficiem illam $\alpha\gamma$,

esse

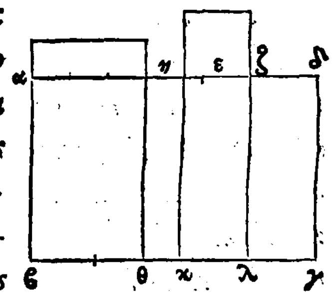
esse irrationalem, quæ dicitur potens rationale & mediale. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedenti. Constat lineam quæ potest superficiem α γ esse μ ξ. Demonstremus illam lineam μ ξ, esse lineam potentem rationale & mediale. Cum enim linea α κ sit incommensurabilis longitudine lineæ κ ι, est etiam incommensurabile parallelogrammum α θ parallelogrammo θ ι, hoc est quadratũ lineæ μ ν, quod est quadratũ σ ν quadrato lineæ ν ξ, quod est quadratũ ν π. Ergo lineæ μ ν ν ξ sunt potentia incommensurabiles. Et quoniã linea α δ est binomium quintũ, estq́; minus eius nomẽ linea ι δ illa linea ι δ, est lõgitudine cõmensurabilis rationali α β. Sed linea α ι est longitudine incommensurabilis lineæ ι δ. Ergo linea α ι est longitudine incommẽsurabilis rationali α β. ergo lineæ α β, α ι sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo parallelogrammum α κ, est mediale hoc est compositum ex quadratis linearum μ ν, ν ξ. Et quoniam est commensurabilis longitudine linea ι δ lineæ α β, hoc est lineæ ι κ. sed linea ι δ est commensurabilis longitudine lineæ ι ζ. Ergo & linea ι ζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ι κ, & linea ι κ est rationalis. ergo & parallelogrammũ ι λ erit rationale per 20. hoc est parallelogrammum μ ρ quod continetur ex lineis μ ν, ν ξ. Ergo illæ lineæ μ ν, ν ξ sunt potẽtia incõmensurabiles cõficientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: parallelogrammum uerò ex ipsis rationale. Ergo tota linea μ ξ

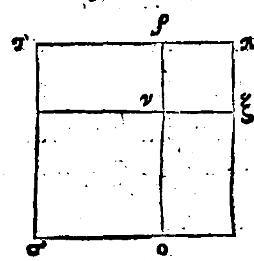


est irrationalis, quæ dicitur potẽs rationale & mediale: & potest superficiem α γ. *quod demonstrandum erat.*

Quinquagesimumnonum Theorema.

Si superficies contineatur ex rationali & binomio sexto, linea quæ illam superficiem potest est irrationalis, quæ dicitur potens duo medialia.

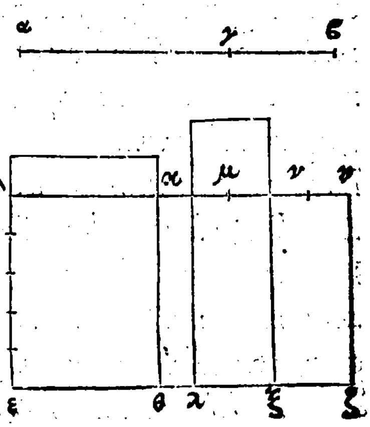




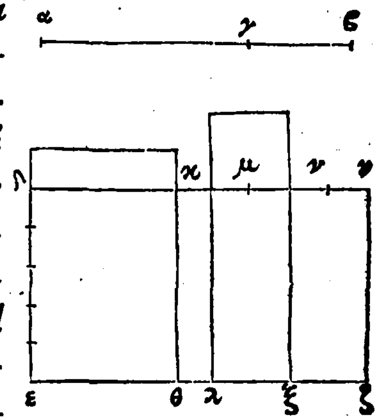
Superficies α β γ δ, *contineatur ex rationali* α β, *& binomio sexto linea* α δ *diuisa in sua nomina in puncto* ε, *ita ut maius illius nomẽ sit* α ε: *dico lineã quæ potest superficiem* α γ *esse irrationalem eam, quæ dicitur potens duo medialia. Sint enim eædem constructiones quæ in præcedentibus.* Manifestum *est lineã quæ potest superficiem* α γ *esse lineã* μ ξ, *& lineam* μ ν *esse incommensurabilem potentia lineæ* ν ξ: *& quoniam est incommẽsurabilis longitudine linea* α ε *lineæ* α β. *ergo lineæ illæ* α ε, α β *sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles.* Ergo *parallelogrammum* α κ, *hoc est compositum ex quadratis linearum* μ ν, ν ξ *est mediale.* R*ursus cum linea* ε δ *sit incommẽsurabilis longitudine lineæ* α β, *ergo etiam incommensurabilis longitudine erit linea* ε ζ *lineæ* ε κ. Ergo *mediale erit parallelogrammum* ε λ, *hoc est* μ ρ, *quod cõtinetur ex* μ ν, ν ξ. Et *quoniam est longitudine incommẽsurabilis linea* α ε *linea* *neæ $\iota\zeta$. ergo etiam parallelogrammum $\alpha\kappa$ erit incommensurabile parallelogrãmo $\iota\lambda$. Sed parallelogrammũ $\alpha\kappa$ est æquale composito ex quadratis linearum $\mu\nu$, $\nu\xi$: parallelogrammũ uerò $\iota\lambda$ est æquale ei quod fit ex $\mu\nu$, $\nu\xi$. Ergo compositum ex quadratis linearũ $\mu\nu$, $\nu\xi$ est incommẽsurabile ei quod fit ex $\mu\nu$, $\nu\xi$, estq́; mediale utrũque: & lineæ $\mu\nu$, $\nu\xi$ sunt potentia incõmensurabiles. Ergo tota linea $\mu\xi$ est potens duo medialia, & potest superficiem $\alpha\gamma$. quod demonstrandum fuit. Hîc legitur quoddam lemma, quod quia uisum est idem cũ eo quod postponitur 39 theoremati, ideo prætermisimus. præterea quæ hîc affertur illius demonstratio, cum non satisfaciat, superiore illa, quæ & certissima & facillima est, contenti simus: hoc ipsum lemma persecutus est Campanus post 35.*

Sexagesimum Theorema.

Quadratum binomij secundum lineam rationalem applicatũ facit alterũ latus binomiũ primũ.



Sit binomium linea $\alpha\beta$ diuisa in sua nomina in pũcto γ, ita ut maius nomẽ sit $\alpha\gamma$: & proponatur linea rationalis lineæ $\delta\epsilon$: & quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale secundum lineam $\delta\epsilon$ applicetur parallelogrammum $\delta\epsilon$, $\zeta\kappa$ latus alterum faciẽs lineam $\delta\kappa$. Dico *lineam $\delta\kappa$*



esse binomiũ primum. Nã *secundum lineam* $\delta\iota$ *quadrato lineæ* $\alpha\gamma$ *æquale applicetur parallelogrammũ* $\delta\theta$. *quadrato autem lineæ* $\beta\gamma$ *æquale applicetur parallelogrammum* $\kappa\lambda$. *Residuum ergo, nempe id quod fit bis ex lineis* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *est æquale residuo uidelicet parallelogrammo* $\mu\zeta$. *Secetur linea* $\mu\kappa$ *bifariã & æqualiter in punƈto* ν. *& ducatur linea* $\nu\xi$ *parallela utriq; linearum* $\mu\lambda$, $\kappa\zeta$. *Vtrumuis ergo parallelogrammorũ* $\mu\xi$, $\nu\zeta$ *est æquale ei quod fit semel ex lineis* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. *Et quoniam linea* $\alpha\beta$ *est binomium diuisa in su a nomina in punƈto* γ. *ergo lineæ* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *sunt rationales potẽtia tantum commensurabiles. Ergo quadrata linearum* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *sunt rationalia, ideóque cõmensurabilia inter se. quare & compositum ex illis quadratis linearum* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *est commensurabile singulis quadratis linearũ* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *per 16. Ergo compositum ex quadratis linearum* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *est rationale. est autem æquale parallelogrammo* $\delta\lambda$. *ergo & parallelogrammum* $\delta\lambda$ *est rationale, & secundum lineam rationalem applicatur* $\delta\iota$. *Ergo linea* $\delta\mu$ *est rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ* $\delta\iota$ *per 21. Rursus quoniam lineæ* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: ergo id quod fit bis ex* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, *nempe parallelogrammum* $\mu\zeta$ *est mediale per 22. & illud parallelogrammum* $\mu\zeta$ *applicatur secũdum rationalem*

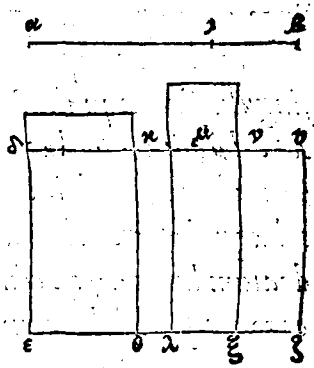
nalem μ λ. est ergo linea μ ν rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ μ λ, hoc est lineæ δ ι. Est autem & linea δ μ rationalis & longitudine commensurabilis lineæ δ ι. Est ergo linea δ μ, lineæ μ ν longitudine incõmensurabilis. Sunt autem ambæ rationales. sunt ergo lineæ δ μ, μ ν rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo linea δ ν est binomium. Demonstremus præterea illam esse binomium primum. Nam cum quadratorum linearum α γ, γ ϐ sit proportionaliter medium parallelogrammum ex α γ γ ϐ per lemma positum post 53. Ergo etiam parallelogrammorum δ θ, κ λ, proportionaliter medium erit parallelogrammum μ ξ, quia singula singulis sunt æqualia. Est ergo sicut parallelogrammum δ θ ad μ ξ, ita μ ξ ad κ λ, hoc est sicut linea δ κ ad lineam μ ν, ita linea μ ν ad lineam μ κ. Ergo quadratum lineæ μ ν est æquale parallelogrammo ex δ κ, μ κ. Et quoniã quadratum lineæ α γ est cõmensurabile quadrato lineæ γ ϐ: ergo & parallelogrammum δ θ est cõmensurabile parallelogrammo κ λ. Quare & linea δ κ est longitudine commensurabilis lineæ κ μ per 1.6. & 10 huius. Et quoniam quadrata linearũ α γ, γ ϐ sunt maiora eo quòd fit bis ex α γ, γ ϐ per lemma positũ post 39. ergo & parallelogrammũ δ λ est maius parallelogrammo μ ξ. Quare & linea δ μ est maior linea μ ν per. 1.6. Et est æquale parallelogrammũ ex δ κ, κ μ quadrato lineæ μ ν hoc est quartæ parti quadrati lineæ μ ν, quia linea μ ν diuisa est bifariam & æqualiter in puncto ν, & est linea δ κ longitudine commensurabilis lineæ κ μ. Ergo per 18. linea δ μ plus potest quàm linea μ ν quadrato lineæ sibi lon-

gitudine commensurabilis. Sunt autem & lineæ δμ, μκ *rationales potentia tantum commensurabiles, & linea* δμ, *quæ est maius nomen, est longitudine commensurabilis propositæ lineæ rationali* δι. *Ergo linea* δκ *est binomium primum. quod demonstrandum erat.*

Sexagesimumprimum Theorema.

Quadratum bimedialis primi secundum rationalem lineam applicatum facit alterum latus binomium secundum.

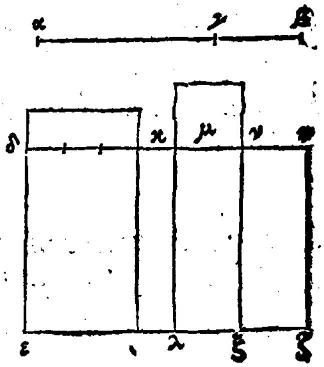
Sit bimediale primum linea αβ *diuisa in sua nomina in puncto* γ, *quorum maius nomē sit,* αγ: *& proponatur linea rationalis* δι, *secundū quam applicetur æquale quadrato lineæ* αβ *parallelogrammū* δζ *faciens alterum latus lineam* δκ: *dico lineā* δκ *esse binomiū*



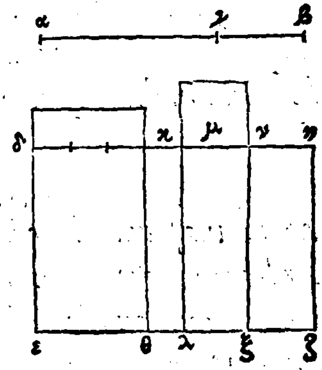
secundum. Sint enim eædem constructiones quæ in proximo theoremate, quoniam bimediale primum diuisum est in sua nomina in puncto γ. *Quadrata linearum,* αγ, γβ *sunt medialia. ergo parallelogrammum* δλ *est etiā mediale. Est ergo rationalis linea* δμ, *& incommensurabilis longitudine lineæ* δι *per* 23. *Rursus quoniam id quod fit bis ex* αγ, γβ *est rationale, etiam parallelogrāmum* μζ *erit rationale. Ergo linea* μκ *est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ* μλ, *hoc est lineæ* δι. *ergo linea* δμ *est longitudine incommensurabilis lineæ* *μν, & sunt rationales: ergo lineæ δμ, μν sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea δν est binomium. demonstremus illam esse binomium secundum. Quoniam quadrata linearum αγ, γβ sunt maiora eo quod fit bis ex αγ, γβ. erit ergo parallelogrammũ δλ maius parallelogrãmo μζ. quare & linea δμ maior linea μν. & quoniam quadratum lineæ αγ est commensurabile quadrato lineæ γβ, etiam parallelogrammum δθ erit cõmensurabile parallelogrammo κλ. quare & linea δκ erit commensurabilis longitudine lineæ κμ: & est parallelogrammũ ex δκ, κμ æquale quadrato lineæ μν, hoc est quartæ parti quadrati lineæ μν. Ergo linea δμ plus potest quàm linea μν, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 18. & est linea μν longitudine commensurabilis lineæ rationali δε. ergo linea δν est binomium secundum.*

Sexagesimumsecundum Theorema.

Quadratum bimedialis secundi secundum rationalem applicatũ, facit alterũ latus binomiũ tertiũ.



Sit bimediale secundum linea αβ diuisa in sua nomina in puncto γ: ita ut maius nomẽ sit αγ. Sitq; rationalis δε secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrãmum δζ, faciẽs alterum latus lineam δν. dico lineam δν esse binomium tertium. Sint enim



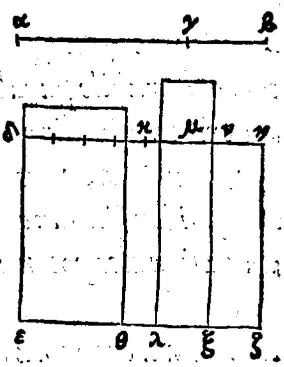
eadem constructiones, quæ in præcedentibus, quoniam linea αβ est bimediale secundũ, diuisum in puncto γ in sua nomina. ergo & cõpositũ ex quadratis linearum αγ, γβ est mediale, estque æquale parallelogrammo δλ. ergo & δλ erit mediale. ergo linea δμ erit rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ δε per 23. *Eadem ratione & linea μη erit rationalis & longitudine incõmẽsurabilis lineæ μλ, hoc est lineæ δε. ergo utraque linearum δμ, μη est rationalis & incommensurabilis longitudine lineæ δε. Et quoniam est incommensurabilis longitudine linea αγ lineæ γβ: & sicut linea αγ ad lineam γβ, ita & quadratum lineæ αγ ad parallelogrammũ ex αγ, γβ per* 1.6. *Ergo & quadratum lineæ αγ erit incommensurabile parallelogrammo ex αγ, γβ. Quare & compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ est incõmensurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ, hoc est parallelogrammum δλ, parallelogrammo μζ. Quare & linea δμ erit incommensurabilis longitudine lineæ μη. Sunt autẽ ambæ rationales. tota ergo linea δη est binomium. Demonstrandum est præterea illam esse binomium tertium. quemadmodum in superioribus, ita hic cõcludemus lineam δμ esse maiorem linea μη, esséque lineam δκ longitudine commẽsurabilem lineæ κμ, esse etiam parallelogrammum ex δκ, μκ æquale quadrato lineæ μη. ergo & lineã δμ plus posse quàm linea*

μη

μκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine: & neutra ex δμ, μκ est longitudine commensurabilis lineæ δι. ergo linea δκ est binomium tertium.

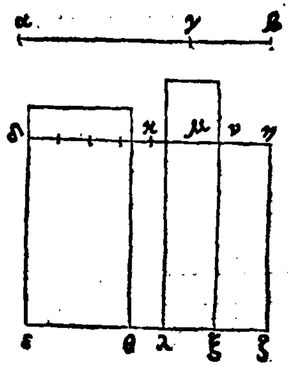
Sexagesimumtertium Theorema.

Quadratum lineæ maioris secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum.



Sit linea maior αϐ diuisa in sua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen sit αγ, sitq; rationalis δι, & secundum lineam δι quadrato lineæ αϐ æquale applicetur parallelogrammum ζδ faciens alterũ latus δκ. dico lineam δκ esse binomium quartum. Sint eædem constructiones quæ in præcedẽtibus. & quoniam linea αϐ est linea maior diuisa in sua nomina in puncto γ, lineæ αγ, γϐ sunt potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum αγ, γϐ sit rationale: ergo & parallelogrãmũ δλ erit rationale. ergo & linea δμ erit rationalis & longitudine commensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod fit bis ex αγ, γϐ, hoc est parallelogrammum μζ sit mediale, & secũdum lineam rationalem μλ sit applicatũ: ergo & linea μκ erit rationalis, & longitudine incõmensurabilis lineæ δι. ergo & linea δμ erit longitudine incommensurabilis li-

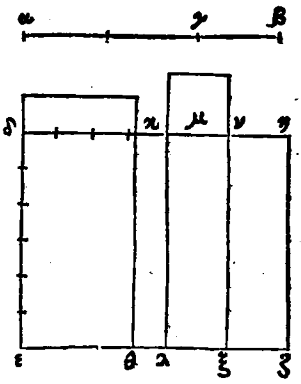
neæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea δκ erit binomium. Demonstrandum est illam *præterea esse binomium quartũ similiter, ut in præcedentibus concludetur lineam δμ esse maiorem linea μκ. Cum igitur quadratum lineæ αγ sit incõmẽsurabile quadrato lineæ γβ. ergo & parallelogrammum δθ erit incommẽsurabile parallelogrammo κλ. Quare & linea δκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κμ.* Ergo *per 19. linea δμ plus potest, quàm linea μκ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis: suntq́; lineæ δμ, μκ rationales potentia tantum commensurabiles, & linea δμ longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali δι. ergo tota linea δκ erit binomium quartum.*



Sexagesimumquartum Theorema.

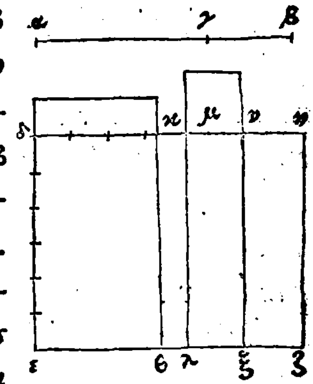
Quadratum lineæ potẽtis rationale & mediale secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quintum.

Sit linea potens rationale & mediale αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, ita ut maius nomen sit αγ: sitq́; rationalis δι, & secũdum lineam δι quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrammum δζ, faciens alterũ latus lineã δκ. dico lineam δκ esse binomium quintum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. Cum igitur linea αβ sit potẽs rationale & mediale diuisa in *sua nomina in pūcto γ, lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarum, mediale: id uerò quod fit ex ipsis, rationale. Cum igitur compositū ex quadratis linearum α γ, γ β sit mediale, ergo parallelogrammū δ λ erit etiam mediale. quare linea δ μ erit rationalis longitudine incommēsurabilis lineæ δ ι. Rursus cum id quod fit bis ex α γ, γ β sit rationale, hoc est parallelogrammū μ ξ, ergo linea μ η erit rationalis longitudine commēsurabilis lineæ δ ι. Igitur lineæ δ μ est longitudine incommēsurabilis lineæ μ η. Ergo lineæ δ μ, μ η erunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo tota linea δ η erit binomiū. dico præterea illam esse binomium quintū. Similiter enim demonstrabitur parallelogrammū ex δ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ μ ν, & lineam δ κ esse longitudine incommensurabilē lineæ κ μ. Ergo per 19. linea δ μ plus potest quàm linea μ η quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: suntq́; lineæ δ μ, μ η rationales potentia tantum cōmēsurabiles, estq́; minor linea μ η longitudine cōmēsurabilis lineæ δ ι. ergo tota linea δ η erit binomiū quintū.*



Sexagesimumquintum Theorema.

Quadratum lineæ potentis duo medialia secundū rationalem applicatum, facit alterum latus binomium sextum.

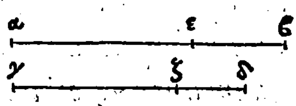


Sit linea potens duo medialia αβ diuisa in sua nomina in puncto γ, sitq́; linea rationalis δι, secundum quam quadrato lineæ αβ æquale applicetur parallelogrã-mum δζ faciẽs alterũ latus δκ. dico lineã δκ esse binomiũ sextum. Sint eædem constructiones quæ in præcedentibus. quoniam linea αβ est potens duo medialia diuisa in sua nomina in puncto γ, sicut in cæteris dictum est, utrũque parallelogrammum δλ, μζ est mediale, & secundum lineã rationalem δι applicantur. ergo utraque linea δμ, μκ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δι. Et quoniam compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ est incõmẽsurabile ei quod fit bis ex αγ, γβ. Ergo & parallelogrammum δλ est incommensurabile parallelogrammo μζ. ergo linea δμ est longitudine incommẽsurabilis lineæ μκ. ergo lineæ δμ, μκ sunt rationales potẽtia tantum commẽsurabiles. ergo linea δκ est binomiũ. dico præterea illam esse binomium sextum. Quemadmodum enim in cæteris est demonstratum, ita hic etiam demonstretur parallelogrammum ex δκ, κμ esse æquale quadrato lineæ μν, lineamq́; δκ esse longitudine incõmensurabilem lineæ κμ, itaque per 19. lineam δμ plus posse quàm linea μκ quadrato lineæ sibi incommensurabilis longitudine. sed neutra linearum δμ, μκ est longitudine commensurabilis lineæ rationali δι. ergo tota linea δκ est binomium sextum.

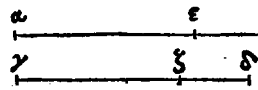
Sexa-

Sexagesimumsextum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis binomio est, & ipsa binomium eiusdem ordinis.



Sit binomium linea α β, sitq; ei longitudine commensurabilis linea γ δ. dico lineam γ δ esse etiam binomium eiusdem ordinis, cuius est & linea α ϐ. cũ enim linea α β sit binomium, diuidatur in sua nomina in puncto ε, sitq; maius nomẽ α ε. Ergo lineæ α ε, ε β sunt rationales potentia tantum commensurabiles, fiatq; sicut linea α ϐ ad lineam γ δ, ita linea α ε ad lineam γ ζ per 12. 6. Ergo & residua ε ϐ ad residuam ζ δ erit sicut tota linea α β ad totam lineã γ δ per 19. 5. Sed linea α ϐ est longitudine commẽsurabilis lineæ γ δ. ergo etiam erit longitudine commensurabilis linea α ε lineæ γ ζ: & linea ε ϐ lineæ ζ δ per 10 huius. Sunt autem lineæ α ε, ε β rationales. sunt ergo etiam rationales lineæ γ ζ, ζ δ. Et quoniam est sicut linea α ε ad lineam γ ζ, ita linea ε ϐ ad lineã ζ δ. permutata ergo proportione sicut linea α ε ad lineã ε ϐ, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ, sed lineæ α ε, ε β sunt potentia tantum commensurabiles. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ, sunt potentia tantum commẽsurabiles per 10 huius. Sunt autẽ & rationales: ergo linea tota γ δ est binomium. Dico præterea esse binomium eiusdem ordinis cuius & linea α ϐ. nam linea α ε plus potest quàm linea ε ϐ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Si primum plus potest quadrato lineæ sibi longitudine commensurabi-

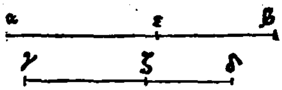


lis, ergo et linea γζ plus poterit, quàm linea ζδ, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15 huius. Et siquidem linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: ergo linea γζ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ αε, erit inquam linea γζ etiam longitudine commensurabilis eidem lineæ propositæ rationali per 12 huius, ob eamque causam utraque linea αβ, γδ est binomiũ primum, hoc est utraque erit eiusdem ordinis. Si uerò linea εβ est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ergo linea ζδ, quæ est longitudine commensurabilis lineæ εβ, erit etiam longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, ob eamq; causam erit utraque binomiũ secundum, hoc est utraque eiusdem ordinis. Si uerò neutra linearum αε, εβ est longitudine cõmensurabilis propositæ rationali, neutra etiam linearum γζ, ζδ erit eidẽ propositæ lineæ rationali commensurabilis longitudine per 14 huius. sic ergo utraque linea erit binomium tertium. Quòd si linea αε plus potest, quàm linea εβ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, ergo & linea γζ plus poterit quàm linea ζδ, quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15 huius. Et si quidem linea αε est longitudine commensurabilis propositæ rationali, & linea γζ erit eidem rationali longitudine commensurabilis: tunc erit utraque binomium quartũ. Quòd si linea εβ fuerit rationali commensurabilis longitudine, & linea ζδ erit eidem longitudine commensurabilis: eritque hoc modo utraque binomium quintum.

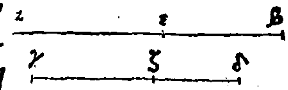
Quòd si neutra linearum α ε, ε β fuerit rationali commensurabilis longitudine, neutra etiam γ ζ, ζ δ erit eidẽ commensurabilis longitudine: eritq; utraque binomium sextum. Quare linea longitudine commensurabilis binomio, est etiam binomium eiusdem ordinis.

Sexagesimumseptimum Theorema.

Linea longitudine commensurabilis alteri bimedialium, est & ipsa bimediale etiã eiusdẽ ordinis.



Sit bimediale linea α β: eidem sit alia cõmẽsurabilis lõgitudine γ δ. dico lineam γ δ esse etiã bimediale eiusdem ordinis, cuius & linea α β. Diuidatur *linea α β in sua nomina in puncto ε, fiatq; sicut linea α β ad lineam γ δ, ita linea α ε ad lineam γ ζ: residua ergo linea ε β erit ad lineam ζ δ sicut tota linea α β ad totam γ δ: sed linea α β est longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ε erit longitudine commensurabilis lineæ γ ζ, & linea ε β lineæ ζ δ. Sunt autẽ lineæ α ε, ε β mediales. ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt etiã mediales per 24. Et quoniam est sicut linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sed lineæ α ε, ε β sunt potentia tantum commẽsurabiles, ergo & lineæ γ ζ, ζ δ sunt potẽtia tantum cõmensurabiles. sed modo probatum est eas etiam esse mediales, ergo tota linea γ δ erit etiã bimediale: dico præterea esse bimediale eiusdẽ ordinis, cuius & linea α β. cum enim sit sicut linea α ε ad lineã ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: sitq; sicut linea γ ζ ad lineã ζ δ, ita quadratũ lineæ γ ζ ad ζ δ parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per 1.6.*



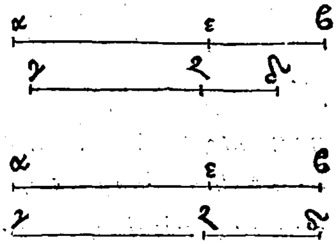
Ergo sicut linea α ι ad lineam ι β, ita quadratũ lineæ γ ζ ad parallelogrammũ ex γ ζ, ζ δ per 11.5. Sed *sicut linea α ι ad lineam ι β, ita quadratum lineæ α ι ad parallelogrammũ ex α ι, ι β, per* 1.6. Ergo *sicut quadratum lineæ α ι ad parallelogrammum ex α ι, ι β, ita quadratum lineæ γ ζ, ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ per* 11.5. *permutata ergo proportione sicut quadratũ lineæ α ι ad quadratum linæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ι, ι β ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ: sed quadratum lineæ α ι est commensurabile quadrato lineæ γ ζ, quia modo probatum est lineas α ι, γ ζ esse commensurabiles.* Ergo *parallelogrammum ex α ι, ι β erit commensurabile parallelogrammo* ex *γ ζ, ζ δ.* Si *ergo parallelogrãmum ex α ι, ι β fuerit rationale, hoc est si linea α β fuerit bimediale primum, parallelogrammum quoque ex γ ζ, ζ δ erit rationale, ergo linea γ δ erit etiã bimediale primum. Si uerò parallelogrammum ex α ι, ι β fuerit mediale, hoc est si linea α β fuerit bimediale secundum, erit etiam parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ mediale.* Ergo *etiã linea γ δ erit bimediale secundũ, quare & ambæ erunt eiusdem ordinis, quod demonstrandum erat: hoc autem theorema 67. potest uniuersaliter concipi. linea commẽsurabilis alteri bimedialium longitudine & sententia siue sentẽtia tantum, est & ipsa bimediale, etiam eiusdem ordinis, neque eo minus uerum erit. quod ipsum, etiam eadem uia demonstrabitur.*

Sexagesimumoctauum Theorema.

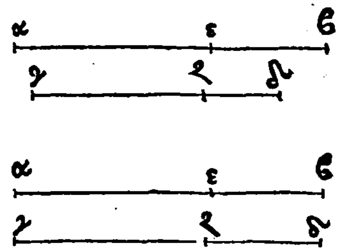
Linea cõmẽsurabilis lineæ maiori est & ipsa maior.

Sit

Sit linea maior α β cui ſit commenſurabilis linea γ δ quocunque modo, hoc eſt, ſiue ſit longitudine & potentia ſimul commenſurabilis, ſiue potentia tantum. Dico lineã *γ δ eſſe etiam lineã maiorẽ.* Diuidatur linea *α β in ſua nomina in puncto ε, fiantq́; cætera quemadmodum in ſuperioribus.* Et quoniã *eſt ſicut linea α β ad lineam γ δ:*



ita & linea α ε ad lineam γ ζ, & linea ε β ad lineã ζ δ. ergo ſicut linea α ε ad lineam γ ζ: ita linea ε β ad lineam ζ δ. ſed linea α β eſt commenſurabilis lineæ γ δ. ergo & linea α ε erit commenſurabilis lineæ γ ζ, & ſimiliter linea ε β lineæ ζ δ. Et *quoniam eſt ſicut linea α ε ad lineã γ ζ, ita linea ε β ad lineã ζ δ. permutata ergo proportione ſicut linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ. ergo ſicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ ε β, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratũ lineæ ζ δ, per* 22. 6. Ergo *per coniunctam proportionẽ (quæ probatur per* 18. 5.) *ſicut compoſitum ex quadratis linearũ α ε, ε β ad quadratum lineæ ε β, ita compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ ad quadratũ lineæ ζ δ.* Ergo *per contrariam proportionem ſicut quadratum lineæ ε β ad compoſitum ex quadratis linearum α ε, ε β, ita quadratum lineæ ζ δ ad compoſitum ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ.* Ergo *permutata proportione ſicut quadratum lineæ ε β ad quadratum lineæ ζ δ, ita compoſitum, ex quadratis linearum α ε, ε β, ad compoſitũ ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ. Sed quadratũ lineæ ε β eſt commẽſurabile qua-*



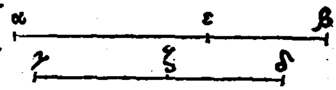
drato lineæ ζ δ, quia modo probatũ est lineas ε β, ζ δ esse cõmensurabiles: ergo & cõpositum ex quadratis linearum α ε, ε β erit commẽsurabile cõposito ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ. Sed compositum ex quadratis linearum α ε, ε β est rationale per positionem. ergo & compositũ ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ erit etiam rationale. Sicut autem linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ. Sicut autem linea α ε ad lineam ε β, ita quadratũ lineæ α ε ad parallelogrammũ ex α ε, ε β. ergo sicut linea γ ζ ad lineam ζ δ, ita quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, ε β. sed sicut linea γ ζ ad lineam ζ δ, ita quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ: ergo sicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammũ ex α ε, ε β, ita quadratũ lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ. ergo permutata proportione sicut quadratũ lineæ α ε ad quadratum lineæ γ ζ, ita parallelogrammũ ex α ε, ε β ad parallelogrammum γ ζ, ζ δ. sed quadratũ lineæ α ε est commensurabile quadrato lineæ γ ζ, quia modo probatum est lineas α ε, γ ζ esse commensurabiles, ergo & parallelogrammum ex α ε, ε β erit commensurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. sed parallelogrammũ ex α ε, ε β est mediale per positionem. ergo & parallelogrammũ ex γ ζ, ζ δ erit etiam mediale per corollarium 24. Sed (ut modo probatum est) sicut linea α ε ad lineam ε β, ita linea γ ζ ad lineam ζ δ: linea autẽ α ε erat per suppositionem potentia incommẽsurabilis lineæ ε β.

ergo

ergo per 10 & linea γ ζ erit potentia incommensurabilis lineæ ζ δ. Ergo lineæ γ ζ, ζ δ sunt potentia incommensurabiles conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. ergo tota linea γ δ erit linea maior per 39 huius. ergo linea commẽsurabilis lineæ maiori erit & ipsa linea maior. In hoc theoremate 68 ideo persequuti non sumus demonstrationẽ Theonis, quia difficilior uisa est, & indigere lemmate ad id probandũ, quod pro demonstrato sumit, illis uerbis: καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν α ε, ε β.

Sexagesimumnonum Theorema.

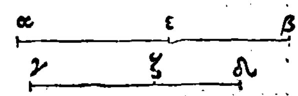
Linea cõmẽsurabilis lineæ potẽti rationale & mediale, est & ipsa linea potẽs rationale & mediale.



Sit linea potẽs rationale & mediale α β, cui sit commensurabilis linea γ δ, siue sit longitudine & potentia siue potentia tantum commensurabilis: dico etiam γ δ esse lineam potentẽ rationale & mediale. Diuidatur linea α β in sua nomina in pũcto ε: sint quoque eædem construtiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γ ζ, ζ δ esse potentia incõmensurabiles, sicut sunt lineæ α ε, ε β: & compositũ ex quadratis linearum α ε, ε β esse commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, ζ δ: item parallelogrammum ex α ε, ε β esse commensurabile parallelogrammo ex γ ζ, ζ δ. Quare & compositum ex quadratis linearũ γ ζ, ζ δ erit etiam mediale, sicut compositũ ex quadratis linearum α ε, ε β: item parallelogrammum ex γ ζ, ζ δ *erit etiam rationale sicut & parallelogrammũ ex αε, εβ. ergo linea γδ erit etiam linea potens rationale & mediale per 40.*

Septuagesimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ potenti duo medialia, est & ipsa linea potens duo medialia.



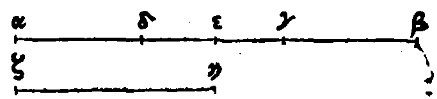
Sit linea potens duo medialia αβ, eiq; cõmensurabilis linea γδ, siue sit longitudine & potẽtia, siue potentia tantum commensurabilis: dico lineam γδ esse etiam lineam potentem duo medialia. Diuidatur linea αβ in sua nomina in puncto ε: sint quoque eædem constructiones quæ in præcedentibus. Similiter demonstrabimus lineas γζ, ζδ esse potentia incommensurabiles, & compositum ex quadratis linearum αε, εβ esse cõmensurabile composito ex quadratis linearũ γζ, ζδ: parallelogrammum uero ex αε, εβ esse commẽsurabile parallelogrammo ex γζ, ζδ. quare & compositũ ex quadratis linearum γζ, ζδ erit etiam mediale: & similiter parallelogrammum ex γζ, ζδ erit mediale. Quòd autẽ compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ sit incommẽsurabile parallelogrãmo quod fit ex γζ, ζδ, ita probatur. Cum sit enim sicut compositum ex quadratis linearum αε, εβ ad quadratum lineæ αε, ita compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ ad quadratum lineæ γζ (ut probatũ est in præcedentibus.) ergo permutata proportione, sicut compositum ex quadratis linearũ αε, εβ ad compositum ex quadratis linearum γζ, ζδ, ita quadra-

tum

tum lineæ $\alpha\iota$ ad quadratũ lineæ $\gamma\zeta$: sed in superioribus, nempe in 68 theoremate probatum est, sicut quadratũ lineæ $\alpha\iota$ ad quadratum lineæ $\gamma\zeta$, ita parallelogrammũ ex $\alpha\iota$, $\iota\beta$ ad parallelogrammum ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. Ergo *sicut cõpositum ex quadratis linearum $\alpha\iota$, $\iota\beta$ ad compositum ex quadratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$, ita parallelogrammum ex $\alpha\iota$, $\iota\beta$ ad parallelogrammum ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. ergo permutata proportione sicut compositum ex quadratis linearum $\alpha\iota$, $\iota\beta$ ad parallelogrammum ex $\alpha\iota$, $\iota\beta$, ita compositum ex quadratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ ad parallelogrammum ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$.* Sed *per suppositionẽ compositũ ex quadratis linearum $\alpha\iota$, $\iota\beta$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\alpha\iota$, $\iota\beta$. ergo & compositum ex quadratis linearum $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$ est incommensurabile parallelogrammo ex $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$.* Ergo *linea $\gamma\delta$ est potens duo medialia.*

Scholium.

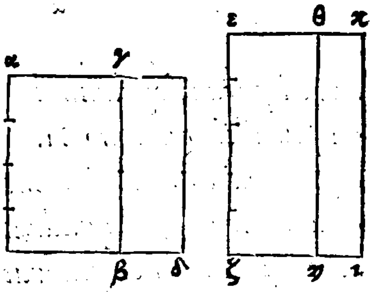
H*actenus dictum est de senarijs sex, quorum primus senarius cõtinet generationem linearum irrationalium per compositionem: secundus diuisionem, nempe quòd hæ diuidantur in unico tantum puncto: tertius inuẽtionem binomiorum, primi inquam, secundi, tertij, quarti, quinti & sexti, post quem incipit quartus senarius continẽs differentiam linearum irrationalium inter se.* Nam *ex usu singulorum binomiorum demonstrantur differentiæ irrationalium. Quintus autem docet de applicationibus quadratorum cuiusq; lineæ irrationalis, ex qualibus scilicet irrationalibus sint latitudines cuiusque superficiei applicatæ.* In *sexto uerò senario dicitur singulas lineas singulis irrationalibus commensurabiles, esse* *etiam ipsas irrationales eiusdem speciei.* Mox *uero dicetur de septimo senario, in quo reliquæ ipsarū rursus inter se differẽtiæ dilucide pertractantur.* Ex*istit etiam in illis ipsis lineis irrationalibus proportionalitas arithmetica. eáque linea quæ sumitur media proportionaliter secundum medietatem arithmeticam inter nomina cuiusque lineæ irrationalis similiter est irrationalis eiusdẽ speciei.* Pr*ius autem constat proportionalitatẽ arithmeticā inter illa nomina reperiri.* S*it enim linea* αβ *quæcunque ex dictis irrationalibus. uerbi gratia, sit binomiū, diuidaturq́; in sua nomina in puncto* γ*: sitq́; maius nomẽ* αγ*, de quo auferatur linea* αδ *æqualis minori nomini, nempe* γβ*: diuidaturq́; linea* γδ *bifariā & æqualiter in puncto* ε*: manifestum est lineam* αε *esse æqualem lineæ* εβ*.* S*it alterutri earū æqualis linea* ζη*, manifestū est, quanto differt linea* αγ *à linea* ζη*, tanto eandem lineam* ζη *differre à linea* γβ*. utrobique enim est differentia* δε *uel* εγ*, quod est propriū arithmeticæ proportionalitatis.* C*onstat autem lineam* ζη *esse commensurabilem longitudine lineæ* αβ*, quia est eius dimidia quare per 66 linea* ζη *erit etiam binomium, eodémque modo demonstrabitur de cæteris irrationalibus.* T*otum hoc scholium non reperitur in uetusto.*



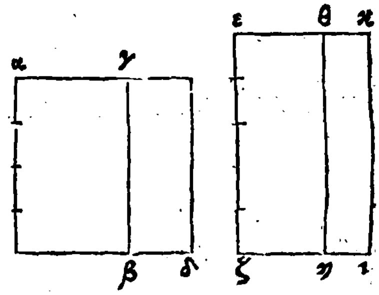
Septuagesimumprimum Theorema.

Si duæ superficies rationalis & medialis simul cōponantur, linea quæ totam superficiem compositam

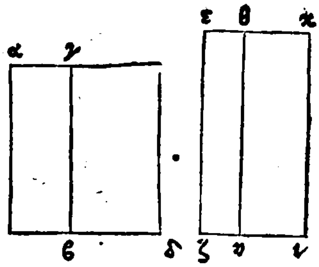
tam potest, est una ex quatuor irrationalibus, uel ea quę dicitur binomiũ, uel bimediale primũ, uel linea maior, uel linea potẽs rationale & mediale.



Sint duæ superficies, altera rationalis α ϐ, altera uerò medialis sit γ δ. Dico *lineam potẽtem superficiẽ α δ, esse uel binomiũ, uel bimediale primũ, uel lineam maiorem uel lineã potentem rationale & mediale.* Nam *superficies α β, est uel maior uel minor superficie γ δ: nã æquales esse nullo modo possunt, cũ alia sit rationalis, alia uerò medialis.* Sit *prius ea maior proponaturq; linea rationalis ε ζ, secundũ quam æqualis superficiei α β, applicetur superficies parallelogramma rectangula ε η, faciens alterum latus ε θ: superficiei autem γ δ æqualis secundum eandẽ lineam ε ζ, hoc est secũdum lineam θ η applicetur parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ.* Cum *superficies α β sit rationalis, etiã parallelogrammum ε η erit rationale: ergo & linea ε θ erit rationalis & longitudine commensurabilis lineæ ε ζ per* 21. R*ursus eadem ratione linea θ κ erit rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ ε ζ per* 23. *& quoniam superficies α β est rationalis, superficies uerò γ δ est medialis, superficies α ϐ, hoc est parallelogrãmum ε η, est incõmensurabile superficiei γ δ: hoc est parallelogrãmo θ ι.* Ergo *per* 1.6 *&* 10. *huius linea ε θ est longitudine incommensurabilis lineæ θ κ: ergo lineæ ε θ, θ κ sunt rationales potẽtia tantum*



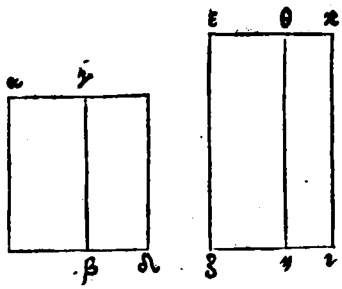
cõmensurabiles. ergo tota linea ε κ est binomiũ diuisum in sua nomina in pũcto θ. sed superficies α β est maior superficie γ δ, hoc est parallelogrammũ ε κ parallelogrammo θ ι. ergo linea ε θ est maior linea θ κ. sed linea ε θ plus potest quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõmẽsurabilis. Prius *autem posśit plus ea quadrato lineæ sibi commensurabilis: est autem linea ε θ longitudine cõmẽsurabilis lineæ rationali ε ζ, (ut modo probatum est) ergo linea ε κ est binomiũ primum.* Ergo *per 54 linea potens superficiem ε ι est binomium, quare & linea potens superficiem α δ est binomium.* Sed *secundo loco linea ε θ plus posśit quàm linea θ κ, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq; maius nomen linea ε θ commensurabile longitudine lineæ rationali ε ζ, ergo linea ε κ est binomium quartum. sed linea ε ζ est rationalis, ergo per 57 linea potẽs superficiẽ ε ι, est linea maior: quare & linea potens superficiem α δ, est linea maior.* Rur*sus superficies α β, quæ est rationalis, sit minor superficie γ δ, quæ est medialis, hoc est parallelogrammum ε κ parallelogrammo θ ι.* Quare *& linea ε θ erit minor linea θ κ: linea uero θ κ plus potest quàm linea ε θ, uel quadrato lineæ sibi longitudine cõmẽsurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis.* Prius *posśit plus ea quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, est autem*



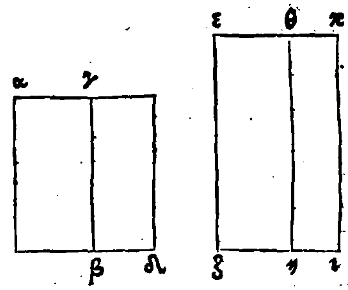
autẽ minus nomen, nempe ι θ cõmensurabile longitudine rationali lineæ rationali ι ζ, ut modo probatum est: ergo linea ι κ est binomiũ secundum. Ergo per 55 linea potens parallelogrammũ ι ι, hoc est parallelogrammum α δ, est bimediale primũ. Sed linea θ κ plus poßit quàm linea ι θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: sitq; minus nomẽ ι θ commensurabile longitudine lineæ rationali ι ζ, ergo linea ι κ est binomium quintum. ergo per 58 linea potens parallelogrammum ι ι, hoc est ei æquale α δ, erit linea potens rationale & mediale. Ergo *si duæ superficies rationalis & medialis &c.*

Septuagesimumsecundum Theorema.

Si duæ superficies mediales incommensurabiles simul componantur, fiunt reliquæ duæ lineæ irrationales, uel bimediale secundum, uel linea potẽs duo medialia.



Componantur duæ superficies mediales incommensurabiles inter se α β, γ δ. dico lineam potentem superficiem α δ esse uel bimediale secundum, uel lineam potentẽ duo medialia. Nã *superficies α β est uel maior uel minor superficie γ δ (æquales enim esse*



nullo modo possunt, cum sint incommensurabiles.) Sit ergo prius superficies α ϐ maior superficie γ δ, proponaturq́; linea rationalis ε ζ secundũ quam æquale superficiei α β applicetur parallelogrammum ε κ, faciens alterum latus ε θ: superficiei uerò γ δ applicetur æquale parallelogrammum θ ι, faciens alterum latus θ κ: & quoniam utraque superficies α ϐ, γ δ est medialis: hoc est utrũque parallelogrammum ε κ, θ ι, ergo utraque linea ε θ, θ κ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniam superficies α β, γ δ sunt incommensurabiles, ergo est etiam incommensurabile parallelogrammum ε κ parallelogrammo θ ι. ergo & lineæ ε θ, θ κ, sunt longitudine incommẽsurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. Ergo linea, ε κ, est binomium: similiter autem ac in proximo theoremate demonstratur lineam ε θ esse maiorẽ linea θ κ, quæ linea ε θ plus potest, quàm linea θ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis. Possit prius plus quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: neutra autem linearũ ε θ, θ κ est longitudine cõmensurabilis lineæ rationali ε ζ: ergo linea ε κ est binomium tertium. ergo per 56. linea potens parallelogrammum ε ι, hoc est ei æquale α δ est bimediale secundũ. Sed linea ε θ possit plus, quàm linea θ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, est autem utraq; ε θ, θ κ

longitudine

longitudine incommensurabilis lineæ rationali ι ζ: ergo linea ι κ est binomium sextum. Ergo per 59 linea potens parallelogrammũ ι ι, hoc est α δ est linea potens duo medialia. Eadem ratione si superficies α ϛ fuerit minor superficie γ δ, demonstrabimus lineam potentem superficiem α δ, esse uel bimediale secundum uel lineam potentem duo medialia. Ergo si duæ superficies mediales &c. binomium & cæteræ consequentes lineæ irrationales neque sunt eædẽ cum linea mediali, neque ipsæ inter se.

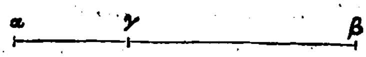
Nam quadratum lineæ medialis applicatum secundũ lineam rationalem, facit alterum latus lineam rationalem, & longitudine incommensurabilem lineæ, secũdum quam applicatur, hoc est lineæ rationali per 23. Quadratum uero binomij secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium primum per 60. Quadratum uero bimedialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ secũdum per 61. Quadratum uerò bimedialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium tertium per 62. Quadratum uerò lineæ maioris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomium quartum per 63. Quadratum uerò lineæ potentis rationale & mediale secũdum rationalem applicatũ, facit alterum latus binomium quintum per 64. Quadratum uero lineæ potentis duo medialia secundum rationalem applicatum, facit alterum latus binomiũ sextum per 65. Cũ igitur dicta latera, quæ latitudines uocantur, differant, & à prima latitudine quoniam est rationalis, cum inter se quoque differant, eo quia sunt *binomia diuersorum ordinum: manifestum est ipsas lineas irrationales differentes esse inter se.*

Secundus ordo alterius sermonis, qui est de detractione.

Principium senariorum per detractionem.

Septuagesimumtertium Theorema.

Si de linea rationali detrahatur rationalis potentia tantum commensurabilis ipsi toti, residua est irrationalis. Vocetur autem residuum.



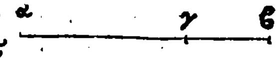
De *rationali α β detrahatur rationalis β γ, potẽtia tãtũ commensurabilis toti α β. dico residuam α γ esse irrationalem, quæ uocetur residuum. cum enim linea α β sit lõgitudine incõmensurabilis lineæ β γ, sitq́; sicut linea α β ad lineam β γ, ita quadratũ lineæ α β ad parallelogrãmum ex α β, β γ: ergo quadratum lineæ α β erit incõmensurabile parallelogrãmo ex α β, β γ. sed quadrato lineæ α β sunt commensurabilia quadrata linearũ α β, β γ per* 16. *Ergo quadrata linearũ α β, β γ sunt incommensurabilia parallelogrammo ex α β, β γ per* 14. *sed parallelogrammo ex α β, β γ commẽsurabile est ei quod fit bis ex α β, β γ. Ergo quadrata linearum α β, β γ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α β, β γ. sed quadrata linearũ α β, β γ sunt æqualia ei quod fit bis ex α β, β γ, & quadrato lineæ α γ, per* 7.2. *ergo id quod fit bis ex α β, β γ, cum quadrato lineæ α γ, est incommensurabile ei quod fit bis ex α β, β γ. Ergo per secundam partem* 17 *id quod*

fit

fit bis ex α β, ϛ γ est incõmensurabile quadrato lineæ α γ. ergo per primam partem eiusdem 17 id quod fit bis ex α ϛ, ϛ γ cum quadrato α γ, hoc est illi toti æqualia quadrata linearum α ϛ, β γ sunt incommensurabilia quadrato lineæ α γ. Hoc *breuius cõcluditur per corollarium à nobis demonstratum post 17. sed quadrata linearum α ϛ, ϛ γ sunt rationalia, quia lineæ α β, ϛ γ positæ sunt rationales. ergo linea α γ est irrationalis: uocetur autẽ residuum.* Hoc *uero theorema nihil aliud dicit, quàm portionem eam maioris nominis ipsius binomij, quæ remanet post detractionem minoris nominis de maiori, esse irrationalem: quæ uocatur residuum, hoc est si de maiori nomine ipsius binomij, quod maius nomen est linea rationalis potentia tantum commensurabilis minori nomini, detrahatur minus nomen, quod ipsum est etiã cõmensurabile potentia tantũ maiori nomini (quod maius nomen hoc theorema uocat lineam totam) residuã lineam esse irrationalem, quam uocat residuum.* Itaque *omnes lineæ, de quibus agitur hoc theoremate, & cæteris quinque consequẽtibus, sunt reliquæ portiones maiorum nominum totarum linearum, de quibus actum est 36.37.38.39.40 & 41 post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumquartum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum cõmensurabilis toti lineę, quæ uero detracta est cũ tota cõtineat superficiẽ rationalẽ, residua est irrationalis. uocetur autẽ residuũ mediale primũ.

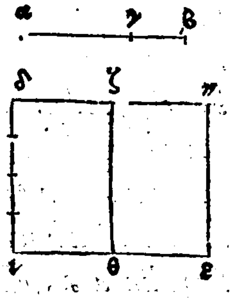


De linea mediali $\alpha\beta$ detrahatur medialis $\beta\gamma$ potentia tantum commẽsurabilis toti $\alpha\beta$, quæ scilicet $\beta\gamma$ cũ $\alpha\beta$ contineat rationale, nempe parallelogrammũ ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Dico reliquã $\alpha\gamma$ esse irrationalem. Vocetur autem residuum mediale primum. Nam cum lineæ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ sint mediales, quadrata illarum erunt medialia. sed quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est rationale: ergo cõpositum ex quadratis linearũ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ hoc est id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, cum quadrato lineæ $\alpha\gamma$ est incommensurabile ei quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Ergo per secũdam partem 17. id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, est incommẽsurabile quadrato lineæ $\alpha\gamma$. sed id quod fit bis ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ est rationale. ergo quadratum lineæ $\alpha\gamma$ est irrationale. ergo & linea $\alpha\gamma$ irrationalis. Vocetur autẽ residuum mediale primum. Est etiam hoc residuum mediale primũ, residua portio maioris nominis bimedialis primi, post detractionem minoris nominis de maiori: unde & denominationem habet residuum mediale primum.

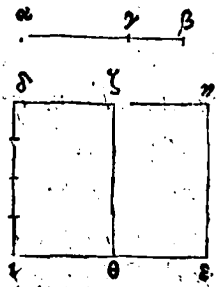
Septuagesimumquintum Theorema.

Si de linea mediali detrahatur medialis potẽtia tantum commensurabilis toti, quæ uero detracta est cum tota contineat superficiem medialem, reliqua est irrationalis. Vocetur autem residuum mediale secundum.

De linea mediali $\alpha\beta$, detrahatur medialis $\beta\gamma$ potentia tantum commensurabilis toti $\alpha\beta$, cum tota uerò $\alpha\beta$ continens superficiem medialem, nempe parallelogrammum ex $\alpha\beta$, $\beta\gamma$: dico reliquã $\alpha\gamma$ esse irrationalẽ. Vocetur autem



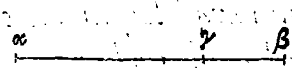
tem residuũ mediale secundũ. proponatur linea rationalis δι, & secundum illam quadratis linearum αβ, βγ æquale applicetur parallelogrammum δε, faciẽs alterum latus δη. Ei uerò quod fit bis ex αβ, βγ æquale secũdum eandem lineam δι, applicetur parallelogrammum δθ faciens alterum latus δζ. parallelogrammum δθ est minus parallelogrãmo δε; quia & quadrata linearum αβ, βγ sunt maiora eo quod fit bis ex αβ, βγ tanto, quantũ est quadratum lineæ αγ per 7. 2. Ergo & residuum nempe parallelogrammũ ζε, erit æquale quadrato lineæ αγ. Et quoniam quadrata linearum αβ, βγ sunt commensurabilia & medialia: ergo compositum ex ipsis parallelogrammum δε, erit utrique quadrato commẽsurabile per 16: ergo & parallelogrammum δε, erit etiam mediale per corollarium 24 theorematis. ergo per 23 linea δη erit rationalis longitudine incõmensurabilis lineæ δι. Rursus cum id quod fit ex αβ, βγ sit mediale: etiam id quod fit bis ex iisdem αβ, βγ erit mediale. ergo & illi æquale parallelogrammũ δθ erit mediale. Ergo & linea δζ erit rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ δι. Et cum linea αβ sit longitudine incommensurabilis lineæ βγ, ergo quadratum lineæ αβ erit incommẽsurabile parallelogrammo ex αβ, βγ per 1. 6 & 10 huius. Sed quadrato lineæ αβ sunt commensurabilia quadrata linearũ αβ, βγ, parallelogrammo uero ex αβ, βγ est commensurabile id, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo quadra-



ta linearum α ϐ, β γ, hoc est parallelogrammum δ ι est incommēsurabile ei, quod fit bis ex α ϐ, β γ, hoc est parallelogrāmo δ θ: sed sicut parallelogrammum δ ι ad parallelogrammum δ θ, ita linea δ κ ad lineam δ ζ. Ergo linea δ κ, est longitudine incōmēsurabilis lineæ δ ζ: sunt autē ambæ rationales. Ergo linea ζ κ est residuum per 73. sed linea δ ι est rationalis: parallelogrammum uerò contentum ex linea rationali & irrationali est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demonstrationis 38. Ergo parallelogrammum ζ ι, est irrationale: ergo & linea α γ, quæ illud parallelogrāmum potest est irrationalis. Vocatur autem residuū mediale secundum: estq; hoc residuum mediale secundum, reliqua portio maioris nominis ipsius bimedialis secundi post detractionem minoris nominis de maiori.

Septuagesimumsextum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti, compositum autē ex quadratis totius lineæ & lineæ detractæ sit rationale: parallelogrammum uerò ex iisdem contentum sit mediale, reliqua linea erit irrationalis: uocetur autem linea minor.

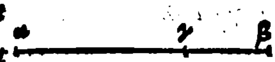


De linea recta α β, detrahatur recta β γ potentia incommensurabilis toti α β, cuius totius inquam α β quadratum cum quadrato lineæ ϐ γ sit rationale. Contentū uero ex α β, *βγ sit mediale, dico residuam lineam αγ esse irrationalem, quæ uocetur minor. Cum enim compositũ ex quadratis linearum αβ, βγ sit rationale, id uerò quod fit bis ex αβ, βγ sit mediale: ergo quadrata linearum αβ, βγ sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex αβ, βγ. ergo & reliquo quadrato scilicet lineæ αγ, erunt incommensurabilia quadrata linearum αβ, βγ, sicut dictum est in 73. sed quadrata linearum αβ, βγ sunt rationalia. ergo quadratum lineæ αγ erit irrationale, & linea αγ irrationalis: uocetur autẽ linea minor, ideo sic dicta, quia est reliqua portio maioris nominis lineæ maioris post detractionem minoris nominis de maiori.*

Septuagesimumseptimum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractę sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem contentum sit rationale, reliqua linea est irrationalis: uocetur autẽ linea faciẽs cum superficie rationali totam superficiem medialem totum mediale.

De linea recta αβ, detrahatur recta βγ potentia incommẽsurabilis toti lineæ αβ, ex quadratis quarum scilicet αγ, βγ compositum sit mediale: parallelogrammum uero ex eisdem sit rationale. dico reliquã lineam αγ esse irrationalẽ, quæ uocetur linea faciens cum superficie rationali totam superficiem medialem. Cum enim compositũ ex quadratis linearũ αβ, βγ sit mediale, id uerò quod fit bis ex αβ,

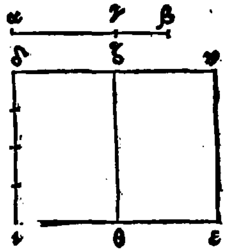


βγ sit rationale. Ergo compositum ex quadratis linearum αβ, βγ erit incommēsurabile ei quod fit bis ex αβ, βγ. Ergo & reliquum nempe αγ erit incommensurabile ei, quod fit bis ex αβ, βγ per 17. Est autem id quod fit bis ex αβ, βγ rationale, ergo quadratum lineæ αγ erit irrationale, & linea αγ irrationalis. Vocetur autem faciēs cum superficie rationali totam medialem: ideo sic dicta, quia compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale, & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ, βγ existens & ipsum rationale. Nam quadrata linearū αβ, βγ sunt æqualia ei quod fit bis ex αβ, βγ, & quadrato lineæ αγ per 7.2. aut ideo sic dicta est, quia quadratum eius iunctum cum superficie rationali facit totā superficiem medialem, ut intelligetur ex theoremate 109. In hac autem linea denominanda recessimus à uoce recepta Campano, qui hāc lineā uocauit, iunctam cum rationali componentem totum mediale: idem faciemus in proximo theoremate, quia denominationes illæ Campani non satis conuenientes rebus ipsis esse uisæ sunt.

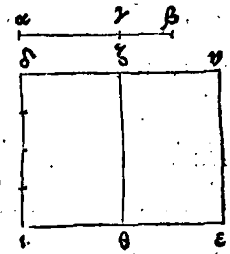
Septuagesimumoctauum Theorema.

Si de linea recta detrahatur recta potentia incommensurabilis toti lineæ, compositum autem ex quadratis totius & lineæ detractæ sit mediale, parallelogrammum uerò ex eisdem sit etiam mediale: præterea sint quadrata ipsarum incommēsurabilia parallelogrammo ex iisdem, reliqua linea est irrationalis: uocetur autem linea faciens cum

cum superficie mediali totam superficiem medialem.

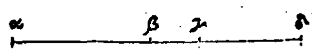


De *linea α β detrahatur recta β γ potentia incõmensurabilis toti α β ex quadratis, quarum compositũ sit mediale: parallelogrammũ quoque ex eisdem sit mediale. præterea compositũ ex quadratis linearum α β, β γ sit incommensurabile parallelogrammo ex α β, β γ. dico lineã reliquam α γ esse irrationalem. Vocetur autem faciens cum mediali superficie totam medialẽ. Proponatur linea rationalis δ ι, secũdum quam quadratis linearum α β, β γ, æquale applicetur parallelogrammũ δ ε faciẽs alterum latus δ η: ei uerò quod fit bis ex α β, β γ æquale applicetur δ θ faciens alterum latus δ ζ, residuum ergo ζ ε erit æquale residuo, nempe quadrato lineæ α γ. quare linea α γ potest parallelogrammum ζ ε. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α β, β γ, hoc est δ ε est mediale, ergo linea δ η est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δ ι. Rursus cum id quod fit bis ex α β, β γ, hoc est δ θ sit mediale: ergo & linea δ ζ erit rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ δ ι. Et quoniam quadrata linearum α β, β γ sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α β, β γ: ergo incommensurabile etiam erit δ ε ipsi δ θ. Ergo linea δ η erit incommensurabilis lineæ δ ζ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ δ η, δ ζ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo ζ η erit residuum per 73. Sed linea ζ θ est rationalis, quia æqualis rationali δ ι: parallelogrammum* *uerò cõtentum ex linea rationali & irrationali, nẽpe ζι, est irrationale, per ea quæ scripta sunt in fine demõstrationis 38. ergo linea αγ, quæ illud potest, erit irrationalis: uocetur autẽ faciens cum superficie mediali totam medialem.* Ideo *sic dicta quia compositum ex quadratis linearum αβ, βγ est mediale & totum quiddam, cuius pars est id quod fit ex αβ, βγ, existens & ipsum mediale: huius quoq; denominationis rationem aliam intelliges ex theoremate* 110. *Hîc non est alienum inserere lemma quoddã positum à* Campano *ante propositi.* 74. *Illud tantum in eo emẽdandum est, ut excessus linearũ intelligatur secundum* Arithmeticam *proportionalitatem, nõ autem secundũ geometricã: itaque loco numeri* 4. *qui adscribitur minime lineæ, reponatur binarius.*



Septuagesimumnonum Theorema.

Residuo unica tantũ linea recta coniungitur rationalis, potentia tantũ commensurabilis toti lineę.



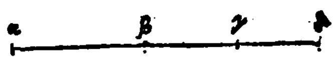
Sit residuum linea αβ, cõiungatúrque ipsi linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Nego *lineæ αβ aliam posse coniungi huiusmodi, ut sit rationalis potentia tantum commẽsurabilis ipsi toti αγ. Si dicas aliam cõiungi posse, huiusmodi sit illa linea βδ: ergo lineæ αδ, δβ sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Et *quoniam quantò differunt quadrata linearum αδ, δβ ab eo quod fit bis*

ex

ex α δ, δ ϛ, (differunt autem illa ab isto quadrato lineæ α β per 7. 2.) tantò differunt & quadrata linearũ α γ, γ ϛ, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β (differunt autẽ illa quoque ab isto similiter eodem quadrato lineæ α β, per 7, 2) Ergo & *permutate per lemma positũ à* Campano *ante 74. quantò differunt quadrata linearũ α δ, δ ϛ, à quadratis linearum α γ, γ β, tantò differt id quod fit bis ex α δ, δ ϛ, ab eo quod fit bis ex α γ, γ β: sed cõpositũ ex quadratis linearum α δ, δ β, & compositum ex quadratis linearum α γ, β γ cum sint ambo rationalia differũt inter se superficie rationali, per lemma positũ à nobis ante* 42. *Ergo & id quod fit bis ex α δ, δ β differet ab eo quod bis ex α γ, γ β superficie rationali.* Sed *id quod fit bis ex α δ, δ ϛ est mediale, quia est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex α δ, δ β, quod ipsum est mediale per* 22. Item *eadem ratione id quod fit bis ex α γ, γ ϛ est mediale: ergo mediale differet à mediali superficie rationali, quod est impoßibile per* 27. Ergo *lineæ α ϛ alia linea coniungi nõ potest, quàm linea ϛ γ potentia tantũ commensurabilis toti: ergo residuo unica tantum linea &c.* Deinceps *per hanc uocem lineæ coniunctæ seu conueniẽter iunctæ intellige eam, quam* Euclides *uocat* προσαρμόζουσαν: *quæ scilicet iuncta cum residuo, restituit totam lineã, unde ea ablata remanent singula residua.*

Octuagesimum Theorema.

Residuo mediali primo unica tantum linea coniungitur medialis, potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens rationale.

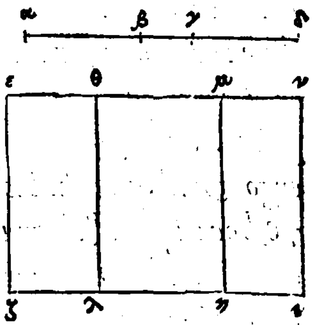
Sit residuũ mediale primũ αβ,  *cui coniungatur linea βγ huiusmodi, ut lineæ αγ, βγ sint mediales potentia tantum commensurabiles: quæ scilicet βγ cum tota αγ contineat rationale, nempe id quod fit bis ex αγ, βγ.* Nego *aliam lineã huiusmodi posse cõiungi lineæ αβ.* Nam *si fieri posse dicas, sit illa linea βδ. ergo lineæ αδ, δβ sunt mediales potentia tantum commensurabiles, rationale continentes id quod fit ex αδ, δβ.* Et *quoniã quanto excedit cõpositum ex quadratis linearũ αδ, δβ id quod fit bis ex αδ, δβ tanto excedit compositum ex quadratis linearũ αγ, γβ id quod fit bis ex αγ, γβ. (utrobique enim excedunt quadrato lineæ αβ) ergo & permutate (sicut dictum est in proximo theoremate) quãto compositum ex quadratis linearum αδ, δβ excedit compositũ ex quadratis linearum αγ, γβ, tanto excedit id quod fit bis ex αδ, δβ id quod fit bis ex αγ, γβ. sed id quod fit bis ex αδ, δβ est rationale: item id quod fit bis ex αγ, γβ est rationale. ergo id quod fit bis ex αδ, δβ excedit id quod fit bis ex αγ, γβ superficie rationali per lemma positũ à nobis ante 42.* Ergo *& compositum ex quadratis linearũ αδ, δβ, quod est mediale, sicut dictum est in 75. excedit compositum ex quadratis linearum αγ, γβ, quod ipsum est etiam mediale. (quia illæ quatuor lineæ positæ sunt mediales) superficie rationali, quod est impossibile per 27.* Ergo *residuo mediali primo &c.*

Octuagesimumprimum Theorema.

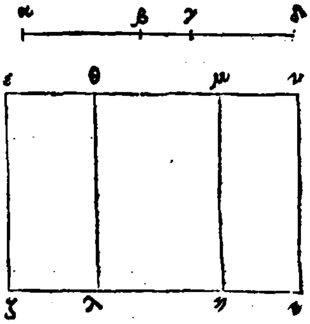
Residuo mediali secundo unica tantum coniungitur

tur

tur medialis potentia tantum commensurabilis toti, ipsa cum tota continens mediale.



Sit residuũ mediale secũdum $\alpha\beta$, *cui coniungatur linea* $\beta\gamma$ *huiusmodi, ut lineæ* $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ *sint mediales potentia tãtum commensurabiles mediale continẽtes, id scilicet quod fit ex* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. *Nego aliam lineam huiusmodi posse coniungi lineæ* $\alpha\beta$: *nam si fieri potest, cõiungatur linea* $\beta\delta$, *ergo lineæ* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *sunt mediales potentia tantum cõmensurabiles, mediale continentes id, quod fit ex* $\alpha\delta$, $\beta\delta$. *Proponatur linea rationalis* $\epsilon\zeta$, *secundum quam quadratis linearum* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *æquale applicetur parallelogrammum* $\epsilon\kappa$, *faciẽs alterum latus* $\epsilon\mu$: *ei uero quod fit bis ex* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *æquale auferatur parallelogrammum* $\theta\kappa$, *faciens alterum latus lineam* $\theta\mu$. *ergo residuũ* $\epsilon\lambda$ *est æquale quadrato lineæ* $\alpha\beta$, *per* 7.2. *quare linea* $\alpha\beta$ *potest parallelogrammum* $\epsilon\lambda$. *Rursus secundum eandem lineam* $\epsilon\zeta$, *quadratis linearũ* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *applicetur æquale parallelogrammũ* $\epsilon\iota$, *faciens alterũ latus* $\epsilon\nu$. *Sed quadrata linearum* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *sunt æqualia ei, quod fit bis ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *& quadrato lineæ* $\alpha\beta$. *ergo parallelogrãmum* $\epsilon\iota$ *est æquale ei, quod fit bis ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$, *& quadrato lineæ* $\alpha\beta$. *Est autem* $\epsilon\lambda$ *æquale quadrato lineæ* $\alpha\beta$. *ergo id quod fit bis ex* $\alpha\delta$, $\delta\beta$ *est æquale parallelogrammo* $\theta\iota$: *& quoniam lineæ* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ *sunt mediales, ergo & quadrata ipsarum sunt medialia, & sunt æqualia parallelogrãmo* $\epsilon\kappa$. *ergo* $\epsilon\kappa$



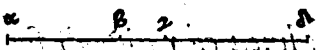
erit etiã mediale per ea quæ dicta sunt in 75. Ergo per 23 linea ε μ erit rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ Rursus quoniam parallelogrãmũ ex α γ, γ β est mediale, ergo & id quod fit bis ex α γ, γ β, hoc est parallelogrammum θ κ, erit etiã mediale: ergo linea θ μ est rationalis, longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ. Et quoniã lineæ α γ, γ β sunt potentia tantum cõmensurabiles, ergo ipsæ sunt longitudine incommẽsurabiles. Sed sicut linea α γ ad lineam γ β, ita quadratum lineæ α γ ad parallelogrammum ex α γ, γ β. Ergo quadratum lineæ α γ erit incommensurabile parallelogrammo ex α γ, γ β. sed quadrato lineæ α γ sunt commẽsurabilia quadrata linearum α γ, γ β: parallelogrammo uerò ex α γ, γ β est commensurabile id quod fit bis ex α γ, γ β: ergo quadrata linearũ α γ, γ β sunt incommensurabilia ei quod fit bis ex α γ, γ β. Est autẽ quadratis linearum α γ, γ β æquale parallelogrãmum ε κ: ei uero quod fit bis ex α γ, γ β est æquale parallelogrammũ θ κ. Ergo parallelogrammum ε κ est incommensurabile parallelogrammo θ κ, ergo & linea ε μ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ μ: sunt autẽ ambæ rationales, ergo sunt rationales potẽtia tantum cõmensurabiles. Ergo linea ε θ est residuum, eique coniuncta linea θ μ rationalis, est toti lineæ ε μ rationali commensurabilis potentia tantum. Similiter etiam probabimus cõiungi lineæ ε θ, lineam θ ν existentem & ipsam

rationalem

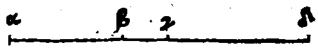
rationalem potentia tantum commensurabilem toti ε γ, repetendo inquã processum demonstrationis ab illis uerbis. Et quoniam lineæ α γ, γ β sunt mediales: & loco linearum α γ, γ β reponendo lineas α δ, δ β, & cætera similiter. ergo residuo alia atque alia linea coniungitur rationalis potentia tantum commensurabilis toti, quod est impossibile per 79. Ergo residuo mediali secundo &c.

Octuagesimumsecundum Theorema.

Lineæ minori unica tantum recta coniungitur, potentia incommensurabilis toti, faciens cum tota compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uerò parallelogrãmũ, quod ex ipsis fit, mediale.



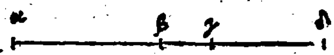
Sit linea minor α β, sitq; illi cõiuncta linea β γ, qualis ponitur in theoremate. ergo lineæ α γ, γ β sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarũ rationale. Id uero quod fit ex ipsis mediale, nego lineæ α β aliam lineam posse coniungi, quæ idem efficiat. nam si fieri potest, sit ei coniuncta linea β δ: ergo lineæ α δ, δ β sunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum rationale: id uero quod fit ex ipsis mediale. Et quoniam quãto compositum ex quadratis ipsarum excedit id quod fit bis ex ipsis, tanto excedit compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β, id quod fit bis ex ipsis α γ, γ β. Et permutatæ sicut in 79 theoremate quanto differt compositum ex quadratis linearum α δ, δ β compositum ex quadratis linearũ α γ, γ β, tanto differt id quod fit bis ex α δ, δ β, id quod fit bis ex α γ, γ β: sed *compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β, superficie rationali, quia utrunque compositum est rationale. ergo id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ γ β superficie rationali, cũ tamẽ utrunque sit mediale, quod est impossibile. ergo lineæ minori &c.*



Octuagesimumtertium Theorema.

Lineæ facienti cum superficie rationali totã superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea recta potentia incõmensurabilis toti: faciens autem cum tota compositũ ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit ex ipsis rationale.

Sit linea cũ rationali superficie faciens totam superficiem medialem α β, eiq; coniuncta sit β γ: ergo lineæ α γ, γ β, sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Nego lineæ α β aliam lineam posse coniungi quæ idem efficiat: nam si possibile est, sit illa cõiuncta β δ. ergo lineæ α δ, δ β sunt lineæ potẽtia incommensurabiles, faciẽtes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uerò quod fit ex ipsis rationale. Cum igitur compositum ex quadratis linearum α δ, δ β tanto excedat compositũ ex quadratis linearum α γ, γ β, quanto id quod fit bis ex α δ, δ β excedit, quod fit bis ex α γ, γ β, sicut dictum est in præcedentibus: sed id quod fit bis ex α δ, δ β excedit id, quod fit bis ex α γ, γ β superficie rationali, cum sit utrũq;

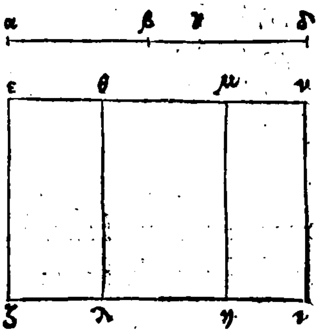


rationale

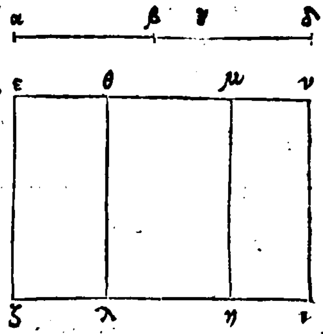
rationale. ergo & compositum ex quadratis linearum α δ, δ β excedit compositum ex quadratis linearum α γ, γ β superficie rationali, cum tamen utrunque sit mediale, quod est impossibile. Non igitur alia linea cõiungi potest lineæ α β, quàm linea β γ, quæ idẽ efficiat. ergo lineæ facienti cum rationali &c.

Octuagesimumquartum Theorema.

Lineæ cum mediali superficie faciẽti totam superficiem medialem, unica tantum coniungitur linea potentia toti incommensurabilis, faciẽs cum tota compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiam mediale: & prçterea faciens compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei, quod fit ex ipsis.



Sit linea cum mediali superficie faciens totã medialem α β, cui cõiungatur linea β γ potẽtia toti incommẽsurabilis, faciantq; ambæ id quod dicitur in theoremate. Nego *lineæ α β aliam lineã cõiungi posse, quæ idem efficiat: nam si possibile est, cõiungatur linea β δ, quæ idẽ efficiat quod linea β γ: proponaturq; linea rationalis ε ζ, secũdum quam quadratis linearum α γ, γ β æquale applicetur parallelogrammum ε ι, faciens alterũ latus ε μ: ei uerò quod fit bis ex α γ, γ β æquale detrahatur parallelogrammũ θ ι, faciens alterum latus θ μ. residuum ergo nempe quadratum li-*



neæ α ϛ eſt æquale parallelogrammo ι λ. ergo linea α β poteſt parallelogrammũ ι λ. Rur*ſus ſecundum eandem lineam ι ζ, quadratis linearum α δ, δ β æquale applicetur parallelogrammum ι ι, faciens alterum latus ι ν: eſt autem quadratum lineæ α β æquale parallelogrãmo ι λ: ergo reſiduũ, nempe id quod ſit bis ex α δ, δ β, eſt æquale parallelogrammo θ ι.* Et *quoniam compoſitum ex quadratis linearum α γ, γ β, hoc eſt ι κ, eſt mediale: ergo linea ι μ eſt rationalis longitudine incommenſurabilis lineæ ι ζ.* Rur*ſus quoniã id quod ſit bis ex α γ, γ ϛ, hoc eſt θ κ, eſt mediale: ergo & linea θ μ eſt rationalis longitudine incõmenſurabilis lineæ ι ζ.* Et *quoniam compoſitum ex quadratis linearũ α γ, γ ϛ, hoc eſt ι κ, eſt incommenſurabile ei quod ſit bis ex α γ, γ β, hoc eſt parallelogrãmo θ κ: ergo & lineæ ι μ, θ μ ſunt longitudine inter ſe incommenſurabiles. ſunt autẽ ambæ rationales, ergo lineæ ι μ, θ μ ſunt rationales potẽtia tantum commẽſurabiles.* Er*go linea ι θ eſt reſiduum per* 73*: coniuncta uerò ei erit linea θ μ.* Si*militer etiam probabimus lineam ι θ eſſe reſiduum coniunctã ei uerò eſſe lineam θ ν, repetendo proceſſum huius demonſtrationis ab illis uerbis.* Et *quoniã cõpoſitũ ex quadratis linearũ α γ &c. ut diximus in theoremate* 81. Er*go reſiduo alia atq; alia linea cõiungitur idẽ efficiẽs, quod eſt impoßibile per* 79. Nõ *ergo lineæ α ϛ alia linea, quã β γ coniungi poteſt ſimilis naturæ, & quæ idem efficiat.*

Definitiones

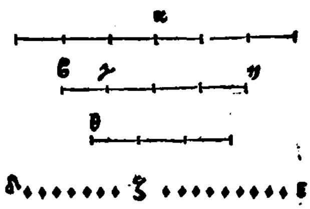
Definitiones tertiæ, siue termini tertij.

Proposita linea rationali & residuo, siquidem tota, nempe composita ex ipso residuo & linea illi cōiuncta, plus potest, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, fueritq; tota longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali: residuum ipsum uocetur residuum primum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, ipsa autem tota plus poßit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, residuum uocetur residuum secundū. Si uero neutra linearum fuerit longitudine commensurabilis rationali, poßit autem ipsa tota plus quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uocetur residuum tertium. Rursus *si tota poßit plus, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incōmensurabilis: & quidem si tota fuerit longitudine commensurabilis ipsi rationali, uocetur residuū quartum. Si uerò coniuncta fuerit longitudine commensurabilis rationali, & tota plus poßit quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum quintum. Si uerò neutra linearum fuerit commensurabilis lōgitudine ipsi rationali, fueritq; tota potentior, quàm coniuncta quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, uocetur residuum sextum.*

Octuagesimumquintum Theorema.

Reperire primum residuum.

Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commēsurabilis linea ϛκ: ergo & linea ϛκ erit rationalis. Sint



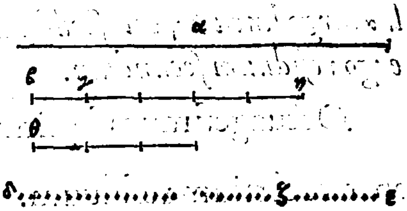
duo numeri quadrati δε, εζ tales, ut excessus maioris δζ, ne sit quadratus numerus, per corollarium primi lemmatis post 29. Neq; ergo numerus εδ ad numerum δζ habebit proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, per 24.8. à destructione consequẽtis. Sitq; sicut numerus εδ ad numerum δζ, ita quadratũ lineæ βη, ad quadratũ lineæ ηγ, per lemma positum post 6. ergo quadratum lineæ βη est commensurabile quadrato lineæ ηγ: sed quadratũ lineæ βη est rationale, ergo & quadratũ lineæ ηγ erit rationale. ergo linea ηγ erit etiam rationalis. Et quoniam numerus εδ ad numerum δζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, neq; etiam quadratũ lineæ βη habebit proportionem ad quadratum lineæ ηγ, quam numerus quadratus ad quadratũ. ergo linea βη erit longitudine incommensurabilis lineæ ηγ per 9. Sunt autem ambæ rationales, ergo sunt lineæ βη, ηγ rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea βγ est residuum: dico præterea eandem esse residuum primũ. Quò enim est maius quadratum lineæ βη quadrato lineæ ηγ (maius autem esse constat, quia quadratum lineæ βη, ad quadratum lineæ ηγ est, sicut numerus εδ, maior, ad numerum δζ ex suppositione:) quò ergo quadratum lineæ βη est maius quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Et quoniam est sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ. per euersam ergo proportionem sicut numerus

δε

δι ad numerum ιζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ θ: sed numerus δι habet proportionẽ ad numerum ζι, quam numerus quadratus ad quadratũ, quia est uterque quadratus, ergo & quadratum lineæ ηβ habebit proportionem ad quadratum lineæ θ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ηβ est longitudine commensurabilis lineæ θ. Potest autẽ linea ηβ plus, quàm linea ηγ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem tota βη longitudine commensurabilis rationali α. ergo linea βγ est residuũ primum. Repertum est igitur residuum primum, quod faciendum erat.

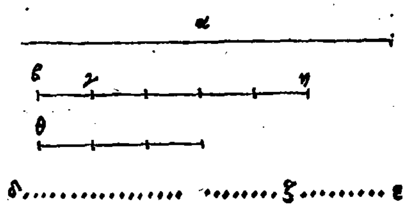
Octuagesimumsextum Theorema.

Reperire secundum residuum.



Proponatur linea rationalis α, cui sit cõmẽsurabilis longitudine linea ηγ: sintq; numeri quadrati duo δι, ιζ, quorum excessus δζ ne sit quadratus: sit etiã sicut numerus δζ ad numerum δι, ita quadratum lineæ ηγ ad quadratum lineæ ηβ, ergo ambo quadrata sunt cõmensurabilia: & quia quadratum lineæ ηγ est rationale, etiam quadratum lineæ βη erit rationale. ergo & linea βη erit rationalis. Et quia quadrata linearũ βη, ηγ non habent proportionem inter se, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo lineæ βη, ηγ erunt longitudine incõmensurabiles, & sunt ambæ rationales. ergo lineæ βη, ηγ erũt

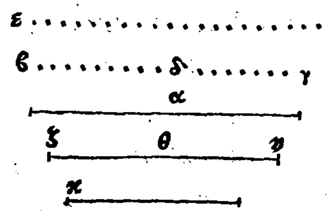
FF



rationales potentia tantum cõmẽsurabiles. ergo linea βγ erit residuũ: dico prȩterea eandẽ esse residuum secundum. quò enim est maius quadratum lineȩ βκ quadrato lineȩ κγ, sit quadratum lineȩ θ. Cum igitur sit sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineȩ κβ ad quadratum lineȩ κγ: per euersam ergo proportionẽ sicut δε ad numerum εζ, ita quadratũ lineȩ βκ ad quadratum lineȩ θ. Est autem uterque numerus δε, εζ quadratus. ergo linea κβ erit longitudine commensurabilis lineȩ θ: potestq́; linea βκ plus, quàm linea κγ quadrato lineȩ sibi longitudine commensurabilis. & est linea coniuncta κγ longitudine commensurabilis lineȩ rationali α. Ergo linea βγ erit secũdum residuum. Repertum *est ergo residuum secundum.*

Octuagesimumseptimum Theorema.

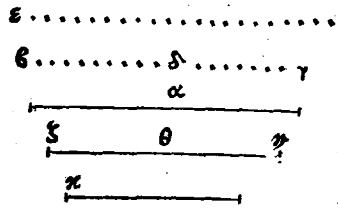
Reperire tertium residuum.



Proponatur *linea rationalis α, & proponãtur numeri tres ε, βγ, γδ proportionẽ non habẽtes inter se, quam numerus quadratus ad quadratum: & numerus βγ ad numerum βδ habeat proportionem, quam numerus quadratus ad quadratũ: sitq́; numerus βγ maior numero γδ: fiatq́; sicut numerus ε ad βγ, ita quadratum lineȩ α ad quadratum lineȩ ζκ.*

sicut

ſicut autem numerus ϛγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ. ergo quadratum lineæ α eſt commēſurabile quadrato lineæ ζκ. Sed quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & quadratum lineæ ζκ erit rationale. ergo linea ζκ erit rationalis: et quoniā numerus ι ad numerum ϛγ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū, neq; ergo quadratum lineæ α, ad quadratū lineæ ζκ habebit proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζκ. Rurſus quoniam eſt ſicut numerus βγ ad γδ, ita quadratū lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ, ergo quadratum lineæ ζκ eſt commēſurabile quadrato lineæ θκ: ſed quadratū lineæ ζκ eſt rationale, ergo & quadratum lineæ θκ erit rationale. ergo linea θκ erit rationalis. Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ non habet proportionē, quā numerus quadratus ad quadratū, neque ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratum lineæ θκ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine incommēſurabilis lineæ θκ: ſunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζκ, θκ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea ζθ erit reſiduum per 73. dico præterea eſſe reſiduū tertium. Cum enim ſit ſicut numerus ι ad numerū βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ: ſicut autē numerus ϛγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ, ad quadratum lineæ θκ. ergo per æquam proportionem ſicut numerus ι ad numerum γδ, ita quadratū lineæ α ad quadratum lineæ θκ: ſed numerus ι ad γδ non habet

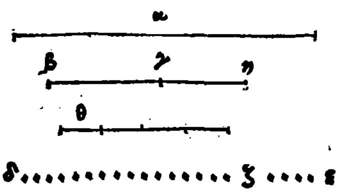


proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum: neq; ergo quadratum lineæ α habebit proportionẽ ad quadratũ lineæ θκ, quã quadratus numerus ad quadratum, ergo linea α erit longitudine incommẽsurabilis lineæ θκ. Neutra ergo *linearum ζκ, θκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quo uero maius est quadratũ lineæ ζκ quadrato lineæ θκ, maius autem esse constat, quia per suppositionem numerus βγ est maior numero γδ, sit quadratum lineæ κ.* Cum *igitur sit sicut numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ θκ: per euersam ergo proportionẽ sicut numerus βγ ad βδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κ: sed βγ ad βδ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo quadratum lineæ ζκ habebit proportionem ad quadratũ lineæ κ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ κ.* Ergo *linea ζκ plus potest, quam linea θκ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine, & neutra linearum ζκ, θκ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, cum tamen utraque linearum ζκ, θκ sit rationalis: ergo linea ζθ erit residuum tertium.* Repertum *est ergo tertium residuum.*

Octuagesimumoctauum Theorema.

Reperire quartum residuum.

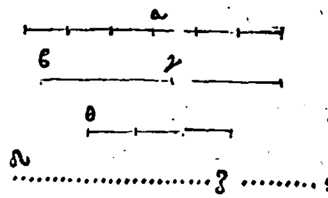
Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commẽsurabilis



surabilis linea βη: ergo linea βη erit rationalis. Proponãtur numeri duo δζ, ζε huiusmodi, ut totus δε ad neutrũ δζ, ζε habeat proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ: sitq́; sicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ ηγ: ergo quadratum lineæ βη erit cõmensurabile quadrato lineæ ηγ. ergo & quadratum lineæ ηγ erit rationale, & linea ηγ rationalis. Et quoniã numerus δε ad numerum εζ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum, ergo linea βη erit longitudine incõmensurabilis lineæ ηγ: sunt autem ambæ rationales. ergo linea βγ est residuum. dico præterea esse residuum quartum: quò enim quadratum lineæ βη est maius quadrato lineæ ηγ, sit quadratum lineæ θ. Cum igitur sit sicut numerus δε ad numerum εζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratũ lineæ ηγ: ergo per euersam proportionem sicut numerus δε ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βη ad quadratum lineæ θ: sed numeri δε, δζ non habent proportionem inter se, quam quadratus ad quadratum: ergo linea βη erit longitudine incommensurabilis lineæ θ. Ergo linea βη plus potest, quàm linea ηγ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: estque tota βη longitudine commensurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit residuum quartũ. Repertum est igitur residuum quartum.

Octuagesimumnonum Theorema.

Reperire quintum residuum.



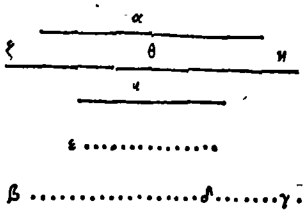
Proponatur linea rationalis α, cui sit longitudine commensurabilis linea γκ, erit ergo linea γκ rationalis. Proponantur numeri duo δζ, ζι tales, ut δι ad neutrum δζ, ζι habeat proportionē, quam numerus quadratus ad quadratū: sitq; sicut numerus ζι ad numerum δι, ita quadratum lineæ γκ ad quadratū lineæ βκ, ergo quadratum lineæ γκ erit commensurabile quadrato lineæ βκ. ergo quadratum lineæ βκ erit rationale, & linea βκ rationalis: sed numeri δι, ιζ nō habent proportionem, quam quadratus ad quadratū, ergo lineæ βκ, κγ. sunt rationales potentia tantum commēsurabiles. ergo linea βγ erit residuū, dico præterea esse residuum quintum: quò enim maius est quadratum lineæ βκ quadrato lineæ κγ, sit quadratū lineæ θ. Cū igitur sit sicut numerus δι ad numerum ιζ, ita quadratū lineæ βκ ad quadratū lineæ κγ, ergo per euersam proportionem, sicut numerus δι ad numerum δζ, ita quadratum lineæ βκ ad quadratum lineæ θ: sed numeri δι, ιζ non habet proportionem inter se, quā numerus quadratus ad quadratū, ergo linea βκ erit longitudine incommensurabilis lineæ θ. ergo linea βκ plus potest linea γκ, quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis: estque coniuncta linea γκ longitudine commensurabilis lineæ rationali α. ergo linea βγ erit residuum quintum. Repertum est ergo residuum quintum.

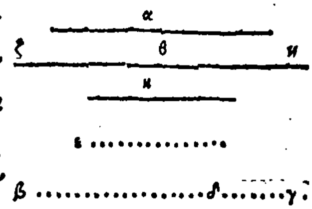
Nonagesimum Theorema.

Reperire sextum residuum.

Sit

Sit linea rationalis α, & numeri tres ε, βγ, γδ proportionem non habentes inter se, quã numerus quadratus ad quadratum numerum: numerus autem βγ ne habeat proportionem ad numerum βδ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: sitque numerus βγ maior numero γδ, fiatq; sicut numerus ε ad numerum βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ: sicut autem numerus βγ ad numerum γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ. Cum igitur sit sicut ε ad βγ, ita quadratum lineæ α ad quadratum lineæ ζκ, ergo quadratum lineæ α est commẽsurabile quadrato lineæ ζκ. ergo quadratũ lineæ ζκ erit rationale, & linea ζκ rationalis. Et quoniam numerus ε ad βγ non habet proportionem, quã quadratus numerus ad quadratũ, ergo linea α erit longitudine incõmensurabilis lineæ ζκ. Rursus quoniam est sicut numerus βγ ad numerũ γδ, ita quadratum lineæ ζκ ad quadratum lineæ κθ, ergo quadratum lineæ ζκ erit commensurabile quadrato lineæ κθ: sed quadratum lineæ ζκ est rationale; ergo & quadratũ lineæ κθ erit rationale. ergo linea κθ erit rationalis. Et quoniam numerus βγ ad numerum γδ nõ habet proportionẽ, quam numerus quadratus ad quadratũ, ergo linea ζκ erit longitudine incommensurabilis lineæ κθ: sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζκ, κθ sunt rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea ζθ erit residuum: dico præterea esse residuum sextum. Cũ enim sit sicut numerus ε ad βγ, ita quadra-





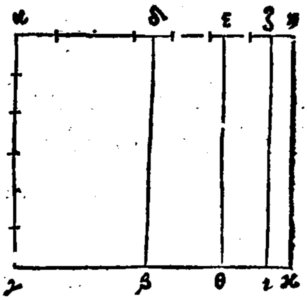
tum lineæ α, ad quadratum lineæ ζ η: sicut autem numerus β γ ad numerũ γ δ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratũ lineæ η θ. Per æquam igitur proportionẽ sicut numerus ι ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ α, ad quadratum lineæ η θ: sed numerus ι nõ habet proportionem ad numerũ γ δ, quam quadratus numerus ad quadratum. ergo linea α erit longitudine incommensurabilis lineæ η θ, & neutra linearum ζ η, η θ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α: quò igitur maius est quadratum lineæ ζ η, quadrato lineæ η θ, sit quadratum lineæ κ. Cum igitur sit sicut numerus ε γ ad numerum γ δ, ita quadratum lineæ ζ η ad quadratum lineæ η θ. ergo per euersam proportionem sicut numerus ε γ ad numerum ε δ, ita quadratũ lineæ ζ η ad quadratum lineæ κ: sed numerus ε γ ad numerum β δ non habet proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. ergo linea ζ η erit longitudine incommensurabilis lineæ κ. Ergo linea ζ η plus potest quã linea η θ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & neutra linearum ζ η, η θ est longitudine commensurabilis lineæ rationali α, ergo linea ζ θ est residuum sextum. Repertum est ergo residuum sextum. *Est autem & facilior quædam ratio reperiendi cuiusque residui, ex illis sex antè dictis, hoc modo.* Propositũ sit reperire residuũ primum. Proponatur binomiũ primum linea α γ, cuius maius nomẽ sit α ε: & lineæ ε γ æqualis sit linea β δ. ergo lineæ α β, β γ, hoc est lineæ α ε, β δ sunt rationales po-

tentia

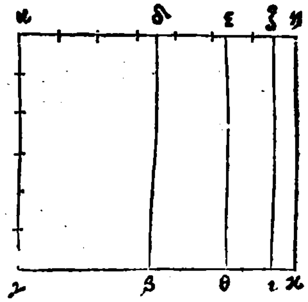
tentia tantum commẽſurabiles. & linea α β plus poteſt, quàm linea β γ, hoc eſt quàm linea β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & linea α β eſt longitudine commenſurabilis lineæ propoſitæ rationali, quia poſitum eſt lineam α γ eſſe binomiũ primum. ergo linea α δ eſt reſiduum primum. Simili ratione ſecundum, tertium, quartum, quintum & ſextum reſiduum reperire licet, ſi propoſuerimus ſingula binomia eiuſdẽ ordinis.

Nonageſimumprimum Theorema.

Si ſuperficies contineatur ex linea rationali & reſiduo primo, linea quæ illam ſuperficiem poteſt, eſt reſiduum.

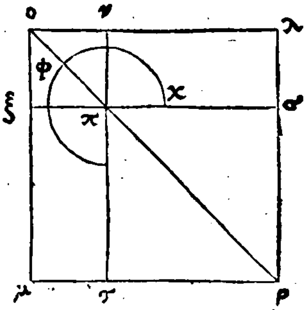


Cõtineatur ſuperficies rectãgula α β, ex linea rationali α γ, & reſiduo primo α δ. dico lineã, quæ poſſit ſuperficiem illam, eſſe reſiduum. Cum enim linea α δ ſit reſiduũ primum, ſit illi coniuncta linea δ κ, (cõiunctam intellige, qualem dixi in fine theorematis 79.) ergo lineæ α κ, κ δ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: & tota α κ eſt longitudine commenſurabilis rationali lineæ α γ, & linea α κ plus poteſt, quàm linea κ δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur linea κ δ in partes duas æquales in puncto ι, & quadrato lineæ ι κ, æquale ſecundum lineam α κ applicetur parallelogrammum, deficiẽs figura quadrata: ſitq́; illud parallelogrammum ex α ζ, ζ κ. ergo linea α ζ eſt

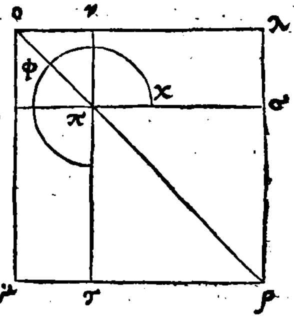


longitudine cõmensurabilis lineæ ζη per 18. & per puncta ε, ζ, η ipsi lineæ αγ parallelæ ducantur εθ, ζι, ηκ. Et quoniam linea αζ est longitudine cõmensurabilis lineæ ζη, ergo & tota linea αη utriq; ex αζ, ζη est longitudine commensurabilis per 16. sed linea αη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ. ergo utraque linearum αζ, ζη est longitudine commẽsurabilis lineæ αγ: sed linea αγ est rationalis, ergo utraque αζ, ζη est etiam rationalis: quare & utrunque parallelogrammum αι, ζκ est rationale per 20. Et quoniam linea δε est longitudine commensurabilis lineæ εη, ergo & linea δη est longitudine commẽsurabilis utrique δε, εη: sed linea δη est rationalis, ergo utraque δε, εη est rationalis: sed eadem linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αγ per definitionem residui primi uel per 13 aut 14 huius. Quia linea δη est longitudine incommensurabilis lineæ αη, quæ linea αη est longitudine commensurabilis eidem lineæ αγ. ergo utraque linea δε, εη est rationalis & longitudine incommẽsurabilis lineæ αγ. Ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ est mediale per 22. Sit parallelogrammo αι æquale quadratum λμ: parallelogrammo uero ζκ sit æquale quadratum νξ, detractum ex quadrato λμ, habens cum illo communem angulum λομ. Quod ut fiat reperiatur media proportionalis inter lineas ζι, ζη: nam quadratum mediæ proportionalis erit æquale parallelogrammo ex ζι, ζη: porro de

linea



linea λ ο sumatur linea æqualis lineæ mediæ proportionali modo repertæ, & describatur eius quadratũ. Sunt ergo ambo quadrata λ μ, ν ξ circa eandem diametrũ per 26.6: sit eorũ diameter linea ο ρ, & describatur figura qualis hic uidetur. Cum igitur sit parallelogrammũ ex α ζ, ζ κ æquale quadrato lineæ ι κ. est igitur sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita linea ι κ ad lineam ζ κ per 17.6: sed sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammum ζ κ Ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ parallelogrammum ι κ est mediũ proportionale: sed & quadratorũ λ μ, ν ξ parallelogrammum μ ν, est medium proportionale per lemma positum post 53. Est autem parallelogrammo α ι æquale quadratum λ μ: parallelogrãmo uero ζ κ est æquale quadratum ν ξ. ergo parallelogrãmum μ ν est æquale parallelogrammo ι κ per lemma positum à nobis ante 54. Sed parallelogrammum ι κ est æquale parallelogrammo δ θ per 1.6: parallelogrammũ uero μ ν est æquale parallelogrãmo λ ξ per 43.1. Ergo parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, qui gnomo constat ex illis parallelogrãmis. per quæ uides in figura maiorem semicirculo portionem pertransire, & præterea quadrato ν ξ. Est autem & parallelogrammũ α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ: & modo conclusum est parallelogrammũ δ κ esse æquale gnomoni υ φ χ, & præ-

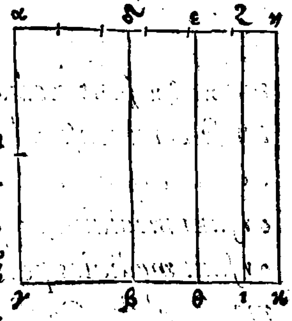


terea quadrato, υ ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α ϛ, erit æquale quadrato σ τ, quod est quadratum lineæ λ υ. ergo quadratũ lineæ λ υ est æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ υ potest illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ υ esse residuum. Cum enim utrunque parallelogrammũ α ι, ζ κ sit rationale, ut supra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, υ ξ, hoc est, quadrata linearum λ ο, ο υ erunt rationalia, & lineæ ipsæ λ ο, ο υ, rationales. Rursus quoniam parallelogrammum δ θ, hoc est, λ ξ est mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato υ ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ο υ: sunt autem ambæ rationales, sunt ergo rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea λ υ est residuum: potest autẽ parallelogrammum α ϛ. ergo si superficies cõtineatur &c. linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

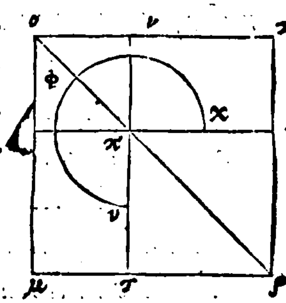
Nonagesimumsecundum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo secundo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale primum.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo secundo α δ. dico lineam quæ potest superficiem α β esse eam, quæ dicitur residuũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ. ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales



tionales potentia tantum cõmensurabiles: & linea coniuncta δ κ, est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali α γ: linea uerò α κ plus potest quã linea δ κ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur linea δ κ bifariã & æqualiter in pũcto ε, & secũdum lineã α κ applicetur quartæ parti quadrati lineæ δ κ, hoc est, quadrato lineæ ε κ æquale parallelogrammũ ex α ζ, ζ κ, deficiens specie quadrata. ergo per 18 linea α ζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζ κ: & per puncta ε, ζ, κ ipsi lineæ α γ ducantur parallelæ ε θ, ζ ι, κ κ: & quoniam linea α ζ est longitudine commẽsurabilis lineæ ζ κ, ergo tota linea α κ est utrique α ζ, ζ κ longitudine cõmensurabilis. Est autem linea α κ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ α γ. ergo & utraque α ζ, ζ κ est rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ α γ. ergo utrunque parallelogrammum α ι, ζ κ est mediale per 22. Rursus cum linea δ ε sit commensurabilis longitudine lineæ ε κ, ergo & δ κ est utrique δ ε, ε κ longitudine commensurabilis: sed linea δ κ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali α γ, ergo utraque δ ε, ε κ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ α γ. ergo utrunque parallelogrammum δ θ, ε κ est rationale per 20. Describatur parallelogrammo α ι æquale quadratũ λ μ: parallelogrammo uero ζ κ, æquale sit quadratũ ν ξ, sicut in præcedenti theoremate, quadrata λ μ, ν ξ erunt circa eandem diametrum: sit diameter ο ϱ, & describa-



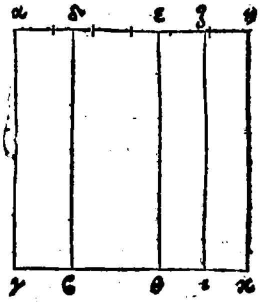
tur figura sicut modo dictũ est. Quoniam ergo parallelogramma α ι, ζ κ *sunt medialia & inter se commensurabilia, & illis æqualia quadrata linearũ* λ ο, ο ν *sunt medialia, ergo lineæ* λ ο, ο ν *sunt mediales potentia commensurabiles. Constat autem potentia commensurabiles esse lineas* λ ο, ο ν, *quia earum quadrata sunt commẽsurabilia: commẽsurabilia sunt porro quadrata illa, scilicet linearum* λ ο, ο ν, *quia sunt æqualia parallelogrammis,* α ι, ζ κ, *quæ sunt cõmensurabilia: cõmẽsurabilia porro esse illa parallelogrãma* α ι, ζ κ *constat eo, quod modo probatum est, lineas* α ζ, ζ η *esse longitudine commensurabiles.* Ergo *per* 1. 6 & 10 *huius parallelogrãma* α ι, ζ κ *sunt commensurabilia. ergo modo probatum est uia resolutionis lineas* λ ο, ο ν, *esse potentia cõmensurabiles.* Et *quoniam parallelogrammum ex* α ζ, ζ η *est æquale quadrato lineæ* ε η. *est ergo sicut linea* α ζ *ad lineã* ε η, *ita linea* ε η *ad lineam* ζ η: *sed sicut linea* α ζ *ad lineam* ε η, *ita parallelogrammũ* α ι *ad parallelogrammũ* ε κ: *sicut autem linea* ε η *ad lineam* ζ η, *ita parallelogrammũ* ε κ *ad parallelogrammum* ζ κ. *ergo parallelogrammorum* α ι, ζ κ *medium proportionale est parallelogrammũ* ε κ. Est *etiam quadratorum* λ μ, ν ξ *medium proportionale parallelogrammum* μ ν: & *est æquale parallelogrammũ* α ι *quadrato* λ μ: *parallelogrammum uero* ζ κ *est æquale quadrato* ν ξ. Ergo μ ν *erit æquale parallelogrãmo* ε κ: *sed* ε κ *est æquale parallelogrammo* δ θ: *parallelogrammum*

mum uero λ ξ est æquale parallelogrammo μ ν. Totũ *ergo parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ α β, est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν. Ergo linea λ ν potest superficiem α β: dico præterea lineã λ ν esse residuum mediale primum.* Cum *enim parallelogrammum ι κ sit rationale, sitq; æquale parallelogrãmo μ ν, hoc est λ ξ: ergo λ ξ, hoc est parallelogrammum ex λ ο, ο ν erit rationale: sed quadratum ν ξ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum ζ κ modo probatũ est esse mediale.* Ergo *parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ: sed sicut parallelogrammũ λ ξ ad quadratum ν ξ, ita linea λ ο, ad lineam ο ν, per 16. ergo per* 10 *huius, lineæ λ ο, ο ν sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale. Ergo linea λ ν est residuum mediale primum, & potest superficiem α β contentam ex linea rationali & residuo secundo.*

Nonagesimumtertium Theorema.

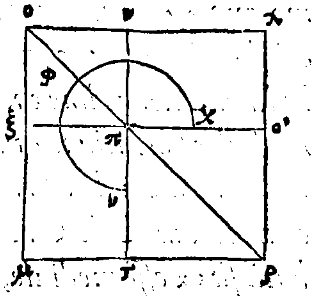
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

Superficies enim α β cõtineatur ex linea rationali α γ, & residuo tertio α δ. dico lineam quæ possit superficiem α β esse residuum mediale secũdum. Sit *linea coniuncta δ κ, ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales potentia tantum com-*

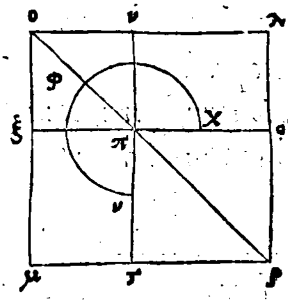


mēſurabiles, & neutra linearum α η, η δ eſt longitudine commenſurabilis lineæ rationali α γ. Tota uero α β plus poteſt, quàm coniuncta η δ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. reliqua fiãt, ut in præcedētibus. ergo lineæ α ζ, ζ η ſunt longitudine commēſurabiles & parallelogrammū α ι, commenſurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniam α ζ, ζ η ſunt longitudine cõmenſurabiles, ergo tota linea α η eſt utrique α ζ, ζ η longitudine commēſurabilis: ſed linea α η eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ α γ, ergo utraque α ζ, ζ η. eſt rationalis & longitudine incommēſurabilis lineæ α γ. ergo utrũque parallelogrammum α ι, ζ κ eſt mediale per 22. Rurſus cum linea δ ι ſit longitudine commenſurabilis lineæ ι η, ergo & tota δ η eſt longitudine cõmenſurabilis utrique δ ι, ι η: ſed linea δ η eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis lineæ α γ, ergo & utraque linearum δ ι, ι η eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis lineæ α γ. ergo & utrũque parallelogrammum δ θ, ι κ eſt mediale: & quoniam lineæ α η, δ η ſunt potentia tantum commenſurabiles, ergo ſunt longitudine incommenſurabiles: ſed linea α η eſt longitudine commenſurabilis lineæ α ζ: linea autem δ η eſt longitudine commenſurabilis lineæ η ι, ergo linea α ζ eſt longitudine incommenſurabilis lineæ ι η. Sicut autem linea α ζ ad lineam ι η, ita parallelogrammum α ι ad parallelogrammum ι κ. ergo α ι eſt incommenſurabile ipſi ι κ. Conſtruatur parallelogrammo α ι

æquale



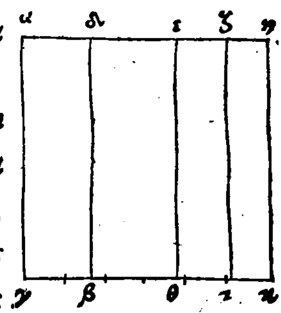
æquale quadratum λ μ: ipsi uero ζ κ æquale quadratũ ν ξ, & describatur figura, ut in præcedentibus. Cum *igitur parallelogrãmũ ex α ζ, ζ κ sit æquale quadrato lineæ ι κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita ι κ ad ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam κ ι, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammũ ζ κ. sicut ergo parallelogrammum α ι ad parallelogrammũ ι κ, ita ι κ ad ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est ι κ.* Sed *quadratorũ λ μ, ν ξ medium proportionale est parallelogrammum μ ν, ergo ι κ est æquale ipsi μ ν. ergo totum parallelogrammum α κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ.* E*st autem ipsum α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ, reliquum ergo nempe α ϛ est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν, ergo λ ν potest superficiem α ϛ: dico præterea lineam λ ν esse residuum mediale secundum.* Cum *enim, sicut probatũ est, parallelogramma α ι, ζ κ sint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν sunt etiã medialia. ergo utraq; linea λ ο, ο ν erit medialis: & quoniam parallelogrammum α ι est commensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν erunt commensurabilia.* Rur*sus cum sit probatum parallelogrammum α ι esse incommẽsurabile parallelogrammo ι κ, ergo incommensurabile erit quadratum λ μ, parallelogrammo μ ν, hoc est, quadratum lineæ λ ο, parallelogrã-*



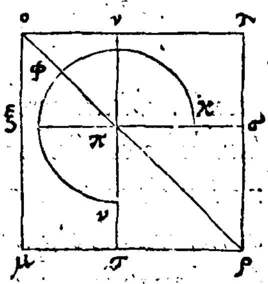
mo ex λο, ον: quare & linea λο erit longitudine incõmensurabilis lineæ ον. ergo lineæ λο, ον sunt mediales potentia tantum commensurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cũ enim probatũ sit ιχ esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο, ον erit mediale. ergo linea λν est residuum mediale secundum, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αϐ est residuum mediale secundum.

Nonagesimumquartum Theorema.

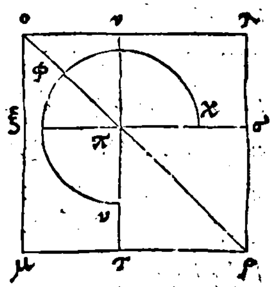
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo quarto, linea quę illam superficiẽ potest, est linea minor.



Superficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo quarto αδ. dico lineam quæ illam superficiem αϐ potest, esse eã, quæ dicitur linea minor: sit enim linea cõiuncta δκ, ergo lineæ ακ, δκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: & linea ακ plus potest, quàm linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, & linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ αγ. Diuidatur linea δκ bifariam & æqualiter in puncto ι: & quadrato lineæ ικ æquale secũdum lineam ακ applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, sitq; illud parallelogrãmum *mũ ex $\alpha\zeta$, $\zeta\kappa$. ergo per 19. linea $\alpha\zeta$ erit longitudine incommensurabilis lineæ $\zeta\kappa$. Ducantur per puncta ι,ζ,κ ipsis lineis $\alpha\gamma$, $\delta\epsilon$, parallelæ $\iota\theta$, $\zeta\iota$, $\kappa\kappa$. Cum igitur linea $\alpha\kappa$ sit rationalis, & longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\gamma$, ergo totum parallelogrammum $\alpha\kappa$ est rationale per 20. Rursus cum linea $\delta\kappa$ sit longitudine incommẽsurabilis lineæ $\alpha\gamma$, (nam si esset linea $\delta\kappa$ longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\gamma$, cum linea $\alpha\kappa$ sit eidem $\alpha\gamma$ longitudine commẽsurabilis, essent etiam lineæ $\alpha\kappa$, $\delta\kappa$ longitudine commensurabiles, cum tamen positæ sint potẽtia tantum commensurabiles) sunt autem ambæ $\alpha\gamma$, $\delta\kappa$ rationales. ergo parallelogrammũ $\delta\kappa$ est mediale. Rursus cum linea $\alpha\zeta$ sit longitudine incõmensurabilis lineæ $\zeta\kappa$, ergo incommensurabile est $\alpha\iota$ ipsi parallelogrammo $\zeta\kappa$. Cõstruatur parallelogrammo $\alpha\iota$ æquale quadratum $\lambda\mu$: ipsi uero $\zeta\kappa$ æquale quadratum $\nu\xi$, ambo quadrata habentia communem angulũ $\lambda o \nu$. ergo quadrata $\lambda\mu$, $\nu\xi$ sunt circa eandem diametrũ: sit diameter $o\varrho$ & describatur figura.*



Cum igitur parallelogrammũ ex $\alpha\zeta$, $\zeta\kappa$ sit æquale quadrato lineæ $\iota\kappa$, erit proportionaliter, sicut linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\iota\kappa$, ita linea $\iota\kappa$ ad lineã $\zeta\kappa$: sed sicut linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\iota\kappa$, ita parallelogrammum $\alpha\iota$ ad parallelogrammum $\iota\kappa$ per 1.6. Sicut autem linea $\iota\kappa$ ad lineã $\zeta\kappa$, ita parallelogrammum $\iota\kappa$ ad parallelogrammum $\zeta\kappa$. ergo parallelogrammorũ $\alpha\iota$, $\zeta\kappa$ medium proportionale est $\iota\kappa$. ergo, sicut dictum est in præcedentibus, parallelo-



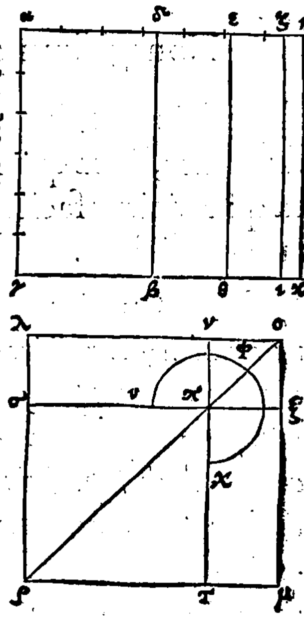
grammum μ ν est æquale parallelogrammo ι χ: sed λ θ est æquale ipsi ι χ, ipsum autem μ ν ipsi λ ξ. ergo parallelogrammum λ χ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. ergo reliquum α β est æquale reliquo quadrato ν τ, hoc est, quadrato lineæ λ ν: dico præterea lineã λ ν esse irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum α χ sit rationale, & sit æquale quadratis linearum λ ο, ο ν, ergo compositum ex quadratis linearũ λ ο, ο ν erit rationale. Rursus *cum λ χ sit mediale, sitq́; æquale ei, quod fit bis ex λ ο, ο ν, ergo id quod fit bis ex λ ο, ο ν est etiam mediale: & quoniam parallelogrammum α ι est incommensurabile parallelogrammo ζ χ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν sunt incõmensurabilia. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt potentia incommẽsurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit semel ex ipsis, erit etiã mediale.* Ergo *linea λ ν est irrationalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiẽ α β.*

Nonagesimumquintum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo quinto, linea quæ illam superficiẽ potest, est ea, quę dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Superficies enim α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo

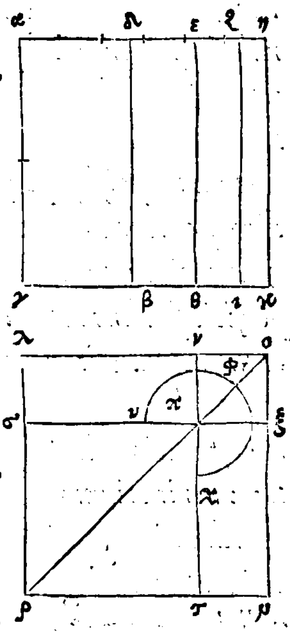
residuo quinto α δ. dico lineam, quæ illam superficiẽ potest, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superficie totam medialem: sit enim lineæ α δ iuncta linea δ κ, quæ erit longitudine cõmensurabilis lineæ rationali α γ, cætera erunt ut in præcedenti. Et quoniam linea α κ est longitudine incommensurabilis lineæ α γ, & sunt ambæ rationales, ergo parallelogrãmũ α κ erit mediale. Rursus quoniã linea δ κ est rationalis, & lõgitudine cõmẽsurabilis lineæ α γ, ergo δ κ erit rationale. Cõstruatur quadratum λ μ æquale parallelogrammo α ι, quadratum uero ν ξ æquale ipsi ζ κ, ut in proximo, similiter demõstrabimus lineam λ ν posse superficiem α β: dico præterea eam esse lineam, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialẽ:



cum enim α κ sit mediale, etiam illis æquale compositum ex quadratis linearum λ ο, ο ν, erit mediale. Rursus quia δ κ est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex λ ο, ο ν erit etiam rationale, & quoniam linea α ζ est longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ η, ergo per 1. 6 & 10 huius. parallelogrammum α ι erit incõmensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & quadratũ lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο ν: ergo lineæ λ ο, ο ν sunt potentia incommensurabiles facientes compositum *ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipsis rationale. ergo reliqua linea λν est irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totã medialem, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αβ est linea, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.*

Nonagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo sexto, linea quæ illam superficiem potest, est ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie totam medialem.

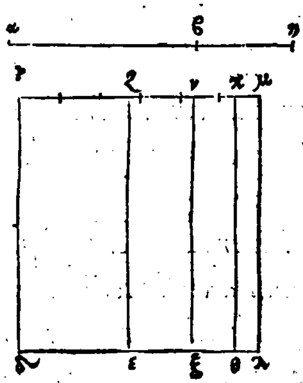


Superficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo sexto αδ. dico lineam quæ potest superficiẽ αβ esse eam, quæ dicitur faciens cum mediali superficie totã medialem. Sit enim lineæ αδ linea coniuncta δη, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus: cum linea αζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζη, ergo & parallelogrammum αι erit incommensurabile parallelogrammo ζκ. Et quoniã lineæ αη, αγ, sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, ergo parallelogrammum ακ erit mediale: simili ratione δκ erit mediale. Cum igitur lineæ αη, ηδ sint potentia tantum commensurabiles, ergo *go ſunt longitudine inter ſe incommenſurabiles: ſed ſicut linea* ακ *ad* κδ*, ita parallelogrammum* ακ *ad* δκ. *ergo* ακ *erit incõmenſurabile ipſi* δκ. *Conſtruatur eadẽ figura, quæ in præcedentibus, ſimiliter probabimus lineam* λν *poſſe ſuperficiẽ* αϐ*: dico præterea eam eſſe, quæ dicitur faciẽs cum ſuperficie mediali totam medialem: nam* ακ *eſt mediale, ergo & illi æquale compoſitũ ex quadratis linearum* λο, ον *erit mediale.* R*urſus quoniã* δκ *eſt mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex* λο, ον *erit mediale.* E*t quoniam* ακ *eſt incommenſurabile ipſi* δκ*, ergo & quadrata linearum* λο, ον *erunt incõmenſurabilia ei, quod fit bis ex* λο, ον*: & cum parallelogrammum* αι *ſit incommenſurabile parallelogrammo* ζκ*, ergo etiam quadratum lineæ* λο *erit incommenſurabile quadrato lineæ* ον*. ergo lineæ* λο, ον *erunt potentia incommenſurabiles, faciẽtes compoſitũ ex quadratis linearum* λο, ον *mediale, & quod fit bis ex ipſis mediale: præterea compoſitum ex quadratis ipſarũ incommenſurabile ei, quod fit bis ex ipſis. ergo linea* λν *eſt irrationalis, quæ dicitur cum mediali ſuperficie faciens totam medialẽ, & poteſt ſuperficiem* αϐ. Ergo *linea potens ſuperficiem* αϐ *eſt ea, quæ dicitur faciens cum ſuperficie mediali totam medialem.*

Nonageſimumſeptimum Theorema.

Quadratum reſidui ſecundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum primũ.

Sit *reſiduum* αϐ*, rationalis uero linea* γδ*: & quadrato lineæ* αϐ *æquale ſecundum lineam* γδ *applicetur paral-*

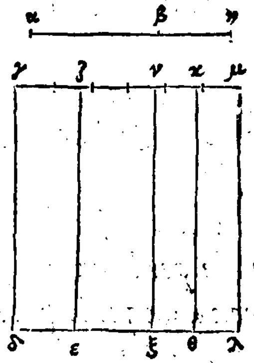


lelogrammum γι faciēs alterū latus γζ, dico lineam γζ esse residuum primum. Sit enim lineæ αβ linea cōueniēter iuncta βκ, quæ & eadem dicitur linea cō iuncta, ut in fine theorematis 79. *ergo lineæ ακ, κβ, sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & quadrato lineæ ακ secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βκ æquale parallelogrāmum κλ: totum ergo γλ est æquale quadratis linearum ακ, κβ: sed parallelogrammum γι est æquale quadrato lineæ αβ, reliquum ergo ζλ est æquale ei, quod fit bis ex ακ, κβ: quia quadrata linearum ακ, κβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex ακ, κβ, & quadrato lineæ αβ per* 72. *Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pūcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrūque ex parallelogrāmis ζξ, νλ est æquale ei. quod fit semel ex ακ, κβ.* Et *quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, quibus quadratis æquale est parallelogrammū γλ, ergo γλ est rationale. ergo linea γμ est rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ.* R*ursus quoniam id quod fit bis ex ακ, κβ est mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ.*Et *quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, id uero quod fit bis ex ακ, κβ mediale, ergo quadrata linearum ακ, κβ sunt incommensurabilia*

bilia ei, quod fit bis ex α κ, κ ϛ. Est autẽ quadratis linearũ α κ, κ ϛ æquale parallelogrammum γ λ: ei uero quod fit bis ex α κ, κ ϛ æquale ζ λ, ergo γ λ erit incommensurabile ipsi ζ λ. ergo & linea γ μ erit incommensurabilis longitudine lineæ ζ μ: sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea γ ζ est residuum per 73: dico præterea esse primum residuum. Cum enim quadratorum linearum α κ, κ β sit id quod fit ex α κ, κ β medium proportionale per lemma positum post 53: sit autem quadrato lineæ α κ, æquale parallelogrammum γ θ, ei uero quod fit ex α κ, κ ϛ æquale ι λ: quadrato uero lineæ κ β æquale κ λ. ergo inter parallelogramma γ θ, κ λ medium proportionale est ι λ. ergo sicut γ θ ad ι λ, ita ι λ ad κ λ. Sed sicut γ θ ad ι λ, ita linea γ κ ad lineam ι μ: sicut autem ι λ ad κ λ, ita linea ι μ ad lineam κ μ. sicut ergo linea γ κ ad lineam ι μ, ita linea ι μ ad lineam κ μ. ergo parallelogrammum ex γ κ, κ μ est æquale quadrato ι μ, hoc est quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniam quadratum lineæ α κ est commensurabile quadrato lineæ κ β, ergo & γ θ erit cõmensurabile ipsi κ λ: sicut autem γ θ ad κ λ, ita linea γ κ ad lineam κ μ. ergo linea γ κ erit longitudine commensurabilis lineæ κ μ. ergo per 18. linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Est autem linea γ μ longitudine commensurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ est residuum primum. Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus residuum primum.

Nonagesimumoctauum Theorema.

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ secundum.



Sit residuum mediale primum αβ, rationalis uero γδ: et quadrato lineæ αϐ æquale secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γε, faciens alterum latus γζ. dico lineam γζ esse residuum secũdum. Sit enim lineæ αϐ linea conuenienter iuncta βη, ergo lineæ αη, βη sunt mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes. Et *quadrato lineæ αη æquale secundum lineam γδ applicetur γθ faciens alterum latus γκ: quadrato uero lineæ ηβ æquale applicetur κλ faciens alterum latus κμ. totũ ergo γλ est æquale ambobus quadratis linearum αη, ηϐ, quæ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo & parallelogramma γθ, κλ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum γλ est utrique γθ, κλ commensurabile: ergo per corollarium 24 totum γλ est etiam mediale. ergo linea γμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ per 23.* Et *quoniam γλ est æquale quadratis linearũ αη, ηϐ, quadrata uero linearum αη, ηβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex αη, ηϐ, et quadrato lineæ αϐ per 7.2. quadrato uero lineæ αβ est æquale parallelogrammum γε: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex αη, ηϐ est æquale residuo parallelogrãmo ζλ: sed id quod fit bis ex αη, ηβ est rationale, ergo ζλ erit rationale, ergo linea ζμ est*

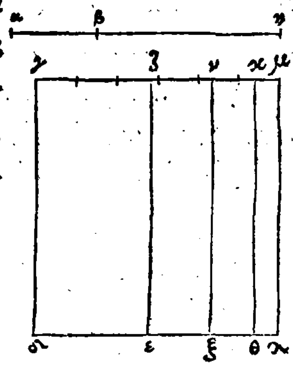
ratio-

rationalis & longitudine cōmensurabilis lineæ γδ per 21. Cum igitur parallelogrammum γλ sit mediale, parallelogrammum uero ζλ sit rationale, ergo sunt incōmēsurabilia: ergo & linea γμ erit longitudine incommēsurabilis lineæ ζμ: & sunt ambæ rationales. ergo linea γζ erit residuum. dico præterea esse residuū secundum. Secetur enim linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν: à quo puncto parallela ad lineam γδ ducatur linea νξ. ergo utrūq; ex ζξ, νλ est æquale parallelogrāmo ex ακ, κβ. Et quoniam quadratorum linearum ακ, κβ medium proportionale est id quod fit ex ακ, κβ, ergo & parallelogrammorum γθ, κλ medium proportionale est νλ. Sed sicut γθ est ad νλ, ita linea γκ ad lineam νμ: sicut autem νλ ad κλ, ita linea νμ ad lineā κμ. sicut ergo linea γκ ad lineam νμ, ita linea νμ ad lineam κμ. ergo parallelogrammum ex γκ, κμ est æquale quadrato lineæ νμ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζμ. Sed parallelogrammum γθ est commēsurabile ipsi κλ, ergo & linea γκ lineæ κμ erit commensurabilis longitudine. ergo per 18. linea γμ plus potest, quàm linea ζμ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea ζμ, quæ dicitur cōuenienter iuncta cōmensurabilis longitudine lineæ rationali γδ, ergo linea γζ est residuū secundum. Ergo quadratum residui medialis primi &c.

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum tertium.

Sit linea α β residuum mediale secũdum, rationalis uero sit linea γ δ: & quadrato lineæ α β æquale secundum lineã γ δ applicetur parallelogrammum γ ι faciens alterum latus γ ζ: dico lineam γ ζ esse residuum tertium. Sit *enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, η β sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γ μ est rationalis lõgitudine incommensurabilis lineæ rationali γ δ: & utrũque ex ζ ξ, ν λ est æquale ei, quod fit ex α η, η β: sed id quod fit ex α η, η β est mediale, ergo id quod fit bis ex α η, η β est etiam mediale: ergo & totum ζ λ est etiam mediale.* Ergo *linea ζ μ est rationalis & lõgitudine incommensurabilis lineæ γ δ.* Et *quoniam lineæ α η, η β sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum lineæ α η erit incommensurabile parallelogrammo ex α η, η β: sed quadrato lineæ α η sunt commensurabilia quadrata linearum α η, η β: parallelogrammo uero ex α η, η β est commensurabile id, quod fit bis ex α η, η β: ergo quadrata linearum α η, η β sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α η, η β. ergo & eis æqualia parallelogramma γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ζ μ, & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ est residuum: dico præterea esse residuum tertium. Cum enim sit commensurabile quadratũ lineæ α η, hoc est γ θ, quadrato lineæ*

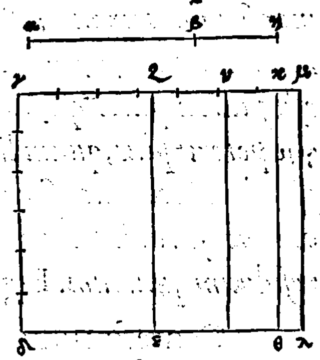


β η,

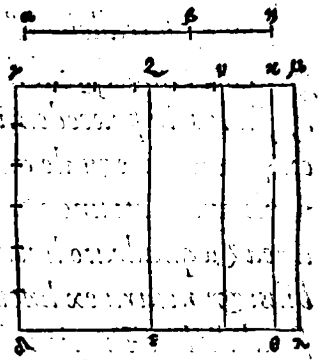
$\beta\kappa$, hoc est parallelogrãmo $\kappa\lambda$. ergo & linea $\gamma\kappa$ erit longitudine commẽsurabilis lineæ $\kappa\mu$. Eadem ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammũ ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse æquale quadrato lineæ $\nu\mu$, hoc est quartæ parti quadrati lineæ $\zeta\mu$. Ergo linea $\gamma\mu$ poterit plus, quã linea $\zeta\mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & neutra ex lineis $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$. ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum tertium. Ergo quadratũ residui medialis secundi &c.

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ quartum.



Sit linea minor $\alpha\beta$, rationalis uero $\gamma\delta$: secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\zeta$: dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum quartum. Sit enim lineæ $\alpha\beta$ linea conuenienter iuncta $\beta\kappa$, ergo lineæ $\alpha\kappa$, $\beta\kappa$ sunt potentia incommẽsurabiles, facientes compositũ ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, & cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit rationale. ergo & linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\gamma\delta$. Et quoniam id quod fit bis ex $\alpha\kappa$, $\kappa\beta$ est mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ $\zeta\lambda$ erit mediale. ergo linea $\zeta\mu$ erit rationalis lõgitudine incõmen-



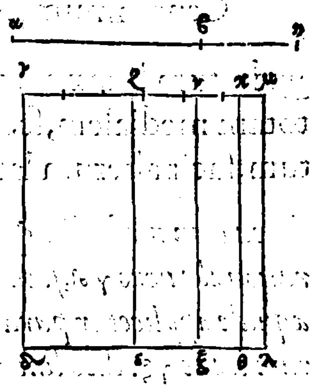
ſurabilis lineæ γ δ: ſed linea γ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo per 13. uel 14. huius linea γ μ erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζ μ. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantũ cõmenſurabiles. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum. Cũ enim lineæ α κ, κ ϐ ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma γ θ, κ λ ſunt incõmenſurabilia. ergo & linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. ergo per 19. linea γ μ poterit plus, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ erit reſiduum quartum. Ergo quadratũ lineæ minoris &c.

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β: rationalis uero γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciẽs alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quintũ. Sit

 enim



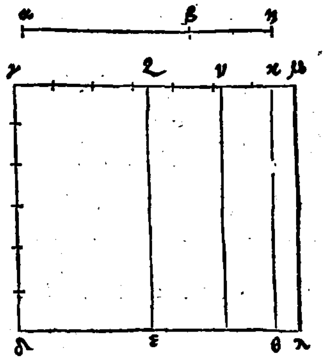
enim lineæ α κ, β, linea conuenienter iuncta β κ. ergo lineæ α κ, β κ sunt potentia incõmensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: id uero quod fit ex ipsis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ν λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ est mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ ζ est residuum. dico præterea esse residuum quintum: similiter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc est, parallelogrammũ γ θ est incõmensurabile quadrato β κ, hoc est, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ est residuum quintum. Ergo quadratum &c.

Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie faciēs totum mediale α ϐ, rationalis uero γ δ, secundum quam quadrato lineæ α ϐ æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ esse residuum sextum. Sit *enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta ϐ η, ergo lineæ α η, ϐ η sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositũ ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearũ α η, η ϐ, quod est mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: similiter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ.* Et *quoniam compositum ex quadratis linearum α η, ϐ η est incommensurabile ei, quod fit bis ex α η, η ϐ, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incõmensurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erũt longitudine incommensurabiles: sunt autem ambæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Ergo *linea γ ζ erit residuũ: dico præterea esse residuum sextũ. fiāt cætera ut in superioribus.* Et *quoniam lineæ α η, ϐ η sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est,*

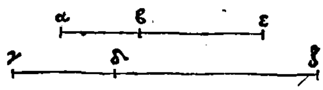
illis



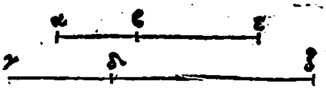
*illis æqualia $\gamma\theta$,$\kappa\lambda$.ergo & linea $\gamma\kappa$ lineæ $\kappa\mu$ erit longitudine incommensurabilis,sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum $\gamma\theta$,$\kappa\lambda$ esse medium proportionale $\nu\lambda$.ergo per 19.linea $\gamma\mu$ plus poterit,quàm linea $\mu\zeta$ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis:& neutra ex ipsis $\gamma\mu$,$\zeta\mu$ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$.ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum sextum.*Ergo *quadratum &c.*

Centesimumtertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine,est & ipsa residuum eiusdem ordinis.



*Sit residuum $\alpha\beta$,cui sit linea commensurabilis longitudine $\gamma\delta$.dico lineam $\gamma\delta$ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem,cuius & residuum $\alpha\beta$. Cũ enim linea $\alpha\beta$ sit residuũ,sit linea ei conuenienter iuncta $\beta\epsilon$:ergo lineæ $\alpha\epsilon$, $\beta\epsilon$ sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq; sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\delta$,ita linea $\beta\epsilon$ ad lineã $\delta\zeta$:ergo sicut unum ad unum,ita omnia ad omnia per 12.5.*Erit *ergo sicut linea $\alpha\beta$ ad lineam $\gamma\delta$,ita tota linea $\alpha\epsilon$,ad totam lineam $\gamma\zeta$,& linea $\beta\epsilon$ ad lineam $\delta\zeta$. ergo per 10 huius,linea $\alpha\epsilon$ erit commensurabilis longitudine lineæ $\gamma\zeta$,& linea $\beta\epsilon$ lineæ $\delta\zeta$:sed linea $\alpha\epsilon$ est rationalis,ergo & linea $\gamma\zeta$ erit rationalis.similiter &*



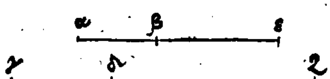
linea δζ erit rationalis, quia linea βε cui ipsa est commensurabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea βε ad lineam αε, ita linea δζ ad lineā γζ, & lineæ βε, αε sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ δζ, γζ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea γδ est residuū. dico præterea esse residuū eiusdem ordinis cuius & linea αβ. Cum enim sit ut modo diximus sicut linea αε, ad lineam γζ ita linea βε ad lineā δζ. ergo permutata proportione sicut αε ad βε, ita γζ ad δζ: linea autem αε potest plus quàm linea εβ, aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo & linea γζ potest plus quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cum linea αε sit longitudine commensurabilis lineæ γζ. ergo per 12. etiam linea γζ erit longitudine cōmensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea αβ γδ erit residuum primū. Quòd si linea βε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cū linea βε sit longitudine commensurabilis lineæ δζ, ergo linea δζ erit etiam longitudine cōmensurabilis propositæ rationali: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum secundū. Quòd si neutra ex lineis αε, βε erit longitudine commensurabilis propositæ rationali, neutra etiā ex lineis γζ, δζ erit propositæ rationali longitudine commensurabilis per 13, uel 14 huius: & tunc utraque linea αβ,

γδ

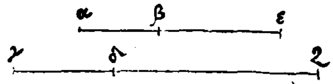
γδ erit residuum tertium. Quòd si linea αι plus potest quàm linea βι quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, similiter & linea γζ plus poterit quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15: & quidem si linea αι erit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea γζ erit eidem commensurabilis. & sic erit utraq; αβ, γδ residuum quartũ: si uero linea βι erit commensurabilis longitudine rationali, similiter & linea δζ, & sic erit utraque αβ, γδ residuum quintum. si uero neutra ex lineis αι, βι erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γζ, δζ erit eidem commensurabilis: & sic erit utraque αβ, γδ residuum sextum. Ergo linea γδ erit residuũ eiusdẽ ordinis cuius & αβ.

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum mediale & eiusdem ordinis.



Sit residuum mediale αβ, cui sit commensurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum linea γδ. dico γδ esse residuum mediale & eiusdẽ ordinis. Cum enim αβ sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta βι, ergo lineæ αι, βι sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Sit autẽ sicut αβ ad γδ, ita βι ad δζ. simili ratione qua in præcedẽti usi sumus, linea αι erit longitudine & potentia, siue potentia tantum commensurabilis lineæ γζ, & linea βι lineæ δζ. ergo per 24 linea γζ erit medialis: & linea δζ erit medialis, quia est cõmen-



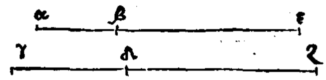
surabilis lineæ mediali βε. similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commensurabiles: quia habent eandem proportionem inter se, quam lineæ αε, βε, quæ sunt inter se commensurabiles potentia tantum. ergo linea γδ est residuum mediale. dico præterea esse eiusdem ordinis cuius & αβ. Cum enim sit, sicut linea αε ad lineam βε, ita linea γζ ad lineam δζ: sed sicut linea αε ad lineam βε, ita quadratum lineæ αε ad parallelogrammum ex αε, βε per 1.6: sicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo sicut quadratum lineæ αε ad parallelogrammũ ex αε, βε, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione sicut quadratum lineæ αε ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αε, βε ad parallelogrammũ ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αε est cõmẽsurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αε est commensurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αε, βε erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo si parallelogrammũ ex αε, βε est rationale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuũ mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αε, βε erit mediale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum mediale secundum. ergo linea γδ erit residuũ mediale eiusdem ordinis. Hoc theorema cõceptũ est uniuersaliter, siue linea sit cõmẽsurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum residuo mediali, esse & ipsam

ipsam residuum mediale, & eiusdem ordinis. Idem *dicendum de tribus proximis theorematibus.*

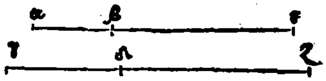
Centesimumquintum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ minori, est & ipsa linea minor.

Sit linea minor α β, cui sit commensurabilis γ δ. dico lineã γ δ esse lineam minorem: fiãt



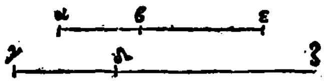
enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ α ε, β ε sunt potentia incommensurabiles, ergo & lineæ γ ζ, δ ζ sunt potentia incommẽsurabiles per 22.6. & 10 *huius.* R*ursus per 22.6 sicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratũ lineæ δ ζ. cõiuncta ergo proportione, sicut quadrata linearum α ε, β ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadrata linearum γ ζ, δ ζ ad quadratum lineæ δ ζ: & permutata proportione sicut quadrata linearũ α ε, β ε ad quadrata linearum γ ζ, δ ζ, ita quadratum lineæ β ε ad quadratum lineæ δ ζ. sed quadratum lineæ β ε est commensurabile quadrato lineæ δ ζ (quia lineæ β ε, δ ζ sunt cõmensurabiles.) ergo & compositũ ex quadratis linearum α ε, β ε erit commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: sed compositũ ex quadratis linearũ α ε, β ε est rationale, ergo & compositum ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ erit rationale.* R*ursus cũ sit sicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ. (sicut diximus in proximo theoremate) permutata er-*



go proportione sicut quadratū lineæ αι ad quadracū lineæ γζ, ita parallelogrāmum ex αι, βι ad parallelogrāmū ex γζ, δζ. sed quadratū lineæ αι est cōmensurabile quadrato lineæ γζ, quia lineæ αι, γζ sunt cōmensurabiles, ergo & parallelogrāmū ex αι, βι erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. sed parallelogrammū ex αι, βι est mediale, ergo & parallelogrammum ex γζ, δζ erit mediale. ergo lineæ γζ, δζ erunt potentia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum rationale, parallelogrāmū uero ex ipsis mediale. Ergo *linea γδ erit linea minor.*

Centesimumsextum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum rationali superficie facienti totam medialem, est & ipsa linea cū rationali superficie faciens totam medialem.



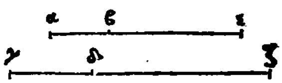
Sit linea cum rationali superficie faciens totam medialem αβ, cui sit commēsurabilis linea γδ. dico lineā γδ esse cū rationali superficie facientē totam medialem. Sit lineæ αβ linea conuenienter iuncta βι, ergo lineæ αι, βι. sunt potentia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, parallelogrammū uero ex ipsis rationale: fiant omnia quæ in præcedētibus. Similiter quoque demonstrabimus sicut linea αι ad lineam βι, ita lineam γζ ad lineam δζ: & compositū ex quadratis linearum αι, βι esse commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod sit ex αι, βι esse

esse similiter commensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. quare & similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia incommensurabiles facientes ea quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ erit etiam linea cũ rationali superficie faciens totã medialẽ.

Centesimumseptimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum mediali superficie facienti totam medialem, commensurabilis est & ipsa cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sit linea cum mediali superficie faciẽs totam medialẽ αβ, cui sit commensurabilis γδ. dico lineam γδ esse etiam lineam cum mediali superficie facientem totam medialẽ. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βι, & fiant cætera, ut in superioribus.

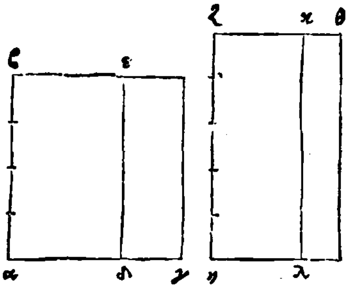


ergo lineæ αι, βι sunt potẽtia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiã mediale: & compositum ex quadratis incommensurabile ei, quod fit ex ipsis. Sunt autẽ, ut antea demonstratum est lineæ αι, βι commensurabiles lineis γζ, δζ, & compositum ex quadratis ipsorum αι, βι commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod fit ex αι, βι cõmensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. ergo & lineæ γζ, δζ, sunt potentia incommensurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ est cum mediali superficie faciens totam medialem.

Centesimumoctauum Theorema.

Si de superficie rationali detrahatur superficies medialis, linea quæ reliquam ſuperficiem poteſt, eſt alterutra ex duabus irrationalibus, aut reſiduum aut linea minor.

De *ſuperficie rationali ε γ detrahatur ſuperficies medialis ε δ. dico lineam quæ reliquam ſuperficiē ι γ poteſt, eſſe alterutram ex duabus irrationalibus, aut reſiduū aut lineā minorem. Sit enim*



linea rationalis ζ η, ſecundum quam æqualis ſuperficiei ε γ applicetur ſuperficies rectangula parallelogramma η θ: ſuperficiei uero ε δ æqualis applicetur ſuperficies parallelogrammo η κ. reliquum ergo parallelogrammū ι γ eſt æquale reliquo parallelogrammo λ θ. Cum igitur ε γ ſit rationale, ipſum uero ε δ ſit mediale, ergo & η θ erit rationale: ipſum uerò η κ mediale. ergo & linea ζ θ erit rationalis longitudine commenſurabilis ipſi ζ η per 21: linea uero ζ κ erit rationalis longitudine incommenſurabilis eidem lineæ ζ η per 23. ergo linea ζ θ erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζ κ per 13. ergo lineæ ζ θ ζ κ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: ergo linea κ θ erit reſiduū, ipſi uero conuenienter iuncta linea κ ζ: linea autem ζ θ plus poteſt, quàm linea ζ κ, aut quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, aut quadrato lineæ ſibi longitudine incommēſurabilis. Poßit prius quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum ſit tota ζ θ longitudine commenſurabilis lineæ rationali ζ η. ergo linea κ θ eſt reſiduum primum.

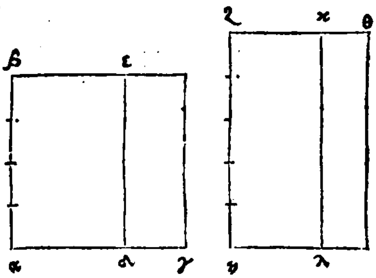
ergo

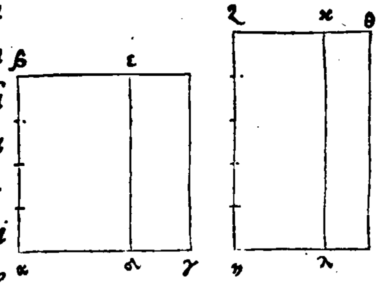
ergo per 91 linea potens parallelogrammum λ θ, hoc est ι γ est residuũ. Quòd si linea ζ θ plus poßit quã linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, cum linea ζ θ sit commensurabilis longitudine lineæ rationali ζ κ, ergo linea κ θ erit residuum quartum. Ergo *per 94 linea potens superficiem λ θ, hoc est γ ι est linea minor.*

Centesimumnonum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De *superficie mediali β γ detrahatur rationalis superficies β δ, dico lineã quæ potest superficiem reliquã ι γ esse alterutram duarum irrationaliũ, uel residuũ mediale primum, uel cum rationali superficie faciẽtem totã medialem.* Sit *rationalis linea ζ κ, secundũ quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea ζ θ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ζ κ: linea uerò ζ κ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem ζ κ: & lineæ ζ θ, ζ κ rationales erunt potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζ κ.* Linea *autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõ-*





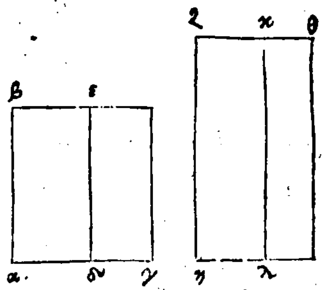
menſurabilis. Et quidem ſi linea ζθ plus poteſt quàm linea ζκ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, cũ linea cõuenienter iuncta ζκ ſit longitudine commenſurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit reſiduum ſecũdum: quare linea quæ ſuperficiem λθ, hoc eſt εγ poteſt, eſt reſiduũ mediale primũ per 92. Quòd ſi linea ζθ plus poteſt quã linea ζκ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum linea conuenienter iuncta ſit longitudine commẽſurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit reſiduum quintum: quare linea quæ ſuperficiẽ λθ, hoc eſt, εγ poteſt, eſt cum rationali ſuperficie faciens totam medialem per 95.

Centeſimumdecimum Theorema.

Si de ſuperficie mediali detrahatur ſuperficies medialis, quæ ſit incõmenſurabilis toti, reliquæ duæ fiunt irrationales, aut reſiduum mediale ſecundum, aut cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus deſcriptionibus, hìc quoque detrahatur de ſuperficie mediali βγ ſuperficies medialis βδ: quæ βδ ſit incommenſurabilis toti βγ. dico lineam quæ poteſt ſuperficiem εγ, eſſe alterutram duarũ irrationalium, uel reſiduum mediale ſecundũ, uel cum mediali ſuperficie facientem totam medialem. Cum enim utraque

ſuperficies

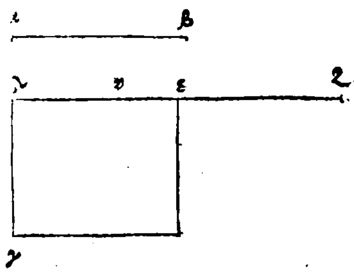


ſuperficies ϐγ, ϐδ ſit medialis, ergo utraque linea ζθ, ζκ eſt rationalis, & rationali ζκ lõgitudine incommenſurabilis. Eſt autẽ ſuperficies βγ, hoc eſt κθ incommẽſurabilis ipſi βδ, hoc eſt κκ. ergo lineæ ζθ, ζκ ſũt incommenſurabiles: ergo ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles. ergo linea κθ erit reſiduum: ipſi uero conuenienter iuncta, ζκ. linea autem ζθ plus poteſt quàm linea ζκ, uel quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, uel lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et quidẽ ſi linea ζθ plus poteſt, quàm ζκ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. cum neutra ex ζθ, ζκ ſit longitudine commenſurabilis ipſi rationali ζκ, ergo linea κθ erit reſiduum tertium. ergo per 93. linea quæ poteſt ſuperficiem λθ, hoc eſt ιγ erit reſiduum mediale ſecundũ. Quòd ſi linea ζθ plus poteſt quàm linea ζκ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ex ζθ, ζκ ſit longitudine commenſurabilis ipſi rationali ζκ, ergo linea κθ erit reſiduum ſextũ. Ergo per 96 linea quæ ſuperficiem λθ, hoc eſt ιγ poteſt, erit cum mediali ſuperficie faciens totam medialem.

Centeſimumundecimum Theorema.

Linea quæ reſiduum dicitur, non eſt eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit reſiduum αϐ, dico αβ non eſſe idem cum binomio. Nam ſi eſſe poteſt, eſt. Sitq; linea rationalis δγ, ſecũdum quam



æquale quadrato lineæ α β applicetur parallelogrammum rectangulũ γ ε faciens alterũ latus δ ε. cum linea α β sit residuum, ergo linea δ ε erit residuum primũ per 97. Sit ipsi cõuenienter iuncta ε ζ, ergo lineæ δ ζ, ζ ε sunt rationales potentia tantũ commẽsurabiles, & linea δ ζ plus potest quàm linea ε ζ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & δ ζ, est longitudine cõmensurabilis rationali γ δ. Rursus per positionem linea α β est binomium, ergo linea δ ε est binomium primum per 60. Diuidatur in sua nomina in puncto η: sitq; maius nomẽ δ η, ergo lineæ δ η, η ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea δ η plus potest quàm linea η ε quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; linea δ η est longitudine commensurabilis rationali γ δ. Ergo per 12 lineæ δ η, δ ζ sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua linea η ζ erit longitudine commensurabilis toti δ ζ per 16, aut per corollarium eiusdem. Cum igitur linea δ ζ sit cõmensurabilis lineæ ζ η, sit autem linea δ ζ rationalis, rationalis quoque erit ζ η. Cum autem linea δ ζ sit longitudine commensurabilis lineæ ζ η: sit autem linea δ ζ longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ, ergo per 14 lineæ ζ η, ζ ε sunt longitudine incommensurabiles. Sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ η, ζ ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea ε η erit residuũ: sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est impossibile

impoßibile, eandẽ ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nõ erit idem quod binomiũ. Linea quæ reſiduũ dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem. Nam *quadratũ lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommẽſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per* 23. *quadratũ uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterũ latus reſiduum primum per* 97. *quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecũdum per* 98. *quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per* 99. *quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per* 100. *quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per* 101. *quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per* 102. *Cum igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differãt, & à primo latere & ipſa inter ſe, (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differũt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe.* Et *quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiũ: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-*

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorũ quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequũtur residuũ, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

1. *Medialis.*
2. *Binomium.*
3. *Bimediale primum.*
4. *Bimediale secundum.*
5. *Maior.*
6. *Potens rationale & mediale*
7. *Potens duo medialia.*
8. *Residuum.*
9. *Residuum mediale primum.*
10. *Residuũ mediale secundum.*
11. *Minor.*
12. *Faciens cum rationali superficie totam medialem.*
13. *Faciens cum mediali superficie totam medialem.*

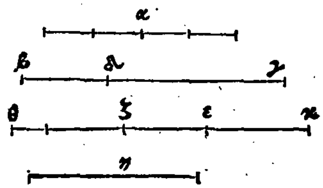
Centesimumduodecimum Theorema.

Quadratum, lineę rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuũ, cuius nomina sunt commẽsurabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit residuũ, eundẽ ordinem retinet quem binomium.

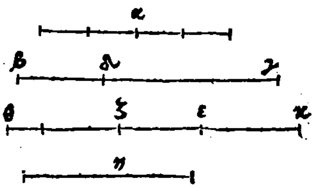
Sit linea rationalis α, binominm βγ, cuius maius nomen sit γδ: & quadrato lineæ α sit æquale parallelogrammum

ex

ex β γ, ι ζ. dico lineam ι ζ esse residuũ, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij β γ, quæ nomina sunt γ δ, δ β: & in eadem proportione præterea linea ι ζ eundẽ ordinem & locũ tenet inter residua, quẽ binomium β γ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex β δ, κ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, ι ζ sit



æquale parallelogrãmo ex β δ, κ, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α, est igitur sicut linea γ β ad lineam β δ, ita linea κ ad lineam ι ζ per 14.6. sed γ β est maior quàm β δ, ergo & κ erit maior quàm ι ζ. Sit linea ι θ æqualis lineæ κ. est ergo sicut γ β ad γ δ, ita θ ι ad ι ζ per 7. 5. ergo disiuncta proportione per 17.5. sicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ι. fiat sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ x ad ι x, (quod quẽadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12.5. sicut linea ζ x ad lineam ι x, ita tota linea θ x ad totã ζ x. Sed sicut ζ x ad ι x, ita est γ δ ad δ β: (quia ζ x est ad ι x sicut θ ζ ad ζ ι, & θ ζ ad ζ ι est sicut γ δ ad δ β.) ergo sicut linea θ x ad ζ x, ita γ δ ad δ β. sed quadratum lineæ γ δ est commensurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ x quadrato lineæ ζ x erit commẽsurabile per 22.6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ x, ζ x, ι x sunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20. 6 quadratum lineæ θ x erit ad quadratũ lineæ ζ x, sicut linea θ x ad lineam ι x. ergo linea θ x erit longitudine commensurabilis lineæ ι x: quare per 16 linea θ ι erit longitudi-

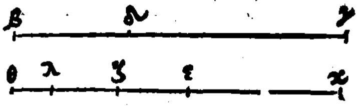


ne commẽsurabilis lineæ ι κ. Et *quoniam quadratũ lineæ α est æquale parallelogrãmo ex θ ι, ϐ δ, & quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammũ ex θ ι, ϐ δ erit rationale. ergo per 21 linea θ ι erit rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ ϐ δ: quare & linea ι κ, quæ est ipsi θ ι longitudine commẽsurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commẽsurabilis ipsi β δ.* Cum *igitur sit sicut linea γ δ ad δ ϐ, ita ζ κ ad ι κ: (quia supra dictum est, sicut γ δ ad δ β, ita θ ζ ad ζ ι, & sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ, ad ι κ,) lineæ uero γ δ, δ β sint potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ι κ erunt potentia tantum commensurabiles.* Et *cum sit sicut γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ι κ, ergo cõuersa proportione sicut δ ϐ ad γ δ, ita ι κ ad ζ κ: & permutata proportione sicut δ β ad ι κ, ita γ δ ad ζ κ: sed lineæ δ β, ι κ sunt longitudine commensurabiles, (ut modo probatum est) ergo & lineæ γ δ, ζ κ sunt longitudine commẽsurabiles: sed linea γ δ, est rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ι κ sunt rationales potẽtia tantam commẽsurabiles. ergo linea ζ ι erit residuum, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus binomij & in eadem proportione. dico præterea illud residuum esse eiusdem ordinis cuius & binomiũ.* Nam *linea γ δ plus potest, quàm linea β δ aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut lineæ incommensurabilis: & quidem si linea γ δ plus potest, quàm β δ quadrato lineæ sibi longitudine commẽsurabilis, similiter & linea*

ζ κ

ζ κ plus poterit quàm linea ι κ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15. Et quidē si linea γ δ est longitudine commēsurabilis lineæ rationali, cum modo probatum sit lineas γ δ, ζ κ esse longitudine commensurabiles, ergo per 12 etiam linea ζ κ erit longitudine com mensurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea β γ erit binomium primum, similiter & linea ζ ι erit residuum primū. Quòd si linea β δ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea ι κ erit eidē cōmensurabilis: tunc ergo linea β γ erit binomium secundum, & linea ζ ι residuum secundum. Quòd si neutra ex γ δ, δ β fuerit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζ κ, ι κ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea β γ binomium tertium, & linea ζ ι residuum tertium. Quòd si linea γ δ plus potest quàm linea β δ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter & linea ζ κ plus poterit quàm ι κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et quidem si linea γ δ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea ζ κ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea β γ binomium quartum, & linea ζ ι residuum quartum. Quòd si linea β δ fuerit rationali commensurabilis, similiter & linea ι κ erit eidem commensurabilis, tunc linea β γ erit binomium quintū: & linea ζ ι residuū quintū. Quòd si neutra ex γ δ, β δ erit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζ κ, ι κ erit eidem commensurabilis, tunc linea β γ erit binomium sextum, & linea ζ ι residuum sextum. Ergo linea ζ ι erit residuum, cuius nomina, nempe ζ κ, ι κ sunt com-

mensurabilia nominibus binomij βγ, nominibus inquã γδ, δβ: & sunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter residua quem binomium inter binomia. Nunc illud *dicamus quomodo fiat sicut linea θζ ad lineam ζι, ita linea ζκ ad lineam ικ. linea γδ est maior linea βδ. ergo*

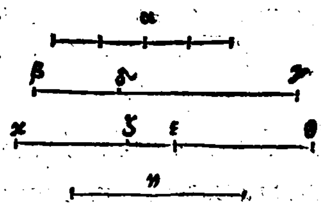


& linea θζ erit maior linea ζι. Detrahatur *de linea θζ æqualis lineæ ζι, quæ sit ζλ per 3.1. Et reliqua sit θλ. ergo linea θλ erit minor quam linea θζ, quia θζ est æqualis lineis θλ, λζ. fiat sicut θλ, ad θζ, ita ζι ad ζκ per 12.6: ergo per conuersam proportionem sicut θζ ad θλ, ita ζκ ad ζι.* Ergo *per euersam proportionem sicut linea θζ ad λζ, hoc est ad ei æqualem ζι, ita linea ζκ ad ικ.*

Centesimum decimumtertium Theorema.

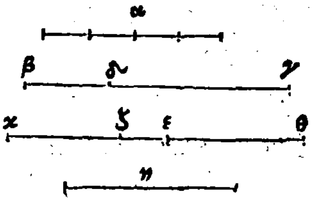
Quadratum lineæ rationalis secundum residuum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus resi-dui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium est eiusdẽ ordinis, cuius & residuum.

Sit linea rationalis α, residuũ uerò βδ: & quadrato lineæ α sit æquale id quod fit ex βδ, κθ: itaque quadratum lineæ rationalis α secundũ βδ residuũ



applicatum, facit alterum latus κθ. dico lineam κθ esse binomium cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius βδ & in eadem proportione: & lineã κθ esse

esse eiusdem ordinis binomium, cuius & εδ est residuũ. Sit lineæ εδ linea cõueniẽter iuncta δγ, ergo lineæ εγ, δγ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. & quadrato lineæ α æquale sit parallelogrammum ex βγ,κ: sed quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammum ex βγ,κ est etiam rationale: ergo & linea κ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ εγ. Cum igitur parallelogrammum ex βγ,κ sit æquale ei quod fit ex βδ,κθ, ergo sicut εγ ad εδ, ita κθ ad κ: sed εγ est maior quam βδ, ergo & linea κθ erit maior quàm κ. Sit lineæ κ æqualis linea κι, ergo linea κι erit rationalis longitudine commẽsurabilis linea βγ sicut & linea κ: & cum sit sicut βγ ad εδ, ita κθ ad κι. euersa ergo proportione sicut εγ ad δγ, ita κθ ad ιθ: fiat sicut κθ ad ιθ, ita linea ζθ ad ιζ, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finẽ demonstrationis.) ergo erit reliqua κζ ad reliquam ζθ, sicut tota κθ ad totã θι per 19.5, hoc est sicut εγ ad γδ: sed lineæ βγ, γδ sunt potentia tantũ commensurabiles, ergo & lineæ κζ,ζθ erunt potentia tantum commẽsurabiles. Et quoniam est sicut κθ ad θι, ita κζ ad ζθ, sed & sicut κθ ad θι, ita θζ ad ζι, ergo sicut κζ ad ζθ, ita ζθ ad ζι: quare sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ: ergo sicut κζ ad ζι, ita quadratum lineæ κζ ad quadratum lineæ ζθ: sed hæc quadrata sunt commẽsurabilia, quia lineæ κζ,ζθ sunt potentia commensurabiles. ergo lineæ κζ,ζι sunt longitudine commensurabiles. Quare per secundã partem 16. lineæ κι,ιζ sunt longitudine commensurabiles: quare per eandem 16. & lineæ κζ,κι sunt longitu-



dine commensurabiles: sed linea κι est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ βγ. ergo & linea κζ erit rationalis & longitudine commensurabilis eidem βγ. Et *quoniã est sicut linea βγ ad γδ, ita κζ ad ζθ, permutata ergo proportione sicut βγ ad κζ, ita γδ ad ζθ: sed linea βγ est longitudine commẽsurabilis lineæ κζ. ergo & linea γδ erit longitudine cõmẽsurabilis lineæ ζθ: sed linea γδ est rationalis, ergo & linea ζθ erit rationalis: sed & lineæ βγ, γδ sunt potentia tantum commensurabiles: ergo & lineæ κζ, ζθ sunt rationales potentia tantum commensurabiles.* Ergo *linea κθ erit binomium, cuius nomina sunt commẽsurabilia nominibus residui, & in eadem proportione. dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius, & residuum βδ.* Nam *si βγ plus potest quàm γδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, etiã linea κζ poterit plus quàm ζθ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis per* 15. Q*uòd si linea βγ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea κζ erit eidem rationali commẽsurabilis longitudine per* 12*: quia lineæ βγ, κζ sunt longitudine commensurabiles: & sic erit linea βδ residuum primum, & linea κθ similiter binomium primum.* Q*uòd si γδ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam linea ζθ erit eidem longitudine commensurabilis: & sic erit linea βδ residuum secundum, & linea κθ binomiũ secundũ.* Q*uòd si neutra ex βγ, γδ fuerit rationali commensurabilis longitudine*

tudine

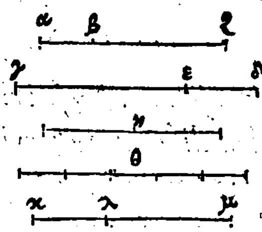
tudine, neutra etiam ex κ ζ, ζ θ erit eidem commensurabilis: & sic erit linea β δ residuum tertium, & linea κ θ binomium tertium. Si uero linea β γ plus potest quàm linea γ δ quadrato lineæ sibi longitudine incommēsurabilis, etiam linea κ ζ poterit plus quàm linea ζ θ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15. Et quidem si linea β γ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam κ ζ erit eidem commēsurabilis longitudine: & tunc linea β δ erit residuum quartū, & linea κ θ binomium quartū. Quòd si γ δ fuerit rationali commēsurabilis longitudine, etiam ζ θ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea β δ residuum quintum, & linea κ θ binomiū quintum. Quòd si neutra ex β γ, γ δ fuerit longitudine commēsurabilis rationali, similiter neutra ex κ ζ, ζ θ erit eidem cõmensurabilis longitudine: & sic linea β δ erit residuū sextum, & linea κ θ binomium sextum. Ergo κ θ erit binomium, cuius nomina κ ζ, ζ θ sunt commēsurabilia residui β δ nominibus β γ, γ δ, & in eadem proportione: & linea κ θ retinet inter binomia eundem ordinem quem β δ inter residua.

Nunc dicamus quomodo fiat sicut linea κ θ ad lineam θ ι, ita linea θ ζ ad lineā ζ ι.

Lineæ κ θ addatur in continuum & directum linea æqualis ipsi θ ι: & sit tota linea κ λ: & per 10. 6 diuidatur linea θ ι sicut tota linea κ λ diuisa est in puncto θ: sitq; linea θ ι diuisa in puncto ζ. Erit sicut κ θ ad θ λ, hoc est ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι &c.

Centesimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex residuo & binomio, cuius nomina sint commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione, linea quæ illam superficiem potest, est rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex residuo α β & binomio γ δ, cuius binomij maius nomẽ sit γ ε, minus uero ε δ: & sint commensurabilia nominibus residui α β, quæ sint α ζ, ζ β, & in eadem proportione. sitq; potens illud parallelogrammum linea, η. dico lineam illam η, esse rationalem. Proponatur rationalis θ, cuius quadrato æquale secundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κ λ. ergo linea κ λ est residuum per 112: cuius nomina sint κ μ, μ λ quæ sunt commensurabilia binomij nominibus γ ε, ε δ, & in eadem proportione per 112. Sed per positionem lineæ γ ε, ε δ sunt commensurabiles lineis α ζ, ζ β, & sunt in eadẽ proportione: erit ergo sicut α ζ ad ζ β, ita κ μ ad μ λ. ergo permutata proportione sicut α ζ ad κ μ, ita ζ β ad μ λ. ergo & reliqua α β ad reliquam κ λ erit sicut α ζ ad κ μ. sed linea α ζ est commensurabilis lineæ κ μ, quia utraque ex α ζ, κ μ est cõmensurabilis lineæ γ ε: ergo & linea α β erit commensurabilis lineæ κ λ. est autem sicut linea α β ad lineam κ λ, ita parallelogrammum ex γ δ, α β ad parallelogrammum ex γ δ, κ λ per 1.6. ergo parallelogrammum ex γ δ, α β est commẽsurabile parallelogrammo ex γ δ, κ λ: sed parallelogrammum ex γ δ, κ λ est æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammũ ex γ δ, α β est

commen-

commensurabile quadrato lineæ θ: sed parallelogrammum ex γ δ, α β est æquale quadrato lineæ κ, ergo quadratum lineæ θ erit commensurabile quadrato lineæ κ. sed quadratum lineæ θ est rationale, ergo & quadratū lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & potest parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo si parallelogrammum contineatur &c.

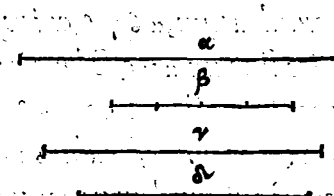
Corollarium.

Ex *hoc manifestū est, posse rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.*

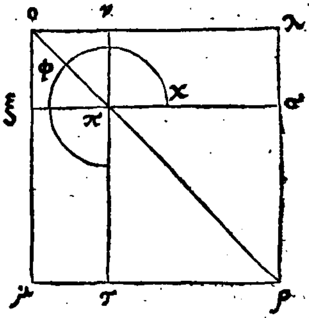
Centesimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali nascuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarū nulla ulli ante dictorū eadē sit.

Sit linea medialis α γ: dico ex linea α γ innumerabiles gigni irrationales, quarū nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadē sit. Ducatur *super*



extremitate lineæ α γ perpendicularis α ϛ, quæ sit rationalis: & cōpleatur parallelogrammū ϛ γ, ergo illud parallelogrāmū β γ erit irrationale per ea quæ dicta sunt in fine demōstrationis 38: linea ergo quæ illud potest, erit similiter irrationalis. Sit autē illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadē: quia quadratū huius γ δ secundū lineā rationalē puta α ϛ applicatū, facit alterum latus lineā medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum secundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem. Rursus

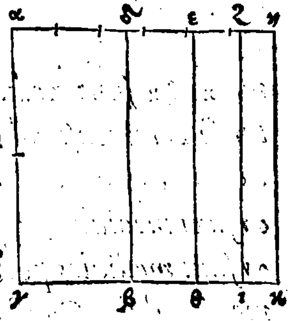


terea quadrato, ν ξ. Reliquum ergo, nempe parallelogrammum α ε, erit æquale quadrato σ τ, quod est quadratum lineæ λ ν. ergo quadratũ lineæ λ ν est æquale parallelogrammo α β. ergo linea λ ν potest illud parallelogrammum α β: dico præterea lineam λ ν esse residuum. Cum enim utrunque parallelogrammũ α ι, ζ κ sit rationale, ut supra dictum, ergo & illis æqualia quadrata λ μ, ν ξ, hoc est, quadrata linearum λ ο, ο ν erunt rationalia, & lineæ ipsæ λ ο, ο ν, rationales. Rursus quoniam parallelogrammum δ θ, hoc est, λ ξ est mediale, ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ. ergo per 1.6 & 10. huius, linea λ ο erit longitudine incommẽsurabilis lineæ ο ν: sunt autem ambæ rationales, sunt ergo rationales potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea λ ν est residuum: potest autẽ parallelogrammum α ε. ergo si superficies cõtineatur &c. linea quæ illam superficiem potest, est residuum.

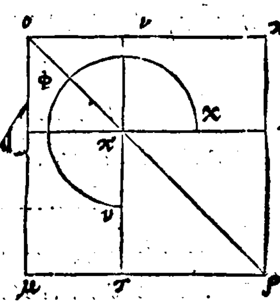
Nonagesimumsecundum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo secundo, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale primum.

Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo secundo α δ. dico lineam quæ potest superficiem α β esse eam, quæ dicitur residuũ mediale primum. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ κ. ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales



tionales potentia tantum cōmenſurabiles: & linea coniuncta δκ, eſt longitudine cōmēſurabilis lineæ rationali αγ: linea uerò ακ plus poteſt quā linea δκ quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur linea δκ bifariā & æqualiter in pūcto ε, & ſecūdum lineā ακ applicetur quartæ parti quadrati lineæ δκ, hoc eſt, quadrato lineæ εκ æquale parallelogrammū ex αζ, ζκ, deficiens ſpecie quadrata. ergo per 18 linea αζ eſt longitudine commēſurabilis lineæ ζκ: & per puncta ε, ζ, κ ipſi lineæ αγ ducantur parallelæ εθ, ζι, ηκ: & quoniam linea αζ eſt longitudine commēſurabilis lineæ ζκ, ergo tota linea ακ eſt utrique αζ, ζκ longitudine cōmenſurabilis. Eſt autem linea ακ rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ αγ. ergo & utraque αζ, ζκ eſt rationalis & longitudine incommenſurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum αι, ζκ eſt mediale per 22. Rurſus cum linea δε ſit commenſurabilis longitudine lineæ εκ, ergo & δκ eſt utrique δε, εκ longitudine commenſurabilis: ſed linea δκ eſt longitudine commēſurabilis lineæ rationali αγ, ergo utraque δε, εκ eſt rationalis & longitudine commenſurabilis lineæ αγ. ergo utrunque parallelogrammum δθ, εκ eſt rationale per 20. Deſcribatur parallelogrammo αι æquale quadratū λμ: parallelogrammo uero ζκ, æquale ſit quadratū νξ, ſicut in præcedenti theoremate, quadrata λμ, νξ erunt circa eandem diametrum: ſit diameter ορ, & deſcriba-



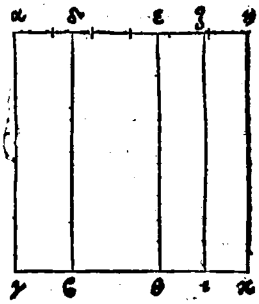
tur figura sicut modo dictũ est. Quoniam ergo parallelogramma α ι, ζ κ sunt medialia & inter se commensurabilia, & illis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν sunt medialia, ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia commensurabiles. Constat autem potentia commensurabiles esse lineas λ ο, ο ν, quia earum quadrata sunt commẽsurabilia: commẽsurabilia sunt porro quadrata illa, scilicet linearum λ ο, ο ν, quia sunt æqualia parallelogrammis, α ι, ζ κ, quæ sunt cõmensurabilia: cõmẽsurabilia porro esse illa parallelogrãma α ι, ζ κ constat eo, quod modo probatum est, lineas α ζ, ζ κ esse longitudine commensurabiles. Ergo per 1. 6 & 10 huius parallelogrãma α ι, ζ κ sunt commensurabilia. ergo modo probatum est uia resolutionis lineas λ ο, ο ν, esse potentia cõmensurabiles. Et quoniam parallelogrammum ex α ζ, ζ κ est æquale quadrato lineæ ε κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineã ε κ, ita linea ε κ ad lineam ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam ε κ, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammũ ε κ: sicut autem linea ε κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammũ ε κ ad parallelogrammum ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est parallelogrammũ ε κ. Est etiam quadratorum λ μ, ν ξ medium proportionale parallelogrammum μ ν: & est æquale parallelogrammũ α ι quadrato λ μ: parallelogrammum uero ζ κ est æquale quadrato ν ξ: Ergo μ ν erit æquale parallelogrãmo ε κ: sed ε κ est æquale parallelogrammo δ θ: parallelogrammum

mum uero λ ξ est æquale parallelogrammo μ ν. Totũ ergo parallelogrammum δ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. reliquum ergo, nempe parallelogrammũ α β, est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν. Ergo linea λ ν potest superficiem α β: dico præterea lineã λ ν esse residuum mediale primum. Cum enim parallelogrammum ι κ sit rationale, sitq́; æquale parallelogrãmo μ ν, hoc est λ ξ: ergo λ ξ, hoc est parallelogrammum ex λ ο, ο ν erit rationale: sed quadratum ν ξ est mediale, quia ei æquale parallelogrammum ζ κ modo probatũ est esse mediale. Ergo parallelogrammum λ ξ erit incommensurabile quadrato ν ξ: sed sicut parallelogrammũ λ ξ ad quadratum ν ξ, ita linea λ ο, ad lineam ο ν, per 16. ergo per 10 huius, lineæ λ ο, ο ν sunt longitudine incommensurabiles: sed modo probatum est eas esse mediales potentia commensurabiles. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt mediales potentia tantum commensurabiles, continentes rationale. Ergo linea λ ν est residuum mediale primum, & potest superficiem α β contentam ex linea rationali & residuo secundo.

Nonagesimumtertium Theorema.

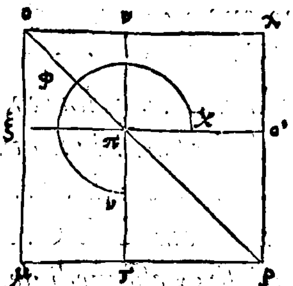
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo tertio, linea quæ illam superficiem potest, est residuum mediale secundum.

Superficies enim α β cõtineatur ex linea rationali α γ, & residuo tertio α δ. dico lineam quæ possit superficiem α β esse residuum mediale secũdum. Sit linea coniuncta δ κ, ergo lineæ α κ, κ δ sunt rationales potentia tantum com-



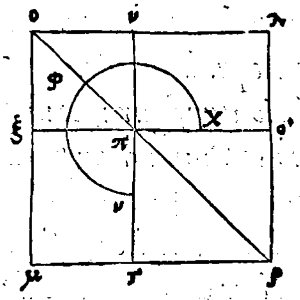
mēsurabiles, & neutra linearum ακ, κλ est longitudine commensurabilis lineæ rationali αγ. Tota ue*ro αβ plus potest, quàm coniuncta κλ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. reliqua fiāt, ut in præcedētibus. ergo lineæ αζ, ζκ sunt longitudine commēsurabiles & parallelogrammū αι, commensurabile parallelogrammo ζκ.* Et *quoniam αζ, ζκ sunt longitudine cōmensurabiles, ergo tota linea ακ est utrique αζ, ζκ longitudine commēsurabilis: sed linea ακ est rationalis & longitudine incommensurabilis linea αγ, ergo utraque αζ, ζκ. est rationalis & longitudine incommēsurabilis lineæ αγ. ergo utrūque parallelogrammum αι, ζκ est mediale per* 22. R*ursus cum linea λι sit longitudine commensurabilis lineæ ικ, ergo & tota λκ est longitudine cōmensurabilis utrique λι, ικ: sed linea λκ est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ, ergo & utraque linearum λι, ικ est rationalis potentia tantum commensurabilis lineæ αγ. ergo & utrūque parallelogrammum λθ, ικ est mediale: & quoniam lineæ ακ, λκ sunt potentia tantum commensurabiles, ergo sunt longitudine incommensurabiles: sed linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ αζ: linea autem λκ est longitudine commensurabilis lineæ κι, ergo linea αζ est longitudine incommensurabilis lineæ ικ.* S*icut autem linea αζ ad lineam ικ, ita parallelogrammum αι ad parallelogrammum ικ. ergo αι est incommensurabile ipsi ικ.* C*onstruatur parallelogrammo αι*

æquale



æquale quadratum λ μ: ipsi uero ζ κ æquale quadratũ ν ξ, & describatur figura, ut in præcedentibus. Cum igitur parallelogrãmũ ex α ζ, ζ κ sit æquale quadrato lineæ ι κ. est ergo sicut linea α ζ ad lineam ι κ, ita ι κ ad ζ κ: sed sicut linea α ζ ad lineam κ ι, ita parallelogrammũ α ι ad parallelogrammum ι κ: sicut autem linea ι κ ad lineam ζ κ, ita parallelogrammum ι κ ad parallelogrammũ ζ κ. sicut ergo parallelogrammum α ι ad parallelogrammũ ι κ, ita ι κ ad ζ κ. ergo parallelogrammorum α ι, ζ κ medium proportionale est ι κ. Sed quadratorũ λ μ, ν ξ medium proportionale est parallelogrammum μ ν, ergo ι κ est æquale ipsi μ ν. ergo totum parallelogrammum α κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. Est autem ipsum α κ æquale quadratis λ μ, ν ξ, reliquum ergo nempe α ϛ est æquale quadrato σ τ, hoc est quadrato lineæ λ ν, ergo λ ν potest superficiem α ϛ: dico præterea lineam λ ν esse residuum mediale secundum. Cum enim, sicut probatũ est, parallelogramma α ι, ζ κ sint medialia, ergo eis æqualia quadrata linearũ λ ο, ο ν sunt etiã medialia. ergo utraq; linea λ ο, ο ν erit medialis: & quoniam parallelogrammum α ι est commensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν erunt commensurabilia. Rursus cum sit probatum parallelogrammum α ι esse incommẽsurabile parallelogrammo ι κ, ergo incommensurabile erit quadratum λ μ, parallelogrammo μ ν, hoc est, quadratum lineæ λ ο, parallelogrã-

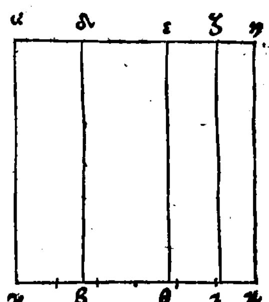
mo ex λο,ον: quare & linea λο erit longitudine incõmensurabilis lineæ ον. ergo lineæ λο,ον sunt mediales potentia tantum commensurabiles: dico præterea eas continere mediale. Cũ enim probatũ sit ικ esse mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ ex λο,ον erit mediale. ergo linea λν est residuum mediale secundum, & potest superficiem αβ. Ergo linea potens superficiem αϐ est residuum mediale secundum.



Nonagesimumquartum Theorema.

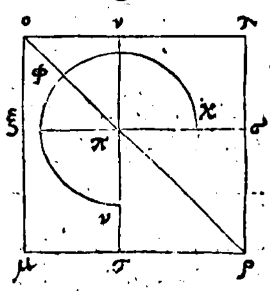
Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo quarto, linea quę illam superficiẽ potest, est linea minor.

Superficies αβ contineatur ex linea rationali αγ, et residuo quarto αδ. dico lineam quæ illam superficiem αϐ potest, esse eã, quæ dicitur linea minor: sit enim linea cõiuncta δκ, ergo lineæ ακ, δκ sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles: & linea ακ plus potest, quàm linea δκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, & linea ακ est longitudine commensurabilis lineæ αγ. Diuidatur linea δκ bifariam & æqualiter in puncto ε: & quadrato lineæ εκ æquale secũdum lineam ακ applicetur parallelogrãmum, deficiẽs figura quadrata, sitq; illud parallelogrãmum

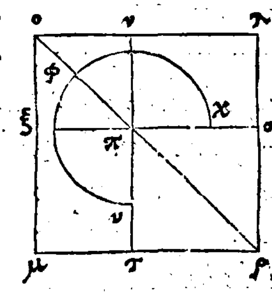


mum

mũ ex $\alpha\zeta$, $\zeta\eta$. ergo per 19. linea $\alpha\zeta$ erit longitudine incommensurabilis lineæ $\zeta\eta$. Ducantur per puncta ε,ζ,η ipsis lineis $\alpha\gamma$, $\delta\beta$, parallelæ $\varepsilon\theta$, $\zeta\iota$, $\eta\kappa$. Cum igitur linea $\alpha\eta$ sit rationalis, & longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\gamma$, ergo totum parallelogrammum $\alpha\kappa$ est rationale per 20. Rursus cum linea $\delta\eta$ sit longitudine incommẽsurabilis lineæ $\alpha\gamma$, (nam si esset linea $\delta\eta$ longitudine commensurabilis lineæ $\alpha\gamma$, cum linea $\alpha\eta$ sit eidem $\alpha\gamma$ longitudine commẽsurabilis, essent etiam lineæ $\alpha\eta$, $\delta\eta$ longitudine commensurabiles, cum tamen positæ sint potẽtia tantum commensurabiles) sunt autem ambæ $\alpha\gamma$, $\delta\eta$ rationales. ergo parallelogrammũ $\delta\kappa$ est mediale. Rursus cum linea $\alpha\zeta$ sit longitudine incõmensurabilis lineæ $\zeta\eta$, ergo incommensurabile est $\alpha\iota$ ipsi parallelogrammo $\zeta\kappa$. Cõstruatur parallelogrammo $\alpha\iota$ æquale quadratum $\lambda\mu$: ipsi uero $\zeta\kappa$ æquale quadratum $\nu\xi$, ambo quadrata habentia communem angulũ $\lambda o \nu$. ergo quadrata $\lambda\mu$, $\nu\xi$ sunt circa eandem diametrũ: sit diameter $o\rho$ & describatur figura.



Cum igitur parallelogrammũ ex $\alpha\zeta$, $\zeta\eta$ sit æquale quadrato lineæ $\varepsilon\eta$, erit proportionaliter, sicut linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\varepsilon\eta$, ita linea $\varepsilon\eta$ ad lineã $\zeta\eta$: sed sicut linea $\alpha\zeta$ ad lineam $\varepsilon\eta$, ita parallelogrammum $\alpha\iota$ ad parallelogrammum $\varepsilon\kappa$ per 1.6. Sicut autem linea $\varepsilon\eta$ ad lineã $\zeta\eta$, ita parallelogrammum $\varepsilon\kappa$ ad parallelogrammum $\zeta\kappa$. ergo parallelogrammorũ $\alpha\iota$, $\zeta\kappa$ medium proportionale est $\varepsilon\kappa$. ergo, sicut dictum est in præcedentibus, parallelo-



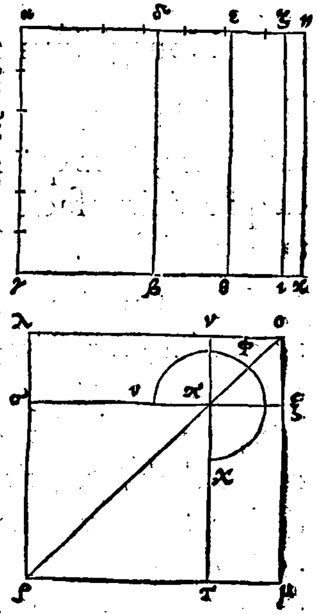
grammum μν est æquale parallelogrammo ι κ: sed λ θ est æquale ipsi ι κ, ipsum autem μ ν ipsi λ ξ. ergo parallelogrammum λ κ est æquale gnomoni υ φ χ, & quadrato ν ξ. ergo reliquum α β est æquale reliquo quadrato σ τ, hoc est, quadrato lineæ λ ν: dico præterea lineã λ ν esse irrationalem eam, quæ linea minor uocatur. Cum enim parallelogrammum α κ sit rationale, & sit æquale quadratis linearum λ ο, ο ν, ergo compositum ex quadratis linearũ λ ο, ο ν erit rationale. Rursus cum λ κ sit mediale, sitq; æquale ei, quod fit bis ex λ ο, ο ν, ergo id quod fit bis ex λ ο, ο ν est etiam mediale: & quoniam parallelogrammum α ι est incommensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & eis æqualia quadrata linearum λ ο, ο ν sunt incõmensurabilia. ergo lineæ λ ο, ο ν sunt potentia incommẽsurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit bis ex ipsis mediale, quod est cõmẽsurabile ei, quod fit semel ex ipsis: ergo & quod fit semel ex ipsis, erit etiã mediale. Ergo linea λ ν est irrationalis, quæ uocatur linea minor & potest superficiẽ α β.

Nonagesimumquintum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali, & residuo quinto, linea quæ illam superficiẽ potest, est ea, quę dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Superficies enim α β contineatur ex linea rationali α γ, & residuo

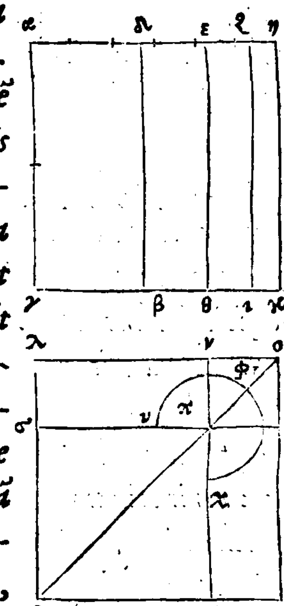
residuo quinto α Λ. dico lineam, quæ illam superficiē potest, eam esse quæ dicitur faciens cum rationali superficie totam medialem: sit enim lineæ α Λ iuncta linea Λ κ, quæ erit longitudine cōmensurabilis lineæ rationali α γ, cætera erunt ut in præcedenti. Et quoniam linea α κ est longitudine incommensurabilis lineæ α γ, & sunt ambæ rationales, ergo parallelogrāmū α κ erit mediale. Rursus quoniā linea Λ κ est rationalis, & lōgitudine cōmēsurabilis lineæ α γ, ergo Λ κ erit rationale. Cōstruatur quadratum λ μ æquale parallelogrammo α ι, quadratum uero ν ξ æquale ipsi ζ κ, ut in proximo, similiter demōstrabimus lineam λ ν posse superficiem α β: dico præterea eam esse lineam, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialē: cum enim α κ sit mediale, etiam illis æquale compositum ex quadratis linearum λ ο, ο ν, erit mediale. Rursus quia Λ κ est rationale, ergo & illi æquale id, quod fit bis ex λ ο, ο ν erit etiam rationale, & quoniam linea α ζ est longitudine incommēsurabilis lineæ ζ η, ergo per 1. 6 & 10 huius. parallelogrammum α ι erit incōmensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo & quadratū lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο ν: ergo lineæ λ ο, ο ν sunt potentia incommensurabiles facientes compositum



ex quadratis ipsarũ mediale, id uero quod fit bis ex ipsis rationale. ergo reliqua linea λ ν est irrationalis: nẽpe ea quæ dicitur cum rationali superficie faciens totã medialem, & potest superficiem α β. Ergo linea potens superficiem α β est linea, quæ dicitur cum rationali superficie faciens totam medialem.

Nonagesimumsextum Theorema.

Si superficies contineatur ex linea rationali & residuo sexto, linea quæ illam superficiem potest, est ea quæ dicitur faciens cum mediali superficie totam medialem.

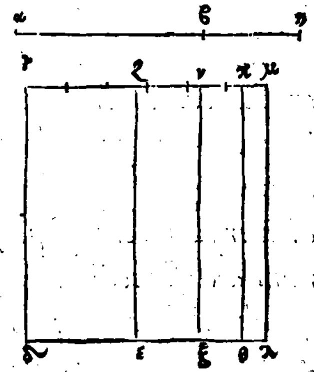


Superficies α β contineatur ex linea rationali α γ, et residuo sexto α δ. dico lineam quæ potest superficiẽ α β esse eam, quæ dicitur faciens cum mediali superficie totã medialem. Sit enim lineæ α δ linea coniuncta δ η, & cætera fiãt, ut in præcedẽtibus: cum linea α ζ sit longitudine incõmensurabilis lineæ ζ η, ergo & parallelogrammum α ι erit incommensurabile parallelogrammo ζ κ. Et quoniã lineæ α η, α γ, sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, ergo parallelogrammum α κ erit mediale: simili ratione δ κ erit mediale. Cum igitur lineæ α η, η δ sint potentia tantum commensurabiles, ergo *go sunt longitudine inter se incommensurabiles: sed sicut linea α κ ad κ δ, ita parallelogrammum α κ ad δ κ. ergo α κ erit incõmensurabile ipsi δ κ. Construatur eadẽ figura, quæ in præcedentibus, similiter probabimus lineam λ ν posse superficiẽ α ϐ: dico præterea eam esse, quæ dicitur faciẽs cum superficie mediali totam medialem: nam α κ est mediale, ergo & illi æquale compositũ ex quadratis linearum λ ο, ο ν erit mediale.* Rur*sus quoniã δ κ est mediale, ergo & ei æquale, id quod fit bis ex λ ο, ο ν erit mediale.* Et *quoniam α κ est incommensurabile ipsi δ κ, ergo & quadrata linearum λ ο, ο ν erunt incõmensurabilia ei, quod fit bis ex λ ο, ο ν: & cum parallelogrammum α ι sit incommensurabile parallelogrammo ζ κ, ergo etiam quadratum lineæ λ ο erit incommensurabile quadrato lineæ ο ν. ergo lineæ λ ο, ο ν erunt potentia incommensurabiles, faciẽtes compositũ ex quadratis linearum λ ο, ο ν mediale, & quod fit bis ex ipsis mediale: præterea compositum ex quadratis ipsarũ incommensurabile ei, quod fit bis ex ipsis. ergo linea λ ν est irrationalis, quæ dicitur cum mediali superficie faciens totam medialẽ, & potest superficiem α ϐ.* Ergo *linea potens superficiem α β est ea, quæ dicitur faciens cum superficie mediali totam medialem.*

Nonagesimumseptimum Theorema.

Quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum, facit alterum latus residuum primũ.

Sit residuum α ϐ, rationalis uero linea γ δ: & quadrato lineæ α β æquale secundum lineam γ δ applicetur paral-



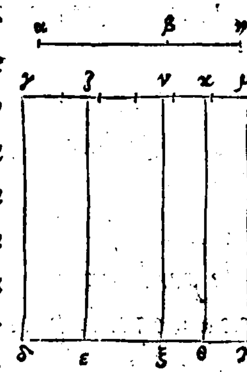
lelogrammum γι faciẽs alterũ latus γζ, dico lineam γζ esse residuum primum. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βκ, quæ & eadem dicitur linea cõiuncta, ut in fine theorematis 79. ergo lineæ ακ, κβ, sunt rationales potentia tantum commensurabiles: & quadrato lineæ ακ secundum lineam γδ applicetur parallelogrammum γθ, quadrato uero lineæ βκ æquale parallelogrãmum κλ: totum ergo γλ est æquale quadratis linearum ακ, κβ: sed parallelogrammum γι est æquale quadrato lineæ αβ, reliquum ergo ζλ est æquale ei, quod fit bis ex ακ, κβ: quia quadrata linearum ακ, κβ sunt æqualia ei, quod fit bis ex ακ, κβ, & quadrato lineæ αβ per 72. Secetur linea ζμ bifariam & æqualiter in puncto ν, & à pũcto ν ducatur lineæ γδ parallela linea νξ, ergo utrũque ex parallelogrãmis ζξ, νλ est æquale ei. quod fit semel ex ακ, κβ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, quibus quadratis æquale est parallelogrammũ γλ, ergo γλ est rationale. ergo linea γμ est rationalis longitudine commensurabilis lineæ γδ. Rursus quoniam id quod fit bis ex ακ, κβ est mediale, ergo & illi æquale nempe parallelogrammum ζλ, erit mediale. ergo linea ζμ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γδ. Et quoniam quadrata linearum ακ, κβ sunt rationalia, id uero quod fit bis ex ακ, κβ mediale, ergo quadrata linearum ακ, κβ sunt incommensurabilia

bilia ei, quod fit bis ex $\alpha\,\kappa$, $\kappa\,\zeta$. *Est autē quadratis linearū* $\alpha\,\kappa$, $\kappa\,\zeta$ *æquale parallelogrammum* $\gamma\,\lambda$: *ei uero quod fit bis ex* $\alpha\,\kappa$, $\kappa\,\zeta$ *æquale* $\zeta\,\lambda$, *ergo* $\gamma\,\lambda$ *erit incommensurabile ipsi* $\zeta\,\lambda$. *ergo & linea* $\gamma\,\mu$ *erit incommensurabilis longitudine lineæ* $\zeta\,\mu$: *sunt autem ambæ rationales. ergo lineæ* $\gamma\,\mu$, $\zeta\,\mu$ *sunt rationales potentia tantum commensurabiles, & linea* $\gamma\,\zeta$ *est residuum per 73: dico præterea esse primum residuum. Cum enim quadratorum linearum* $\alpha\,\kappa$, $\kappa\,\beta$ *sit id quod fit ex* $\alpha\,\kappa$, $\kappa\,\beta$ *medium proportionale per lemma positum post 53: sit autem quadrato lineæ* $\alpha\,\kappa$, *æquale parallelogrammum* $\gamma\,\theta$, *ei uero quod fit ex* $\alpha\,\kappa$, $\kappa\,\zeta$ *æquale* $\nu\,\lambda$: *quadrato uero lineæ* $\kappa\,\beta$ *æquale* $\xi\,\lambda$. *ergo inter parallelogramma* $\gamma\,\theta$, $\xi\,\lambda$ *medium proportionale est* $\nu\,\lambda$. *ergo sicut* $\gamma\,\theta$ *ad* $\nu\,\lambda$, *ita* $\nu\,\lambda$ *ad* $\xi\,\lambda$. *Sed sicut* $\gamma\,\theta$ *ad* $\nu\,\lambda$, *ita linea* $\gamma\,\xi$ *ad lineam* $\nu\,\mu$: *sicut autem* $\nu\,\lambda$ *ad* $\xi\,\lambda$, *ita linea* $\nu\,\mu$ *ad lineam* $\xi\,\mu$. *sicut ergo linea* $\gamma\,\xi$ *ad lineam* $\nu\,\mu$, *ita linea* $\nu\,\mu$ *ad lineam* $\xi\,\mu$. *ergo parallelogrammum ex* $\gamma\,\xi$, $\xi\,\mu$ *est æquale quadrato* $\nu\,\mu$, *hoc est quartæ parti quadrati lineæ* $\zeta\,\mu$. *Et quoniam quadratum lineæ* $\alpha\,\kappa$ *est commensurabile quadrato lineæ* $\kappa\,\beta$, *ergo & * $\gamma\,\theta$ *erit cōmensurabile ipsi* $\xi\,\lambda$: *sicut autem* $\gamma\,\theta$ *ad* $\xi\,\lambda$, *ita linea* $\gamma\,\xi$ *ad lineam* $\xi\,\mu$. *ergo linea* $\gamma\,\xi$ *erit longitudine commensurabilis lineæ* $\xi\,\mu$. *ergo per 18. linea* $\gamma\,\mu$ *plus potest, quàm linea* $\zeta\,\mu$ *quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. Est autem linea* $\gamma\,\mu$ *longitudine commensurabilis lineæ rationali* $\gamma\,\delta$, *ergo linea* $\gamma\,\zeta$ *est residuum primum. Ergo quadratum residui secundum lineam rationalem applicatum facit alterum latus residuum primum.*

Nonagesimumoctauum Theorema.

II

Quadratum residui medialis primi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuū secundum.



Sit residuum mediale primum α ϐ, rationalis uero γ δ: et quadrato lineæ α ϐ æquale secundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum γ ε, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ esse residuum secūdum. Sit enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta ϐ κ, ergo lineæ α κ, ϐ κ sunt mediales potentia tantum commensurabiles rationale continentes. Et quadrato lineæ α κ æquale secundum lineam γ δ applicetur γ θ faciens alterum latus γ κ: quadrato uero lineæ κ ϐ æquale applicetur κ λ faciens alterum latus κ μ. totū ergo γ λ est æquale ambobus quadratis linearum α κ, κ ϐ, quæ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo & parallelogramma γ θ, κ λ sunt medialia inter se commensurabilia. ergo per 16. totum γ λ est utrique γ θ, κ λ commensurabile: ergo per corollarium 24 totum γ λ est etiam mediale. ergo linea γ μ est rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ per 23. Et quoniam γ λ est æquale quadratis linearū α κ, κ ϐ, quadrata uero linearum α κ, κ ϐ sunt æqualia ei, quod fit bis ex α κ, κ ϐ, et quadrato lineæ α ϐ per 7. 2. quadrato uero lineæ α ϐ est æquale parallelogrammum γ ε: reliquum ergo nempe id quod fit bis ex α κ, κ ϐ est æquale residuo parallelogrāmo ζ λ: sed id quod fit bis ex α κ, κ ϐ est rationale, ergo ζ λ erit rationale, ergo linea ζ μ est

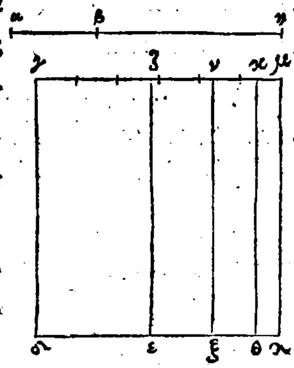
ratio-

rationalis & longitudine cõmensurabilis lineæ $\gamma\delta$ *per 21. Cum igitur parallelogrammum* $\gamma\lambda$ *sit mediale, parallelogrammum uero* $\zeta\lambda$ *sit rationale, ergo sunt incõmẽsurabilia: ergo & linea* $\gamma\mu$ *erit longitudine incommẽsurabilis lineæ* $\zeta\mu$*: & sunt ambæ rationales. ergo linea* $\gamma\zeta$ *erit residuum. dico præterea esse residuũ secundum. Secetur enim linea* $\zeta\mu$ *bifariam & æqualiter in puncto* ν*: à quo puncto parallela ad lineam* $\gamma\delta$ *ducatur linea* $\nu\xi$*. ergo utrũq; ex* $\zeta\xi$, $\nu\lambda$ *est æquale parallelogrãmo ex* $\alpha\kappa$, $\kappa\beta$*. Et quoniam quadratorum linearum* $\alpha\kappa$, $\kappa\beta$ *medium proportionale est id quod fit ex* $\alpha\kappa$, $\kappa\beta$*, ergo & parallelogrammorum* $\gamma\theta$, $\kappa\lambda$ *medium proportionale est* $\nu\lambda$*. Sed sicut* $\gamma\theta$ *est ad* $\nu\lambda$*, ita linea* $\gamma\kappa$ *ad lineam* $\nu\mu$*: sicut autem* $\nu\lambda$ *ad* $\kappa\lambda$*, ita linea* $\nu\mu$ *ad lineã* $\kappa\mu$*. sicut ergo linea* $\gamma\kappa$ *ad lineam* $\nu\mu$*, ita linea* $\nu\mu$ *ad lineam* $\kappa\mu$*. ergo parallelogrammum ex* $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ *est æquale quadrato lineæ* $\nu\mu$*, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ* $\zeta\mu$*. Sed parallelogrammum* $\gamma\theta$ *est commẽsurabile ipsi* $\kappa\lambda$*, ergo & linea* $\gamma\kappa$ *lineæ* $\kappa\mu$ *erit commensurabilis longitudine. ergo per 18. linea* $\gamma\mu$ *plus potest, quàm linea* $\zeta\mu$ *quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: est autem linea* $\zeta\mu$*, quæ dicitur cõuenienter iuncta cõmensurabilis longitudine lineæ rationali* $\gamma\delta$*, ergo linea* $\gamma\zeta$ *est residuũ secundum.* Ergo *quadratum residui medialis primi &c.*

Nonagesimumnonum Theorema.

Quadratum residui medialis secundi secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum tertium.

Sit linea α β residuum mediale secūdum, rationalis uero sit linea γ δ: & quadrato lineæ α β æquale secundum lineā γ δ applicetur parallelogrammum γ ε faciens alterum latus γ ζ: dico lineam γ ζ esse residuum tertium. Sit enim lineæ α β linea conuenienter iuncta β η, ergo lineæ α η, η β sunt mediales potentia tantum commensurabiles continentes mediale & cætera, ut in proximo theoremate. ergo linea γ μ est rationalis lōgitudine incommensurabilis lineæ rationali γ δ: & utrūque ex ζ ξ, ν λ est æquale ei, quod fit ex α η, η β: sed id quod fit ex α η, η β est mediale, ergo id quod fit bis ex α η, η β est etiam mediale: ergo & totum ζ λ est etiam mediale. Ergo *linea ζ μ est rationalis & lōgitudine incommensurabilis lineæ γ δ.* Et *quoniam lineæ α η, η β sunt longitudine incommensurabiles, ergo & quadratum lineæ α η erit incommensurabile parallelogrammo ex α η, η β: sed quadrato lineæ α η sunt commensurabilia quadrata linearum α η, η β: parallelogrammo uero ex α η, η β est commensurabile id, quod fit bis ex α η, η β: ergo quadrata linearum α η, η β sunt incommensurabilia ei, quod fit bis ex α η, η β. ergo & eis æqualia parallelogramma γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: ergo & linea γ μ erit longitudine incommēsurabilis lineæ ζ μ, & sunt ambæ rationales. ergo linea γ ζ est residuum: dico præterea esse residuum tertium.* Cum *enim sit commensurabile quadratū lineæ α η, hoc est γ θ, quadrato lineæ*

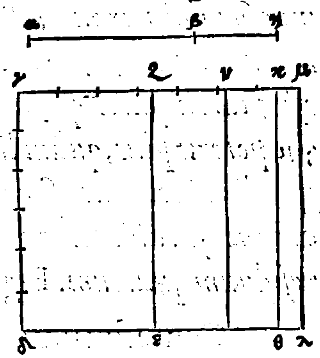


β η,

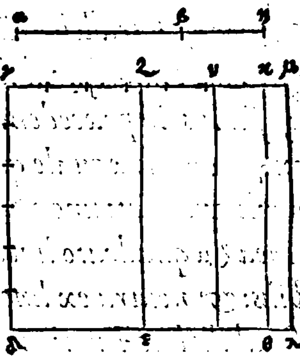
$\beta\kappa$, hoc est parallelogrãmo $\kappa\lambda$. ergo & linea $\gamma\kappa$ erit longitudine commẽsurabilis lineæ $\kappa\mu$. Eadem ratione qua usi sumus in præcedenti, probabitur parallelogrammũ ex $\gamma\kappa$, $\kappa\mu$ esse æquale quadrato lineæ $\nu\mu$, hoc est quartæ parti quadrati lineæ $\zeta\mu$. Ergo linea $\gamma\mu$ poterit plus, quã linea $\zeta\mu$ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis: & neutra ex lineis $\gamma\mu$, $\zeta\mu$ est longitudine commensurabilis lineæ rationali $\gamma\delta$. ergo linea $\gamma\zeta$ est residuum tertium. Ergo quadratũ residui medialis secundi &c.

Centesimum Theorema.

Quadratum lineæ minoris secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuũ quartum.



Sit linea minor $\alpha\beta$, rationalis uero $\gamma\delta$: secundum quam quadrato lineæ $\alpha\beta$ æquale applicetur parallelogrammum $\gamma\epsilon$, faciens alterum latus $\gamma\zeta$: dico lineam $\gamma\zeta$ esse residuum quartum. Sit enim lineæ $\alpha\beta$ linea conuenienter iuncta $\beta\kappa$, ergo lineæ $\alpha\kappa$, $\beta\kappa$ sunt potentia incommẽsurabiles, facientes compositũ ex quadratis ipsarũ rationale: id uero quod fit ex ipsis, mediale, & cætera sint ut in præcedentibus: ergo totum parallelogrammum $\gamma\lambda$ erit rationale. ergo & linea $\gamma\mu$ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ $\gamma\delta$. Et quoniam id quod fit bis ex $\alpha\kappa$, $\kappa\beta$ est mediale, ergo & illi æquale parallelogrammũ $\zeta\lambda$ erit mediale. ergo linea $\zeta\mu$ erit rationalis lõgitudine incõmen-



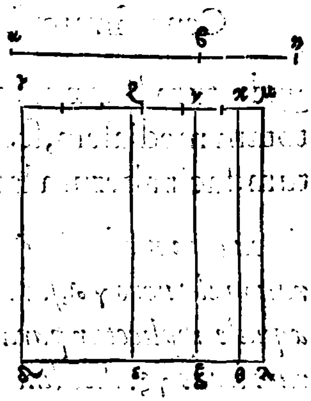
ſurabilis lineæ γ δ: ſed linea γ μ eſt longitudine commenſurabilis lineæ γ δ. ergo per 13. uel 14. huius linea γ μ erit longitudine incõmenſurabilis lineæ ζ μ. ſed ſunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ ſunt rationales potentia tantũ cõmenſurabiles. ergo linea γ ζ erit reſiduum. dico præterea eſſe reſiduum quartum. Cũ enim lineæ α η, η β. ſint potentia incommenſurabiles, ergo & ipſarum quadrata, hoc eſt, illis æqualia parallelogramma γ θ, κ λ ſunt incõmenſurabilia. ergo & linea γ κ erit longitudine incommenſurabilis lineæ κ μ. Similiter oſtendemus parallelogrammum ex γ κ, κ μ eſſe æquale quadrato lineæ ν μ, hoc eſt, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. ergo per 19. linea γ μ poterit plus, quàm linea ζ μ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & eſt tota γ μ longitudine commenſurabilis lineæ rationali γ δ, ergo linea γ ζ erit reſiduum quartum. Ergo quadratũ lineæ minoris &c.

Centeſimumprimum Theorema.

Quadratum lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum quintum.

Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β: rationalis uero γ δ, ſecundum quam quadrato lineæ α β æquale applicetur parallelogrammum γ ε, faciẽs alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ eſſe reſiduum quintũ. Sit

enim



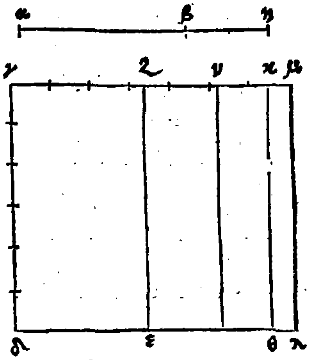
enim lineæ α β, linea conuenienter iuncta β κ. ergo lineæ α κ, β κ sunt potentia incõmensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale: id uero quod fit ex ipsis rationale. fiant enim omnia eo modo quo in præcedẽtibus, ergo totum γ λ erit mediale. ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: & utrũque ex parallelogrammis ζ ξ, ν λ erit rationale, ergo & totum ζ λ erit etiam rationale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine cõmensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam γ λ est mediale, parallelogrammum uero ζ λ rationale, ergo γ λ, ζ λ sunt incommensurabilia: & linea γ μ erit longitudine incommensurabilis lineæ ζ μ: & sunt ambæ rationales, ergo lineæ γ μ, ζ μ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea γ ζ est residuum. dico præterea esse residuum quintum: similiter enim probabimus parallelogrãmũ ex γ κ, κ μ esse æquale quadrato lineæ ν μ, hoc est, quartæ parti quadrati lineæ ζ μ. Et quoniã quadratũ lineæ α κ, hoc est, parallelogrammũ γ θ est incõmensurabile quadrato β κ, hoc est, parallelogrãmo κ λ, ergo linea γ κ erit longitudine incommensurabilis lineæ κ μ. ergo per 19 linea γ μ plus potest, quàm linea ζ μ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & est conuenienter iuncta linea ζ μ longitudine commensurabilis lineæ γ δ. ergo linea γ ζ est residuum quintum. Ergo quadratum &c.

Centesimumsecundum Theorema.

Quadratum lineæ cum mediali superficie facientis totam medialem, secundum rationalem applicatum, facit alterum latus residuum sextum.

Sit linea cum mediali superficie faciēs totum mediale α ϐ, rationalis uero γ δ, secundum quam quadrato lineæ α ϐ æquale applicetur parallelogrammum γ ι, faciens alterum latus γ ζ. dico lineam γ ζ esse residuum sextum. Sit enim lineæ α ϐ linea conuenienter iuncta ϐ κ, ergo lineæ α κ, ϐ κ sunt potentia incommensurabiles, facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis mediale: præterea incommensurabile compositū ex quadratis ipsarum ei, quod fit ex ipsis. fiant cætera ut in præcedentibus. ergo totum γ λ erit mediale (quia est æquale composito ex quadratis linearū α κ, κ ϐ, quod est mediale.) ergo linea γ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ: similiter parallelogrammum ζ λ erit mediale. ergo & linea ζ μ erit rationalis longitudine incommensurabilis lineæ γ δ. Et quoniam compositum ex quadratis linearum α κ, ϐ κ est incommēsurabile ei, quod fit bis ex α κ, κ ϐ, ergo illis æqualia γ λ, ζ λ erunt incōmensurabilia. ergo & lineæ γ μ, ζ μ erūt longitudine incommensurabiles: sunt autem ambæ rationales, ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. Ergo *linea γ ζ erit residuū: dico præterea esse residuum sextū. fiāt cætera ut in superioribus.* Et *quoniam lineæ α κ, ϐ κ sunt potentia incommensurabiles, ergo quadrata ipsarum sunt incommensurabilia, hoc est, illis*

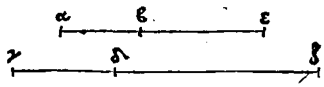
illis æqualia γθ, κλ. ergo & linea γκ lineæ κμ erit longitudine incommensurabilis, sicut in superioribus demonstrabatur parallelogrammorum γθ, κλ esse medium proportionale ελ. ergo per 19. linea γμ plus poterit, quàm linea μζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ex ipsis γμ, ζμ est longitudine commẽsurabilis lineæ rationali γδ. ergo linea γζ est residuum sextum. Ergo *quadratum &c.*

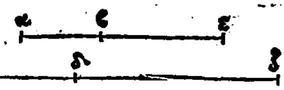


Centesimumtertium Theorema.

Linea residuo commensurabilis longitudine, est & ipsa residuum eiusdem ordinis.

Sit residuum αβ, cui sit linea commensurabilis longitudine γδ. dico lineam γδ esse & ipsam residuum & ordinis eiusdem, cuius & residuum αβ. Cũ enim linea αβ sit residuũ, sit linea ei conuenienter iuncta βε: ergo lineæ αε, βε sunt rationales potentia tantum commensurabiles: sitq; sicut linea αβ ad lineam γδ, ita linea βε ad lineã δζ: ergo sicut unum ad unum, ita omnia ad omnia per 12. 5. *Erit ergo sicut linea αβ ad lineam γδ, ita tota linea αε, ad totam lineam γζ, & linea βε ad lineam δζ. ergo per* 10 *huius, linea αε erit commensurabilis longitudine lineæ γζ, & linea βε lineæ δζ: sed linea αε est rationalis, ergo & linea γζ erit rationalis. similiter &*





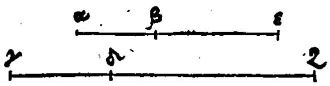
linea δζ erit rationalis, quia linea βε cui ipsa est commensurabilis est etiam rationalis: sed quoniam est sicut linea βε ad lineam αε, ita linea δζ ad lineã γζ, & lineæ βε, αε sunt potentia tantum commensurabiles, ergo & lineæ δζ, γζ sunt potentia tantum commensurabiles. ergo linea γδ est residuũ. dico præterea esse residuũ eiusdem ordinis cuius & linea αβ. Cum enim sit ut modo diximus sicut linea αε, ad lineam γζ ita linea βε ad lineã δζ. ergo permutata proportione sicut αε ad βε, ita γζ ad δζ: linea autem αε potest plus quàm linea εϐ, aut quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ergo & linea γζ potest plus quàm linea δζ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis per 15. Et quidem si linea αε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cum linea αε sit longitudine commensurabilis lineæ γζ. ergo per 12. etiam linea γζ erit longitudine cõmensurabilis propositæ rationali. ergo utraque linea αϐ γδ erit residuum primũ. Quòd si linea βε est longitudine commensurabilis lineæ propositæ rationali, cũ linea βε sit longitudine commensurabilis lineæ δζ, ergo linea δζ erit etiam longitudine cõmensurabilis propositæ rationali: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum secundũ. Quòd si neutra ex lineis αε, βε erit longitudine commensurabilis propositæ rationali, neutra etiã ex lineis γζ, δζ erit propositæ rationali longitudine commensurabilis per 13, uel 14 huius: & tunc utraque linea αβ,

γδ

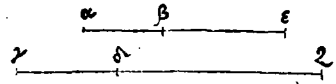
γ δ erit residuum tertium. Quòd si linea α ε plus potest quàm linea β ε quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, similiter & linea γ ζ plus poterit quàm linea δ ζ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15: & quidem si linea α ε erit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea γ ζ erit eidem commensurabilis. & sic erit utraq; α β, γ δ residuum quartũ: si uero linea β ε erit commensurabilis longitudine rationali, similiter & linea δ ζ, & sic erit utraque α β, γ δ residuum quintum. si uero neutra ex lineis α ε, β ε erit longitudine commensurabilis rationali, similiter neutra ex lineis γ ζ, δ ζ erit eidem commensurabilis: & sic erit utraque α β, γ δ residuum sextum. Ergo linea γ δ erit residuũ eiusdẽ ordinis cuius & α β.

Centesimumquartum Theorema.

Linea commensurabilis residuo mediali, est & ipsa residuum mediale & eiusdem ordinis.



Sit residuum mediale α β, cui sit commensurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum linea γ δ. dico γ δ esse residuum mediale & eiusdẽ ordinis. Cum enim α β sit residuum mediale, sit ei conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε sunt mediales potentia tantum commensurabiles. Sit autẽ sicut α β ad γ δ, ita β ε ad δ ζ. simili ratione qua in præcedẽti usi sumus, linea α ε erit longitudine & potentia, siue potentia tantum commensurabilis lineæ γ ζ, & linea β ε lineæ δ ζ. ergo per 24 linea γ ζ erit medialis: & linea δ ζ erit medialis, quia est cõmen-



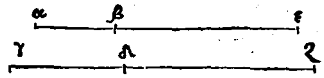
surabilis lineæ mediali βι. similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia tantum commensurabiles: quia habent eandem proportionem inter se, quam lineæ αι, βι, quæ sunt inter se commensurabiles potentia tantum. ergo linea γδ est residuum mediale. dico præterea esse eiusdem ordinis cuius & αβ. Cum enim sit, sicut linea αι ad lineam βι, ita linea γζ ad lineam δζ: sed sicut linea αι ad lineam βι, ita quadratum lineæ αι ad parallelogrammum ex αι, βι per 1.6: sicut autem linea γζ ad lineam δζ, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. ergo sicut quadratum lineæ αι ad parallelogrammũ ex αι, βι, ita quadratum lineæ γζ ad parallelogrammum ex γζ, δζ. permutata ergo proportione sicut quadratum lineæ αι ad quadratum lineæ γζ, ita parallelogrammum ex αι, βι ad parallelogrammũ ex γζ, δζ. Sed quadratum lineæ αι est cõmẽsurabile quadrato lineæ γζ (quia linea αι est commensurabilis lineæ γζ.) ergo & parallelogrammum ex αι, βι erit commensurabile parallelogrammo ex γζ, δζ. ergo si parallelogrammũ ex αι, βι est rationale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit rationale: & tunc utraque linea αβ, γδ erit residuũ mediale primum. Si uero parallelogrammum ex αι, βι erit mediale, etiam parallelogrammũ ex γζ, δζ erit mediale per corollarium 24: et tunc utraque linea αβ, γδ erit residuum mediale secundum. ergo linea γδ erit residuũ mediale eiusdem ordinis. Hoc theorema cõceptũ est uniuersaliter, siue linea sit cõmẽsurabilis longitudine & potentia, siue potentia tantum residuo mediali, esse & ipsam

ipsam residuum mediale, & eiusdem ordinis. Idem dicendum de tribus proximis theorematibus.

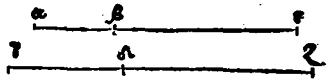
Centesimumquintum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ minori, est & ipsa linea minor.

Sit linea minor α β, cui sit commensurabilis γ δ. dico lineã γ δ esse lineam minorem: fiãt



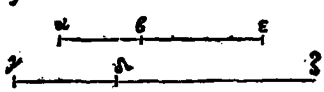
enim eadem quæ in præcedentibus. quoniam lineæ α ε, β ε sunt potentia incommensurabiles, ergo & lineæ γ ζ, δ ζ sunt potentia incommẽsurabiles per 22. 6. & 10 huius. Rursus per 22. 6 sicut quadratum lineæ α ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad quadratũ lineæ δ ζ. cõiuncta ergo proportione, sicut quadrata linearum α ε, β ε ad quadratum lineæ β ε, ita quadrata linearum γ ζ, δ ζ ad quadratum lineæ δ ζ: & permutata proportione sicut quadrata linearũ α ε, β ε ad quadrata linearum γ ζ, δ ζ, ita quadratum lineæ β ε ad quadratum lineæ δ ζ. sed quadratum lineæ β ε est commensurabile quadrato lineæ δ ζ (quia lineæ β ε, δ ζ sunt cõmensurabiles.) ergo & compositũ ex quadratis linearum α ε, β ε erit commensurabile composito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: sed compositũ ex quadratis linearũ α ε, β ε est rationale, ergo & compositum ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ erit rationale. Rursus cũ sit sicut quadratum lineæ α ε ad parallelogrammum ex α ε, β ε, ita quadratum lineæ γ ζ ad parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ. (sicut diximus in proximo theoremate) permutata er-



go proportione ſicut quadratũ lineæ α ε ad quadracũ lineæ γ ζ, ita parallelogrãmum ex α ε, β ε ad parallelogrãmũ ex γ ζ, δ ζ. ſed quadratũ lineæ α ε eſt cõmenſurabile quadrato lineæ γ ζ, quia lineæ α ε, γ ζ ſunt cõmenſurabiles, ergo & parallelogrãmũ ex α ε, β ε erit commenſurabile parallelogrammo ex γ ζ, δ ζ. ſed parallelogrammũ ex α ε, β ε eſt mediale, ergo & parallelogrammum ex γ ζ, δ ζ erit mediale. ergo lineæ γ ζ, δ ζ erunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum rationale, parallelogrãmũ uero ex ipſis mediale. Ergo *linea γ δ erit linea minor.*

Centeſimumſextum Theorema.

Linea commenſurabilis lineæ cum rationali ſuperficie facienti totam medialem, eſt & ipſa linea cũ rationali ſuperficie faciens totam medialem.



Sit linea cum rationali ſuperficie faciens totam medialem α β, cui ſit commẽſurabilis linea γ δ. dico lineã γ δ eſſe cũ rationali ſuperficie facientẽ totam medialem. Sit lineæ α β linea conuenienter iuncta β ε, ergo lineæ α ε, β ε. ſunt potentia incommenſurabiles facientes compoſitum ex quadratis ipſarum mediale, parallelogrammũ uero ex ipſis rationale: fiant omnia quæ in præcedẽtibus. Similiter quoque demonſtrabimus ſicut linea α ε ad lineam β ε, ita lineam γ ζ ad lineam δ ζ: & compoſitũ ex quadratis linearum α ε, β ε eſſe commenſurabile compoſito ex quadratis linearum γ ζ, δ ζ: id uero quod ſit ex α ε, β ε

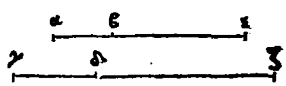
eſſe

esse similiter commensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. quare & similiter lineæ γζ, δζ erunt potentia incommensurabiles facientes ea quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ erit etiam linea cũ rationali superficie faciens totã medialẽ.

Centesimumseptimum Theorema.

Linea commensurabilis lineæ cum mediali superficie facienti totam medialem, commensurabilis est & ipsa cum mediali superficie faciens totam medialem.

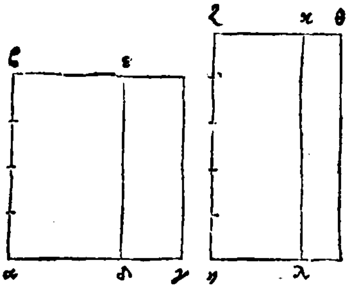
Sit linea cum mediali superficie faciẽs totam medialẽ αβ, cui sit commensurabilis γδ. dico lineam γδ esse etiam lineam cum mediali superficie facientem totam medialẽ. Sit enim lineæ αβ linea cõueniẽter iuncta βι, & fiant cætera, ut in superioribus. ergo lineæ αι, βι sunt potẽtia incommensurabiles facientes compositum ex quadratis ipsarum mediale, id uero quod fit ex ipsis etiã mediale: & compositum ex quadratis incommensurabile ei, quod fit ex ipsis. Sunt autẽ, ut antea demonstratum est lineæ αι, βι commensurabiles lineis γζ, δζ, & compositum ex quadratis ipsorum αι, βι commensurabile composito ex quadratis linearum γζ, δζ: id uero quod fit ex αι, βι cõmensurabile ei, quod fit ex γζ, δζ. ergo & lineæ γζ, δζ sunt potentia incommensurabiles facientes cætera omnia quæ lineæ αι, βι. Ergo linea γδ est cum mediali superficie faciens totam medialem.



Centesimumoctauum Theorema.

Si de superficie rationali detrahatur superficies medialis, linea quæ reliquam ſuperficiem poteſt, eſt alterutra ex duabus irrationalibus, aut reſiduum aut linea minor.

De ſuperficie rationali β γ detrahatur ſuperficies medialis β δ. dico lineam quæ reliquam ſuperficiẽ ε γ poteſt, eſſe alterutram ex duabus irrationalibus, aut reſiduũ aut lineã minorem. Sit enim



linea rationalis ζ η, ſecundum quam æqualis ſuperficiei β γ applicetur ſuperficies rectangula parallelogramma η θ: ſuperficiei uero ε δ æqualis applicetur ſuperficies parallelogrammo η κ. reliquum ergo parallelogrammũ ε γ eſt æquale reliquo parallelogrammo λ θ. Cum igitur ε γ ſit rationale, ipſum uero ε δ ſit mediale, ergo & η θ erit rationale: ipſum uerò η κ mediale. ergo & linea ζ θ erit rationalis longitudine commenſurabilis ipſi ζ η per 21: linea uero ζ κ erit rationalis longitudine incommenſurabilis eidem lineæ ζ η per 23. ergo linea ζ θ erit longitudine incommenſurabilis lineæ ζ κ per 13. ergo lineæ ζ θ ζ κ ſunt rationales potentia tantum commenſurabiles: ergo linea κ θ erit reſiduũ, ipſi uero conuenienter iuncta linea κ ζ: linea autem ζ θ plus poteſt, quàm linea ζ κ, aut quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, aut quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Poſsit prius quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum ſit tota ζ θ longitudine commenſurabilis lineæ rationali ζ η. ergo linea κ θ eſt reſiduum primum.

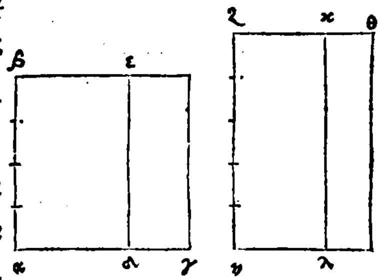
ergo

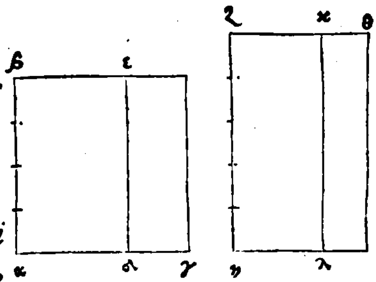
ergo per 91 linea potens parallelogrammum λθ, hoc est ιγ est residuũ. Quòd si linea ζθ plus poßit quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, cum linea ζθ sit commensurabilis longitudine lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum quartum. Ergo *per 94 linea potens superficiem λθ, hoc est γι est linea minor.*

Centesimumnonum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, aliæ duæ irrationales fiunt, aut residuum mediale primum, aut cum rationali superficie faciens totam medialem.

De superficie mediali βγ detrahatur rationalis superficies βδ, dico lineã quæ potest superficiem reliquã ιγ esse alterutram duarum irrationaliũ, uel residuũ mediale primum, uel cum rationali superficie faciẽtem totã medialem. Sit *rationalis linea ζκ, secundũ quam applicentur superficies, ut in proximo dictum est: erit similiter linea ζθ rationalis & longitudine incommensurabilis lineæ ζκ: linea uerò ζκ erit rationalis longitudine commensurabilis eidem ζκ: & lineæ ζθ, ζκ rationales erunt potentia tantum cõmensurabiles. ergo linea κθ erit residuum: illi uerò conuenienter iuncta linea ζκ. Linea autem ζθ plus potest quàm linea ζκ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel quadrato lineæ sibi longitudine incõ-*





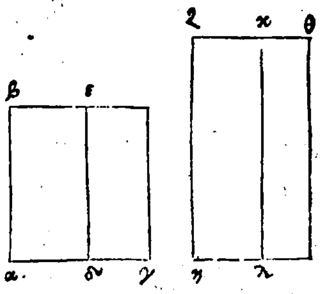
mensurabilis. Et quidem si linea ζθ plus potest quàm linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, cũ linea cõuenienter iuncta ζκ sit longitudine commensurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum secũdum: quare linea quæ superficiem λθ, hoc est εγ potest, est residuũ mediale primũ per 92. Quòd si linea ζθ plus potest quã linea ζκ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum linea conuenienter iuncta sit longitudine commẽsurabilis lineæ rationali ζκ, ergo linea κθ erit residuum quintum: quare linea quæ superficiẽ λθ, hoc est, εγ potest, est cum rationali superficie faciens totam medialem per 95.

Centesimumdecimum Theorema.

Si de superficie mediali detrahatur superficies medialis, quæ sit incõmensurabilis toti, reliquæ duæ fiunt irrationales, aut residuum mediale secundum, aut cum mediali superficie faciens totam medialem.

Sicut in præcedentibus descriptionibus, hîc quoque detrahatur de superficie mediali βγ superficies medialis βδ: quæ βδ sit incommensurabilis toti βγ. dico lineam quæ potest superficiem εγ, esse alterutram duarũ irrationalium, uel residuum mediale secundũ, uel cum mediali superficie facientem totam medialem. Cum enim utraque

superficies

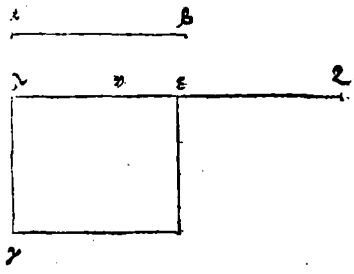


superficies ε γ, ε δ sit medialis, ergo utraque linea ζ θ, ζ κ est rationalis, & rationali ζ η lõgitudine incommensurabilis. Est autẽ superficies β γ, hoc est η θ incommẽsurabilis ipsi β δ, hoc est η κ. ergo lineæ ζ θ, ζ κ sũt incommensurabiles: ergo sunt rationales potentia tantum commensurabiles. ergo linea κ θ erit residuum: ipsi uero conuenienter iuncta, ζ κ. linea autem ζ θ plus potest quàm linea ζ κ, uel quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, uel lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et quidẽ si linea ζ θ plus potest, quàm ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ η, ergo linea κ θ erit residuum tertium. ergo per 93. linea quæ potest superficiem λ θ, hoc est ε γ erit residuum mediale secundũ. Quòd si linea ζ θ plus potest quàm linea ζ κ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ex ζ θ, ζ κ sit longitudine commensurabilis ipsi rationali ζ η, ergo linea κ θ erit residuum sextũ. Ergo per 96 linea quæ superficiem λ θ, hoc est ε γ potest, erit cum mediali superficie faciens totam medialem.

Centesimumundecimum Theorema.

Linea quæ residuum dicitur, non est eadem cum ea quæ dicitur binomium.

Sit residuum α β, dico α β non esse idem cum binomio. Nam si esse potest, est. Sitq; linea rationalis δ γ, secũdum quam



æquale quadrato lineæ α β applicetur parallelogrammum rectangulũ γ ε faciens alterũ latus δ ε. cum linea α β sit residuum, ergo linea δ ε erit residuum primũ per 97. Sit ipsi cõuenienter iuncta ε ζ, ergo lineæ δ ζ, ζ ε sunt rationales potentia tantũ commẽsurabiles, & linea δ ζ plus potest quàm linea ε ζ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & δ ζ, est longitudine cõmensurabilis rationali γ δ. Rursus per positionem linea α β est binomium, ergo linea δ ε est binomium primum per 60. Diuidatur in sua nomina in puncto η: sitq; maius nomẽ δ η, ergo lineæ δ η, η ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles, & linea δ η plus potest quàm linea η ε quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, eademq; linea δ η est longitudine commensurabilis rationali γ δ. Ergo per 12 lineæ δ η, δ ζ sunt longitudine commensurabiles: ergo & reliqua linea η ζ erit longitudine commensurabilis toti δ ζ per 16, aut per corollarium eiusdem. Cum igitur linea δ ζ sit cõmensurabilis lineæ ζ η, sit autem linea δ ζ rationalis, rationalis quoque erit ζ η. Cum autem linea δ ζ sit longitudine commensurabilis lineæ ζ η: sit autem linea δ ζ longitudine incommensurabilis lineæ ε ζ, ergo per 14 lineæ ζ η, ζ ε sunt longitudine incommensurabiles. Sunt autem ambæ rationales, ergo lineæ ζ η, ζ ε sunt rationales potentia tantum commẽsurabiles. ergo linea ε η erit residuũ: sed est rationalis ut modo conclusum est: hoc autem est

impoßibile

impoßibile, eandẽ ſcilicet lineam eſſe rationalem & irrationalem, ergo reſiduum nõ erit idem quod binomiũ.
Linea quæ reſiduũ dicitur, & cæteræ quinq; eam conſequentes irrationales, neque lineæ mediali neque ſibi ipſæ inter ſe ſunt eædem: Nam quadratũ lineæ medialis ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus rationalem lineam longitudine incommẽſurabilem ei, ſecundum quam applicatur per 23. quadratũ uerò reſidui ſecundum rationalem applicatum, facit alterũ latus reſiduum primum per 97. quadratum uerò reſidui medialis primi ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſecũdum per 98. quadratum uerò reſidui medialis ſecundi, facit alterum latus reſiduum tertium per 99. quadratum uerò lineæ minoris, facit alterum latus reſiduum quartum per 100. quadratum uero lineæ cum rationali ſuperficie facientis totam medialem, facit alterum latus reſiduum quintum per 101. quadratum uero lineæ cum mediali ſuperficie facientis totam medialem ſecundum rationalem applicatum, facit alterum latus reſiduum ſextum per 102. Cum igitur dicta latera quæ ſunt latitudines cuiuſque parallelogrammi unicuique quadrato æqualis & ſecundum rationalem applicati differãt, & à primo latere & ipſa inter ſe, (nam à primo differunt, quoniam eſt rationalis linea: inter ſe uero differũt, quoniam ſunt reſidua non eiuſdem ordinis) conſtat ipſas quoq; lineas irrationales inter ſe differentes eſſe. Et quoniam demonſtratum eſt reſiduum non eſſe idem quod binomiũ: quadrata autem reſidui & quinque linearum irrationa-

lium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciunt altera latera ex residuis eiusdem ordinis, cuius sunt & residua, quorũ quadrata applicantur rationali: similiter & quadrata binomij & quinque linearum irrationalium illud consequentium secundum rationalem applicata, faciũt altera latera ex binomijs eiusdem ordinis, cuius sunt & binomia, quorũ quadrata applicantur rationali. ergo lineæ irrationales quæ consequuntur binomium, & quæ consequũtur residuũ, sunt inter se differentes. Quare dictæ lineæ omnes irrationales sunt numero 13.

1. Medialis.
2. Binomium.
3. Bimediale primum.
4. Bimediale secundum.
5. Maior.
6. Potens rationale & mediale
7. Potens duo medialia.
8. Residuum.
9. Residuum mediale primum.
10. Residuũ mediale secundum.
11. Minor.
12. Faciens cum rationali superficie totam medialem.
13. Faciens cum mediali superficie totam medialem.

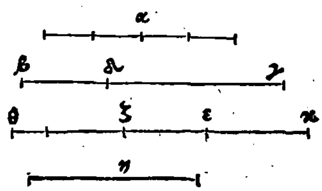
Centesimumduodecimum Theorema.

Quadratum, lineę rationalis secundum binomium applicatum facit alterum latus residuũ, cuius nomina sunt comme͂surabilia binomij nominibus, & in eadem proportione: præterea id quod fit residuũ, eunde͂ ordinem retinet quem binomium.

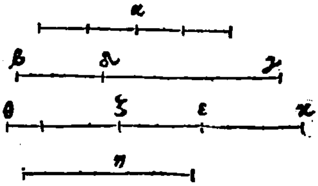
Sit linea rationalis α, binominm βγ, cuius maius nomen sit γδ: & quadrato lineæ α sit æquale parallelogrammum

ex

ex β γ, ι ζ. dico lineam ι ζ esse residuũ, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius binomij β γ, quæ nomina sunt γ δ, δ ϛ: & in eadem proportione præterea linea ι ζ eundẽ ordinem & locũ tenet inter residua, quẽ binomium ϛ γ retinet inter binomia. Sit rursus quadrato lineæ α æquale parallelogrammum ex ϛ δ, κ. Cum igitur parallelogrammum ex ϛ γ, ι ζ sit



æquale parallelogrãmo ex ϛ δ, κ, cum utrunq; sit æquale quadrato lineæ α, est igitur sicut linea γ β ad lineam ϛ δ, ita linea κ ad lineam ι ζ per 14. 6. sed γ ϛ est maior quàm β δ, ergo & κ erit maior quàm ι ζ. Sit linea ι θ æqualis lineæ κ. est ergo sicut γ β ad γ δ, ita θ ι ad ι ζ per 7. 5. ergo disiuncta proportione per 17. 5. sicut γ δ ad β δ, ita θ ζ ad ζ ι. fiat sicut θ ζ ad ζ ι, ita ζ κ ad ι κ, (quod quẽadmodum fiat dicemus ad finem demonstrationis.) ergo per 12. 5. sicut linea ζ κ ad lineam ι κ, ita tota linea θ κ ad totã ζ κ. Sed sicut ζ κ ad ι κ, ita est γ δ ad δ β: (quia ζ κ est ad ι κ sicut θ ζ ad ζ ι, & θ ζ ad ζ ι est sicut γ δ ad δ β.) ergo sicut linea θ κ ad ζ κ, ita γ δ ad δ β. sed quadratum lineæ γ δ est commensurabile quadrato lineæ δ β, ergo & quadratum lineæ θ κ quadrato lineæ ζ κ erit commẽsurabile per 22. 6 & 10 huius. Sed tres lineæ θ κ, ζ κ, ι κ sunt proportionales in continua proportione: (ut modo dictum est.) ergo per secundum corollarium 20. 6 quadratum lineæ θ κ erit ad quadratũ lineæ ζ κ, sicut linea θ κ ad lineam ι κ. ergo linea θ κ erit longitudine commensurabilis lineæ ι κ: quare per 16 linea θ ι erit longitudi-

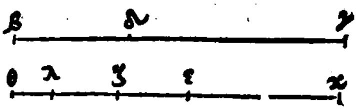


ne commēſurabilis lineæ ε κ. Et *quoniam quadratū lineæ α eſt æquale parallelogrāmo ex θ ε, β δ, & quadratum lineæ α eſt rationale, ergo & parallelogrammū ex θ ε, β δ erit rationale. ergo per 21 linea θ ε erit rationalis & longitudine cōmenſarabilis lineæ β δ: quare & linea ε κ, quæ eſt ipſi θ ε longitudine commēſurabilis, erit etiam rationalis & longitudine commēſurabilis ipſi β δ.* Cum *igitur ſit ſicut linea γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ε κ: (quia ſupra dictum eſt, ſicut γ δ ad δ β, ita θ ζ ad ζ ε, & ſicut θ ζ ad ζ ε, ita ζ κ, ad ε κ,) lineæ uero γ δ, δ β ſint potentia tantum commenſurabiles, ergo & lineæ ζ κ, ε κ erunt potentia tantum commenſurabiles.* Et *cum ſit ſicut γ δ ad δ β, ita ζ κ ad ε κ, ergo cōuerſa proportione ſicut δ β ad γ δ, ita ε κ ad ζ κ: & permutata proportione ſicut δ β ad ε κ, ita γ δ ad ζ κ: ſed lineæ δ β, ε κ ſunt longitudine commenſurabiles, (ut modo probatum eſt) ergo & lineæ γ δ, ζ κ ſunt longitudine commēſurabiles: ſed linea γ δ, eſt rationalis, ergo & linea ζ κ erit etiam rationalis: ergo lineæ ζ κ, ε κ ſunt rationales potētia tantam commēſurabiles. ergo linea ζ ε erit reſiduum, cuius nomina ſunt commenſurabilia nominibus binomij & in eadem proportione. dico præterea illud reſiduum eſſe eiuſdem ordinis cuius & binomiū.* Nam *linea γ δ plus poteſt, quàm linea β δ aut quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut lineæ incommenſurabilis: & quidem ſi linea γ δ plus poteſt, quàm β δ quadrato lineæ ſibi longitudine commēſurabilis, ſimiliter & lineæ*

ζ κ

ζκ plus poterit quàm linea ικ quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine per 15. Et quidē si linea γδ est longitudine commēsurabilis lineæ rationali, cum modo probatum sit lineas γδ, ζκ esse longitudine commensurabiles, ergo per 12 etiam linea ζκ erit longitudine commensurabilis lineæ rationali: tunc igitur linea βγ erit binomium primum, similiter & linea ζι erit residuum primū. Quòd si linea βδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, similiter & linea ικ erit eidē cōmensurabilis: tunc ergo linea βγ erit binomium secundum, & linea ζι residuum secundum. Quòd si neutra ex γδ, δβ fuerit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium tertium, & linea ζι residuum tertium. Quòd si linea γδ plus potest quàm linea βδ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, similiter & linea ζκ plus poterit quàm ικ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis per 15. Et quidem si linea γδ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali, etiam linea ζκ erit eidem commensurabilis, tunc erit linea βγ binomium quartum, & linea ζι residuum quartum. Quòd si linea βδ fuerit rationali commensurabilis, similiter & linea ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium quintū: & linea ζι residuū quintū. Quòd si neutra ex γδ, βδ erit rationali commensurabilis, similiter neutra ex ζκ, ικ erit eidem commensurabilis, tunc linea βγ erit binomium sextum, & linea ζι residuum sextum. Ergo linea ζι erit residuum, cuius nomina, nempe ζκ, ικ sunt com-

mensurabilia nominibus binomij ϐγ, nominibus inquã γδ, δβ: & sunt in eadem proportione, & habent eundem ordinem & locum inter residua quem binomium inter binomia. Nunc illud *dicamus quomodo fiat sicut linea θζ ad lineam ζι, ita linea ζκ ad lineam ικ. linea γδ est maior linea βδ. ergo*

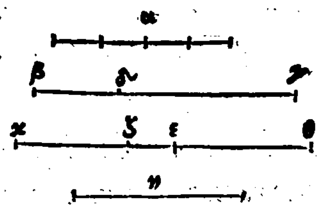


& linea θζ erit maior linea ζι. Detrahatur *de linea θζ æqualis lineæ ζι, quæ sit ζλ per 3.1. Et reliqua sit θλ. ergo linea θλ erit minor quam linea θζ, quia θζ est æqualis lineis θλ, λζ. fiat sicut θλ, ad θζ, ita ζι ad ζκ per 12.6: ergo per conuersam proportionem sicut θζ ad θλ, ita ζκ ad ζι.* Ergo *per euersam proportionem sicut linea θζ ad λζ, hoc est ad ei æqualem ζι, ita linea ζκ ad ικ.*

Centesimum decimumtertium Theorema.

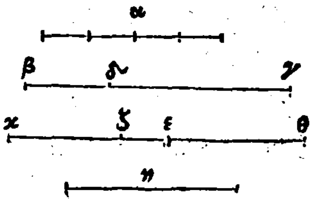
Quadratum lineæ rationalis secundum residuum applicatum, facit alterum latus binomium, cuius nomina sunt commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione: præterea id quod fit binomium est eiusdẽ ordinis, cuius & residuum.

Sit linea rationalis α, residuũ uerò βδ: & quadrato lineæ α sit æquale id quod fit ex βδ, κθ: itaque quadratum lineæ rationalis α secundũ ϐδ residuũ



applicatum, facit alterum latus κθ. dico lineam κθ esse binomium cuius nomina sunt commensurabilia nominibus ipsius βδ & in eadem proportione: & lineã κθ esse

esse eiusdem ordinis binomium, cuius & ς λ est residuũ. Sit lineæ ς λ linea cõueniẽter iuncta λ γ, ergo lineæ ς γ, λ γ sunt rationales potentia tantum commensurabiles. & quadrato lineæ α æquale sit parallelogrammum ex β γ, κ: sed quadratum lineæ α est rationale, ergo & parallelogrammum ex β γ, κ est etiam rationale: ergo & linea κ erit rationalis longitudine commensurabilis lineæ ς γ. Cum igitur parallelogrammum ex β γ, κ sit æquale ei quod fit ex β λ, χ θ, ergo sicut ς γ ad ς λ, ita χ θ ad κ: sed ς γ est maior quam β λ, ergo & linea χ θ erit maior quàm κ. Sit lineæ κ æqualis linea χ ι, ergo linea χ ι erit rationalis longitudine commẽsurabilis linea β γ sicut & linea κ: & cum sit sicut β γ ad ς λ, ita χ θ ad χ ι. euersa ergo proportione sicut ς γ ad λ γ, ita χ θ ad ι θ: fiat sicut χ θ ad ι θ, ita linea ζ θ ad ι ζ, (quod quemadmodum fiat, dicemus ad finẽ demonstrationis.) ergo erit reliqua χ ζ ad reliquam ζ θ, sicut tota χ θ ad totã θ ι per 19.5, hoc est sicut ς γ ad γ λ: sed lineæ β γ, γ λ sunt potentia tantũ commensurabiles, ergo & lineæ χ ζ, ζ θ erunt potentia tantum commẽsurabiles. Et quoniam est sicut χ θ ad θ ι, ita χ ζ ad ζ θ, sed & sicut χ θ ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι, ergo sicut χ ζ ad ζ θ, ita ζ θ ad ζ ι: quare sicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. ergo sicut χ ζ ad ζ ι, ita quadratum lineæ χ ζ ad quadratum lineæ ζ θ: sed hæc quadrata sunt commẽsurabilia, quia lineæ χ ζ, ζ θ sunt potentia commensurabiles. ergo lineæ χ ζ, ζ ι sunt longitudine commensurabiles. Quare per secundã partem 16. lineæ χ ι, ι ζ sunt longitudine commensurabiles: quare per eandem 16. & lineæ χ ζ, χ ι sunt longitu-

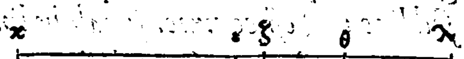


*dine commensurabiles: sed linea κζ est rationalis & longitudine commensurabilis lineæ βγ.ergo & linea κζ erit rationalis & longitudine commensurabilis eidem βγ.*Et *quoniã est sicut linea βγ ad γδ,ita κζ ad ζθ,permutata ergo proportione sicut βγ ad κζ,ita γδ ad ζθ:sed linea βγ est longitudine commẽsurabilis lineæ κζ.ergo & linea γδ erit longitudine cõmẽsurabilis lineæ ζθ:sed linea γδ est rationalis,ergo & linea ζθ erit rationalis:sed & lineæ βγ,γδ sunt potentia tantum commensurabiles:ergo & lineæ κζ,ζθ sunt rationales potentia tantum commensurabiles.*Ergo *linea κθ erit binomium, cuius nomina sunt commẽsurabilia nominibus residui,& in eadem proportione.dico præterea illud binomium esse eiusdem ordinis cuius,& residuum βδ.*Nam *si βγ plus potest quàm γδ quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis,etiã linea κζ poterit plus quàm ζθ quadrato lineæ sibi longitudine cõmensurabilis per* 15.Q*uòd si linea βγ fuerit longitudine commensurabilis lineæ rationali,etiam linea κζ erit eidem rationali commẽsurabilis longitudine per* 12:*quia lineæ βγ,κζ sunt longitudine commensurabiles:& sic erit linea βδ residuum primum, & linea κθ similiter binomium primum.*Q*uòd si γδ fuerit longitudine commensurabilis rationali,etiam linea ζθ erit eidem longitudine commensurabilis:& sic erit linea βδ residuum secundum, & linea κθ binomiũ secundũ.* Q*uòd si neutra ex βγ,γδ fuerit rationali commensurabilis longitudine*

tudine

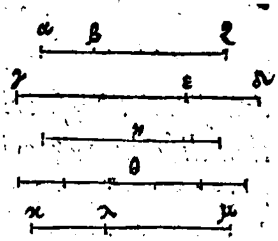
tudine, neutra etiam ex κ ζ, ζ θ erit eidem commensurabilis: & sic erit linea β δ residuum tertium, & linea κ θ binomium tertium. Si uero linea β γ plus potest quàm linea γ δ quadrato lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis, etiam linea κ ζ poterit plus quàm linea ζ θ quadrato lineæ sibi longitudine incõmensurabilis per 15. Et quidem si linea β γ fuerit longitudine commensurabilis rationali, etiam κ ζ erit eidem commẽsurabilis longitudine: & tunc linea β δ erit residuum quartũ, & linea κ θ binomium quartũ. Quòd si γ δ fuerit rationali commẽsurabilis longitudine, etiam ζ θ erit eidem commensurabilis longitudine: & tunc erit linea β δ residuum quintum, & linea κ θ binomiũ quintum. Quòd si neutra ex β γ, γ δ fuerit longitudine commẽsurabilis rationali, similiter neutra ex κ ζ, ζ θ erit eidem cõmensurabilis longitudine: & sic linea β δ erit residuũ sextum, & linea κ θ binomium sextum. Ergo κ θ erit binomium, cuius nomina κ ζ, ζ θ sunt commẽsurabilia residui β δ nominibus β γ, γ δ, & in eadem proportione: & linea κ θ retinet inter binomia eundem ordinem quem β δ inter residua.

Nunc dicamus quomodo fiat sicut linea κ θ ad lineam θ ι, ita linea θ ζ ad lineã ζ ι. Lineæ κ θ addatur in continuum & directum linea æqualis ipsi θ ι: & sit tota linea κ λ: & per 10. 6 diuidatur linea θ ι sicut tota linea κ λ diuisa est in puncto θ: sitq; linea θ ι diuisa in puncto ζ. Erit sicut κ θ ad θ λ, hoc est ad θ ι, ita θ ζ ad ζ ι &c.



Centesimumdecimumquartum Theorema.

Si parallelogrammum contineatur ex residuo & binomio, cuius nomina sint commensurabilia nominibus residui & in eadem proportione, linea quæ illam superficiem potest, est rationalis.



Contineatur parallelogrammum ex residuo α β & binomio γ δ, cuius binomij maius nomẽ sit γ ε, minus uero ε δ: & sint commensurabilia nominibus residui α β, quæ sint α ζ, ζ β, & in eadem proportione. sitq́; potens illud parallelogrammum linea, η. dico lineam illam η, esse rationalem. Proponatur rationalis θ, cuius quadrato æquale secundum lineam γ δ applicetur parallelogrammum faciens alterum latus κ λ. ergo linea κ λ est residuum per 112: cuius nomina sint κ μ, μ λ quæ sunt commensurabilia binomij nominibus γ ε, ε δ, & in eadem proportione per 112. Sed per positionem lineæ γ ε, ε δ sunt commensurabiles lineis α ζ, ζ β, & sunt in eadẽ proportione: erit ergo sicut α ζ ad ζ β, ita κ μ ad μ λ. ergo permutata proportione sicut α ζ ad κ μ, ita ζ β ad μ λ. ergo & reliqua α β ad reliquam κ λ erit sicut α ζ ad κ μ. sed linea α ζ est commensurabilis lineæ κ μ, quia utraque ex α ζ, κ μ est cõmensurabilis lineæ γ ε: ergo & linea α β erit commensurabilis lineæ γ λ. est autem sicut linea α β ad lineam κ λ, ita parallelogrammum ex γ δ, α β ad parallelogrammum ex γ δ, κ λ per 1.6. ergo parallelogrammum ex γ δ, α β est commẽsurabile parallelogrammo ex γ δ, κ λ: sed parallelogrammum ex γ δ, κ λ est æquale quadrato lineæ θ, ergo parallelogrammũ ex γ δ, α β est

commen-

commensurabile quadrato lineæ θ: sed parallelogrammum ex γ δ, α β est æquale quadrato lineæ κ, ergo quadratum lineæ θ erit commensurabile quadrato lineæ κ. sed quadratum lineæ θ est rationale, ergo & quadratū lineæ κ erit rationale. ergo & linea κ erit rationalis: & potest parallelogrammum ex α β, γ δ. Ergo si parallelogrammum contineatur &c.

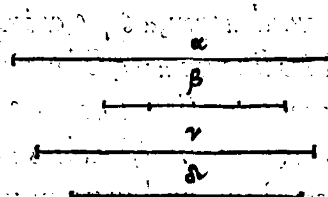
Corollarium.

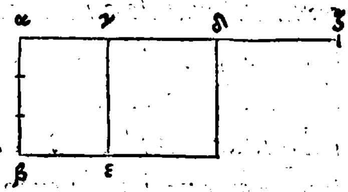
Ex *hoc manifestū est, posse rationale parallelogrammum contineri ex lineis irrationalibus.*

Centesimumdecimumquintum Theorema.

Ex linea mediali nascuntur lineæ irrationales innumerabiles, quarū nulla ulli ante dictorū eadē sit.

Sit linea medialis α γ: dico ex linea α γ innumerabiles gigni irrationales, quarū nulla ulli ex antedictis irrationalibus eadē sit. Ducatur *super extremitate lineæ α γ perpendicularis α ε, quæ sit rationalis: & cōpleatur parallelogrammū ε γ, ergo illud parallelogrāmū ε γ erit irrationale per ea quæ dicta sunt in fine demōstrationis* 38*: linea ergo quæ illud potest, erit similiter irrationalis. Sit autē illa linea γ δ, quæ nulli ex ante dictis irrationalibus erit eadē: quia quadratū huius γ δ secundū lineā rationalē puta α ε applicatū, facit alterum latus lineā medialem nempe α γ: nullius uero ex antedictis quadratum secundum rationalem applicatum, facit alterum latus lineam medialem.* Rursus

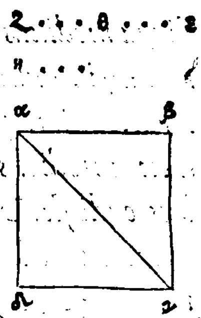




compleatur parallelogrammum ι δ, erit similiter illud parallelogrammum ι δ irrarionale, & linea quæ illud potest etiā irrationalis, quæ sit δ ζ: hæc similiter nulli ex antedictis irrationalibus eadem esse potest. Nullius enim ex antedictis irrationalibus quadratum secundum rationalem applicatum facit alterum latus lineā γ δ. Ergo ex linea mediali &c.

Centesimumdecimumsextum Theorema.

Propositum nobis esto, demonstrare in figuris quadratis diametrum esse longitudine incommensurabilem ipsi lateri.



Sit quadratum, α β γ δ, cuius diameter α γ, dico lineam α γ esse longitudine incommensurabilem lineæ α β. si enim possit fieri, sit commēsurabilis: dico tunc illud consequi eundem numerum esse parem & imparem. Manifestum est quadratum lineæ α γ esse duplum ad quadratū lineæ α β per 47. 1. Et quoniam linea α γ est longitudine commensurabilis lineæ α β per hypothesin, ergo habebunt proportionem inter se, quam numerus ad numerū per 5 huius. Habeat linea α γ ad lineā α β proportionē, quam numerus ι ζ, ad numerum ι; sintq; illi numeri minimi omnium habentium eandem proportionē: nō igitur numerus ι ζ erit unitas. Nam si ι ζ esset unitas, cum habeat proportionem ad ι, sicut linea α γ ad lineam α β,

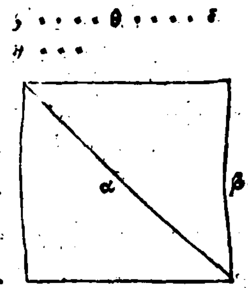
maior

maior autem sit αγ *quàm* αβ: *maior ergo* εζ *unitas quàm numerus* κ, *quod est impoßibile. ergo* εζ *non est unitas, est ergo numerus.* Et *quoniam est sicut quadratũ lineæ* αγ *ad quadratum lineæ* αβ, *ita quadratus numerus productus ex* εζ *ad quadratum numerum productum ex* κ: *nam utrobique est proportio suorum laterum duplicata per corollarium* 20.6.& 11.8: *proportio autem lineæ* αγ *ad lineam* αβ *duplicata, est æqualis proportioni numeri* εζ, *ad numerum* κ *duplicatæ, quia est sicut* αγ *ad* αβ, *ita numerus* εζ *ad numerum* κ: *quadratum uero linea* αγ *est duplum ad quadratũ lineæ* αβ, *ergo & quadratus productus ex numero* εζ *erit duplus ad numerum quadratum productum ex* κ. *ergo numerus quadratus ex* εζ *est par: quare & ipse* εζ *erit etiam par: nam si* εζ *esset impar, etiã quadratus ex ipso* εζ *esset impar per* 23.9, *aut per* 29.9. Secetur εζ *æqualiter & bifariam ubi est* θ: *quoniam numeri* εζ, κ *sunt minimi suæ proportionis, sunt inter se primi per* 24.7: *& est* εζ *par, ergo numerus* κ *est impar.* Nam *si* κ *esset par, binarius numeraret utrunq;* εζ, κ: *(nam omnis numerus par habet partem dimidiam per definitionem) sed illi numeri* εζ, κ *sunt inter se primi: est ergo impoßibile eos binario aut alio numero quàm unitate numerari: ergo numerus* κ *est impar.* Et *quoniam numerus* εζ *est duplus ad* εθ, *ergo numerus quadratus ex* εζ *est quadruplus ad numerum quadratum ex* εθ. *Est autem numerus quadratus ex* εζ *duplus ad numerum quadratum ex* κ, *ergo numerus quadratus ex* κ, *est duplus ad numerum quadratum ex* εθ. *ergo numerus qua-*

dratus ex η est par, ergo & per ea quæ modo dicta sunt, ipse numerus η est par: sed probatum est eum esse imparem, quod est impossibile, non igitur linea αγ erit longitudine commensurabilis lineæ αβ: ergo erit longitudine incommensurabilis.

Aliter.

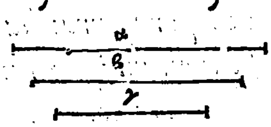
Alia ratione demonstremus diametrum esse longitudine incommẽsurabilem ipsi lateri: si negetur, sit diameter α, latus uero sit β: fiátq; rursus sicut α ad β, ita numerus εζ ad numerum η, & sint minimi suæ proportionis: ergo sunt inter se primi. dico primo numerum η non esse unitatem: nam si possibile est, sit unitas. Et quoniam est quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, sicut quadratus numerus ex εζ ad quadratum numerum ex η (ut dictum est in præcedẽti demonstratione.) sed quadratum lineæ α est duplum ad quadratum lineæ β, ergo numerus quadratus ex εζ ad numerum quadratum ex η, est duplus: sed per te numerus η est unitas, ergo numerus quadratus ex εζ est binarius, quod est impossibile: nõ ergo η erit unitas, ergo erit numerus. Et quoniam est sicut quadratum lineæ α ad quadratum lineæ β, ita quadratus numerus ex εζ ad quadratum numerũ ex η, ergo numerus quadratus ex εζ erit duplus ad numerum quadratum ex η: quare numerus quadratus ex η numerabit numerum quadratum ex εζ: ergo per 14, 8 numerus η, numerabit numerum εζ: sed etiã numerat seipsum, ergo numerus η nu-

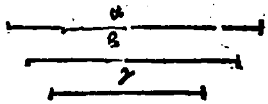


merabit numeros κ, ι ζ: cũ tamen ſint inter ſe primi, quod eſt impoſsibile. ergo linea α non erit longitudine cõmenſurabilis lineæ β: ergo erit eidem incommenſurabilis.

H*inc animaduerti poſſe puto, neutram harum demõſtrationũ eſſe* Theonis, *ſed nec theorema ipſum eſſe* Euclidis: *nam & tractatio tota demonſtrandi habet quod refelli poſsit: nec refert eam dilıgẽtiam, qua in cæteris uſum fuiſſe* Theonẽ *ex ipſo uidere poſſumus.* Et *theorema ipſum uidetur non ſuo loco poſitum eſſe: debuit enim præcedere tractatũ linearum irrationaliũ.* Q*uanuis enim diameter ſit longitudine incommenſurabilis ipſi lateri, eſt tamen eidem commẽſurabilis potentia. ergo ſi latus ipſum aut diametrum poſueris eſſe lineam rationalem, neceſſario ſequitur & alterum, nempe latus ipſum aut diametrum eſſe rationalem, per definitionem linearum rationalium.* Huius *autem theorematis multo facillimã & certiſsimam demonſtrationem legere licet in eo libello, quem ſupra memorauimus* Ariſtotelis *περὶ ἀτόμων γραμμῶν.* Illud *quoque quod ſequitur, addititiũ eſſe nemo negauerit, qui intellexerit poſteriorem ipſius additionis partem pertinere ad libros conſequentes, perſcriptos de ſolidis: quia tamen & uerũ eſt quod dicitur, & continet rerum ipſarum intelligentiam, prætermittendum nobis uiſum non eſt.*

R*epertis lineis rectis longitudine inter ſe incommenſurabilibus, ut lineis α, β, reperiri poſſunt & aliæ quamplurimæ magnitudines ex binis dimẽſionibus conſtantes, quales ſunt plana ipſa ſiue ſuperficies, quæ*



sint inter se incommensurabiles.


Nam si inter lineas α, β sumatur media linea proportionalis γ, per 13.6, erit sicut linea α ad lineam β, ita similis species figuræ descriptæ à linea α ad similem superficiem figuræ descriptæ à linea γ: similis, inquã, species ad similem speciem similiter descriptam, per secũdum corollarium 20 theorematis libri sexti, hoc est, siue illæ sint quadratæ, (quæ semper sunt inter se similes) siue fuerint aliæ quæpiam species rectilineæ similes, siue circuli circa diametros α, γ. Nam circuli habent eandem proportionem inter se, quam quadrata suarum diametrorum per 2.12. ergo per secundam partem decimi theorematis huius libri, similis species figuræ descriptæ à linea α, erit incommensurabilis simili speciei similiter descriptæ à linea γ. Reperiuntur ergo hoc modo superficies inter se incommensurabiles. Simili ratione reperiuntur figuræ commensurabiles, si posueris lineas α, β esse inter se longitudine commensurabiles. Cum hæc ita sint, nunc demonstremus etiam in ipsis solidis esse quædam inter se commensurabilia, & quædam incommensurabilia. Nam si ex singulis quadratis linearum α, β, uel aliis figuris rectilineis, quæ sint illis quadratis æquales, erexerimus solida singula æquali altitudine, siue sint illa solida ex superficiebus æquidistantibus composita, siue pyramides, siue corpora serratilia, illa solida sic erecta, erunt inter se, sicut etiam ipsorum bases inter se, per 32.11, & per 5 & 6.12. De corporibus tamen serratilibus nullum est tale theorema. Et quidem si bases solidorum fuerint inter

ter

ter ſe commenſurabiles, ſolida quoque erunt inter ſe cõmenſurabilia: quòd ſi baſes fuerint incommenſurabiles, ſolida quoque erunt incommẽſurabilia, per 10 *huius libri decimi. At ſi fuerint circuli duo α, ϵ, & ſuper ſingulos erecti coni ſiue cylindri, eadem altitudine erunt ſimiliter inter ſe coni, & cylindri inter ſe, ſicut ipſi circuli, qui ſunt eorum baſes per* 11. 12. *Et quidem ſi circuli fuerint inter ſe commẽſurabiles, ſimiliter ipſi coni inter ſe, & cylindri inter ſe erunt cõmenſurabiles. Quòd ſi fuerint circuli incommenſurabiles, ſimiliter & coni inter ſe, & cylindri inter ſe erunt incõmenſurabiles, per* 10. *huius. Vnde conſtat, non in ſolis lineis & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem aut incommẽſurabilitatem, ſed in ſolidis quoque eaſdem reperiri.*

P. MONTAVREI CARMEN.

Hîc formas iam uictor ouans, normámq; repono.
Hîc ego ſeceſſus uoti damnatus adibo
Phœbe tuos, duce te ſaltus emenſus opacos:
Saxáque peruia nũc multis, prius hoſpita paucis
Exæquata meo quæ conceſſere labori.
Mox, tua dũ magno concuſſus numine mentem
Thure uaporabit purus delubra ſacerdos,
Et ſacris operatus erit Bellaïus aris,
Ipſe tua hoc iubeas monimentum dedicet arce.
Nam per nos tentare, nefas, ſine uate profanos.
Comperto ut ſpatium quadrata æquale duobus
Redderet ex ternis, cuneo quæ ſubdita recto

Linea, Pythagoras Samius lectissima centum
Terga boum imposuit, uictor ceu splēdidus, aris
Pieridum, magnis sibi parua rependere uisus.
Tanto illi potior multis sapientia nummis.
Ipse quoque imparibus donis imitatus eosdem,
Sit mihi fas, animos, at non ita dissimili in re,
Parua quidē illa tibi, sed quę mihi maxima, soluā
Munera. Diis quando pietas gratissima merces,
Me uotiua pium testabitur usque tabella.
Nostra tibi è multis cantabit pagina paucas
O Phœbi genus, inculto Sapientia laudes
Carmine, quóq; modo geminas res miscuit usus,
Et Sophiæ cōiunctus amor noua nomina duxit,
Cuius ut exemplo simul & sermone fruamur.
Nanque homines seclis quondam senioribus usi,
Qui studiis animos & tempora longa dederunt,
Naturæ in rebus, sapientum nomen adepti.
Quæ cum Pythagoræ ratio manasset in æuum,
Non tulit inuidiam senior. Nam forte Leonti
Cui regnata Phliuns, quondam cōgressus, & ore
Dum reserat magno naturæ arcana parentis,
Admiranda dedit diuini signa uigoris,
Ingenio neque uisa minor facundia summo.
Quærentíque uiro, quánam confideret arte,
Ille quidem negat esse sibi quicquam ullius artis.
Sed studiis æterna tuis Sapientia duci,
Hinc sibi philosophi nomen finxisse nouum se.
Attonitus uocis nouitate, rogat quid in hac re
Poneret, an reliquos inter discrimen & istos.

Nec minimum discrimē, ait, quod ut ipse doceri
Me referente queas, in imagine cuncta notabo.
Nónne uides quātis celebrentur Olympia ludis?
Quàm multis cuiusque modi mercatus abundet
Cœtibus ille frequēs glomerātibus? huic ego uitam
Persimilē esse hominū dicam. Nam corporis illic
Pluribus ut uires, urióque exercita motu
Fortia mēbra solēt celebres parere inde coronas,
Tenuia gloriolæ pereuntis pabula: quæstus
Excitat hos, aliena ut emant, aut ut sua uendant.
Quos præter genus illud inest, lōge anteferēdum
Nobilitate aliis, laudem captantibus & rem:
Nec quoquā minus ingenuū, qui nec sibi plaudi
Fronde coronatis optent, neq; crescere nummos.
Hoc tantum rerum quid ab unoquoq; geratur,
Et quo quidque modo, cura studióque sagaci
Lustrantes recolunt, & ab omni parte uorantes,
Intentis iucunda oculis spectacula quærunt.
Haud aliter quàm qui mercatum aliunde profecti,
Nos etiam ex aliis alias peruenimus oras:
Terrarúmque solum exilio sortimur habendum.
Hic alios quæstus, popularis gloria famæ
Sunt quos uana tenet multi: plerisque uoluptas
Imperat, in multis morbi non simplicis est uis.
Sed quid ago? innumerósne parem enumerare furores?
Perrarum genus illorum, qui maximus esse
Debebat numerus, rebus constanter omissis,
Posthabitísque aliis, quos recti cura sequendi
Ceperit, & ueri dederit simulacra tueri.

Cæleſtes animæ, quas incoluere beatas
Suſpiciunt ſine fine domos, & abeſſe querentes,
Quod reliquũ eſt, ĩhiãt animis, & mẽte morãtur.
Nec terras meminere procul ſpectare iacentes,
Hi tales, ſtudio quibus eſt ſapientia, ſunto
Philoſophi, & meritũ me iudice nomen habẽto.
Addidit, utque illic hominum liberrima ſors eſt,
Qui ſpectant, rerúmque aliis cõmercia cedunt,
Sic ſtudiis cunctis, animos quæ plurima uerſant,
Naturæ indagare uias atque abdita præſtat.
Sed neq; Pythagoras tanto modò nobilis author
Nomine, quin rebus multo magis amplificatis
Floruit: atque animos cultu molliuit agreſtes,
Magna prius per quẽ ter maxima Græcia creuit.
Hæc mihi dictabat, uacua dum feſſus in umbra
Rure ſuburbano inſtantes leuat arte ruinas
Labentis patriæ, & curarum Tullius æſtum,
Purus & ipſe fluens Graiorum fontibus hauſtis
Tullius, in Latium peregrinas doctus Athenas
Ferre, ſuóſque nouis opibus ditare Quirites.
Materiẽ ille quidẽ, numeros ſed Phœbus & artẽ
Sufficit, ulla modo noſtri ſi carminis eſt ars.

FINIS.